Werk

Titel: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Geometrie
Jahr: 1873
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN236005081
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN236005081
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=236005081

LOG Id: LOG_0022
LOG Titel: Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodaesie. Erste Abhandlung 1843 Oct. 23
LOG Typ: chapter

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235957348
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235957348
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235957348

Terms and Conditions

Contact

259

UNTERSUCHUNGEN

ÜBER

GEGENSTÄNDE DER HÖHERN GEODAESIE

ERSTE ABHANDLUNG

VON

CARL FRIEDRICH GAUSS

DER KÖNIGL. SOCIETÄT ÜBERREICHT MDCCCXLIII OCT. XXIII.

Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Band II.
Göttingen 1844.

260

UNTERSUCHUNGEN

ÜBER

GEGENSTÄNDE DER HÖHERN GEODAESIE.

Bei den, zum Theil von mir selbst, zum Theil unter meiner Leitung, ausgeführten über das ganze Königreich Hannover sich erstreckenden trigonometrischen Vermessungen sind, sowohl in Beziehung auf die Art, wie die Messungen angestellt wurden, als noch mehr in Beziehung auf ihre nachherige mathematische Behandlung und ihre Verarbeitung zu Resultaten, Wege eingeschlagen, die von den sonst gewöhnlichen abweichen. Mein früher gehegter Vorsatz, nach völliger Beendigung der Messungen diese nebst allen von mir angewandten Verfahrungsarten in einem besondern Werke darzulegen, hat, aus Ursachen, deren Auseinandersetzung nicht hieher gehört, bisher nicht zur Ausführung kommen können, und ich wähle daher das Auskunftsmittel, das im theoretischen Theile mir eigenthümliche in einer Reihe von Abhandlungen bekannt zu machen, um so lieber, weil ich auf diese Weise die Freiheit behalte, mit Ausführlichkeit manche Untersuchungen zu entwickeln, welche ein selbstständiges Interesse darbieten und mit den übrigen in enger Verwandtschaft stehen, auch wenn von denselben bei meinen Messungen keine unmittelbare Anwendung gemacht ist. Dies gilt namentlich von dem grössten Theile des Inhalts der gegenwärtigen ersten Abhandlung.

1.

Von der Aufgabe:

die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird

habe ich im Jahre 1822 eine allgemeine Auflösung gegeben, welche Herr Conferenzrath SCHUMACHER im 3 Heft der Astronomischen Abhandlungen hat abdrucken lassen. Bei der Anwendung dieser Aufgabe auf die höhere Geodäsie, für welche sie eine vorzüglich ergiebige Hülfsquelle wird, macht sich das Bedürfniss fühlbar, Abbildungen, welche unter der angegebenen Bedingung stehen, durch eine besondere Benennung auszuzeichnen, und ich werde daher dieselben *conforme* Abbildungen oder Übertragungen nennen, indem ich diesem sonst vagen Beiworte eine mathematisch scharf bestimmte Bedeutung beilege.

In der angeführten Schrift ist die allgemeine Auflösung, welche eine willkürliche Function einschliesst, auch auf mehrere *bestimmte* Flächen angewandt; das letzte dort behandelte Beispiel betrifft die conforme Übertragung der Oberfläche des Umdrehungsellipsoids auf die Kugelfläche, und es ist [Art. 13] zugleich eine solche Bestimmung der arbiträren Function angegeben, die zu einer sehr brauchbaren Anwendung auf die höhere Geodäsie benutzt werden kann. Diese Benutzung war a. a. O. nur kurz angedeutet, und eine ausführlichere Entwickelung vorbehalten. Ich werde jedoch anstatt *dieser* speciellen Auflösung eine etwas abgeänderte und für die geodätischen Anwendungen noch viel mehr geeignete Methode zur conformen Übertragung der ellipsoidischen Fläche auf die Kugelfläche in der gegenwärtigen Abhandlung entwickeln, und damit zugleich alles zu einer solchen Benutzung erforderliche verbinden.

2.

Die allgemeine Auflösung der Aufgabe, angewandt auf die ellipsoidische und sphärische Fläche, gibt folgende alle conformen Übertragungen der einen auf die andere umfassende Formel (1):

$$T + i \log \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} U = f\left(t + i \log \left\{ \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} w \,.\, \left(\frac{1 - e\cos w}{1 + e\cos w}\right)^{\frac{1}{2}e} \right\}\right)$$

Es bezeichnen hier

e die Excentricität der Ellipse, durch deren Umdrehung um ihre kleine Achse die ellipsoidische Fläche erzeugt wird;

t und $90^0 - w$ die Länge und Breite eines unbestimmten Punkts auf dieser Fläche, mithin w den Winkel einer in diesem Punkte gegen die Fläche gezogenen Normale mit der kleinen Achse;

T und $90^0 - U$ die Länge und Breite des entsprechenden Punkts auf der Kugelfläche;

i die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$:

f die Charakteristik für eine willkürlich zu wählende Function.

Die Logarithmen sind immer die hyperbolischen.

Durch m wird das Vergrösserungsverhältniss bezeichnet werden, so verstanden, dass jedes Linearelement auf der ellipsoidischen Fläche sich zu dem entsprechenden Linearelement auf der Kugelfläche verhält wie 1 zu m: dieses Verhältniss ist an jeder Stelle der einen und der andern Fläche ein bestimmtes, für verschiedene Stellen veränderlich.

Die einfachste Auflösung erhält man, indem man die willkürliche Function schlechthin ihrem Argumente gleich, oder

$$f\upsilon = \upsilon$$

setzt, und diese Übergangsart ist in der That auch die geeignetste, wenn die *ganze* Oberfläche des Ellipsoids auf die Kugelfläche übertragen werden soll. Für die Anwendung auf geodätische Rechnungen, wo immer nur ein vergleichungsweise sehr kleiner Theil der Erdfläche in Betracht kommt, ist es aber, wie schon a. a. O. bemerkt ist, viel vortheilhafter, der Function noch einen constanten und zwar imaginären Theil beizufügen, oder

$$f\upsilon = \upsilon - i\log k$$

zu setzen. Es lassen sich dann der Halbmesser der Kugel und die Constante k so bestimmen, dass die das Vergrösserungsverhältniss ausdrückende Grösse m, von deren geringer Ungleichheit innerhalb der Grenzen der dargestellten Fläche die Bequemlichkeit der Anwendung auf geodätische Rechnungen vornehmlich abhängt, für den mittlern Parallelkreis $= 1$, und bis zu einigen Graden Entfernung nach Norden und Süden kaum merklich von 1 verschieden wird; die Abweichung von dem Werthe 1 ist nemlich von der zweiten Ordnung in Beziehung auf den Abstand vom mittlern Parallelkreise, und enthält ausserdem noch die Abplattung oder das Quadrat von e als Factor.

