FORTSETZUNG DER UNTERSUCHUNGEN

ÜBER DAS ARITHMETISCH GEOMETRISCHE MITTEL.

[Die weiteren Untersuchungen von GAUSS über das Arithmetisch geometrische Mittel sind so unvollständig, nur in den Endformeln, und mit so wechselnder Bezeichnung niedergeschrieben, dass fast alle Übersicht fehlen würde, wenn der Abdruck nur jene Formeln ohne nebenhergehende Erläuterung wiedergäbe. In den folgenden Artikeln habe ich die im Nachlasse gefundenen Stellen hervorgehoben und durch solchen Gedankengang verbunden, wie er vielleicht die Veranlassung gewesen ist, dass GAUSS die betreffenden Resultate unter einem erkennbaren gemeinsamen Gesichtspunkte aufgestellt hat.]

12.

[An mehren Stellen bedient sich GAUSS neben den in den vorhergehenden Artikeln betrachteten beiden ursprünglichen Reihen von Grössen (a, b), welche sich auf dasselbe arithmetisch geometrische Mittel beziehen, auch noch einer dritten Reihe von Grössen (c), die mit jenen durch die Gleichung $aa = bb + cc$, welche für jeden gemeinsamen Index der drei Glieder (a, b, c) gilt, zusammenhängt. Nach den Festsetzungen in Art. 2 können die Gleichungen zur Berechnung der rück- und vorwärts folgenden aus a, b, c abgeleiteten Grössen in die Form gebracht werden:

$$\begin{array}{cccccc}
\ldots\; {}''a = {}'a + {}'c, & {}'a = a + c, & a, & 2a' = a + b, & 2a'' = a' + b', & \ldots \\
\ldots\; {}''b = {}'a - {}'c, & {}'b = a - c, & b, & b'b' = ab, & b''b'' = a'b', & \ldots \\
\ldots\; {}''c''c = 4\,{}'a'c, & {}'c'c = 4ac, & c, & 2c' = a - b, & 2c'' = a' - b', & \ldots
\end{array}$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar dass, während

$$\mathrm{M}(a,b) = \quad \mathrm{M}(a^{\mathrm{n}}, b^{\mathrm{n}}) = \quad \mathrm{M}({}^{\mathrm{n}}a, {}^{\mathrm{n}}b) = \lim a^{\mathrm{m}} = \lim b^{\mathrm{m}} \quad \text{für} \quad m = \infty$$

ist,

$$\mathrm{M}(a,c) = 2^{n}\mathrm{M}(a^{\mathrm{n}}, c^{\mathrm{n}}) = 2^{-n}\mathrm{M}({}^{\mathrm{n}}a, {}^{\mathrm{n}}c) = \lim \frac{{}^{\mathrm{m}}a}{2^{m}} = \lim \frac{{}^{\mathrm{m}}c}{2^{m}} \quad \text{für} \quad m = \infty$$

wird und sich damit die dem ersten Beispiel in Art. 3 angefügte Bemerkung, dass die ${}^{\mathrm{n}}a$, ${}^{\mathrm{n+1}}a$, ${}^{\mathrm{n+2}}a$ etwa wie die Glieder einer geometrischen Reihe mit dem Quotienten 2 zunehmen als allgemein gültig erweist, ferner dass für den im Beispiel 4 Art. 3 berechneten Fall $a = b\sqrt{2} = c\sqrt{2}$ bei jedem n: ${}^{\mathrm{n}}a = 2^{n}.a^{\mathrm{n}}$, ${}^{\mathrm{n}}b = 2^{n}.c^{\mathrm{n}}$, ${}^{\mathrm{n}}c = 2^{n}.b^{\mathrm{n}}$ ist.

Die Art der Annäherung jener Grössen an ihre Grenzwerthe ergibt sich aus den folgenden Reihenentwickelungen

$$\mathrm{M}(a,b) = a^{\mathrm{n}} - c^{\mathrm{n+1}} - c^{\mathrm{n+2}} - \ldots - c^{\mathrm{n+m}} - \ldots$$

$$\mathrm{M}(a,b) = b^{\mathrm{n}} + c^{\mathrm{n+1}} - c^{\mathrm{n+2}} - \ldots - c^{\mathrm{n+m}} - \ldots$$

$$\mathrm{M}(a,c) = 2^{-n}.\,{}^{\mathrm{n}}a - 2^{-n-1}.\,{}^{\mathrm{n+1}}b - 2^{-n-2}.\,{}^{\mathrm{n+2}}b - \ldots - 2^{-n-m}.\,{}^{\mathrm{n+m}}b - \ldots$$

$$\mathrm{M}(a,c) = 2^{-n}.\,{}^{\mathrm{n}}c + 2^{-n-1}.\,{}^{\mathrm{n+1}}b - 2^{-n-2}.\,{}^{\mathrm{n+2}}b - \ldots - 2^{-n-m}.\,{}^{\mathrm{n+m}}b - \ldots$$

$$\mathrm{M}(a,b)^2 = a^{\mathrm{n}}.a^{\mathrm{n}} - \tfrac{1}{2}c^{\mathrm{n}}.c^{\mathrm{n}} - \tfrac{3}{2}c^{\mathrm{n+1}}.c^{\mathrm{n+1}} - \ldots - \tfrac{3}{2}c^{\mathrm{n+m}}.c^{\mathrm{n+m}} - \ldots$$

$$\mathrm{M}(a,b)^2 = b^{\mathrm{n}}.b^{\mathrm{n}} + \tfrac{1}{2}c^{\mathrm{n}}.c^{\mathrm{n}} - \tfrac{3}{2}c^{\mathrm{n+1}}.c^{\mathrm{n+1}} - \ldots - \tfrac{3}{2}c^{\mathrm{n+m}}.c^{\mathrm{n+m}} - \ldots$$

$$\mathrm{M}(a,c)^2 = 2^{-2n}.\,{}^{\mathrm{n}}c.\,{}^{\mathrm{n}}c + \tfrac{1}{2}2^{-2n}.\,{}^{\mathrm{n}}b.\,{}^{\mathrm{n}}b - \tfrac{3}{2}2^{-2n-2}.\,{}^{\mathrm{n+1}}b.\,{}^{\mathrm{n+1}}b - \ldots$$
$$- \tfrac{3}{2}2^{-2n-2m}.\,{}^{\mathrm{n+m}}b.\,{}^{\mathrm{n+m}}b - \ldots$$

$$\mathrm{M}(a,c)^2 = 2^{-2n}.\,{}^{\mathrm{n}}a.\,{}^{\mathrm{n}}a - \tfrac{1}{2}2^{-2n}.\,{}^{\mathrm{n}}b.\,{}^{\mathrm{n}}b - \tfrac{3}{2}2^{-2n-2}.\,{}^{\mathrm{n+1}}b.\,{}^{\mathrm{n+1}}b - \ldots$$
$$- \tfrac{3}{2}2^{-2n-2m}.\,{}^{\mathrm{n+m}}b.\,{}^{\mathrm{n+m}}b - \ldots$$

$$\sqrt{\mathrm{M}(a,b)} = \sqrt{a^{\mathrm{n}}} - \sqrt{c^{\mathrm{n+2}}} - \sqrt{c^{\mathrm{n+4}}} - \ldots - \sqrt{c^{\mathrm{n+2m}}} - \ldots$$

$$\sqrt{\mathrm{M}(a,b)} = \sqrt{b^{\mathrm{n}}} + \sqrt{c^{\mathrm{n+2}}} - \sqrt{c^{\mathrm{n+4}}} - \ldots - \sqrt{c^{\mathrm{n+2m}}} - \ldots$$

$$\sqrt{M(a,c)} = \sqrt{2^{-n}.{}^{n}a} - \sqrt{2^{-n-2}.{}^{n+2}b} - \sqrt{2^{-n-4}.{}^{n+4}b} - \dots - \sqrt{2^{-n-2m}.{}^{n+2m}b} - \dots$$

$$\sqrt{M(a,c)} = \sqrt{2^{-n}.{}^{n}c} + \sqrt{2^{-n-2}.{}^{n+2}b} - \sqrt{2^{-n-4}.{}^{n+4}b} - \dots - \sqrt{2^{-n-2m}.{}^{n+2m}b} - \dots$$

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{M(a,b)}{M(a,c)} = \frac{1}{2^n}\log 4\frac{a^n}{c^n} - \frac{1}{2^n}\log\frac{a^n}{a^{n+1}} - \dots - \frac{1}{2^{n+m}}\log\frac{a^{n+m}}{a^{n+m+1}} - \dots$$

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{M(a,b)}{M(a,c)} = \frac{1}{2^n}\log 4\frac{b^{n+1}}{c^n} + \frac{3}{2^{n+1}}\log\frac{b^{n+2}}{b^{n+1}} + \dots + \frac{3}{2^{n+m}}\log\frac{b^{n+m+1}}{b^{n+m}} + \dots$$

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{M(a,c)}{M(a,b)} = \frac{1}{2^n}\log 2\frac{{}^{n}a}{{}^{n}b} - \frac{1}{2^n}\log 2\frac{{}^{n}a}{{}^{n+1}a} - \dots - \frac{1}{2^{n+m}}\log 2\frac{{}^{n+m}a}{{}^{n+m+1}a} - \dots$$

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{M(a,c)}{M(a,b)} = \frac{1}{2^n}\log 2\frac{{}^{n+1}c}{{}^{n}b} + \frac{3}{2^{n+1}}\log\frac{1}{2}\frac{{}^{n+2}c}{{}^{n+1}c} + \dots + \frac{3}{2^{n+m}}\log\frac{1}{2}\frac{{}^{n+m+1}c}{{}^{n+m}c} + \dots$$

In den vier letzten Gleichungen ist $\frac{\pi}{2}$ statt der für beständig wachsendes m geltenden Grenzwerthe beziehungsweise von

$$\frac{M(a^m,c^m)}{M(a^m,b^m)}.\log 4\frac{a^m}{c^m}; \qquad \frac{M(a^m,c^m)}{M(a^m,b^m)}.\log 4\frac{b^{m+1}}{c^m}, \qquad \frac{M({}^{m}a,{}^{m}b)}{M({}^{m}a,{}^{m}c)}.\log 4\frac{{}^{m}a}{{}^{m}b}, \qquad \frac{M({}^{m}a,{}^{m}b)}{M({}^{m}a,{}^{m}c)}.\log 2\frac{{}^{m+1}c}{{}^{m}b}$$

das ist statt des Grenzwerthes von $M(1,\varepsilon)\log\frac{4}{\varepsilon}$ für bis zur Null abnehmende positive Werthe des ε gesetzt. Es folgt nemlich zunächst aus jenen Gleichungen, in welchen, wie die Relationen

$$\frac{a'}{a} = 1 - \frac{c'}{a}, \qquad \left(\frac{b'}{b}\right)^4 = 1 + \frac{cc}{bb}, \qquad \frac{'a}{a} = 2 - \frac{'b}{a}, \qquad \left(\frac{1}{2}\frac{'c}{c}\right)^4 = 1 + \frac{bb}{cc}$$

leicht erkennen lassen, die zu logarithmirenden Werthe, so bald sie alle reell sind, vom zweiten Gliede der Reihe an beständig bis zur Einheit hin abnehmen, dass die gesuchte Grösse eine völlig bestimmte und z. B., wenn man $a = b\sqrt{2} = c\sqrt{2}$ setzt, eine zwischen den Grenzen $\frac{9}{4}\log 2$ und $\frac{10}{4}\log 2$ eingeschlossene Grösse ist. Die obigen Gleichnngen gelten auch für complexe Werthe der Veränderlichen, wenn man $n = 0$ setzt und diejenigen Werthe der $\log {}^{m}a$, $\log {}^{m}c$, $\log a$, $\log b$, $\log c$, $\log a^m$, $\log b^m$ zu Grunde legt, welche durch stetige Änderung derselben aus den reellen Grössen folgen. Nimmt man nun als ein System (a, b, c) das der Bedingung $a = b\sqrt{2} = c\sqrt{2}$ unterworfene und aus reellen Grössen bestehende, ferner als anderes System (α, β, γ) dasjenige, für welches $\alpha = c$, $\beta = b\sqrt{-1}$, $\gamma = a = b\sqrt{2} = c\sqrt{2}$ ist und die durch Wurzel-Ausziehung zu bestimmenden Werthe von β^m und ${}^{m}\gamma$ positive reelle Theile erhalten, so kann man ein drittes veränderliches System (A, B, C) aufstellen, welches von dem einen (a, b, c) zu dem andern (α, β, γ) stetig übergeht, und zwar so, dass bei diesem Übergang keine der Veränderlichen ${}^{\mathrm{m}}A$, ${}^{\mathrm{m}}C$, $A, B, C, A^{\mathrm{m}}, B^{\mathrm{m}}$ den Werth Null berührt oder einen negativen reellen Theil erhält. Die letzte jener Gleichungen, n gleich Null gesetzt, gilt also sowol für das System (a, b, c) wie für $(\alpha, \mathfrak{b}, \gamma)$ und da

$$\mathrm{M}(\alpha, \mathfrak{b}) = \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{-1})\mathrm{M}(a, b), \qquad \mathrm{M}(\alpha, \gamma) = \mathrm{M}(a, c) = \mathrm{M}(a, b)$$

ist, wird $\frac{\pi}{2}\sqrt{-1} = \log\sqrt{-1}$; es hat also π die gebräuchliche Bedeutung als Verhältniss-Zahl der Länge des Umfangs eines Kreises zu dessen Durchmesser.

