Werk

Titel: Hoehere Arithmetik
Jahr: 1863
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN23599524X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN23599524X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=23599524X

LOG Id: LOG_0056
LOG Titel: Zur Theorie der complexen Zahlen
LOG Typ: chapter

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235957348
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235957348
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235957348

Terms and Conditions

Contact

ZUR THEORIE DER COMPLEXEN ZAHLEN.

[I.]

NEUE THEORIE DER ZERLEGUNG DER CUBEN.

I. Wir nehmen an, es gebe eine Auflösung der Gleichung $x^3+y^3+z^3=0$, nemlich $x=a$, $y=b$, $z=c$, wo a, b, c keinen gemeinschaftlichen Divisor haben, folglich auch unter sich Primzahlen sind. Wir setzen

$$\begin{aligned} b+c &= \alpha \\ c+a &= \beta \\ a+b &= \gamma \end{aligned}$$

wo nothwendig auch α, β, γ unter sich Primzahlen sein werden. Hätten nemlich α und β einen gemeinschaftlichen Divisor, so würde dieser auch a^3 und b^3 messen, es müssten daher auch a und b einen gemeinschaftlichen Divisor haben.

Wir werden nun haben

$$(\beta+\gamma-\alpha)^3+(\gamma+\alpha-\beta)^3+(\alpha+\beta-\gamma)^3=0$$

allein es ist identisch

$$(\beta+\gamma-\alpha)^3+(\gamma+\alpha-\beta)^3+(\alpha+\beta-\gamma)^3=(\alpha+\beta+\gamma)^3-24\alpha\beta\gamma$$

Es wird folglich

$$(\alpha+\beta+\gamma)^3=24\alpha\beta\gamma$$

Sind α, β, γ reelle Zahlen, so wird $\alpha+\beta+\gamma$ durch 3 theilbar sein, also $(\alpha+\beta+\gamma)^3$ durch 27, folglich $\alpha\beta\gamma$ durch 9. Es muss daher eine der Zahlen α, β, γ z. B. γ durch 9 theilbar sein, also c^3 ebenfalls, folglich c durch 3.

Sind hingegen α, β, γ imaginäre Zahlen, so schliessen wir, dass $\alpha+\beta+\gamma$ durch $1-\varepsilon$, folglich $24\alpha\beta\gamma$ durch $(1-\varepsilon)^3$, mithin $\alpha\beta\gamma$ durch $1-\varepsilon$ theilbar sein müsse. Es ist also eine der Zahlen α, β, γ durch $1-\varepsilon$ theilbar und folglich auch eine der Zahlen a, b, c.

II. Wir haben allgemein die identische Gleichung

$$\begin{aligned}(p+q+r)^3+(p+q\varepsilon+r\varepsilon\varepsilon)^3+(p+q\varepsilon\varepsilon+r\varepsilon)^3 \\ = 27pqr+3(p+q+r)(p+q\varepsilon+r\varepsilon\varepsilon)(p+q\varepsilon\varepsilon+r\varepsilon)\end{aligned}$$

Ist folglich $p+q+r=0$, so wird

$$(p+q\varepsilon+r\varepsilon\varepsilon)^3+(p+q\varepsilon\varepsilon+r\varepsilon)^3-27pqr=0$$

Sind hier p, q, r selbst Cuben, nemlich resp. $=a^3, b^3, c^3$; d. i. existirt eine Auflösung der Gleichung $x^3+y^3+z^3=0$, so wird

$$\begin{aligned}a^3+b^3\varepsilon+c^3\varepsilon\varepsilon &= a' \\ a^3+b^3\varepsilon\varepsilon+c^3\varepsilon &= b' \\ -3abc &= c'\end{aligned}$$

gesetzt, auch $a'^3+b'^3+c'^3=0$ werden. Aus dieser neuen Auflösung kann man auf gleiche Weise eine dritte ableiten u. s. w. Man überzeugt sich leicht, dass wenn die erste Auflösung in reellen Zahlen ist, auch die dritte eine solche sein wird.