Allein dieser Vortheil lässt sich noch sehr vergrössern, wenn man anstatt jener Bestimmung der willkürlichen Function eine etwas abgeänderte, für die Rechnung fast eben so bequeme wählt, indem man nemlich unter Zuziehung einer zweiten Constante α,

$$f\upsilon = \alpha\upsilon - i\log k$$

setzt. Man hat dann in seiner Gewalt, durch zweckmässige Bestimmung der beiden Constanten zu bewirken, dass die Abweichung des Vergrösserungsverhältnisses m von dem Werthe 1, in Beziehung auf den Abstand vom mittlern Parallelkreise eine Grösse der dritten Ordnung wird, ungerechnet den auch hier bleibenden Factor ee.

3.

Die Formel 1 gibt, bei dieser Bestimmung der Function f.

$$T = \alpha t \quad \ldots \quad (2)$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}U = k\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}w^{\alpha}\left(\frac{1+e\cos w}{1-e\cos w}\right)^{\frac{1}{2}\alpha e} \quad \ldots \quad (3)$$

und für m findet man leicht, aus den in der mehrerwähnten Schrift entwickelten Grundsätzen, den Ausdruck

$$m = \frac{\alpha A \sin U \sqrt{(1-ee\cos w^2)}}{a\sin w} \quad \ldots \quad (4)$$

wenn durch a die halbe grosse Achse des Ellipsoids und durch A der Halbmesser der Kugel bezeichnet wird.

Die Differentiation der logarithmisch ausgedrückten Gleichung 3 ergibt

$$\frac{\mathrm{d}U}{\sin U} = \frac{\alpha\,\mathrm{d}w}{\sin w} - \frac{\alpha ee\sin w\,\mathrm{d}w}{1-ee\cos w^2}$$

oder

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}w} = \frac{\alpha(1-ee)\sin U}{(1-ee\cos w^2)\sin w} \quad \ldots \quad (5)$$

Ebenso ergibt die Differentiation der Gleichung 4

$$\mathrm{d}\log m = \operatorname{cotg} U\,\mathrm{d}U - \operatorname{cotg} w\,\mathrm{d}w + \frac{ee\cos w\,.\sin w\,\mathrm{d}w}{1-ee\cos w^2}$$

$$= \operatorname{cotg} U\mathrm{d}U - \frac{(1-ee)\cos w\,\mathrm{d}w}{(1-ee\cos w^2)\sin w}$$

folglich, wenn man mit Hülfe von 5 entweder dU oder dw eliminirt,

$$\frac{d\log m}{dw} = \frac{(1-ee)(\alpha\cos U - \cos w)}{(1-ee\cos w^2)\sin w} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

$$\frac{d\log m}{dU} = \operatorname{cotg} U - \frac{\cos w}{\alpha\sin U} = \frac{\alpha\cos U - \cos w}{\alpha\sin U} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Durch eine nochmalige Differentiation der Gleichung 7 erhält man

$$\frac{dd\log m}{dU^2} = -\frac{1}{\sin U^2} + \frac{\cos U\cos w}{\alpha\sin U^2} + \frac{\sin w}{\alpha\sin U}\cdot\frac{dw}{dU}$$

$$= -\frac{1}{\sin U^2} + \frac{\cos U\cos w}{\alpha\sin U^2} + \frac{(1-ee\cos w^2)\sin w^2}{\alpha\alpha(1-ee)\sin U^2} \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

Soll nun für eine bestimmte Breite (Normalbreite) der Werth von m der Einheit gleich werden, für andere Breiten hingegen nur um Grössen der dritten Ordnung von 1 abweichen, die Breitenunterschiede als Grössen erster Ordnung betrachtet, so muss, wenn die Normalbreite auf dem Ellipsoid mit P, die entsprechende auf der Kugel mit Q bezeichnet wird, für $w = 90^0 - P$, $U = 90^0 - Q$ in Gemässheit der Gleichungen 4. 7, 8 sein:

$$A = \frac{a\cos P}{\alpha\cos Q\sqrt{(1-ee\sin P^2)}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

$$\alpha\sin Q = \sin P \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

$$0 = 1 - \frac{\sin P\sin Q}{\alpha} - \frac{(1-ee\sin P^2)\cos P^2}{\alpha\alpha(1-ee)}$$

oder, wenn man in letzterer Gleichung für $\sin Q$ seinen Werth aus 10 substituirt,

$$\alpha\alpha = 1 + \frac{ee\cos P^4}{1-ee} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

Durch diese Gleichung ist demnach α gegeben, sobald für P ein bestimmter Werth gewählt ist; Q kann sodann durch Gleichung 10, und A durch Gleichung 9 bestimmt werden; endlich ergibt sich k durch die Substitution von $w = 90^0 - P$, $U = 90^0 - Q$ in der allgemeinen Gleichung 3, nemlich

$$k = \frac{\operatorname{tang}(45^0 + \frac{1}{2}P)^\alpha}{\operatorname{tang}(45^0 + \frac{1}{2}Q)}\cdot\left(\frac{1-e\sin P}{1+e\sin P}\right)^{\frac{1}{2}\alpha e} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

4.