Mit Hülfe dieser Betrachtung lässt sich auch die Richtigkeit der folgenden von Gauss aufgezeichneten Bemerkung erweisen, der ich die hier benutzte Bezeichnungsweise zu Grunde lege und ein von Gauss berechnetes Beispiel folgen lasse:]

Die Arithmetisch-Geometrischen Mittel gestalten sich anders, wenn man für ein b', b'', b'''. . den negativen Werth wählt: doch sind alle Resultate in folgender Form begriffen:

$$\frac{1}{\mathfrak{M}(a, b)} = \frac{1}{\mathrm{M}(a, b)} + \frac{4ik}{\mathrm{M}(a, c)}$$

[wo k eine ganze reelle Zahl bedeutet.]

Beispiel für einen imaginären Werth des A. G. Mittels

$a = 3.0000000$	log . . 0.4771213		$a = 3.0000000$	log . . 0.4771213
$b = 1.0000000$	0.0000000		$c = 2.8284270$	0.4515450
$a' = 2.0000000$	0.3010300		$\frac{1}{2}.'a = 2.9142135$	0.4645214
$b' = 1.7320508$	0.2385606		$\frac{1}{2}.'c = 2.9129510$	0.4643332
$a'' = 1.8660254$	0.2709175		$\frac{1}{4}.''a = 2.9135822$	0.4644273
$b'' = 1.8612098$	0.2697953			
$a''' = 1.8636176$	0.2703568			
$b''' = 1.8636159$	0.2703564			
$a'''' = 1.8636167$	0.2703566			

a	$= 3.0000000$	log . . 0.4771213	0		
b	$= 1.0000000$	0.0000000	360^0		
a'	$= \quad 2.0000000$	0.3010300	0		
b'	$= -1.7320508$	0.2385606	180^0		
a''	$= 0.1339746$	9.1270225	0		
b''	$= \qquad +1.8612098\,i$	0.2697953	90^0		
a'''	$= 0.0669873 + 0.9306049\,i$	9.9698876	85^0	$52'$	$58''10$
b'''	$= 0.3530969 + 0.3530969\,i$	9.6984089	45	0	0
a''''	$= 0.2100421 + 0.6418509\,i$	9.8295254	71	52	46.58
b''''	$= 0.2836930 + 0.6208239\,i$	9.8341482	65	26	29.05
a^{v}	$= 0.2468676 + 0.6313374\,i$	9.8311572	68	38	36.05
b^{v}	$= 0.2470649 + 0.6324002\,i$	9.8318368	68	39	37.82
a^{vi}	$= 0.24699625 + 0.6318688\,i$	9.8314971	68	39	6.95
b^{vi}	$= 0.24699625 + 0.6318685\,i$	9.8314970	68	39	6.93
a^{vii}	$= 0.24699625 + 0.63186865\,i$	9.83149705	68	39	6.94

$$\frac{1}{\mathfrak{M}(a,b)} = +0.5365910 - 1.3728774\,i = \frac{1}{M(a,b)} + \frac{4i}{M(a,c)}$$

13.

[Die Differentiale erster Ordnung der einzelnen Glieder des vollständigen Algorithmus eines arithmetisch geometrischen Mittels sind in Artikel 9 auf zweierlei Weise zu einander in Beziehung gesetzt. Die eine umfasst nur die Differentiale der Logarithmen der Quotienten jener Grössen, sie ergibt sich aus der wiederholten Anwendung der beiden Relationen $aa = bb + cc$, $\frac{a'}{c'} = \frac{a+b}{a-b}$, und kann durch Benutzung der im vorhergehenden Artikel gewonnenen Resultate zu einer Werthbestimmung des Differentials vom Quotienten zweier zusammengehöriger arithmetisch geometrischer Mittel erweitert und so dargestellt werden, dass $\frac{1}{cc}\,d\log\frac{a}{b}$, welches mit Δ bezeichnet werden mag, für jedes positive und negative n, wenn nemlich ein negativer nachstehender Index n als gleichbedeutend mit einem voranstehenden positiven Index von gleicher absoluter Grösse gedeutet wird,

$$= \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{a^{\mathrm{n}}a^{\mathrm{n}}}\,\mathrm{d}\log\frac{c^{\mathrm{n}}}{b^{\mathrm{n}}} = \frac{1}{2^{\pi}}\cdot\frac{1}{b^{\mathrm{n}}b^{\mathrm{n}}}\,\mathrm{d}\log\frac{c^{\mathrm{n}}}{a^{\mathrm{n}}} = \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{c^{\mathrm{n}}c^{\mathrm{n}}}\,\mathrm{d}\log\frac{a^{\mathrm{n}}}{b^{\mathrm{n}}} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\mathrm{M}(a,b).\mathrm{M}(a,c)}\,\mathrm{d}\log\frac{\mathrm{M}(a,c)}{\mathrm{M}(a,b)}$$

ist. Die andere Beziehung erstreckt sich auch mit auf die Differentiale der Logarithmen von zweigliedrigen Producten, sie folgt aus $b'b' = ab$ und $'c'c = 4ac$ in der Form

$$\mathrm{d}\log(a^{\mathrm{m}}.b^{\mathrm{m}}) = \mathrm{d}\log(a^{\mathrm{m+1}}.b^{\mathrm{m+1}}) - \Delta.2^{m+1}.c^{\mathrm{m+1}}.c^{\mathrm{m+1}}$$
$$\mathrm{d}\log({}^{\mathrm{m}}a.{}^{\mathrm{m}}c) = \mathrm{d}\log({}^{\mathrm{m+1}}a.{}^{\mathrm{m+1}}c) + \Delta.\frac{1}{2^{m+1}}.{}^{\mathrm{m+1}}b.{}^{\mathrm{m+1}}b$$

und ergibt, wenn man m bis zur unendlichen Grenze wachsen lässt, die in Artikel 9 aufgestellte Gleichung und die dieser entsprechende nemlich:

$$2\,\mathrm{d}\log\mathrm{M}(a,b) = \mathrm{d}\log(a^{\mathrm{n}}.b^{\mathrm{n}}) + \Delta\{2^{n+1}.c^{\mathrm{n+1}}.c^{\mathrm{n+1}} + . + 2^{n+m}.c^{\mathrm{n+m}}.c^{\mathrm{n+m}} + .\}$$
$$2\,\mathrm{d}\log\mathrm{M}(a,c) = \mathrm{d}\log({}^{\mathrm{n}}a.{}^{\mathrm{n}}c) - \Delta\{2^{-n-1}.{}^{\mathrm{n+1}}b.{}^{\mathrm{n+1}}b + . + 2^{-n-m}.{}^{\mathrm{n+m}}b.{}^{\mathrm{n+m}}b + .\}$$

Hieraus kann durch Elimination der Differentiale mit Hülfe des oben gefundenen Ausdrucks für Δ die Gleichung

$$\frac{4}{\pi}\mathrm{M}(a,b)\,\mathrm{M}(a,c) = \,.\,.-2^{-\mu+n}.{}^{\mu-\mathrm{n}}b.{}^{\mu-\mathrm{n}}b - \,.\,. - 2^{n-1}.b^{\mathrm{n-1}}.b^{\mathrm{n-1}}$$
$$+ 2^n.a^{\mathrm{n}}.a^{\mathrm{n}} - 2^{n+1}.c^{\mathrm{n+1}}.c^{\mathrm{n+1}} - \,.\,. - 2^{n+m}.c^{\mathrm{n+m}}.c^{\mathrm{n+m}} - \,.\,.$$

abgeleitet werden, welche Gauss neben der im vorigen Artikel wiedergegebenen ersten Gleichung für $\frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{M}(a,b)}{\mathrm{M}(a,c)}$ aufgezeichnet hat, ohne den Weg, auf welchem sie gefunden waren, anzudeuten.]

14.

[Für die vollständigen Differentiale zweiter Ordnung findet man unmittelbar aus den Ausdrücken für Δ, dass jedes mit gemeinsamen Index behaftete System von Gliedern a, b, c die drei Gleichungen

$$\frac{1}{\Delta}\,\mathrm{d}\log\frac{c}{b}.\,\mathrm{d}\log a = \tfrac{1}{2}\mathrm{d}\Big(\frac{1}{\Delta}\,\mathrm{d}\log\frac{c}{b}\Big)$$
$$\frac{1}{\Delta}\,\mathrm{d}\log\frac{c}{a}.\,\mathrm{d}\log b = \tfrac{1}{2}\mathrm{d}\Big(\frac{1}{\Delta}\,\mathrm{d}\log\frac{c}{a}\Big)$$
$$\frac{1}{\Delta}\,\mathrm{d}\log\frac{a}{b}.\,\mathrm{d}\log c = \tfrac{1}{2}\mathrm{d}\Big(\frac{1}{\Delta}\,\mathrm{d}\log\frac{a}{b}\Big)$$

erfüllt. Multiplicirt man darin die Zähler und Nenner unter den zweimal zu differentiirenden Logarithmen der Reihe nach mit a, b, c und löst alle Logarithmen von Quotienten in Differenzen von Logarithmen auf, so ersieht man leicht, dass der Ausdruck

$$\frac{1}{\Delta}\,\mathrm{d}\log a^{\mathrm{n}}.\mathrm{d}\log b^{\mathrm{n}} - \tfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(\frac{1}{\Delta}\,\mathrm{d}\log a^{\mathrm{n}} b^{\mathrm{n}}\right)$$

der mit D bezeichnet werden soll, seinen Werth nicht ändert, wenn man statt a^{n} und b^{n} setzt: a^{n} und c^{n} oder: b^{n} und c^{n}. Nimmt man das Mittel der beiden letzten so entstandenen Ausdrücke und berücksichtigt, dass

$$\mathrm{d}\log a^{\mathrm{n}} + \mathrm{d}\log b^{\mathrm{n}} = 2\,\mathrm{d}\log b^{\mathrm{n}+1}$$

ist, so folgt, dass man in jenem Ausdruck ohne dessen Werth zu ändern statt der beiden genannten Grössen auch c^{n} und $b^{\mathrm{n}+1}$ setzen kann und ferner, wenn man in diesem wieder $\mathrm{d}\log c^{\mathrm{n}}$ durch $\frac{1}{2}\mathrm{d}\log a^{\mathrm{n}+1} + \frac{1}{2}\mathrm{d}\log c^{\mathrm{n}+1}$ ersetzt, dass man mit demselben Erfolge $a^{\mathrm{n}+1}$ und $b^{\mathrm{n}+1}$ statt a^{n} und b^{n} setzen kann. Es ist also der Werth jenes Differential-Ausdrucks unabhängig von n und demnach gleich

$$\begin{aligned}
D &= \frac{1}{\Delta}\,\mathrm{d}\log b^{\mathrm{n}}.\mathrm{d}\log c^{\mathrm{n}} - \tfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(\frac{1}{\Delta}\,\mathrm{d}\log b^{\mathrm{n}} c^{\mathrm{n}}\right)\\
&= \frac{1}{\Delta}\,\mathrm{d}\log c^{\mathrm{n}}.\mathrm{d}\log a^{\mathrm{n}} - \tfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(\frac{1}{\Delta}\,\mathrm{d}\log c^{\mathrm{n}} a^{\mathrm{n}}\right)\\
&= \frac{1}{\Delta}\,\mathrm{d}\log a^{\mathrm{n}}.\mathrm{d}\log b^{\mathrm{n}} - \tfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(\frac{1}{\Delta}\,\mathrm{d}\log a^{\mathrm{n}} b^{\mathrm{n}}\right)\\
&= \mathrm{M}(a,b)\,\mathrm{d}\left\{\frac{1}{\Delta}\,\mathrm{d}\frac{1}{\mathrm{M}(a,b)}\right\} = \mathrm{M}(a,c)\,\mathrm{d}\left\{\frac{1}{\Delta}\,\mathrm{d}\frac{1}{\mathrm{M}(a,c)}\right\}
\end{aligned}$$

Setzt man a als unveränderlich voraus, so wird

$$D = \Delta bbcc = -bb\,\mathrm{d}\log b = cc\,\mathrm{d}\log c$$

und es entsteht die in Artikel 8 aus der Reihenentwickelung abgeleitete für $\frac{a}{\mathrm{M}(a,c)}$ und $\frac{a}{\mathrm{M}(a,b)}$ als Werthe von μ geltende Differentialgleichung

$$\mathrm{d}\mathrm{d}\mu - \frac{\mathrm{d}\Delta}{\Delta}.\mathrm{d}\mu - \Delta\Delta bbcc.\mu = 0$$

aus welcher sich nach den Untersuchungen in der Abhandlung '*Determinatio seriei nostrae per aequationem differentialem secundi ordinis*' auch wieder die Darstellung durch die Gaussischen Reihen:

$$\frac{a}{\mathrm{M}(a,b)} = F\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1,\frac{cc}{aa}\right),\qquad \frac{a}{\mathrm{M}(a,c)} = F\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1,\frac{bb}{aa}\right)$$

und als specielle Fälle der dortigen Gleichungen [90] und [96] der oben Art. 12 gefundene Grenzwerth von $\mathrm{M}(1,\varepsilon)\log\frac{4}{\varepsilon}$ und die im vorigen Artikel aufgestellte Differentialgleichung erster Ordnung zwischen $\mathrm{M}(a,b)$ und $\mathrm{M}(a,c)$ ergeben.]