Es ist noch zu bemerken, dass wenn a, b, c keinen Factor gemein haben, dasselbe auch von a', b', c' gelten wird, den Factor $1-\varepsilon$ abgerechnet. Es ist nemlich

$$\begin{aligned}\frac{a'}{1-\varepsilon} &= -\varepsilon\varepsilon a^3+\varepsilon b^3 = a^3-\varepsilon c^3 = -b^3+\varepsilon\varepsilon c^3 \\ \frac{b'}{1-\varepsilon} &= a^3-\varepsilon b^3 = -\varepsilon\varepsilon a^3+\varepsilon c^3 = \varepsilon\varepsilon b^3-c^3 \\ \frac{c'}{1-\varepsilon} &= (\varepsilon\varepsilon-1)abc\end{aligned}$$

Die beiden ersten Zahlen haben also weder mit a, noch mit b, noch mit c einen Factor gemein, können auch nicht durch $1-\varepsilon$ theilbar sein, wenn nicht a, b, c

zugleich durch $1-\varepsilon$ theilbar sind: daher haben jene auch keinen Factor mit der dritten gemein.

III. Aber auch der umgekehrte Weg wird offen stehen. Wir haben gesehen, dass eine der Grössen durch $1-\varepsilon$ theilbar ist: dies mag c sein. Da man statt a auch $a\varepsilon$ oder $a\varepsilon\varepsilon$ substituiren kann, und ebenso statt b auch $b\varepsilon$ oder $b\varepsilon\varepsilon$, so dürfen wir voraussetzen, dass a entweder $\equiv 1$ oder $\equiv -1$ sein wird; wir werden das erstere voraussetzen, da im andern Fall $b \equiv 1$ sein würde und nur mit a vertauscht zu werden brauchte. Wir setzen demnach

$$\begin{aligned} a &= 1+3\alpha \\ b &= -1+3\beta \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{a\varepsilon+b\varepsilon\varepsilon}{\varepsilon-\varepsilon\varepsilon} &= 1+(\varepsilon\varepsilon-\varepsilon)(\alpha\varepsilon+\beta\varepsilon\varepsilon) &&= A \\ \frac{a\varepsilon\varepsilon+b\varepsilon}{\varepsilon-\varepsilon\varepsilon} &= -1+(\varepsilon\varepsilon-\varepsilon)(\alpha\varepsilon\varepsilon+\beta\varepsilon) &&= B \\ \frac{a+b}{\varepsilon-\varepsilon\varepsilon} &= (\varepsilon\varepsilon-\varepsilon)(\alpha+\beta) &&= C \end{aligned}$$

wo $A+B+C=0$ wird, und $ABC = \frac{a^3+b^3}{(\varepsilon-\varepsilon\varepsilon)^3} = \left(\frac{c}{\varepsilon\varepsilon-\varepsilon}\right)^3$

Da hier

$$\begin{aligned} a &= -\varepsilon A+\varepsilon\varepsilon B \\ b &= \varepsilon\varepsilon A-\varepsilon B \end{aligned}$$

so können A und B keinen Factor gemein haben, weil ein solcher sonst auch gemeinschaftlicher Factor von a und b sein würde. Wegen $A+B+C=0$ kann folglich auch C keinen Factor weder mit A noch mit B gemein haben. Hieraus folgt leicht, dass A und B und mithin auch C Cuben sind. Denn $\left(\frac{c}{\varepsilon\varepsilon-\varepsilon}\right)^3$ wird durch $\varepsilon-\varepsilon\varepsilon$, folglich auch durch $(\varepsilon-\varepsilon\varepsilon)^3$ theilbar sein oder $\alpha+\beta$ durch 3, daher wird $A\equiv 1$, $B \equiv -1$ (mod. 3).