Die Berechnung der Constanten A, α, k und der Normalbreite auf der Kugel Q aus P und e wird man, da alle diese Grössen wie Grundlagen für die

Anwendung auf eine gewisse Zone zu betrachten sind, gern mit besonderer Sorgfalt und Schärfe auszuführen wünschen, und es verdienen daher einige dazu dienliche Umformungen hier einen Platz: eine Umformung wird ohnehin *nothwendig*, wenn man von einer bestimmten Normalbreite nicht auf dem Ellipsoid sondern auf der Kugel, also von einem gegebenen Werthe von Q ausgehen, und daraus die übrigen Grössen berechnen will.

Führt man drei Hülfswinkel φ, ζ, η ein, so dass

$$\sin\varphi = e \quad \ldots \quad (13)$$
$$\operatorname{tang}\zeta = \operatorname{tang}\varphi\cos P^2 \quad \ldots \quad (14)$$
$$\operatorname{tang}\eta = \sin\zeta\operatorname{tang}P \quad \ldots \quad (15)$$

so wird

$$\alpha = \frac{1}{\cos\zeta} \quad \ldots \quad (16)$$
$$\sin Q = \cos\zeta\sin P \quad \ldots \quad (17)$$
$$\cos\eta\cos Q = \cos P \quad \ldots \quad (18)$$
$$\sin\eta = \operatorname{tang}\zeta\operatorname{tang}Q \quad \ldots \quad (19)$$
$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(P-Q) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\zeta\,.\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\eta \quad \ldots \quad (20)$$
$$\sin(2\zeta-\varphi) = e\cos 2Q \quad \ldots \quad (21)$$

Die Gleichung 18 folgt leicht aus der Verbindung von 15 und 17; sodann 19 aus der Verbindung von 15, 17, 18; ferner 20 aus 17, 18, 19, endlich 21 aus 14 und 17.

Am schärfsten wird man rechnen, wenn man, in dem Falle wo P gegeben ist, sich der Formeln 14, 15, 20 bedient, um der Reihe nach ζ, η, Q zu bestimmen; für den Fall hingegen, wo Q gegeben ist, vermittelst der Gleichungen 21, 19, 20 die Werthe von ζ, η, P ableitet: zur Controlle mag man dann noch eine oder einige der übrigen Gleichungen benutzen. Führt man noch einen vierten Hülfswinkel θ ein, nach der Formel

$$\sin\theta = e\sin P \quad \ldots \quad (22)$$

so wird

$$\cos\varphi = \cos\zeta\cos\eta\cos\theta \quad \ldots \quad (23)$$

und die Formeln 9 und 12 erhalten folgende Gestalt:

$$A = \frac{a\cos P}{\alpha\cos\theta\cos Q} = \frac{a\cos\eta}{\alpha\cos\theta} = \frac{a\cos\varphi}{\cos\theta^2} = \frac{a\cos\varphi}{1-ee\sin P^2}$$
$$k = \frac{\operatorname{tang}(45^\circ+\frac{1}{2}P)^\alpha}{\operatorname{tang}(45^\circ+\frac{1}{2}Q)\operatorname{tang}(45^\circ+\frac{1}{2}\theta)^{\alpha e}}$$

5.

Ich begleite die Vorschriften dieser ganzen Abhandlung mit einer auf das schärfste durchgeführten numerischen Anwendung, welche andern, die zur Verarbeitung ihrer Messungen die hier vorgetragene Methode benutzen wollen, entweder als Rechnungsmuster zur Construction der erforderlichen Hülfstafeln, oder auch schon unmittelbar als Hülfsapparat für einen grossen Theil der gemässigten Zone dienen kann. In den meisten Fällen wird man übrigens sich mit einer *viel* geringern Schärfe begnügen können.

Als Normalbreite wähle ich $52^0 40'$, welche ungefähr dem mittlern Parallelkreise des Königreichs Hannover entspricht; da es jedoch in einigen Beziehungen vortheilhafter ist, wenn für die Normalbreite auf der Kugel, als wenn für die auf dem Ellipsoid eine runde Zahl gewählt wird, so setze ich

$$Q = 52^0 \; 40' \; 0''$$

Die Rechnung führe ich nach den neuesten von Bessel aus den Gradmessungen abgeleiteten Erddimensionen (Astronomische Nachrichten 19. Band S. 116), wonach, die Toise zur Einheit angenommen,

$$\begin{aligned} \log a &= 6{,}5148235337 \\ \log\cos\varphi &= 9{,}9985458202 \end{aligned}$$

Es folgt hieraus, mit Hülfe der zehnzifrigen Logarithmen,

$$\begin{aligned} \varphi &= 4^0 \; 41' \; 9'' \; 98262 \\ \log e &= 8{,}9122052079 \\ \zeta &= 1^0 \; 43' \; 26'' \, 80402 \\ \eta &= 2 \;\; 15 \;\; 42 \;\; 34083 \\ P &= 52 \;\; 42 \;\;\; 2{,}53251 \\ \log\alpha &= 0{,}0001966553 \\ \theta &= 3^0 \, 43' \; 34'' \, 24669 \\ \log\frac{1}{k} &= 0{,}0016708804 \\ \log A &= 6{,}5152074703 \end{aligned}$$

Nimmt man das französische gesetzliche Meter als Einheit an, so wird

$$\log A = 6{,}8050274003$$

Wählte man hingegen den zehnmillionsten Theil des Erdquadranten selbst, nach obigen Dimensionen, zur Einheit, so würde sein

$$\log A = 6{,}8049902365$$

6

Die Berechnung der Breite auf der Kugel aus der Breite auf dem Ellipsoid kann füglich nach der Formel 3 geführt werden, wenn sie nur für wenige Fälle gefordert wird; für ausgedehntere Anwendungen hingegen wird der Gebrauch einer Reihe vortheilhaft sein, zu deren Entwicklung hier die nöthigen Formeln gegeben werden sollen.