15.

[Die Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Glieder der Reihe des arithmetisch geometrischen Mittels nimmt eine Form an, in welcher sie Differentiale nur von Quotienten der Veränderlichen enthält, wenn man mit einer beliebigen Grösse e den Ausdruck $D+\mathrm{d}(\frac{1}{\Delta}\,\mathrm{d}\log e)+\frac{1}{\Delta}(\mathrm{d}\log e)^2$ bildet, dieser wird nemlich

$$-\sqrt{(eea^{\mathrm{n}}b^{\mathrm{n}})}\,.\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\Delta a^{\mathrm{n}}b^{\mathrm{n}}}\,.\,\mathrm{d}\sqrt{\frac{a^{\mathrm{n}}b^{\mathrm{n}}}{ee}}\right)-\frac{1}{4\Delta}\left(\mathrm{d}\log\frac{a^{\mathrm{n}}}{b^{\mathrm{n}}}\right)^2$$

ein Ausdruck, dessen Werth also unabhängig von n ist und sich auch nicht ändert, wenn man b^{n} und c^{n} oder c^{n} und a^{n} statt a^{n} und b^{n} setzt. Derselbe verwandelt sich für beständig wachsende positive und für negative n in

$$-e\mathrm{M}(a,b)\,.\,\mathrm{d}\left\{\frac{1}{\Delta\mathrm{M}(a,b)^2}\,\mathrm{d}\,\frac{\mathrm{M}(a,b)}{e}\right\} \text{ und in } -e\mathrm{M}(a,c)\,.\,\mathrm{d}\left\{\frac{1}{\Delta\mathrm{M}(a,c)^2}\,\mathrm{d}\,\frac{\mathrm{M}(a,c)}{e}\right\}$$

dagegen für n gleich Null und für a, b, c als besondere Werthe von e beziehungsweise in $+\Delta bbcc$, $\quad -\Delta ccaa$, $\quad -\Delta aabb$.

Setzt man also zur Abkürzung

$$\sqrt{\frac{a}{\mathrm{M}(a,b)}}=p,\quad \sqrt{\frac{b}{\mathrm{M}(a,b)}}=q,\quad \sqrt{\frac{c}{\mathrm{M}(a,b)}}=r,\quad -\pi\frac{\mathrm{M}(a,b)}{\mathrm{M}(a,c)}=\log y$$

so wird mit Rücksicht auf die Gleichung für Δ in Art. 13:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta}{2}\mathrm{M}(a,b)^2 &= \tfrac{1}{4}\,\mathrm{d}\log y=\frac{1}{p^4}\,\mathrm{d}\log\frac{r}{q}=\frac{1}{q^4}\,\mathrm{d}\log\frac{r}{p}=\frac{1}{r^4}\,\mathrm{d}\log\frac{p}{q}\\ &=-\frac{pp}{q^4r^4}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\mathrm{d}\log y}\,.\,\mathrm{d}\frac{1}{pp}\right)=\frac{qq}{r^4p^4}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\mathrm{d}\log y}\,.\,\mathrm{d}\frac{1}{qq}\right)=\frac{rr}{p^4q^4}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\mathrm{d}\log y}\,.\,\mathrm{d}\frac{1}{rr}\right)\end{aligned}$$

und von gleicher Form werden die Ausdrücke des $-\frac{\Delta}{2}\mathrm{M}(a,c)^2$ in

$$\sqrt{\frac{a}{\mathrm{M}(a,c)}},\qquad \sqrt{\frac{c}{\mathrm{M}(a,c)}},\qquad \sqrt{\frac{b}{\mathrm{M}(a,c)}},\qquad -\pi\frac{\mathrm{M}(a,c)}{\mathrm{M}(a,b)}$$

Die Elimination von je zwei der drei Grössen p, q, r ergibt

$$\left\{\frac{1}{p^4}\,\frac{1}{\mathrm{d}\log y}\,\mathrm{d}\log\left[\frac{16}{p^6}\,\frac{1}{\mathrm{d}\log y}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\mathrm{d}\log y}\,.\,\mathrm{d}\frac{1}{pp}\right)\right]\right\}^2-\frac{16}{p^6}\,\frac{1}{\mathrm{d}\log y}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\mathrm{d}\log y}\,.\,\mathrm{d}\frac{1}{pp}\right)-1=0$$

als Differentialgleichung sowol für p als auch für q und für r, das ist für $\sqrt{\frac{a}{M(a,b)}}$, $\sqrt{\frac{b}{M(a,b)}}$ und $\sqrt{\frac{c}{M(a,b)}}$ und ebenso auch, wenn man $-\pi\frac{M(a,c)}{M(a,b)} = \log z$ statt $\log y$ darin gesetzt denkt, als Differentialgleichung für $\sqrt{\frac{a}{M(a,c)}}$, $\sqrt{\frac{c}{M(a,c)}}$ und $\sqrt{\frac{b}{M(a,c)}}$.]

16.

[Die Darstellung der Quotienten der Grössen a, b, c, $M(a,b)$, $M(a,c)$ durch Reihen, die nach Potenzen von $y^{\frac{1}{4}}$ oder $z^{\frac{1}{4}}$ fortschreiten, lässt sich mit Hülfe der Fundamentalsätze des hier zu untersuchenden Algorithmus z. B. in folgender Weise ausführen.

Nach der Definition von y und dem in Art. 12 für den rückwärts verlängerten Algorithmus aufgestellten Satze wird:

$$-\pi\frac{M(a,b)}{M(a,c)} = -\pi\frac{M(a^n,b^n)}{2^n M(a^n,c^n)} = \log y$$

also nach den Gleichungen in Art. 12 der Grenzwerth von $\frac{1}{2}y^{-2^{n-2}}\cdot\sqrt{\frac{c^n}{M(a^n,b^n)}}$ für ein immer wachsendes n, oder was dasselbe ist, der Grenzwerth von $\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{4}}r(y)$, wo $r(y)$ statt $\sqrt{\frac{c}{M(a,b)}}$ gesetzt ist, für bis zur Null abnehmendes positives $y^{\frac{1}{4}}$ gleich der Einheit.

Bezeichnen wir noch $\sqrt{\frac{a}{M(a,b)}}$ und $\sqrt{\frac{b}{M(a,b)}}$ durch $p(y)$ und $q(y)$, so folgt aus $aa = bb+cc$ und den beiden Gleichungen für $\sqrt{M(a,b)}$ in Art. 12

$$\begin{aligned}
p(y) &= 1+r(y^4)+r(y^{16})+r(y^{64})+\ldots+r(y^{2^{2n}})+\ldots\\
q(y) &= 1-r(y^4)+r(y^{16})+r(y^{64})+\ldots+r(y^{2^{2n}})+\ldots\\
r(y)^4 &= p(y)^4-q(y)^4
\end{aligned}$$

Die Reihen für p, q, r, welche nach ganzen Potenzen von $y^{\frac{1}{4}}$ fortschreiten und diesen Bedingungen genügen, findet man, so weit man die Entwickelung ausführt von der Form:

$$\begin{aligned}
p(y) &= 1+2y+2y^4+2y^9+\ldots+2y^{nn}+\ldots\\
q(y) &= 1-2y+2y^4-2y^9+\ldots\pm 2y^{nn}\mp\ldots\\
r(y) &= 2y^{\frac{1}{4}}+2y^{\frac{9}{4}}+2y^{\frac{25}{4}}+2y^{\frac{49}{4}}+\ldots+2y^{(n+\frac{1}{2})^2}+\ldots
\end{aligned}$$

Dass das hier angedeutete Gesetz für die Bildung der Glieder das allgemein gültige ist, scheint GAUSS unter Anderem auch auf folgende Art bewiesen zu haben. Neben den entsprechenden Gleichungen, welche sich auf Reihen mit zwei Argumenten beziehen und weiter unten in Art. 23 und 25 Platz finden werden, hat GAUSS sich die Aufzeichnung gemacht:]

Zur Theorie der Zerlegung der Zahlen in vier Quadrate.

Das Theorem: das Product zweier Summen von vier Quadraten ist selbst eine Summe von vier Quadraten, wird am einfachsten so dargestellt: es seien l, m, λ, μ, λ', μ' sechs complexe Zahlen, so dass λ, λ' und μ, μ' sociirt sind. Durch N *bezeichne man die Norm. Es ist dann*

$$(\mathrm{N}\,l+\mathrm{N}\,m)(\mathrm{N}\lambda+\mathrm{N}\mu) = \mathrm{N}(l\lambda+m\mu)+\mathrm{N}(l\mu'-m\lambda')$$

[und also auch

$$\begin{aligned}\{\mathrm{N}(n+in_,)+\mathrm{N}(n_{,,}+in_{,,,})\}\{\mathrm{N}(1-i)+\mathrm{N}(1+i)\} \\ = \mathrm{N}\{(n+n_,+n_{,,}-n_{,,,})+i(-n+n_,+n_{,,}+n_{,,,})\} \\ +\mathrm{N}\{(n+n_,-n_{,,}+n_{,,,})-i(+n-n_,+n_{,,}+n_{,,,})\}\end{aligned}$$

Hieraus lassen sich leicht die beiden folgenden Sätze ableiten, in welchen verschiedene Darstellungen einer Zahl durch eine Summe von vier Quadratzahlen sich beziehen auf die verschiedenen Werthensysteme der vier Wurzeln mit Berücksichtigung sowol der Zeichen als auch der Reihenfolge der Wurzeln, worin ferner unter den geraden Zahlen auch die Null mit begriffen wird.

Ist das Vierfache einer Zahl von der Form $4k+1$ durch vier ungerade Quadratzahlen darstellbar, so ist sie selbst halb so oft durch eine ungerade und drei gerade Quadratzahlen darstellbar, und umgekehrt, ist eine Zahl in der letztern Weise darstellbar, so ist ihr Vierfaches doppelt so oft in der ersten Weise darstellbar.

Ist das Vierfache einer Zahl von der Form $4k+3$ durch vier ungerade Quadratzahlen darstellbar, so ist sie selbst halb so oft durch eine gerade und drei ungerade Quadratzahlen darstellbar und umgekehrt, ist eine Zahl in der letztern Weise darstellbar, so ist ihr Vierfaches doppelt so oft in der erstern Weise darstellbar.