Setzen wir nun

$$\begin{aligned} A &= a'^3 \\ B &= b'^3 \\ C &= c'^3 \end{aligned}$$

so haben wir aus der Auflösung der Gleichung $x^3+y^3+z^3=0$

$$x = a$$
$$y = b$$
$$z = c$$

eine andere abgeleitet

$$x = a'$$
$$y = b'$$
$$z = c'$$

$$\text{wo}\quad a'^3 b'^3 c'^3 = \frac{c^3}{(\varepsilon\varepsilon - \varepsilon)^3}$$

wo folglich c' den Factor $1-\varepsilon$ einmal weniger enthalten wird, als c. Dies ist aber absurd, wenn c nur durch eine bestimmte Potenz von $1-\varepsilon$ theilbar, d.i. wenn c von 0 verschieden ist. Denn durch Fortsetzung dieser Operationen würde man sonst am Ende auf eine Auflösung kommen, wo z gar nicht durch $1-\varepsilon$ theilbar wäre gegen (I).

Einen ähnlichen Weg kann man für die 5ten Potenzen nehmen. Ist nämlich $a^5+b^5+c^5 = 0$, so setzt man $b+c = \alpha$, $c+a = \beta$, $a+b = \gamma$, so wird

$$\begin{aligned}0 = (2a)^5+(2b)^5+(2c)^5 &= (\beta+\gamma-\alpha)^5+(\gamma+\alpha-\beta)^5+(\alpha+\beta-\gamma)^5\\ &= (\alpha+\beta+\gamma)^5 - 80\,\alpha\beta\gamma(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)\end{aligned}$$

Es kann aber nicht $(\alpha+\beta+\gamma)^5 = 80\,\alpha\beta\gamma(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)$ werden, ohne dass eine der Zahlen α, β, γ durch $1-\varepsilon$ theilbar sei. Denn wären sie alle nicht theilbar, so müsste sowohl $\alpha+\beta+\gamma$ als $\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma$ durch $1-\varepsilon$ theilbar sein, folglich auch $2(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)+2(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma) = (2\alpha+\beta)^2+3\beta\beta$, was unmöglich ist.

Man kann dies auch so darstellen. Ist $a^5+b^5+c^5 = 0$, so wird

$$\begin{aligned}4(a+b+c)^5 &= 5(b+c)(c+a)(a+b)[(a+2b+3c)^2+3(a+c)^2-8(a+b+c)c]\\ &= 5(b+c)(c+a)(a+b)[(b-c)^2+3(b+c)^2+4(a+b+c)a]\end{aligned}$$
$$4(a+b+c)^5+5abc[(b-c)^2+3(b+c)^2] = 5(a+b+c)\{\ldots.\}$$

Uebrigens würde der Beweis dem vorigen sehr ähnlich.

Versucht man aber denselben Gang bei den siebenten Potenzen, so gelingt es nicht zu beweisen, dass bei einer gegebenen Auflösung

$$a^7+b^7+c^7=0$$

nothwendig eine der Grössen $a, b. c$ durch 7 theilbar sein müsse. Es folgt nemlich nur

$$(\alpha+\beta+\gamma)^7=5\alpha\beta\gamma\{3(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4)+10(\alpha\alpha\beta\beta+\alpha\alpha\gamma\gamma+\beta\beta\gamma\gamma)\}$$

welches bestehen kann, ohne dass α, β, γ durch $1-\varepsilon$ theilbar wäre.

Hoffentlich wird sich indessen dies in Zukunft aus der Natur der Determinanten und der Einheitszahlen ableiten lassen.

[II.]

BESTIMMUNG DER NÄCHSTEN GANZEN ZAHL.