Ich bezeichne eine unbestimmte Breite auf dem Ellipsoid, oder einen unbestimmten Werth von 90^0-w, durch $P+p$, und die entsprechende Breite auf der Kugel, oder den Werth von 90^0-U durch $Q+q$. Nach dem TAYLORschen Lehrsatze wird

$$q = \frac{dU}{dw}\cdot p - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{ddU}{dw^2}\cdot pp + \tfrac{1}{6}\cdot\frac{d^3U}{dw^3}\cdot p^3 - \tfrac{1}{24}\cdot\frac{d^4U}{dw^4}\cdot p^4 + \text{ u. s. w.}$$

wo für die Differentialquotienten diejenigen bestimmten Werthe zu substituiren sind, welche zu $p=0$, oder zu $w=90^0-P$, $U=90^0-Q$ gehören. Die successive Entwicklung der unbestimmten Differentialquotienten ergibt

$$\frac{dU}{dw} = \frac{\alpha(1-ee)\sin U}{(1-ee\cos w^2)\sin w}$$

$$\frac{ddU}{dw^2} = \frac{\alpha(1-ee)\sin U}{(1-ee\cos w^2)^2\sin w^2}\{\alpha(1-ee)\cos U - \cos w + ee(\cos w^3 - 2\cos w\sin w^2)\}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^3U}{dw^3} = \frac{\alpha(1-ee)\sin U}{(1-ee\cos w^2)^3\sin w^3}\{&\alpha\alpha(1-ee)^2(\cos U^2-\sin U^2)\\ &-3\alpha(1-ee)\cos U(\cos w - ee(\cos w^3 - 2\cos w\sin w^2))\\ &+2\cos w^2+\sin w^2 - ee(4\cos w^4 - 2\sin w^4)\\ &+e^4(2\cos w^6 - \cos w^4\sin w^2 + 6\cos w^2\sin w^4)\}\end{aligned}$$

Die beiden folgenden, welche ich gleichfalls entwickelt habe, setze ich um den Raum zu schonen in ihrer unbestimmten Form nicht hieher.

Die Substitution von $w=90^0-P$, $U=90^0-Q$ ergibt dann, wenn zugleich
anstatt $\alpha\sin Q$ der Werth $\sin P$ (nach Gleichung 10), und
anstatt $\alpha\cos Q$ der Werth $\frac{\cos P}{\cos\zeta\cos\eta}=\frac{\cos\theta\cos P}{\cos\varphi}$ (nach Gleichung 18, 16, 23)
substituirt, und zur Abkürzung $\cos P = c$, $\sin P = s$ geschrieben wird,

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}w} = \frac{\cos\varphi}{\cos\theta}$$

$$\frac{\mathrm{dd}U}{\mathrm{d}w^2} = -\frac{3\,ee\cos\varphi}{\cos\theta^3}\,.\,cs$$

$$\frac{\mathrm{d}^3U}{\mathrm{d}w^3} = \frac{ee\cos\varphi}{\cos\theta^5}(3cc-3ss+ee(12ccss+3s^4))$$

$$\frac{\mathrm{d}^4U}{\mathrm{d}w^4} = \frac{ee\cos\varphi}{\cos\theta^7}.cs(16-ee(49cc-13ss)-e^4(56ccss+29s^4))$$

$$\frac{\mathrm{d}^5U}{\mathrm{d}w^5} = \frac{ee\cos\varphi}{\cos\theta^9}(-16cc+12ss+ee(49c^4-378ccss+9s^4)$$
$$+e^4(628c^4ss+174ccs^4-54s^6)+e^6(268c^4s^4+220ccs^6+33s^8))$$

Bei dieser Entwicklung von q in eine Reihe nach p ist stillschweigend vorausgesetzt, dass beide Grössen in Theilen des dem Halbmesser gleichen Bogens ausgedrückt sind: soll dagegen q Secunden und p Grade bedeuten, so muss dem ersten Gliede der Reihe der Factor 3600, dem zweiten der Factor $\frac{3600\pi}{180} = 20\pi$, dem dritten der Factor $3600(\frac{\pi}{180})^2 = \frac{1}{9}\pi\pi$ u.s.f. beigefügt werden. Unter dieser Voraussetzung gibt die Anwendung der Formeln auf unser Beispiel folgende Zahlenwerthe, welche ich in eine solche Form setze, dass weitgestreckte Decimalbrüche vermieden werden:

$$\begin{aligned} q = &\ 359556''69447\ .\tfrac{p}{100} \\ &+3041{,}386524\,.(\tfrac{p}{100})^2 \\ &-\ 946{,}260563\,.(\tfrac{p}{100})^3 \\ &-4135{,}396057\,.(\tfrac{p}{100})^4 \\ &+\ 227{,}04342\ .(\tfrac{p}{100})^5 \end{aligned}$$

welche Reihe, da p in der Anwendung nur wenige Einheiten betragen soll, immer sehr schnell convergirt. Um für die Richtigkeit dieser Zahlen eine Bestätigung zu erhalten, habe ich die Rechnung für $p = -6$ und für $p = +6$, d. i. für

$$P+p = 46^0\ 42'\ 2''53251 \text{ und für}$$
$$P+p = 58\quad 42\quad 2{,}53251$$

sowohl nach der Reihe, als nach der endlichen Formel 3 ausgeführt. Die Reihe gibt

$$Q+q = 46^0\ 40'\ 37''69794$$
$$Q+q = 58\ \ 39\ \ 44{,}09285$$

die endliche Formel hingegen

$$Q+q = 46^0\ 40'\ 37''69794$$
$$Q+q = 58\ \ 39\ \ 44{,}09283$$

also so genau übereinstimmend, wie zehnzifrige Logarithmen nur verstatten.

7.