Mit Hülfe dieser beiden Sätze lässt sich unmittelbar beweisen, dass die obigen Reihen der Gleichung $r(y)^4 = p(y)^4-q(y)^4$ genügen, und ferner durch die wiederholte Anwendung dieser Relation, dass, wenn man nach dem Schema

$$p+q = 2p'', \qquad p-q = 2r'', \qquad (p'')^4-(r'')^4 = (q'')^4$$

aus den Werthen der Quadrate der beiden ersten Reihen, nemlich pp und qq, als Anfangsglieder die Glieder des Algorithmus eines arithmetisch geometrischen Mittels für positive gerade Indices bildet, auch

$$p^{2n} = p(y^{2^{2n}}), \qquad q^{2n} = q(y^{2^{2n}}), \qquad r^{2n} = r(y^{2^{2n}})$$

wird. Durch Übergang zu dem Grenzwerthe von n entsteht also nach Art. 12:

$$\mathrm{M}(pp, qq) = 1, \qquad \frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{M}(pp, qq)}{\mathrm{M}(pp, rr)} = -\tfrac{1}{2}\log y\ ]$$

17.

[Aus den im vorhergehenden Artikel abgeleiteten Eigenschaften der durch die dort aufgestellten Reihen definirten Functionen p, q, r folgt, dass, wenn a, b, c drei die Gleichung $aa = bb+cc$ erfüllende Grössen sind, sie in die Form gesetzt werden können

$$a = \mathrm{M}(a,b).(py)^2, \qquad b = \mathrm{M}(a,b).(qy)^2, \qquad c = \mathrm{M}(a,b).(ry)^2$$

und dass dann $\frac{\log y}{\pi} = -\frac{\mathrm{M}(a,b)}{\mathrm{M}(a,c)}$ sein muss. Setzt man nun noch

$$a = \mathrm{M}(a,c).(pz)^2, \qquad c = \mathrm{M}(a,c).(qz)^2, \qquad b = \mathrm{M}(a,b).(rz)^2$$

so wird

$$\frac{\log z}{\pi} = -\frac{\mathrm{M}(a,c)}{\mathrm{M}(a,b)} = \frac{\pi}{\log y}.$$

Der durch die Vereinigung dieser beiden Darstellungen sich ergebende Satz ist von Gauss so ausgesprochen, dass die Functionen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P}t &= 1+2e^{-\pi t}+2e^{-4\pi t}+2e^{-9\pi t}+\ldots+2e^{-nn\pi t}+\ldots\\
\mathfrak{Q}t &= 1-2e^{-\pi t}+2e^{-4\pi t}-2e^{-9\pi t}+\ldots\pm 2e^{-nn\pi t}\mp\ldots\\
\mathfrak{R}t &= 2e^{-\frac{1}{4}\pi t}+2e^{-\frac{9}{4}\pi t}+2e^{-\frac{25}{4}\pi t}+\ldots+2e^{-(n+\frac{1}{2})^2\pi t}+\ldots
\end{aligned}$$

den Gleichungen

$$\mathfrak{P}t = \frac{1}{\sqrt{t}}\mathfrak{P}\frac{1}{t}, \qquad \mathfrak{Q}t = \frac{1}{\sqrt{t}}\mathfrak{R}\frac{1}{t}, \qquad \mathfrak{R}t = \frac{1}{\sqrt{t}}\mathfrak{Q}\frac{1}{t}$$

genügen, worin die Quadratwurzeln mit solchen Zeichen zu nehmen sind, dass der reelle Theil positiv ist.

Aus dieser und der anderen von ihm aufgezeichneten Eigenschaft derselben Functionen, dass nemlich

$$\mathfrak{P}t = \mathfrak{Q}(t+i), \qquad \mathfrak{Q}t = \mathfrak{P}(t+i), \qquad \mathfrak{R}t = \sqrt{i}.\mathfrak{R}(t+i)$$

ist, scheint GAUSS den folgenden Satz abgeleitet zu haben:]

Es seien $\alpha, \mathfrak{b}, \gamma, \delta$ *ganze reelle Zahlen*, $\alpha\delta - \mathfrak{b}\gamma = 1$, $\frac{\alpha t - \mathfrak{b} i}{\delta + \gamma t i} = t'$.

Wir unterscheiden 6 *Fälle, jenachdem nach dem Modulus* 2

$$\begin{array}{cccccccc}
\alpha & \equiv & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
\mathfrak{b} & \equiv & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
\gamma & \equiv & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\delta & \equiv & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{array}$$

Es ist dann

$$\begin{array}{lcllllll}
h\mathfrak{P}t' & = & \mathfrak{P}t & \mathfrak{Q}t & \mathfrak{R}t & \mathfrak{R}t & \mathfrak{Q}t & \mathfrak{P}t \\
h\mathfrak{Q}t' & = & \mathfrak{Q}t & \mathfrak{P}t & \mathfrak{Q}t & \mathfrak{P}t & \mathfrak{R}t & \mathfrak{R}t \\
h\mathfrak{R}t' & = & \mathfrak{R}t & \mathfrak{R}t & \mathfrak{P}t & \mathfrak{Q}t & \mathfrak{P}t & \mathfrak{Q}t
\end{array}$$

$$h = \sqrt{i^{\lambda}}(\delta + \gamma t i)$$

[worin λ für die Factoren der drei Functionen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ im Allgemeinen verschiedene Werthe hat.]

Ist hier $t = \frac{\sqrt{d} + bi}{a}$, $t' = \frac{\sqrt{d} + b'i}{a'}$, $-d = bb - ac = b'b' - a'c'$, *so geht die Form* (a, b, c) *in* (a', b', c') *über durch die Transformation* $\binom{\delta, \ -\mathfrak{b}}{-\gamma, \ \alpha}$.

Zusammenhang zwischen den Formen des negativen Determinanten $-p$ *und den summatorischen Functionen.*

Sind nemlich die Formen (a, b, c) (A, B, C) *aequivalent, so ist die Function* f *in Betracht zu ziehen wo* $ft \equiv fu$ *so wol wenn* $\frac{t-u}{i}$ *ganze Zahl als wenn* $t = \frac{1}{u}$.

Jeder Classe entspricht dann ein bestimmter *Werth von* $f\frac{\sqrt{p} + bi}{a}$.

18.

[Mit dem Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels hat GAUSS einen andern in Verbindung gebracht, welcher ebenfalls wie jener von zwei gegebenen Grössen, die hier α und β bezeichnet werden sollen, ausgeht und auf eine solche Form zurückgeführt werden kann, dass viele Analogien mit jenem sich zeigen, wenn nemlich

$$4a'a' = (a+b)^2, \quad b'b' = ab, \quad \text{u.s.f.}$$
$$4a'\alpha' = (\alpha+\beta)^2, \quad b'\beta' = \alpha\beta, \quad \text{u.s.f.}$$

gesetzt wird. Ebenso wie die bisherigen Untersuchungen durch Einführung der die Gleichung $aa = bb+cc$ erfüllende Grösse c bedeutend übersichtlicher wurden, wird hier eine entsprechende Vereinfachung der Formeln erreicht, wenn man γ durch die Gleichung $a\alpha = b\beta+c\gamma$ und δ durch

$$bc(b\gamma-c\beta) = ca(a\gamma-c\alpha) = ab(b\alpha-a\beta) = abc\delta$$

so wie γ^n, δ^n durch dieselben Gleichungen, nachdem allen Zeichen der Index n gegeben ist, einführt. Unter den zwischen diesen Grössen bestehenden Relationen finden die folgenden bei der Untersuchung dieses Algorithmus vielfache Anwendung:

$$\frac{\alpha+\beta}{a+b} = \frac{\gamma-\delta}{c}, \quad \frac{\alpha-\beta}{a-b} = \frac{\gamma+\delta}{c}, \quad \frac{\alpha+\gamma}{a+c} = \frac{\beta+\delta}{b}, \quad \frac{\alpha-\gamma}{a-c} = \frac{\beta-\delta}{c},$$

$$\alpha' = \frac{1}{a'}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 = \frac{1}{c'}\left(\frac{\gamma-\delta}{2}\right)^2, \qquad \beta' = \frac{1}{b'}\alpha\beta$$

$$\gamma' = \frac{1}{c'}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 = \frac{1}{a'}\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right)^2, \qquad \delta' = \frac{1}{b'}\gamma\delta$$

$$\alpha\alpha+\delta\delta = \beta\beta+\gamma\gamma = \frac{a}{b}(\alpha\beta+\gamma\delta) = \frac{a}{c}(\alpha\gamma-\beta\delta) = a(\alpha'+\gamma')$$

$$\alpha\alpha-\gamma\gamma = \beta\beta-\delta\delta = \frac{b}{c}(\beta\gamma-\alpha\delta) = \frac{b}{a}(\alpha\beta-\gamma\delta) = b(\alpha'-\gamma')$$

$$\alpha\alpha-\beta\beta = \gamma\gamma-\delta\delta = \frac{c}{a}(\alpha\gamma+\beta\delta) = \frac{c}{b}(\beta\gamma+\alpha\delta) = 2c\sqrt{\alpha'\gamma'}$$

Die Grenzwerthe der Glieder in den sieben Reihen von Grössen $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ lassen sich auf diese vier zurückführen:

$$k = \mathrm{M}(a,b) = \lim a^{\mathrm{n}} = \lim b^{\mathrm{n}}$$

$$\sqrt{y} = e^{-\frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{M}(a,b)}{\mathrm{M}(a,c)}} = \lim \sqrt[2^n]{\frac{c^{\mathrm{n}}}{4a^{\mathrm{n}}}} = \frac{c}{4a}\cdot\frac{a}{a'}\cdot\sqrt{\frac{a'}{a''}}\cdot\sqrt[2^2]{\frac{a''}{a'''}}\cdot\sqrt[2^3]{\frac{a'''}{a''''}}\ \cdots\ \sqrt[2^{n-1}]{\frac{a^{\mathrm{n-1}}}{a^{\mathrm{n}}}}\ \cdots$$

$$\frac{\varkappa}{k} = \lim \sqrt[2^n]{\frac{\alpha^{\mathrm{n}}}{k}} = \lim \sqrt[2^n]{\frac{\beta^{\mathrm{n}}}{k}} = \frac{\beta}{b}\cdot\sqrt{\frac{b}{a}\,\frac{\alpha}{\beta}}\cdot\sqrt[2^2]{\frac{b'}{a'}\,\frac{\alpha'}{\beta'}}\cdot\sqrt[2^3]{\frac{b''}{a''}\,\frac{\alpha''}{\beta''}}\ \cdots\ \sqrt[2^n]{\frac{b^{\mathrm{n-1}}}{a^{\mathrm{n-1}}}\,\frac{\alpha^{\mathrm{n-1}}}{\beta^{\mathrm{n-1}}}}\ \cdots$$

$$\frac{\varkappa}{k}\sqrt{y}\,.\,\eta^{\pm 1} = \lim \sqrt[2^{n-1}]{\left[\sqrt{\frac{\gamma^{\mathrm{n}}}{4k}} \pm \sqrt{\frac{\delta^{\mathrm{n}}}{4k}}\right]}$$