Es sei
$$\begin{aligned} \varepsilon^3=1,\quad m &= a+b\varepsilon+c\varepsilon\varepsilon \\ 2a-b-c &= A+\alpha \\ 2b-c-a &= B+\beta \\ 2c-a-b &= C+\gamma \end{aligned}$$

wo A, B, C ganze Zahlen; α, β, γ positive echte Brüche sind. Man hat dann

$$A+B+C+\alpha+\beta+\gamma=0$$

also drei Fälle zu unterscheiden:

I. $\alpha+\beta+\gamma=0$, folglich $\alpha=0,\ \beta=0,\ \gamma=0$

1, $A\equiv B\equiv C$ (mod. 3). Hier ist m selbst eine ganze Zahl.
2, $A-B\equiv B-C\equiv C-A\equiv\pm1$ (mod. 3). Hier ist $m\pm\frac{\varepsilon-\varepsilon\varepsilon}{3}.\varepsilon^n$ eine ganze Zahl.

II. $\alpha+\beta+\gamma=1$.

Hier ist
$$\begin{aligned} &A+B\varepsilon+C\varepsilon\varepsilon+1 \\ &A+B\varepsilon+C\varepsilon\varepsilon+\varepsilon \\ &A+B\varepsilon+C\varepsilon\varepsilon+\varepsilon\varepsilon \end{aligned}$$

jedes durch $1-\varepsilon$ theilbar, und eine dieser Zahlen durch 3. Der Quotient oder

$$m+\frac{\varepsilon^n-\alpha-\beta\varepsilon-\gamma\varepsilon\varepsilon}{3}$$

die gesuchte ganze Zahl.

III. $\alpha+\beta+\gamma=2$

Hier sind
$$\begin{aligned}&A+B\varepsilon+C\varepsilon\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon\varepsilon\\&A+B\varepsilon+C\varepsilon\varepsilon+\varepsilon\varepsilon+1\\&A+B\varepsilon+C\varepsilon\varepsilon+1+\varepsilon\end{aligned}$$

durch $1-\varepsilon$ und eine dieser Zahlen durch 3 theilbar. Der Quotient, oder

$$m+\frac{\varepsilon^n(\varepsilon+\varepsilon\varepsilon)-\alpha-\beta\varepsilon-\gamma\varepsilon\varepsilon}{3}$$

ist die gesuchte ganze Zahl.

In allen drei Fällen hat der Rest die Form

$$x+y\varepsilon+z\varepsilon\varepsilon$$

so dass x, y, z ohne Rücksicht auf das Zeichen kleiner als $\frac{1}{3}$ und $x+y+z=0$ wird. Dadurch wird aber nothwendig

$$xx+yy+zz=2xx-2yz=2yy-2xz=2zz-2xy<\tfrac{2}{9}$$

weil von den drei Grössen x, y, z nothwendig zwei einerlei Zeichen haben. Folglich ist der Determinant des Restes

$$=\tfrac{3}{2}(xx+yy+zz)<\tfrac{1}{3} \qquad \text{Q. E. D.}$$

Die Bestimmung der nächsten ganzen Zahl geschieht *bequemer* auf folgende Art. Es sei vorgegeben $a+b\varepsilon+c\varepsilon\varepsilon=m$, man setze

$$\begin{aligned}b-a&=C+\gamma\\c-b&=A+\alpha\\a-c&=B+\beta\end{aligned}$$

wo A, B, C die nächst kleinern ganzen Zahlen; α, β, γ positive Brüche sind. Hier sind drei Fälle zu unterscheiden:

I. $\alpha+\beta+\gamma=0$, so ist m selbst ganze Zahl

II. $\alpha+\beta+\gamma=1$, so ist die nächste ganze Zahl

$$\begin{array}{llll} B+(B+C)\varepsilon & & \text{wenn} & \alpha \text{ der grösste Bruch ist.} \\ \cdot & C\varepsilon+(A+C)\varepsilon\varepsilon & & \beta \\ A+B & \cdot\ +A\varepsilon\varepsilon & & \gamma \end{array}$$