Auf ähnliche Weise lässt sich der Logarithm von m in eine Reihe entwickeln, deren erste Glieder folgende sind:

$$\begin{aligned}\log m = & -\tfrac{\sin 2\varphi^2}{6\cos\theta^4}\,.\,csp^3 - \tfrac{\sin 2\varphi^2}{24\cos\theta^6}(cc+11\,eess)p^4 \\ & + \tfrac{\sin 2\varphi^2}{120\cos\theta^8}\,.\,\tfrac{s}{c}\big(2cc - 3ss - ee(40c^4 - 20ccss - 6s^4) \\ & \qquad - e^4ss(104c^4 + 22ccss + 3s^4)\big)p^5\end{aligned}$$

Auch das folgende Glied habe ich (auf einem andern Wege) entwickelt, jedoch nur nach dem Hauptbestandtheile des Coëfficienten, welcher von der Ordnung ee ist, und dafür gefunden:

$$+\tfrac{\sin 2\varphi^2}{720\cos\theta^{10}}\,.\,\tfrac{1}{cc}(2c^4 - 18ccss - 15s^4)p^6$$

Der durch diese Reihe ausgedrückte Logarithm ist der hyperbolische, und p wird, wie oben, in Theilen des Halbmessers ausgedrückt verstanden: verlangt man den briggischen Logarithmen, indem man p Grade bedeuten lässt, so muss noch der Modulus als Factor hinzukommen und $\frac{\pi p}{180}$ für p geschrieben werden. In dieser Gestalt wird für unser Beispiel

$$\begin{aligned}\log m = & -0{,}0049612433\left(\tfrac{p}{100}\right)^3 \\ & -0{,}0017329876\left(\tfrac{p}{100}\right)^4 \\ & -0{,}002393772\ \left(\tfrac{p}{100}\right)^5 \\ & -0{,}0124746\ \ \left(\tfrac{p}{100}\right)^6\end{aligned}$$

Die Anwendung dieser Reihe auf die oben betrachteten einzelnen Fälle gibt

$$\text{für } p = -6, \quad \log m = +0{,}000001050448$$
$$\text{für } p = +6, \quad \log m = -0{,}000001096531$$

Die endliche Formel 4, welche man auch so schreiben kann

$$m = \frac{\alpha A \cos(Q+q)\sqrt{(1-ee\sin(P+p)^2)}}{a\cos(P+p)}$$
$$= \frac{\cos\eta\cos(Q+q)\sqrt{(1-ee\sin(P+p)^2)}}{\cos\theta\cos(P+p)}$$

gibt, mit zehnzifrigen Logarithmen berechnet, bis auf die zehnte Zifer genau dasselbe.

8.

Für die umgekehrte Aufgabe, wo q gegeben und p gesucht wird, ist die Entwicklung in eine Reihe noch wesentlicher, da die endliche Formel 3 in diesem Falle nur auf indirectem Wege zum Ziele führen könnte. Der TAYLORsche Lehrsatz gibt

$$p = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}U}\cdot q - \frac{\mathrm{dd}w}{2\,\mathrm{d}U^2}\cdot qq + \frac{\mathrm{d}^3 w}{6\,\mathrm{d}U^3}\cdot q^3 - \text{u.s.f.}$$

wo für die Differentialquotienten diejenigen bestimmten Werthe zu setzen sind, welche zu $q = 0$ oder $U = 90^0 - Q$, $w = 90^0 - P$ gehören. Für die unbestimmten Werthe der drei ersten Differentialquotienten ergeben sich folgende Ausdrücke

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}U} = \frac{(1-ee\cos w^2)\sin w}{\alpha(1-ee)\sin U}$$

$$\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}U^2} = \frac{(1-ee\cos w^2)\sin w}{\alpha\alpha(1-ee)^2\sin U^2}(\alpha(1-ee)\cos U - \cos w + ee\cos w(\cos w^2 - 2\sin w^2))$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}U^3} = \frac{(1-ee\cos w^2)\sin w}{\alpha^3(1-ee)^3\sin U^3}\{&\alpha\alpha(1-ee)^2(\cos U^2 + 2\sin U^2)\\ &-3\alpha(1-ee)\cos U\cos w(1-ee(\cos w^2 - 2\sin w^2))\\ &+\cos w^2 - \sin w^2 - ee(2\cos w^4 - 12\cos w^2\sin w^2 + 2\sin w^4)\\ &+e^4(\cos w^6 - 11\cos w^4\sin w^2 + 6\cos w^2\sin w^4)\}\end{aligned}$$

Die beiden folgenden gleichfalls vollständig entwickelten Coëfficienten setze ich um den Raum zu schonen, nicht hieher, da sie doch nur Zwischengrössen sind, um zu den Endresultaten zu gelangen. Diese finden sich nach der Substitution von $90^0 - P$, $90^0 - Q$ anstatt w, U, und nach Anwendung der im 6. Art. angegebenen Umformung von $\alpha\cos U$ und $\alpha\sin U$, indem zugleich zur Abkürzung c, s anstatt $\cos P$, $\sin P$ geschrieben wird, wie folgt:

$$\begin{aligned}
p = & \frac{\cos\theta}{\cos\varphi}\cdot q \\
& - \frac{3ee}{2\cos\varphi^2}\cdot csqq \\
& + \frac{ee}{2\cos\varphi^3\cos\theta}\{-cc+ss+ee(5ccss-s^4)\}q^3 \\
& + \frac{ee}{24\cos\varphi^4\cos\theta^2}cs\{16+ee(41cc-77ss)-e^4(101ccss-61s^4)\}q^4 \\
& + \frac{ee}{120\cos\varphi^5\cos\theta^3}\{16cc-12ss+ee(41c^4-522ccss+81s^4) \\
& \qquad -e^4(538c^4ss-1536ccs^4+126s^6)+e^6(857c^4s^4-1030ccs^6+57s^8)\}q^5 \\
& + \text{u.s.f.}
\end{aligned}$$

Die numerischen Werthe für unser Beispiel finden sich daraus in ähnlicher Form wie oben, d. i. wenn p in Secunden, q in Graden ausgedrückt wird,

$$\begin{aligned}
p = & \; 360443''852122\left(\frac{q}{100}\right) \\
& - 3052,649780\left(\frac{q}{100}\right)^2 \\
& + 1002,642506\left(\frac{q}{100}\right)^3 \\
& + 4119,589282\left(\frac{q}{100}\right)^4 \\
& - \;\; 431,181623\left(\frac{q}{100}\right)^5 \text{ u.s.f.}
\end{aligned}$$

9.