Wenn α und β und alle Grössen a^{n}, b^{n}, positiv sind, so nehmen $\frac{a^{\mathrm{n}}}{b^{\mathrm{n}}}$ und $\frac{a^{\mathrm{n}}\alpha^{\mathrm{n}}}{b^{\mathrm{n}}\beta^{\mathrm{n}}}$ von den Werthen $\frac{a'}{b'}$ und $\frac{a'\alpha'}{b'\beta'}$ beständig bis zur Einheit ab; es ergeben also die vorstehenden Ausdrücke einen bestimmten Werth für $\varkappa$. Das Gleiche folgt für η, wenn γ, δ und alle c^{n} und b^{n} positiv sind, aus

$$\frac{\varkappa}{k}y^{\frac{1}{2}}\eta = \lim \sqrt[2^n]{\frac{\gamma^{\mathrm{n}}}{k}} = \lim \sqrt[2^n]{\frac{\delta^{\mathrm{n}}}{k}} = \frac{\delta}{b}\cdot\sqrt{\frac{b}{a}\,\frac{\gamma}{\delta}}\cdot\sqrt[2^2]{\frac{b'}{a'}\,\frac{\gamma'}{\delta'}}\cdot\sqrt[2^3]{\frac{b''}{a''}\,\frac{\gamma''}{\delta''}}\ \cdots\ \sqrt[2^n]{\frac{b^{\mathrm{n-1}}}{a^{\mathrm{n-1}}}\,\frac{\gamma^{\mathrm{n-1}}}{\delta^{\mathrm{n-1}}}}\ \cdots$$

wenn aber δ negativ ist aus der von Gauss angewandten Substitution

$$\sqrt{\frac{-\delta}{\gamma}} = \operatorname{tang} U\,.\sqrt{\frac{a}{b}} = \operatorname{tang} V\,.\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{(\operatorname{tang} U\,.\operatorname{tang} V)} = \operatorname{tang} U'$$
$$U + V = 2V'$$

$$\sqrt{\frac{-\delta'}{\gamma'}} = \operatorname{tang} 2U'.\sqrt{\frac{a'}{b'}} = \operatorname{tang} 2V'.\sqrt{\frac{b'}{a'}} = \sqrt{(\operatorname{tang} 2U'.\operatorname{tang} 2V')} = \operatorname{tang} 2U''$$
$$U' + V' = 2V''$$

$$\sqrt{\frac{-\delta''}{\gamma''}} = \operatorname{tang} 4U''.\sqrt{\frac{a''}{b''}} = \operatorname{tang} 4V''.\sqrt{\frac{b''}{a''}} = \sqrt{(\operatorname{tang} 4U''.\operatorname{tang} 4V'')} = \operatorname{tang} 4U'''$$
$$U'' + V'' = 2V'''$$

$$\sqrt{\frac{-\delta^{\mathrm{n}}}{\gamma^{\mathrm{n}}}} = \operatorname{tang} 2^n U^{\mathrm{n}}.\sqrt{\frac{a^{\mathrm{n}}}{b^{\mathrm{n}}}} = \operatorname{tang} 2^n V^{\mathrm{n}}.\sqrt{\frac{b^{\mathrm{n}}}{a^{\mathrm{n}}}} = \sqrt{(\operatorname{tang} 2^n U^{\mathrm{n}}.\operatorname{tang} 2^n V^{\mathrm{n}})} = \operatorname{tang} 2^n U^{\mathrm{n+1}}$$
$$U^{\mathrm{n}} + V^{\mathrm{n}} = 2V^{\mathrm{n+1}}$$

weil dann

$$\sin U^2 = \frac{b}{c}\,\frac{-\delta}{\alpha}, \qquad \cos U^2 = \frac{a}{c}\,\frac{\gamma}{\alpha}, \qquad aa\sin U^2 + bb\cos U^2 = ab\frac{\beta}{\alpha}$$

$$\sin V^2 = \frac{a}{c}\,\frac{-\delta}{\beta}, \qquad \cos V^2 = \frac{b}{c}\,\frac{\gamma}{\beta}, \qquad aa\cos V^2 + bb\sin V^2 = ab\frac{\alpha}{\beta}$$

ist, und diese Gleichungen auch gelten, wenn $a^{\mathrm{n}}, b^{\mathrm{n}}, c^{\mathrm{n}}, \alpha^{\mathrm{n}}, \beta^{\mathrm{n}}, \gamma^{\mathrm{n}}, \delta^{\mathrm{n}}, 2^n U^{\mathrm{n}}, 2^n V^{\mathrm{n}}$ statt $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \delta, U, V$ gesetzt werden, so dass also

$$\eta^{\pm 1} = \lim e^{\pm i U^{\mathrm{n}}} = \lim e^{\pm i V^{\mathrm{n}}} = e^{\pm i u}$$

sich ergibt.

Für $\delta = 0$ verschwinden alle δ^n und es wird

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c} = \,.\,. = \sqrt[2^n]{\frac{\alpha^n}{a^n}} = \sqrt[2^n]{\frac{\beta^n}{b^n}} = \sqrt[2^n]{\frac{\gamma^n}{c^n}} = \frac{\varkappa}{k}, \quad \sqrt[2^n]{\frac{\gamma^n}{a^n}\frac{a^n}{c^n}} = \eta = 1, \quad u = 0$$

Vergleicht man die Grenzwerthe $k, y, \varkappa, \eta, u$, zu denen man gelangt, wenn man bei der Bildung des combinirten Algorithmus von den Grössen a, b, α, β ausgegangen ist, mit den Grenzwerthen $k', y', \varkappa', \eta', u'$, zu denen man gelangt, wenn man bei solchem Algorithmus von den bestimmten zuvor erhaltenen Grössen a', b', α', β' als Anfangsglieder ausginge, so ersieht man unmittelbar, dass

$$k' = k, \quad y' = yy, \quad \frac{\varkappa'}{k'} = \frac{\varkappa\varkappa}{kk}, \quad \eta' = \eta\eta, \quad u' = 2u$$

sein muss und dass durch die nach diesem Gesetze gebildeten Gleichungen die den $a^n, b^n, \alpha^n, \beta^n$ entsprechenden Grenzwerthe $k^n, y^n, \varkappa^n, \eta^n, u^n$ sich ergeben

Aus den Gleichungen von der Form:

$$\frac{c'}{a'} = \frac{a-b}{a+b}, \quad \frac{c'}{a'}\frac{\gamma'}{\alpha'} = \left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2, \quad \frac{c'}{a'}\frac{\alpha'}{\gamma'} = \left(\frac{\gamma-\delta}{\gamma+\delta}\right)^2$$

folgt, dass, wenn alle Glieder des Algorithmus positiv werden, y, $y\eta$ und $\frac{1}{\eta}$ kleiner als die Einheit sind.

Die von Gauss angegebene Methode zur Bestimmung des Grenzwerthes für U^n und V^n und ebenso die Bestimmung von $\frac{\varkappa}{k}$ mit Zuhülfenahme jener Winkel führt bei Rechnungen mit Zahlen sehr rasch zum Ziele. Weniger bequem für Zahlenrechnungen sind die obigen Formeln zur Bestimmung eines reellen η und des zugehörigen $\frac{\varkappa}{k}$. Dieser Umstand wird die Veranlassung gewesen sein, wesshalb Gauss den Algorithmus:]

$$A' = \frac{A+B}{2}, \qquad B' = \frac{2ABa'}{b'(A+B)}$$
$$A'' = \frac{A'+B'}{2}, \qquad B'' = \frac{2A'B'a''}{b'(A'+B')}$$

u. s. f. [mit dem Grenzwerthe]

$$\frac{H}{k} = \frac{B}{b}\sqrt{\frac{bA}{aB}}\cdot\sqrt[4]{\frac{b'A'}{a'B'}}\cdot\sqrt[8]{\frac{b''A''}{a''B''}}\cdot\sqrt[16]{\frac{b'''A'''}{a'''B'''}}\ \cdot\cdot\cdot$$

[aufgestellt hat, welcher sich auf den obigen zurückführen lässt, wenn man $A = \alpha$, $B = \beta$ setzt, weil dann

$$A^n = \frac{b^{n+1}}{b'}\sqrt{\frac{\alpha^n}{\mathfrak{b}^n}}\cdot\sqrt{\alpha\mathfrak{b}}, \qquad B^n = \frac{b^{n+1}}{b'}\sqrt{\frac{\mathfrak{b}_n}{\alpha^n}}\cdot\sqrt{\alpha\mathfrak{b}}, \qquad H = x$$

wird. Die Bestimmung eines reellen η ist in Gauss Aufzeichnungen durch eine Lücke unvollendet gelassen, sie ergibt sich aber, wenn man aus $C = \gamma$, und $D = \delta$ denselben Algorithmus wie eben aus A und B bildet, denn dann sind:

$$C^n = \frac{b^{n+1}}{b'}\sqrt{\frac{\gamma^n}{\delta^n}}\sqrt{\gamma\delta}, \qquad D^n = \frac{b^{n+1}}{b'}\sqrt{\frac{\delta^n}{\gamma^n}}\sqrt{\gamma\delta}$$

$$\frac{H}{k}y^{\frac{1}{2}}\eta = \frac{D}{b}\cdot\sqrt{\frac{bC}{aD}}\cdot\sqrt[4]{\frac{b'C'}{a'D'}}\cdot\sqrt[8]{\frac{b''C''}{a''D''}}\cdot\sqrt[16]{\frac{b'''C'''}{a'''D'''}}\cdots$$

und diese Grössen C, D nähern sich rasch dem Werthe $\frac{k}{b'}\sqrt{\gamma\delta}$, während γ^n und δ^n zugleich entweder bedeutend wachsen oder abnehmen, sobald $\frac{x}{k}y^{\frac{1}{2}}\eta$ sich von der Einheit unterscheidet.]

19.

[Die Beziehungen zwischen den Differentialen der zu untersuchenden Grössen sind besonders einfach, wenn a und b ungeändert bleiben; es ergibt sich dann unmittelbar aus den Bedingungsgleichungen zwischen Gliedern mit gleichem Index, dass der Ausdruck $\frac{1}{2^n}\frac{1}{b^n}\sqrt{\frac{\mathfrak{b}^n\delta_n}{\alpha^n\gamma^n}}\cdot \mathrm{d}\log\frac{\delta^n}{\mathfrak{b}^n}$ seinen Werth nicht ändert, wenn darin der Reihe nach α, $\mathfrak{b}$, γ, δ statt $\mathfrak{b}$, γ, δ, α gesetzt wird. Die beiden so erhaltenen Ausdrücke können zu einem dem erstern entsprechenden Ausdruck für den Index $n+1$ vereinigt werden, der Werth dieses Ausdrucks ist also auch unabhängig vom Index n. Durch Übergang zur Grenze und durch Vergleichung mit den Differentialen der auf verschiedene Weise gebildeten Quotienten ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{1}{k}\,\mathrm{d}\log\eta &= \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\alpha\delta}{\mathfrak{b}\gamma}}\cdot\mathrm{d}\log\frac{\delta}{\alpha} = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{\mathfrak{b}\delta}{\alpha\gamma}}\cdot\mathrm{d}\log\frac{\delta}{\mathfrak{b}} = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\gamma\delta}{\alpha\mathfrak{b}}}\cdot\mathrm{d}\log\frac{\delta}{\gamma} = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\delta'}{\mathfrak{b}'}}\cdot\mathrm{d}\log\frac{\delta\delta}{\delta'}\\ &= \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\mathfrak{b}\gamma}{\alpha\delta}}\cdot\mathrm{d}\log\frac{\gamma}{\mathfrak{b}} = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{\alpha\gamma}{\mathfrak{b}\delta}}\cdot\mathrm{d}\log\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\alpha\mathfrak{b}}{\gamma\delta}}\cdot\mathrm{d}\log\frac{\alpha}{\mathfrak{b}} = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\mathfrak{b}'}{\delta'}}\cdot\mathrm{d}\log\frac{\mathfrak{b}'}{\mathfrak{b}\mathfrak{b}}\end{aligned}$$

eine Relation, welche also immer gilt, wenn die Indices der a, b, c, α, $\mathfrak{b}$, γ, δ, η um gleich viel Einheiten vermehrt werden. Hieraus folgt der von Gauss aufgezeichnete Satz:]

$$\int\frac{\mathrm{d}U}{\sqrt{(aa\sin U^2 + bb\cos U^2)}} = \int\frac{\mathrm{d}V}{\sqrt{(aa\cos V^2 + bb\sin V^2)}} = \frac{u}{k}$$

[Mit Hülfe der Gleichung für $d\log\frac{\beta'}{\beta\beta}$ lassen sich durch wiederholte Anwendung derselben unmittelbar die Reihen für die Differentiale der einzelnen Grössen α, β, γ, δ aufstellen, für ein negatives δ entsteht:

$$\frac{k}{2}\frac{d\log\frac{\alpha}{\varkappa}}{du}+2c'\sin 2V' = \frac{k}{2}\frac{d\log\frac{\beta}{\varkappa}}{du} = \frac{k}{2}\frac{d\log\frac{\gamma}{\varkappa}}{du}+a\frac{\sin V}{\cos U} = \frac{k}{2}\frac{d\log\frac{\delta}{\varkappa}}{du}-b\frac{\cos V}{\sin U}$$
$$= c'\sin 2V'+c''\sin 2^2V''+c'''\sin 2^3V'''+\ldots]$$

20.