III. $\alpha+\beta+\gamma=2$, so ist die nächste ganze Zahl

$$\begin{array}{llll} B+1+(B+C+2)\varepsilon & & \text{wenn} & \alpha \text{ der kleinste Bruch ist.} \\ \cdot & (C+1)\varepsilon+(A+C+2)\varepsilon\varepsilon & & \beta \\ A+B+2 & \cdot\ \ +(A+1)\varepsilon\varepsilon & & \gamma \end{array}$$

In II, 1 ist der Rest $\beta+(\beta+\gamma)\varepsilon$, dessen Determinant

$$=\beta\beta+\beta\gamma+\gamma\gamma=\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{6}[(\alpha-\beta)(1+3\beta)+(\alpha-\gamma)(1+3\gamma)]$$

Noch einfacher so:

Man ordne die Brüche $a-[a]$, $b-[b]$, $c-[c]$ nach ihrer Grösse: so heissen sie der Reihe nach p, q, r. Sind alle drei gleich gross, so ist m eine ganze Zahl. Sind sie aber ungleich, so sei t ein beliebiger Bruch zwischen

$$\begin{array}{lll} p \text{ und } q, & \text{jenachdem} & q-p \text{ am grössten ist} \\ q \text{ und } r & & r-q \\ r \text{ und } 1+p & & 1+p-r \end{array}$$

Sodann ist

$$[a-t]+[b-t]\varepsilon+[c-t]\varepsilon\varepsilon$$

die nächste ganze Zahl.

[III.]

Es sei $\varepsilon^5 = 1$

$$\begin{aligned} a + b\varepsilon \ \ + c\varepsilon\varepsilon + d\varepsilon^3 \ + e\varepsilon^4 &= q' \\ a + b\varepsilon^{-1} + c\varepsilon^{-2} + d\varepsilon^{-3} + e\varepsilon^{-4} &= q'''' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-e)^2 + (e-a)^2 &= 2p' \\ (a-c)^2 + (b-d)^2 + (c-e)^2 + (d-a)^2 + (e-b)^2 &= 2p'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q'q'''' &= -p'\varepsilon - p''\varepsilon\varepsilon - p''\varepsilon^3 - p'\varepsilon^4 = P' \\ q''q''' &= -p'\varepsilon\varepsilon - p''\varepsilon^4 - p''\varepsilon - p'\varepsilon^3 = P'' \end{aligned}$$

Determinant $= P'P'' = -p'p' + 3p'p'' - p''p''$

Mensura $= 2p' + 2p'' = 2P' + 2P''$

$$= 5(aa + bb + cc + dd + ee) - (a + b + c + d + e)^2$$

Multiplicando per $1 - \varepsilon$ fit mensura nova $= 8p'$

Höchste Mensur $= 2\left(\frac{\sin 72^0}{\sin 36^0} + \frac{\sin 36^0}{\sin 72^0}\right)\sqrt{D} = 4{,}472\sqrt{D}$

Modulus $= 1 - \varepsilon$

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon &= x \\ \varepsilon &= 1 - x \\ \varepsilon\varepsilon &= 1 - 2x + xx \\ \varepsilon^3 &= 1 - 3x + 3xx - x^3 \\ \varepsilon^4 &= 1 - 4x + 6xx - 4x^3 + x^4 \\ &= -4 + 6x - 4xx + x^3 \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} \frac{1-\varepsilon^n}{1-\varepsilon} &\equiv n \text{ mod. } (1-\varepsilon) \\ \varepsilon^n &\equiv 1 - nx \text{ mod. } (1-\varepsilon)^2 \\ \left(\frac{\varepsilon + \varepsilon^4}{\varepsilon\varepsilon + \varepsilon^3}\right)^n &\equiv 1 + nxx \text{ mod. } (1-\varepsilon)^3 \end{aligned}$$

Also eine Zahl, welche $\equiv 1$ mod. $(1-\varepsilon)^3$ kann *nur* dann eine Einzahl sein, wenn sie zugleich $\equiv 1$ (mod. 5).