Auf ähnliche Weise ist der hyperbolische Logarithm von m in folgende nach Potenzen von q fortschreitende Reihe entwickelt, wobei der Coëfficient von q^6 nur nach seinem Haupttheile auf anderm Wege abgeleitet ist:

$$\begin{aligned}
\log m = & -\frac{2ee}{3\cos\varphi\cos\theta}\cdot csq^3 \\
& - \frac{ee}{6\cos\varphi^2\cos\theta^2}\cdot cc(1-7eess)q^4 \\
& + \frac{ee}{30\cos\varphi^3\cos\theta^3}\cdot\frac{s}{c}\{2cc-3ss+ee(20c^4-10ccss+6s^4) \\
& \qquad\qquad -e^4(59c^4ss-8ccs^4+3s^6)\}q^5 \\
& + \frac{ee}{180\cos\varphi^4\cos\theta^4}\cdot\frac{1}{cc}(2c^4-18ccss-15s^4)q^6
\end{aligned}$$

Die Zahlenwerthe in unserm Beispiele (für den briggischen Logarithmen, und q in Graden ausgedrückt) sind

$$\begin{aligned}\log m = & -0{,}0049796163\ 94\left(\frac{q}{100}\right)^3\\ & -0{,}0016150307\ 6\ \left(\frac{q}{100}\right)^4\\ & -0{,}0023973954\ \ \left(\frac{q}{100}\right)^5\\ & -0{,}0125671\ \ \left(\frac{q}{100}\right)^6\end{aligned}$$

10.

Bei einer weitumfassenden Vermessung, wo die Übertragung vom Sphäroid auf die Kugel oder umgekehrt für sehr viele Punkte vorkommt, wird man, anstatt jedesmal auf die Formeln zurückzukommen, lieber ein für allemal eine ausgedehnte Tafel berechnen. Der Gebrauch einer solchen Tafel wird aber bequemer sein, wenn man ihr die Breite auf der Kugel $Q+q$ zum Argument gibt, als wenn man die Breite auf dem Sphäroid dazu wählen wollte, indem der Übergang von ersterer auf die andere viel häufiger erfordert wird, als der umgekehrte. Für jeden Rechnungserfahrnen wird übrigens die Bemerkung überflüssig sein, dass man behuf Construction einer solchen Tafel nur eine mässige Anzahl von Gliedern direct berechnet, aus denen die übrigen mit eben so grosser Schärfe und sehr geringer Mühe durch ein angemessenes Interpolationsverfahren bestimmt werden. Es werden also dafür die im 8. und 9. Artikel mitgetheilten Reihen zur Anwendung kommen, und gerade deswegen ist es vortheilhaft, dass nicht P, sondern Q eine runde Zahl sei.

Ich füge am Schluss dieser Abhandlung eine solche Tafel bei, welcher der Normalwerth $Q = 52^0 40'$ (wie dem bisher betrachteten Beispiele) zum Grunde liegt, und die durch zwölf Grade, von $46^0 40'$ bis $58^0 40'$, für alle Werthe des Arguments $Q+q$ von Minute zu Minute fortschreitet. Sie gibt den zugehörigen Werth von $P+p$ auf fünf Decimalen der Secunde genau; ferner den briggischen Logarithmen von m auf zehn Stellen, nemlich in Einheiten der zehnten Decimale; endlich auch noch, in Secunden ausgedrückt, den Werth von $-\frac{\mathrm{d}m}{2m\mathrm{d}q}$; der Gebrauch dieser letzten Columne wird weiter unten erklärt werden. Ich habe die Tafel deshalb mit so vielen Decimalen gegeben, damit sie auch für die allerschärfste Berechnung einer trigonometrischen Vermessung, nemlich für eine

Durchführung derselben mit zehnzifrigen Logarithmen, vollkommen zureiche. Jeder, der diese Tafel zur Berechnung von Messungen innerhalb dieser Zone benutzen will, wird, wenn eine geringere Schärfe ihm genügt (und diess ist allerdings der gewöhnlichste Fall) nach Gefallen einige der letzten Decimalen weglassen. In welcher Form man übrigens auch die *Resultate* einer Messung darstellen mag, so sollte diess, consequenter Weise, immer in einer Schärfe geschehen, die der Schärfe der Messungen selbst entsprechend ist, so dass man aus den Zahlen der Resultate immer rückwärts die beobachteten Grössen eben so scharf wieder finden kann, wie sie gemessen waren. Wählt man also dazu ausschliesslich die Längen und Breiten, so würde trigonometrischen Messungen selbst von nur mässiger Schärfe, durchaus nicht ihr Recht widerfahren, wenn man die Resultate nur in solcher Schärfe ansetzen wollte, wie Längen und Breiten sich auf astronomischem Wege bestimmen lassen: man würde dadurch nur einen falschen Maassstab für die Güte der Arbeit erhalten, und sich oft gerade der durchgreifendsten Prüfungen dieser Güte entäussern.

11.

Die Benutzung der hier betrachteten conformen Übertragung der Ellipsoidfläche auf die Kugelfläche zur Berechnung trigonometricher Messungen kann auf mehr als Eine Art geschehen: in der gegenwärtigen Abhandlung wird nur von der unmittelbaren Benutzung die Rede sein; andere abgeleitete Arten, sie zu jenem Zwecke zu benutzen, sollen einer zweiten Abhandlung vorbehalten bleiben.

Die unmittelbare Benutzung ist im Wesentlichen schon in der oben angeführten Schrift kurz angedeutet. Ein auf der Oberfläche des Ellipsoids durch kürzeste oder sogenannte geodaetische Linien gebildetes System von Dreiecken wird auf der Oberfläche der Kugel durch ein Dreieckssystem dargestellt, worin die Winkel den entsprechenden auf dem Sphaeroid genau gleich sind, die Seiten hingegen, wenn sie nicht Meridianbögen sind, zwar nicht in aller Strenge Bögen Grösster Kreise werden, aber doch von solchen so wenig abweichen, dass sie in den meisten Fällen als damit ganz zusammenfallend betrachtet werden dürfen, oder dass wenigstens die Abweichung, da, wo die grösste Genauigkeit gefordert wird, mit aller nöthigen Schärfe leicht berechnet werden kann, immer vorausgesetzt, dass erstens die Dreiecke sich nicht gar zu weit von dem Normal-Parallelkreise entfernen, und

zweitens, dass sie vergleichungsweise, nemlich nach dem Verhältnisse der Seiten zu einem ganzen Erdquadranten, klein sind, wie bei wirklich messbaren Dreiecken immer der Fall ist.