[Die Differentiale zweiter Ordnung, welche auf die Grösse η als einzige unabhängig Veränderliche sich beziehen, können unmittelbar durch Differentiation der Differentialgleichung erster Ordnung hergeleitet und die Bestimmung ihrer Werthe in der Weise dargestellt werden, dass die Ausdrücke von der Form

$$\frac{d}{d\log\eta}\left[\frac{d\log\frac{\alpha}{\beta}}{d\log\eta}\right]+\frac{1}{2}\frac{d\log\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}}{d\log\eta}\cdot\frac{d\log\frac{\alpha}{\beta}}{d\log\eta}$$

für die mit irgend welchem gemeinsamen Index behafteten α, β, γ, δ verschwinden, in welcher Reihenfolge die α, β, γ, δ auch darin eingesetzt sein mögen. Multiplicirt man Zähler und Nenner unter dem zweimal zu differentiirenden Logarithmus mit β, ersetzt $\alpha\beta$ durch $b'\beta'$ und die Derivirten erster Ordnung durch ihre Werthe so erhält man für zwei aufeinander folgende Indices:

$$\frac{dd\log\frac{\beta'}{\beta\beta}}{(d\log\eta)^2}+2\frac{a'c'}{kk}\frac{\delta'}{\beta'}-2\frac{ac}{kk}\frac{\delta}{\beta}-\frac{1}{2}\frac{cc}{kk}=0$$

und hieraus durch wiederholte Anwendung dieser Gleichung und mit Zuhülfe nahme der in Art. 13 für $d\log M(a,b)$ gefundenen Reihe die Gleichung

$$\frac{d\log\frac{b}{k}}{d\log y}=\frac{dd\log\frac{\alpha}{\varkappa}}{(d\log\eta)^2}-\frac{1}{2}\frac{ac}{kk}\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{dd\log\frac{\beta}{\varkappa}}{(d\log\eta)^2}+\frac{1}{2}\frac{ac}{kk}\frac{\delta}{\beta}$$
$$=\frac{dd\log\frac{\gamma}{\varkappa}}{(d\log\eta)^2}-\frac{1}{2}\frac{ac}{kk}\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{dd\log\frac{\delta}{\varkappa}}{(d\log\eta)^2}+\frac{1}{2}\frac{ac}{kk}\frac{\beta}{\delta}$$

welche ihre Gültigkeit behält, wenn $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varkappa, y, \eta$ mit irgend einem gemeinsamen von Null verschiedenen Index behaftet werden.

Durch die Vereinigung dieses Resultats mit der im vorigen Artikel gefundenen Entwickelung von $\mathrm{d}\log\frac{\alpha}{\varkappa}$ ergibt sich die von Gauss gefundene Werthausmittelung des Integrals:]

$$\int\sqrt{(aa\sin U^2+bb\cos U^2)}\,\mathrm{d}U=\int\frac{aabb\,\mathrm{d}V}{(aa\cos V^2+bb\sin V^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$=\frac{u}{k}\{a'a'-2c''c''-4c'''c'''-8c''''c''''-\ldots\}$$
$$+c'\sin 2V'-c''\sin 4V''-c'''\sin 8V'''-c''''\sin 16V''''-\ldots$$

21.

[Bildet man die Gleichungen zwischen den Derivirten der α, β, γ, δ nach der Grösse y als unabhängig Veränderliche, so müssen dieselben Coëfficienten dieser Derivirten entstehen, wie in den Gleichungen für die Differentiale nach η und da die letztern Gleichungen in solche Form gebracht werden können, dass die Verhältnisse zwischen den Derivirten von Quotienten bestimmt werden, so müssen die erwähnten Coëfficienten auch diesen Derivirten umgekehrt proportional sein. Ersetzt man sie durch deren reciproken Werthe, so ersieht man, dass auch die übrigen Glieder jener Gleichungen durch solche Derivirten dargestellt werden können und zwar so, dass der Ausdruck von der Form

$$\frac{\left[\dfrac{\mathrm{d}\log\frac{\delta}{\beta}}{\mathrm{d}\log y}\right]}{\left[\dfrac{\mathrm{d}\log\frac{\delta}{\beta}}{\mathrm{d}\log\eta}\right]}-\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}\log\frac{\alpha\beta}{\varkappa\varkappa}}{\mathrm{d}\log\eta}$$

für einen beliebigen gemeinsamen Index der Zeichen α, β, γ, δ, $\varkappa$, y, η seinen Werth nicht ändert, in welcher Reihenfolge man auch die Grössen α, β, γ, δ mit einander vertauscht. Vergleicht man diesen Ausdruck, welcher sich auf $\frac{\delta}{\beta}$, $\frac{\alpha\gamma}{\varkappa\varkappa}$, η, y bezieht, mit demjenigen für $\frac{\delta'}{\beta'}=\frac{\gamma\delta}{\alpha\beta}$, $\frac{\alpha'\gamma'}{\varkappa'\varkappa'}$, $\eta'=\eta\eta$, $y'=yy$ und beachtet, dass nach Art. 19

$$\left[\frac{\mathrm{d}\log\frac{\alpha}{\beta}}{\mathrm{d}\log\eta}\right]^2=\frac{\mathrm{d}\log\frac{\gamma'}{\beta'}}{\mathrm{d}\log\eta}\cdot\frac{\mathrm{d}\log\frac{\alpha'}{\beta'}}{\mathrm{d}\log\eta},\qquad\left[\frac{\mathrm{d}\log\frac{\delta}{\gamma}}{\mathrm{d}\log\eta}\right]^2=\frac{\mathrm{d}\log\frac{\delta'}{\alpha'}}{\mathrm{d}\log\eta}\cdot\frac{\mathrm{d}\log\frac{\delta'}{\gamma'}}{\mathrm{d}\log\eta}$$

ist, so ergibt sich, dass der Werth jenes Ausdrucks auch unabhängig von dem Index der Zeichen α, β, γ, δ, $\varkappa$, y, η und, wie aus den Grenzwerthen folgt, gleich Null sein muss.

Um die Derivirte nach y von jeder einzelnen der vier Grössen α, β, γ, δ zu bestimmen, wird zunächst erforderlich sein, jenen Ausdruck so zu verwandeln, dass er nur zwei der Grössen enthält. Dies kann z. B. mit Hülfe der im vorhergehenden Artikel bestimmten nach η genommenen zweiten Derivirten der Quotienten geschehen, so dass also alle Ausdrücke

$$\frac{d\log\frac{\alpha}{\beta}}{d\log y}-\frac{dd\log\frac{\alpha}{\beta}}{(d\log\eta)^2}-\frac{1}{2}\frac{d\log\frac{\alpha\beta}{\varkappa\varkappa}}{d\log\eta}\cdot\frac{d\log\frac{\alpha}{\beta}}{d\log\eta}$$

verschwinden, in welcher Reihenfolge α, β, γ, δ mit einander auch vertauscht werden und welcher gemeinsame Index ihnen und den Zeichen y, $\varkappa$, η gegeben werde. Ersetzt man $\frac{\alpha}{\beta}$ durch $\frac{b'\beta'}{\beta\beta}$, $\alpha\beta$ durch $b'\beta'$ und nach dem vorhergehenden Artikel

$$\frac{d\log\frac{b'}{k}}{2d\log y}\quad\text{durch}\quad\frac{dd\log\frac{\beta'}{\varkappa}}{(2d\log\eta)^2}+\frac{1}{2}\left[\frac{d\log\frac{\beta\beta}{\beta'}}{d\log\eta}\right]^2$$

so ersieht man, dass der Ausdruck

$$\frac{d\log\frac{\beta}{\varkappa}}{d\log y}-\frac{dd\log\frac{\beta}{\varkappa}}{(d\log\eta)^2}-\frac{1}{2}\left[\frac{d\log\frac{\beta}{\varkappa}}{d\log\eta}\right]^2$$

seinem Werthe nach ungeändert bleibt, nicht nur, wie eben gefunden, wenn β mit α oder γ oder δ vertauscht wird, sondern auch wenn diesen Grössen zugleich mit y, $\varkappa$, η ein beliebiger gemeinsamer Index gegeben wird. Für einen beständig wachsenden Index verschwindet der Werth des Ausdrucks und durch Multiplication mit $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta}{\varkappa}}$ entsteht demnach

$$\frac{d\sqrt{\frac{\alpha}{\varkappa}}}{d\log y}-\frac{dd\sqrt{\frac{\alpha}{\varkappa}}}{(d\log\eta)^2}=0$$

als partielle Differentialgleichung für jede der Grössen α, β, γ, δ.]

22.

[Alle Glieder des Algorithmus sind ihrem Werthe nach abhängig von vier Grössen, als solche dürfen a, b, α, β angenommen werden, aber auch k, y, $\varkappa$, η weil diese unabhängig von einander sich ändern können. Sämmtliche Gleichungen zwischen den Gliedern der Reihen lassen sich in solche Form bringen, dass sie sowol in Bezug auf a, b, c, . . a^n, b^n, c^n, k als auch in Bezug auf

$$\frac{\alpha}{k},\ \frac{\beta}{k},\ \frac{\gamma}{k},\ \frac{\delta}{k}\ \ldots\ \sqrt[2^n]{\frac{\alpha^n}{k}},\ \sqrt[2^n]{\frac{\beta^n}{k}},\ \sqrt[2^n]{\frac{\gamma^n}{k}},\ \sqrt[2^n]{\frac{\delta^n}{k}},\ \frac{\varkappa}{k}$$

homogen sind. Die Verhältnisse zwischen diesen letzteren hangen also nicht von k und $\varkappa$, sondern allein von y und η ab, wir können also

$$\alpha = \varkappa P(y,\eta)^2, \qquad \beta = \varkappa Q(y,\eta)^2, \qquad \gamma = \varkappa R(y,\eta)^2, \qquad \delta = \varkappa S(y,\eta)^2$$

setzen und aus den Betrachtungen in Art. 18 folgt dann, dass diese Functionen P, Q, R, S dieselben bleiben, wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varkappa, y, \eta$ mit einem beliebigen Index versehen werden. Aus demselben Artikel folgt auch, mit Benutzung der in Artikel 15 gebrauchten Bezeichnung, für die mit einem gleichen Index behafteten $a, b. c, y$

$$\begin{aligned} P(y,1) &= py = \sqrt{\tfrac{a}{k}} = \sqrt{\tfrac{a}{\mathrm{M}(a,b)}} \\ Q(y,1) &= qy = \sqrt{\tfrac{b}{k}} \\ R(y,1) &= ry = \sqrt{\tfrac{c}{k}} \\ S(y,1) &= 0 \end{aligned}$$

ferner als Gleichungen, welche denjenigen entsprechen, durch die die Grössen γ und δ bestimmt wurden:

$$\begin{aligned} qqrr(qqRR-rrQQ) &= rrpp(ppRR-rrPP) \\ = ppqq(qqPP-ppQQ) &= ppqqrrSS \end{aligned}$$

$$\frac{PP+QQ}{p(yy)} = \frac{RR-SS}{r(yy)}, \qquad \frac{PP-QQ}{r(yy)} = \frac{RR+SS}{p(yy)}$$

$$\frac{PP+RR}{p(\sqrt{y})} = \frac{QQ+SS}{q(\sqrt{y})}, \qquad \frac{PP-RR}{q(\sqrt{y})} = \frac{QQ-SS}{p(\sqrt{y})}$$

und als Gleichungen, die das Bildungsgesetz des Algorithmus darstellen:

$$\begin{aligned} 2p(yy).P(yy,\eta\eta) &= PP+QQ, & 2p(yy).R(yy,\eta\eta) &= RR+SS \\ 2r(yy).R(yy,\eta\eta) &= PP-QQ, & 2r(yy).P(yy,\eta\eta) &= RR-SS \\ q(yy).Q(yy,\eta\eta) &= PQ, & q(yy).S(yy,\eta\eta) &= RS \end{aligned}$$

worin alle Functionen, neben denen kein Argument geschrieben ist, sich auf die einfachen y und η beziehen.

Zur Berechnung der Werthe der Functionen, welche gegebenen Werthen von $\frac{a}{b} = \frac{pp}{qq}$ und U oder V zugehören, erhält man aus der GAUSSischen Formel für H oder $\varkappa$, wenn man zur Abkürzung

$$(a^{\mathrm{n}} \sin 2^n U^{\mathrm{n}})^2 + (b^{\mathrm{n}} \cos 2^n U^{\mathrm{n}})^2 = b^{\mathrm{n}} b^{\mathrm{n}} \Delta^{\mathrm{n}} \Delta^{\mathrm{n}}$$

setzt, die Gleichungen:

$$Q = q.\sqrt{\Delta}.\sqrt[4]{\Delta'}.\sqrt[8]{\Delta''}.\sqrt[16]{\Delta'''}\ldots$$

$$P = \frac{p}{q} Q \frac{1}{\Delta}$$

$$R = \frac{r}{q} Q \frac{\cos U}{\Delta}$$

$$S = \frac{p}{r} Q \frac{\sin U}{\Delta} i$$

Die Bestimmung der Grössen $k, y, \varkappa, \eta$ als Grenzwerthe lässt erkennen, dass, bei geeigneter hier noch zulässiger Wahl der Vorzeichen der Functionen P, Q, R, S, für bis zur Null abnehmende Werthe von $y, y\eta, \frac{1}{\eta}$ die Ausdrücke

$$P(y,\eta), \qquad Q(y,\eta). \qquad \frac{R(y,\eta)}{y^{\frac{1}{4}}\eta^{\frac{1}{2}}}, \qquad \frac{S(y,\eta)}{y^{\frac{1}{4}}\eta^{\frac{1}{2}}}$$

sich dem Grenzwerthe Eins nähern, dass aber für ein beständig abnehmendes y und ein endliches reelles u die Ausdrücke

$$P(y,e^{2iu}), \qquad Q(y,e^{2iu}), \qquad \frac{R(y,e^{2iu})}{2y^{\frac{1}{4}}\cos u}, \qquad \frac{S(y,e^{2iu})}{i2y^{\frac{1}{4}}\sin u}$$

jenen Grenzwerth haben.