[IV.]

EINIGES ÜBER DIE MENSUR DER ZAHLEN.

Es sei $\varepsilon^n = 1$, n Primzahl

$$m = a + a'\varepsilon + a''\varepsilon\varepsilon + a'''\varepsilon^3 + \ldots + a^{(n-1)}\varepsilon^{n-1} = f\varepsilon$$
$$D = f\varepsilon . f\varepsilon\varepsilon . f\varepsilon^3 \ldots f\varepsilon^{n-1}$$
$$f\varepsilon . f\varepsilon^{n-1} = -b'(\varepsilon + \varepsilon^{n-1}) - b''(\varepsilon^2 + \varepsilon^{-2}) - b'''(\varepsilon^3 + \varepsilon^{-3}) \ldots$$

so ist

$$2b' = (a - a')^2 + (a' - a'')^2 + (a'' - a''')^2 + \text{ etc.}$$
$$2b'' = (a - a'')^2 + (a' - a''')^2 + (a'' - a'''')^2 + \text{ etc.}$$
$$\text{etc.}$$

hier sind also b', b'', b'''.. lauter positive Grössen; sie heissen *Partialmensuren* von m, so wie ihre Summe

$$b' + b'' + b''' + \text{ etc.} = n(aa + a'a' + a''a'' + \ldots) - (a + a' + a'' + \text{ etc.})^2$$

die *Generalmensur*. Setzt man

$$f\varepsilon . f\varepsilon^{n-1} = c', \quad f\varepsilon\varepsilon . f\varepsilon^{n-2} = c'' \text{ etc.}$$

so ist

$$c' + c'' + c''' + \text{ etc.} + c^{\frac{1}{2}(n-1)} = b' + b'' + b''' + \text{ etc.} + b^{\frac{1}{2}(n-1)}$$

$$c'(\varepsilon + \varepsilon^{n-1}) + c''(\varepsilon\varepsilon + \varepsilon^{n-2}) + c'''(\varepsilon^3 + \varepsilon^{n-3}) + \text{etc.} = 2(b' + b'' + b''' + \text{etc.} + b^{\frac{1}{2}(n-1)}) - nb'$$

$$c'(2 - \varepsilon - \varepsilon^{n-1}) + c''(2 - \varepsilon\varepsilon - \varepsilon^{n-2}) + c'''(2 - \varepsilon^3 - \varepsilon^{n-3}) + \text{ etc.} = nb'$$

$$b' > \frac{n-1}{2n}(nD)^{\frac{2}{n-1}}, \quad b' + b'' + b''' + \text{ etc.} > \frac{n-1}{2} . D^{\frac{2}{n-1}}$$

Ist allgemein

$$f\varepsilon . f\varepsilon^{n-1} = A + A'\varepsilon + A''\varepsilon\varepsilon + A'''\varepsilon^3 + \ldots$$

so ist die Generalmensur $\triangle = -A - A' - A'' - \text{ etc.} + nA$
Mensur von $(1+\varepsilon)f\varepsilon \ldots \triangle' = 4\triangle - 2n(A - A') = 4\triangle - 2nb'$
Ist $a + a' + a'' + \ldots = 0$, so ist $\triangle = n(aa + a'a' + a''a'' + \text{etc.})$
und ist $A + A' + A'' + \ldots = 0$, so ist $\triangle = nA$, $\triangle' = n(2A + 2A')$

Ist also einer der Coëfficienten A', A'' etc. negativ und absolut grösser als $\frac{1}{2}A$, so lässt sich die Mensur salvo determinante herabbringen.

[V.]