Dieses genaue Anschmiegen der auf die Kugelfläche übertragenen Dreiecksseiten an Grösste Kreisbögen findet nun bei der in Obigem betrachteten conformen Darstellung in noch viel höherm Grade Statt, als bei der a. a. O. vorgeschlagenen. Wo diese [nach Art. 13] bei einem Abstande von $2\frac{1}{2}$ Grad von dem Normal-Parallelkreise eine linearische Vergrösserung von $\frac{1}{530000}$ ergab, würde die neue Methode nur eine Aenderung von $\frac{1}{5800000}$ geben.

Man kann daher das ganze System, nachdem man zuvörderst eine Dreiecksseite auf die Kugelfläche gehörig übertrageu hat, ganz so, als wenn es auf dieser selbst läge, vermittelst der Winkel berechnen, nöthigenfalls mit der eben angedeuteten Modification, sodann für alle Punkte die Werthe der Breiten und Längen bestimmen, und von diesen vermittelst der oben gegebenen Formeln, oder vielmehr was die Breiten betrifft, vermittelst einer solchen Hülfstafel, wie hier beigefügt ist, auf die Breiten und Längen auf der Ellipsoidfläche übergehen.

12.

Es bleibt demnach hier noch übrig, die Bestimmung der Abweichung einer auf die Kugelfläche übertragenen geodaetischen Linie von dem zwischen denselben Endpunkten enthaltenen Grössten Kreisbogen zu entwickeln, wonach sich zugleich in jedem Falle beurtheilen lässt, ob die Berücksichtigung dieser Abweichung nöthig werde. Man kann diese Aufgabe auf mehr als eine Art behandeln: für den gegenwärtigen Zweck, wo die Reduction immer nur eine sehr kleine Grösse betragen kann, scheint folgende Methode die angemessenste zu sein.

Es sei L die in Rede stehende geodaetische Linie auf dem Ellipsoid in unbestimmter Ausdehnung betrachtet, M ihre conforme Darstellung auf der Kugelfläche, F und G die Endpunkte eines bestimmten Stückes von M, endlich N ein durch diese beiden Punkte geführter Grösster Kreis. Jeder Punkt in N werde bestimmt durch seinen Abstand x von einem zunächst willkürlich auf N gewählten Anfangspunkte; jeder Punkt von M durch seinen senkrechten Abstand y von N und durch das dem Fusspunkte dieses Perpendikels zukommende

x. Diese Coordinaten sind als in Theilen des Halbmessers ausgedrückt verstanden, und müssen demnach noch multiplicirt werden mit A, wenn man sie nach ihrer Lineargrösse, oder mit $206265''$, wenn man sie in Bogentheilen ausgedrückt verlangt.

Ein Element von M wird durch

$$\sqrt{(\cos y^2 \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)}$$

oder durch $\frac{\cos y}{\cos\psi}.\mathrm{d}x$ ausgedrückt, wenn man

$$\frac{\mathrm{d}y}{\cos y\,\mathrm{d}x} = \operatorname{tang}\psi$$

setzt, wo mithin ψ die Neigung des Elements gegen die Parallele mit N bedeutet. Um die Vorstellung zu fixiren, mag man sich die x von der Rechten nach der Linken, die y von unten nach oben wachsend denken, wodurch also der Sinn positiver ψ von selbst bestimmt ist.

Das wie oben mit m bezeichnete Vergrösserungsverhältniss beim Uebertragen der ellipsoidischen Fläche auf die Kugelfläche kann hier wie eine Function von x und y betrachtet werden: die Grösse des Elements von L, dem jenes Element von M entspricht, wird

$$= \frac{A\cos y}{m\cos\psi}.\mathrm{d}x$$

sein, und wenn zur Abkürzung

$$\log\operatorname{tang}(45^0 + \tfrac{1}{2}y) = u$$
$$\frac{\cos y}{m} = n$$

gesetzt wird, wo mithin n gleichfalls Function von x und y, oder was auf Eines hinausläuft, von x und u sein wird, so hat man

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

und das Element von L

$$= \frac{An}{\cos\psi}.\mathrm{d}x$$

Die Natur der Linie M wird also durch die Bedingung bestimmt, dass zwischen irgendwelchen bestimmten Grenzen das Integral $\int\frac{n}{\cos\psi}\mathrm{d}x$ oder

$$\int n\sqrt{(1+\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}x^2})}\mathrm{d}x$$

ein Minimum werden soll, wofür nach den Regeln der Variationsrechnung sich die Gleichung ergibt

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}u}.\sqrt{\left(1+\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}x^2}\right)}\mathrm{d}x = \mathrm{d}\frac{\frac{n\,\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{\sqrt{\left(1+\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}x^2}\right)}}$$

oder

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}u}.\frac{\mathrm{d}x}{\cos\psi} = \mathrm{d}.n\sin\psi$$

Unter $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}u}$ ist der partielle Differentialquotient verstanden. Diese Formel ist strenge und allgemeingültig. Für unsern Zweck aber, wo bloss das zwischen F und G liegende Stück der Curve M in Betracht kommt, in deren sämmtlichen Punkten u und ψ nur sehr kleine Werthe haben können, dürfen wir 1 anstatt $\cos\psi$ und $\mathrm{tang}\,\psi$ anstatt $\sin\psi$ schreiben, mithin

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}u}.\mathrm{d}x = \mathrm{d}.n\,\mathrm{tang}\,\psi$$

oder

$$n\,\mathrm{tang}\,\psi = \int\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}u}\mathrm{d}x + \text{Const.}$$

setzen, zugleich aber auch in dieser Formel anstatt der Werthe, welche n und $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}u}$ in der Linie M haben, diejenigen anwenden, welche in den correspondirenden Punkten der Linie N (für $u = 0$ oder $y = 0$) Statt finden, und folglich mit den Werthen von $\frac{1}{m}$ und $-\frac{\mathrm{d}m}{mm\,\mathrm{d}u} = -\frac{\mathrm{d}m}{mm\,\mathrm{d}y}$ übereinstimmen.