Die Functionen P, Q, R, iS haben reelle Werthe für ein complexes $\eta^{\frac{1}{2}}$ von der Form e^{iu} und bleiben bis auf iS, welches nur sein Zeichen wechselt, ungeändert, wenn man u in $-u$ verwandelt, es ist also

$$\frac{P(y,\frac{1}{\eta})}{P} = \frac{Q(y,\frac{1}{\eta})}{Q} = \frac{R(y,\frac{1}{\eta})}{R} = \frac{-S(y,\frac{1}{\eta})}{S} = 1]$$

23.

[Bildet man denselben Algorithmus wie vorher für $\alpha, \beta, \gamma, \delta,$ jetzt für A, B, C, D und macht $A = \gamma$, $B = \delta$, so wird offenbar für jedes n, $A^{\mathrm{n}} = \gamma^{\mathrm{n}}$, $B^{\mathrm{n}} = \delta^{\mathrm{n}}$, $C^{\mathrm{n}} = \alpha^{\mathrm{n}}$, $D^{\mathrm{n}} = \beta^{\mathrm{n}}$ und also für die Grenzwerthe K, H, welche den

$\varkappa$, η entsprechen: $\frac{\varkappa}{k} = \frac{K}{k}\cdot y^{\frac{1}{2}}\cdot H$, $\frac{\varkappa}{k} y^{\frac{1}{2}}\eta = \frac{K}{k}$, demnach bestehen die Functionalgleichungen

$$\frac{R(y,\frac{1}{y\eta})}{P} = \frac{S(y,\frac{1}{y\eta})}{Q} = \frac{P(y,\frac{1}{y\eta})}{R} = \frac{Q(y,\frac{1}{y\eta})}{S} = y^{-\frac{1}{4}}\eta^{-\frac{1}{2}}$$

Macht man aber $A = \mathfrak{b}$, $B = \alpha$, so wird $C = -\delta$, $D = -\gamma$ und für jedes n, welches gleich oder grösser als Eins ist: $A^n = \alpha^n$, $B^n = \mathfrak{b}^n$, $C^n = \gamma^n$, $D = \delta^n$, man erhält also:

$$\frac{Q(y,-\eta)}{P} = \frac{P(y,-\eta)}{Q} = -\frac{iS(y,-\eta)}{R} = -\frac{iR(y,-\eta)}{S} = 1$$

Setzt man endlich $2\sqrt{A''} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\mathfrak{b}}$, $2\sqrt{C''} = \sqrt{\alpha} - \sqrt{\mathfrak{b}}$, so wird für jedes $n \geqq 1$

$$2A^{n+1} = \sqrt{a^n\alpha^n} + \sqrt{b^n\mathfrak{b}^n}, \qquad 2C^{n+1} = \sqrt{a^n\alpha^n} - \sqrt{b^n\mathfrak{b}^n}$$
$$2B^{n+1} = \sqrt{b^n\alpha^n} + \sqrt{a^n\mathfrak{b}^n}, \qquad 2D^{n+1} = \sqrt{b^n\alpha^n} - \sqrt{a^n\mathfrak{b}^n}$$
$$2\sqrt{A^{n+2}} = \sqrt{\alpha^n} + \sqrt{\mathfrak{b}^n}, \qquad 2\sqrt{C^{n+2}} = \sqrt{\alpha^n} - \sqrt{\mathfrak{b}^n}, \qquad 4A^{n+1}C^{n+1} = c^n\gamma^n$$
$$(\frac{K}{k})^4 = \frac{\varkappa}{k}, \qquad HH = \eta$$

also:

$$2P(y^4,\eta\eta) = P + Q, \qquad 2R(y^4,\eta\eta) = P - Q$$
$$2P(yy,\eta)^2 = pP + qQ, \qquad 2R(yy,\eta)^2 = pP - qQ$$
$$2Q(yy,\eta)^2 = qP + pQ, \qquad 2S(yy,\eta)^2 = qP - pQ$$

$$p(\sqrt{y}).P(\sqrt{y},\eta) = PP + RR, \quad q(\sqrt{y}).P(\sqrt{y},\eta) = QQ - SS, \quad r(\sqrt{y}).R(\sqrt{y},\eta = 2PR$$
$$q(\sqrt{y}).Q(\sqrt{y},\eta) = PP - RR, \quad p(\sqrt{y}).Q(\sqrt{y},\eta) = QQ + SS, \quad r(\sqrt{y}).S(\sqrt{y},\eta = 2QS$$

wo wieder diejenigen Functionen, denen keine Argumente beigefügt sind, sich auf die einfachen y und η beziehen.

Der so erhaltene neue Algorithmus, bei welchem man von den Functionen P, Q, R, S mit den Argumenten y, η übergeht zu den Functionen mit den Argumenten yy, η, ist offenbar der von Gauss in Art. 16 der *Determinatio attractionis quam in punctum quodvis positionis datae exerceret planeta etc.* angewandte.

Die Relationen zwischen den Functionen, welche sich auf die beiden beliebigen Werthe ξ, η des zweiten Arguments beziehen, und denjenigen Functionen mit den zweiten Argumenten $\xi\eta$ und $\frac{\xi}{\eta}$ lassen sich auf verschiedene Weise mit

Hülfe des für α, β aufgestellten Algorithmus ableiten. Die Methode, für welche die Entwickelungen am wenigsten weitläufig sind, ist wol diejenige, welche sich auf Functionen bezieht, in denen neben den zweiten Argumenten $\xi\eta$ und $\frac{\xi}{\eta}$ als erstes Argument auftritt das Quadrat von dem ersten Argument der Functionen, welche ξ, η als zweites Argument haben.]

24.

[Bei dem Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels ergeben die durch Rückwärts-Verlängerung entstehenden Glieder mit Hülfe der Gleichungen

$$\frac{a_{\rm n}}{{}^{\rm n}a} = \frac{c_{\rm n}}{{}^{\rm n}c} = \frac{b_{\rm n}}{{}^{\rm n}b} = \frac{1}{2^{\rm n}}$$

die Glieder $a_{\rm n}$, $c_{\rm n}$, $b_{\rm n}$ die ebenso von a, c abhangen, wie $a^{\rm n}$, $b^{\rm n}$, $c^{\rm n}$ von a, b. Vertauscht man dem entsprechend bei dem combinirten Algorithmus gleichzeitig b mit c und β mit γ, lässt α ungeändert, so wechselt δ nur sein Zeichen, wir erhalten also einen Algorithmus, der ebenso von a, c, α, γ abhängt wie der bisher betrachtete von a, b, α, β wenn wir setzen

$$\alpha_0 = \alpha, \qquad \gamma_0 = \beta, \qquad \beta_0 = \gamma, \qquad \delta_0 = -\delta$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{a_1}\left(\frac{\alpha_0+\gamma_0}{2}\right)^2 = \frac{1}{b_1}\left(\frac{\beta_0-\delta_0}{2}\right)^2, \qquad \gamma_1 = \frac{1}{c_1}\alpha_0\gamma_0$$

$$\beta_1 = \frac{1}{b_1}\left(\frac{\alpha_0-\gamma_0}{2}\right)^2 = \frac{1}{a_1}\left(\frac{\beta_0+\delta_0}{2}\right)^2, \qquad \delta_1 = \frac{1}{c_1}\beta_0\delta_0$$

und so fort bis zu den Grenzwerthen:

$$\lim a_{\rm n} = \lim c_{\rm n} = \mathrm{M}(a,c) = l$$

$$\lim \sqrt[2^n]{\frac{b_{\rm n}}{4l}} = e^{-\frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{M}(a,c)}{\mathrm{M}(a,b)}} = \sqrt{z}$$

$$\lim \sqrt[2^n]{\frac{\alpha_{\rm n}}{l}} = \lim \sqrt[2^n]{\frac{\gamma_{\rm n}}{l}} = \frac{\lambda}{l}$$

$$\sqrt[2^{n-1}]{\left[\sqrt{\frac{\beta_{\rm n}}{4l}} \pm \sqrt{\frac{\delta_{\rm n}}{4l}}\right]} = \frac{\lambda}{l} z^{\frac{1}{4}} \zeta^{\pm 1}$$

Es sind also α, γ, β, $-\delta$ ebensolche Functionen von l, z, λ, ζ, wie α, β, γ, δ von k, y, $\varkappa$, η und da $\frac{l}{\lambda}$ allein von y und η abhängt und zwar auf dieselbe Weise wie $\frac{\lambda}{l}$ von η und y, so muss für $\frac{\log y}{\pi} = \frac{\pi}{\log z}$,

$$\frac{P(z,\zeta)}{P(y,\eta)} = \frac{R(z,\zeta)}{Q(y,\eta)} = \frac{Q(z,\zeta)}{R(y,\eta)} = \frac{iS(z,\zeta)}{S(y,\eta)} = T(y,\eta) = \frac{1}{T(z,\zeta)}$$

sein, wobei ausser T auch noch ζ als Function von y, η zu bestimmen ist und zwar ζ so, dass y, η, ζ der Reihe nach mit z, ζ, η vertauscht werden können, also so, dass

$$\frac{\log y}{\pi} = \frac{\pi}{\log z} = \varphi[(\log\eta)^2, (\log\zeta)^2] = \frac{1}{\varphi[(\log\zeta)^2, (\log\eta)^2]}$$

wird.

Für die P, Q, R als Quadratwurzeln aus $\frac{\alpha}{\varkappa}$, $\frac{\beta}{\varkappa}$, $\frac{\gamma}{\varkappa}$ sind hier gleiche Vorzeichen genommen, weil nach Art. 18 η und ζ zugleich den Werth 1 annehmen und also nach Art. 22 und 17

$$\frac{P(z,1)}{P(y,1)} = \frac{R(z,1)}{Q(y,1)} = \frac{Q(z,1)}{R(y,1)} = T(y,1) = \frac{1}{T(z,1)} = \frac{pz}{py} = \frac{rz}{qy} = \frac{qz}{ry} = \sqrt{\frac{-\log y}{\pi}} = \sqrt{\frac{\pi}{-\log z}}$$

wird und hier dasjenige Vorzeichen der Quadratwurzel gilt, für welches der reelle Theil positiv wird.

Lässt man die zweiten Argumente ζ, η sich in ihre reciproken Werthe verwandeln, so bleiben P, Q, R ungeändert und S wechselt nur sein Zeichen, es ist also

$$T(y,\eta) = T\left(y, \frac{1}{\eta}\right)$$

und eine entsprechende Bedingung gilt für y als Function von η, ζ, was durch die oben aufgestellte Form der φ Function angedeutet sein soll.