Sollte sich bestätigen, dass jede Einheitszahl bloss aus Factoren von der Form

$$\frac{\varepsilon^\alpha - \varepsilon^\beta}{\varepsilon^\gamma - \varepsilon^\delta}$$

zusammengesetzt wäre, so würde folgender Satz bewiesen sein:

Ist $f(\varepsilon)$ *eine Einheitszahl, so ist*

$$\frac{f(\varepsilon)}{f(\varepsilon^{-1})} = \varepsilon^n$$

Auch ohne *jenen* Satz *vorauszusetzen*, ist der Schlusssatz leicht zu beweisen. Es sei

$$\frac{f\varepsilon}{f\varepsilon^{-1}} = F\varepsilon$$

so ist

$$F\varepsilon . F\varepsilon^{-1} = 1$$

woraus mit Hülfe der Lehre von der Mensur leicht gefolgert wird, dass

$$F\varepsilon = \pm \varepsilon^n$$

Das untere Zeichen ist aber unmöglich, weil sonst $f\varepsilon$ durch $1-\varepsilon$ theilbar sein müsste.

Dass der Determinant einer von 0 verschiedenen Zahl nicht $= 0$ sein könne, lässt sich leicht beweisen. Wenn der Determinant durch m theilbar ist, so ist die Zahl selbst durch $1-\varepsilon$ theilbar; folglich wenn der Determinant durch m^{m-1} theilbar ist, muss die Zahl selbst durch m theilbar sein. Welches absurd ist, da beim Det. 0 die Zahl erst salvo Det. so oft durch m dividirt werden könnte, bis sie nicht mehr theilbar wäre. Der erste Satz aber erhellt so. Es sei die vorgegebene Zahl

$$a + b\varepsilon + c\varepsilon\varepsilon + \text{ etc. } \equiv a + b + c\ .\ .\ \text{mod. } 1-\varepsilon$$

also Determinans $\equiv (a+b+c\ .\ .)^{m-1}$ mod. $1-\varepsilon$.

[VI.]

Es sei $\varepsilon^n = 1$

$$f\varepsilon = a + b\varepsilon + c\varepsilon\varepsilon + d\varepsilon^3 + \text{ etc.}$$
$$m = \text{Determinans dieser Zahl}$$
$$\frac{m}{f\varepsilon} = f\varepsilon\varepsilon . f\varepsilon^3 \ldots f\varepsilon^{n-1} = A + B\varepsilon + C\varepsilon\varepsilon + \text{ etc.} = F\varepsilon$$

Der Zahl $f\varepsilon$ entspricht eine Wurzel der Congruenz $x^n \equiv 1$ (mod. m.) Es sei dieselbe r. Man hat

$$\begin{aligned} nA &= F1 + F\varepsilon + F\varepsilon\varepsilon + \ldots \\ nB &= F1 + \varepsilon^{-1} F\varepsilon + \varepsilon^{-2} F\varepsilon\varepsilon + \ldots \\ nC &= F1 + \varepsilon^{-2} F\varepsilon + \varepsilon^{-4} F\varepsilon\varepsilon + \ldots \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

also, da $F\varepsilon\varepsilon$, $F\varepsilon^3$, $F\varepsilon^4$ etc. durch $f\varepsilon$ theilbar sind,

$$\begin{aligned} &nA - F1 - \varepsilon(nB - F1) \\ &nA - F1 - \varepsilon\varepsilon(nC - F1) \\ &nA - F1 - \varepsilon^3(nD - F1) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

alle durch $f\varepsilon$ theilbar, oder auch

$$\begin{aligned} &n(A - B) - \varepsilon n(B - C) \\ &n(B - C) - \varepsilon n(C - D) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

durch $f\varepsilon$ theilbar; folglich [wenn $f\varepsilon$ durch $1 - \varepsilon$, und $F\varepsilon$ durch eine ganze reelle Zahl nicht theilbar ist]

$$\varepsilon \equiv \frac{A-B}{B-C} \equiv \frac{B-C}{C-D} \equiv \frac{C-D}{D-E} \text{ etc. (mod. } f\varepsilon)$$