Transformirt man in der Gleichung, durch welche T eingeführt ist, die P, Q, R, S in der Weise, dass die Argumente z, ζ, y, η einmal in z, $-\zeta$, y, $\frac{1}{y\eta}$ dann in $\sqrt{z}$, ζ, yy, $\eta\eta$ übergehen, und berücksichtigt, dass

$$\frac{p\sqrt{z}}{pyy} = \frac{r\sqrt{z}}{qyy} = \frac{q\sqrt{z}}{ryy} = \sqrt{\frac{-\log yy}{\pi}} = \sqrt{\frac{\pi}{-\log\sqrt{z}}}$$

ist, so erhält man

$$\frac{Q(z,-\zeta)}{R\left(y,\frac{1}{y\eta}\right)} = \frac{iS(z,-\zeta)}{S\left(y,\frac{1}{y\eta}\right)} = \frac{P(z,-\zeta)}{R\left(y,\frac{1}{y\eta}\right)} = \frac{R(z,-\zeta)}{Q\left(y,\frac{1}{y\eta}\right)} = y^{\frac{1}{4}}\eta^{\frac{1}{2}}\,T(y,\eta) = T\left(y,\frac{1}{y\eta}\right)$$

$$\frac{P(\sqrt{z},\zeta)}{P(yy,\eta\eta)} = \frac{R(\sqrt{z},\zeta)}{Q(yy,\eta\eta)} = \frac{Q(\sqrt{z},\zeta)}{R(yy,\eta\eta)} = \frac{iS(\sqrt{z},\zeta)}{S(yy,\eta\eta)} = 2\sqrt{\frac{\pi}{-\log yy}}\,.\,T(y,\eta)^2 = T(yy,\eta\eta)$$

$$\frac{\log y}{\pi} = \frac{\pi}{\log z} = \varphi[(\log\eta)^2,\ (\log\zeta)^2] = \varphi[(\log\eta)^2,\ (\pi i + \log\zeta)^2]$$

$$\frac{\log yy}{\pi} = \frac{\pi}{\log\sqrt{z}} = 2\varphi[(\log\eta)^2,\ \log\zeta)^2] = \varphi[(\log\eta\eta)^2,\ (\log\zeta)^2]$$

und daher

$$T(y,\eta) = \sqrt{\frac{-\log y}{\pi}}\,.\,e^{\frac{(\log\eta)^2}{4\log y}}$$

$$\frac{\log y}{\pi} = \frac{\pi}{\log z} = \pm i.\frac{\log\eta}{\log\zeta}$$

Worin das Vorzeichen der Quadratwurzel so zu nehmen, dass der reelle Theil derselben positiv wird, das Vorzeichen von $\pm i\frac{\log\eta}{\log\zeta}$ aber so, dass der reelle Theil dieses Ausdrucks negativ wird.]

25.

[Aus den Functionalgleichungen für P, Q, R, S, welche bei der Verwandlung des zweiten Arguments η in seinen reciproken Werth, bei der Zeichenänderung desselben und bei der Multiplication desselben mit dem ersten Argument y Statt finden, so wie aus den bekannten Werthen der Functionen für $\eta = 1$ oder auch aus der in Art. 21 für die allgemeinen Functionen aufgestellten partiellen Differentialgleichung folgt, dass wenn P, Q, R, S sich in Reihen nach ganzen wachsenden Potenzen von $y^{\frac{1}{4}}$ und $\eta^{\frac{1}{2}}$ entwickeln lassen, diese

$$P(y,\eta) = 1 + y(\eta+\eta^{-1}) + y^4(\eta^2+\eta^{-2}) + y^9(\eta^3+\eta^{-3}) + y^{16}(\eta^4+\eta^{-4}) + + .$$

$$Q(y,\eta) = 1 - y(\eta+\eta^{-1}) + y^4(\eta^2+\eta^{-2}) - y^9(\eta^3+\eta^{-3}) + y^{16}(\eta^4+\eta^{-4}) - + .$$

$$R(y,\eta) = y^{\frac{1}{4}}(\eta^{\frac{1}{2}}+\eta^{-\frac{1}{2}}) + y^{\frac{9}{4}}(\eta^{\frac{3}{2}}+\eta^{-\frac{3}{2}}) + y^{\frac{25}{4}}(\eta^{\frac{5}{2}}+\eta^{-\frac{5}{2}}) + y^{\frac{49}{4}}(\eta^{\frac{7}{2}}+\eta^{-\frac{7}{2}}) + + .$$

$$S(y,\eta) = y^{\frac{1}{4}}(\eta^{\frac{1}{2}}-\eta^{-\frac{1}{2}}) - y^{\frac{9}{4}}(\eta^{\frac{3}{2}}-\eta^{-\frac{3}{2}}) + y^{\frac{25}{4}}(\eta^{\frac{5}{2}}-\eta^{-\frac{5}{2}}) - y^{\frac{49}{4}}(\eta^{\frac{7}{2}}-\eta^{-\frac{7}{2}}) + - .$$

sein müssen.

Dass durch die Reihen P, Q multiplicirt in den Grenzwerth $\sqrt{H}$ die Grössen $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$ dargestellt werden, auf welche der von Gauss benutzte am Schluss des Art. 18 wiedergegebene Algorithmus sich bezieht, ist im handschriftlichen Nachlasse als besonderer Lehrsatz ausgesprochen und zugleich bemerkt, dass]

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}U = \frac{y^{\frac{1}{8}}\sin\tfrac{1}{2}u - y^{\frac{9}{8}}\sin\tfrac{3}{2}u + y^{\frac{25}{8}}\sin\tfrac{5}{2}u - y^{\frac{49}{8}}\sin\tfrac{7}{2}u + \ldots}{y^{\frac{1}{8}}\cos\tfrac{1}{2}u + y^{\frac{9}{8}}\cos\tfrac{3}{2}u + y^{\frac{25}{8}}\cos\tfrac{5}{2}u + y^{\frac{49}{8}}\cos\tfrac{7}{2}u + \ldots}$$

$$\operatorname{tang}U' = \frac{y^{\frac{1}{4}}\sin u - y^{\frac{9}{4}}\sin 3u + y^{\frac{25}{4}}\sin 5u - y^{\frac{49}{4}}\sin 7u + \ldots}{y^{\frac{1}{4}}\cos u + y^{\frac{9}{4}}\cos 3u + y^{\frac{25}{4}}\cos 5u + y^{\frac{49}{4}}\cos 7u + \ldots}$$

$$\operatorname{tang}2U'' = \frac{y^{\frac{1}{2}}\sin 2u - y^{\frac{9}{2}}\sin 6u + y^{\frac{25}{2}}\sin 10u - y^{\frac{49}{2}}\sin 14u + \ldots}{y^{\frac{1}{2}}\cos 2u + y^{\frac{9}{2}}\cos 6u + y^{\frac{25}{2}}\cos 10u + y^{\frac{49}{2}}\cos 14u + \ldots}$$

[wird. Für den Satz, dass die Reihen P, Q den Functionalgleichungen genügen, welche den besprochenen Algorithmus bestimmen, und welche oben in Art. 22 zusammengestellt sind, hat GAUSS ausser dem Beweise, der sich auf die Verwandlung jener Reihen in unendliche Producte stützt und der in der unten folgenden Abhandlung 'hundert Theoreme über die neue Transscendente' enthalten ist, wahrscheinlich auch noch einen andern Beweis geführt, wie er sich leicht aus den oben in Art. 16 gemachten Andeutungen ergibt.]

26.

[Bezeichnen wir, abweichend von der in den vorhergehenden Artikeln befolgten Weise, die ersten Derivirten der Functionen $P(y,\eta)$, $Q(y,\eta)$, $R(y,\eta)$, $S(y,\eta)$ nach der Grösse $\log\eta$ als unabhängige Veränderliche mit P', Q', R', S' und die zweiten Derivirten nach derselben Grösse mit P'', Q'', R'', S'', ferner die ersten Derivirten der Functionen py, qy, ry nach $\log y$ als unabhängig Veränderliche mit p', q', r', so folgt aus den für a, b, c, α, $\mathfrak{b}$, γ, δ gefundenen Differentialgleichungen:

$$\frac{qr'-rq'}{qrp^4} = \frac{pr'-rp'}{rpq^4} = \frac{qp'-pq'}{pqr^4} = \tfrac{1}{4}$$

$$\frac{PS'-SP'}{ppQR} = \frac{QS'-SQ'}{qqPR} = \frac{RS'-SR'}{rrPQ} = \frac{QR'-RQ'}{ppPS} = \frac{PR'-RP'}{qqQS} = \frac{QP'-PQ'}{rrRS} = 1$$

$$-4\frac{Q'}{Q} = (ry)^2.\frac{S(yy,\eta\eta)}{Q(yy,\eta\eta)} + (ryy)^2.\frac{S(y^4,\eta^4)}{Q(y^4,\eta^4)} + (ry^4)^2.\frac{S(y^8,\eta^8)}{Q(y^8,\eta^8)} + \ldots$$

$$\frac{P'P'-PP''}{PP} + \tfrac{1}{4}pprr\frac{RR}{PP} = \frac{Q'Q'-QQ''}{QQ} - \tfrac{1}{4}pprr\frac{SS}{QQ}$$

$$= \frac{R'R'-RR''}{RR} + \tfrac{1}{4}pprr\frac{PP}{RR} = \frac{S'S'-SS''}{SS} - \tfrac{1}{4}pprr\frac{QQ}{SS}$$

$$= -\frac{q'}{q} = \tfrac{1}{8}\{(ry)^4 + 2(ryy)^4 + 4(ry^4)^4 + 8(ry^8)^4 + \ldots\}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}P}{(\mathrm{d}\log\eta)^2} = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\log y},$$

welch letzterer Gleichung jede der Functionen P, Q, R, S genügt. Die vorhergehende mehrfache Gleichung zwischen den ersten und zweiten Derivirten der Functionen nach der Grösse $\log\eta$ findet sich, soweit sie sich auf P und S bezieht, in Gauss handschriftlichem Nachlasse an einer von den übrigen Untersuchungen dieser Functionen getrennten Stelle. Es sind dort P, S, p, r in einer für diese specielle Entwickelung etwas bequemeren Form als die hier benutzte durch ihre Reihen definirt, und es heisst dann,] *so wird*

$$P'P'-PP'' = -\frac{\mathrm{d}p(yy)}{\mathrm{d}\log y}.P(yy,\eta\eta) - \frac{\mathrm{d}r(yy)}{\mathrm{d}\log y}.R(yy,\eta\eta)$$

$$S'S'-SS'' = +\frac{\mathrm{d}r(yy)}{\mathrm{d}\log y}.P(yy,\eta\eta) - \frac{\mathrm{d}p(yy)}{\mathrm{d}\log y}.R(yy,\eta\eta)$$

$$PP = +p(yy).P(yy,\eta\eta)+r(yy).R(yy,\eta\eta)$$

$$SS = -r(yy).P(yy,\eta\eta)+p(yy).R(yy,\eta\eta)$$

hier ist noch zu bemerken (wovon jedoch der Beweis tiefer liegt)

$$p(yy).\frac{\mathrm{d}r(yy)}{\mathrm{d}\log y} - r(yy).\frac{\mathrm{d}p(yy)}{\mathrm{d}\log y} = \tfrac{1}{2}p(yy).r(yy).\{p(yy)^4-r(yy)^4\}$$

also

$$\frac{P'P'-PP''}{PP} - \frac{S'S'-SS''}{SS} = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{PP}{SS}+\frac{SS}{PP}\right).p(yy).r(yy).\{p(yy)^2-r(yy)^2\}$$

noch findet man

$$PS'-SP' = \tfrac{1}{2}\{y^{\frac{1}{8}}+3y^{\frac{9}{8}}-5y^{\frac{25}{8}}-7y^{\frac{49}{8}}+9y^{\frac{81}{8}}+.-.-.\}\times$$
$$\times\{y^{\frac{1}{8}}(\eta^{\frac{1}{2}}+\eta^{-\frac{1}{2}})-y^{\frac{9}{8}}(\eta^{\frac{3}{2}}+\eta^{-\frac{3}{2}})-y^{\frac{25}{8}}(\eta^{\frac{5}{2}}+\eta^{-\frac{5}{2}})+.+.-.-\}$$

Das Quadrat des zweiten Factors im andern Theile der vorstehenden Gleichung wird

$$= r.Q(y,\eta\eta)+q.R(y,\eta\eta)$$

Der erste Factor wird

$$= \{p(yy)^2+r(yy)^2\}\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}\{p(yy)^2-r(yy)^2\}p(yy)ryy)}\ ?$$

Zusammen wird, reductis reducendis

$$(PS'-SP')^2 = \tfrac{1}{4}\{p(yy)^2+r(yy)^2\}\{p(yy)P(yy,\eta\eta)-r(yy)R(yy,\eta\eta)\}\times$$
$$\times\{r(yy)P(yy,\eta\eta)+p(yy)R(yy,\eta\eta)\}$$
$$= \tfrac{1}{4}\{[p(yy)^2-r(yy)^2]PP+2p(yy)r(yy)SS\}\times$$
$$\times\{2p(yy)r(yy)PP-[p(yy)^2-r(yy)^2]SS\}$$

Setzt man also

$$\eta = e^{i\varphi}$$

$$\frac{-iS}{P}\sqrt{\frac{p(yy)^2-r(yy)^2}{2p(yy)r(yy)}} = \sin\theta$$

so wird

$$d\varphi = \frac{2\,d\theta}{\sqrt{([p(yy)^2-r(yy)^2]\cos\theta^2+[p(yy)^2+r(yy)^2]\sin\theta^2)}}$$

$$\cos\theta = \frac{R}{P}\sqrt{\frac{p(yy)^2+r(yy)^2}{2p(yy)r(yy)}}$$