Zur bequemern Ausführung der weitern Entwicklungen sollen jetzt die Abscissen von dem Punkte F an gezählt, oder in diesem Punkte $x = 0$, in G hingegen $x = h$ gesetzt werden; ich setze ferner $\frac{\mathrm{d}m}{m\,\mathrm{d}y} = l$, welches im Allgemeinen zwar Function von x und y ist, hier aber bloss nach seinem in der Linie N oder für $y = 0$ geltenden Werthe, also als Function von x allein betrachtet wird; endlich seien ψ^0, m^0, l^0, die bestimmten Werthe von ψ, m, l in dem Punkte F, und ψ', m', l' die in dem Punkte G. Die obige Formel wird hienach

$$\mathrm{tang}\,\psi = \frac{m\,\mathrm{tang}\,\psi^0}{m^0} - m\int\frac{l}{m}\mathrm{d}x$$

wo die Integration von $x = 0$ anfängt. Nehmen wir nun an, dass l und m in folgende nach Potenzen von x fortschreitende Reihen

$$l = l^0 + \lambda x + \lambda' xx + \text{ u. s. w.}$$
$$m = m^0(1 + \mu x + \mu' xx + \text{ u. s. w.})$$

entwickelt sind, so ergibt die Rechnung

$$\begin{aligned}\operatorname{tang}\psi = {} & (1 + \mu x + \mu' xx + \text{ u. s. w.}) \operatorname{tang}\psi^0 \\ & - l^0 x - \tfrac{1}{2}(\lambda + l^0\mu) xx - (\tfrac{1}{3}\lambda' + \tfrac{1}{6}\lambda\mu - \tfrac{1}{6} l^0 \mu\mu + \tfrac{2}{3} l^0 \mu') x^3 - \text{ u. s. w.}\end{aligned}$$

und hieraus, weil $u = \int \operatorname{tang}\psi . \mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}u = {} & (x + \tfrac{1}{2}\mu xx + \tfrac{1}{3}\mu' x^3 + \text{ u. s. w.}) \operatorname{tang}\psi^0 \\ & - \tfrac{1}{2} l^0 xx - \tfrac{1}{6}(\lambda + l^0\mu) x^3 - (\tfrac{1}{12}\lambda' + \tfrac{1}{24}\lambda\mu - \tfrac{1}{24} l^0 \mu\mu + \tfrac{1}{6} l^0 \mu') x^4 - \text{ u. s. w.}\end{aligned}$$

wo keine Constante hinzuzufügen ist, weil für $x = 0$ auch $u = 0$ wird. Da nun auch für $x = h$, $u = 0$ wird, so folgt aus dieser Gleichung

$$\operatorname{tang}\psi^0 = \tfrac{1}{2} l^0 h + (\tfrac{1}{6}\lambda - \tfrac{1}{12} l^0 \mu) hh + (\tfrac{1}{12}\lambda' - \tfrac{1}{24}\lambda\mu) h^3 + \text{ u. s. w.}$$

Wird in der Gleichung für ψ auch anstatt x der Werth h, und statt $\operatorname{tang}\psi^0$ der eben gefundene substituirt, so ergibt sich

$$\operatorname{tang}\psi' = -\tfrac{1}{2} l^0 h - (\tfrac{1}{3}\lambda + \tfrac{1}{12} l^0\mu) hh - (\tfrac{1}{4}\lambda' + \tfrac{1}{24}\lambda\mu - \tfrac{1}{12} l^0 \mu\mu + \tfrac{1}{6} l^0 \mu') h^3 \text{ u. s. w.}$$

Da

$$l' = l^0 + \lambda h + \lambda' hh + \text{ u. s. w}$$
$$m' = m^0(1 + \mu h + \mu' hh + \text{ u. s. w.})$$

so wird

$$\begin{aligned}(\tfrac{1}{3} l^0 + \tfrac{1}{6} l') h \sqrt[6]{\tfrac{m^0}{m'}} = {} & \tfrac{1}{2} l^0 h + (\tfrac{1}{6}\lambda - \tfrac{1}{12} l^0 \mu) hh \\ & + (\tfrac{1}{6}\lambda' - \tfrac{1}{36}\lambda\mu + \tfrac{7}{144} l^0 \mu\mu - \tfrac{1}{12} l^0 \mu') h^3 \text{ u. s. w.} \\ -(\tfrac{1}{6} l^0 + \tfrac{1}{3} l') h \sqrt[6]{\tfrac{m'}{m^0}} = {} & -\tfrac{1}{2} l^0 h - (\tfrac{1}{3}\lambda + \tfrac{1}{12} l^0 \mu) hh \\ & - (\tfrac{1}{3}\lambda' + \tfrac{1}{18}\lambda\mu - \tfrac{5}{144} l^0 \mu\mu + \tfrac{1}{12} l^0 \mu') h^3 \text{ u. s. w.}\end{aligned}$$

also in den beiden ersten Gliedern oder bis auf die Ordnung hh mit obigen Werthen von $\operatorname{tang}\psi^0$, $\operatorname{tang}\psi'$ übereinstimmend: diese bequemen Ausdrücke können daher als hinreichend scharfe Werthe dieser Tangenten, oder unter Hinzufügung des Factors 206265″ als die Werthe der Winkel ψ^0, ψ' selbst angenommen werden.

Die Länge der Linie L selbst, zwischen den Punkten auf dem Ellipsoid, denen auf der Kugel die Punkte F, G entsprechen, ist das Integral

$$A\int \frac{\cos y}{m\cos\psi}\,\mathrm{d}x$$

von $x=0$ bis $x=h$ ausgedehnt; es wird aber immer erlaubt sein, darin sowohl $\cos y$ als $\cos\psi = 1$ zu setzen, und für m denjenigen Werth, welcher in der Linie M oder für $y=0$ gilt, wodurch also das Integral

$$= A\int \frac{\mathrm{d}x}{m^0(1+\mu x+\mu' xx+\text{ u.s.w.})}$$
$$= \frac{A}{m^0}(h-\tfrac{1}{2}\mu hh+(\tfrac{1}{3}\mu\mu-\tfrac{1}{3}\mu')h^3-\text{ u.s.w.})$$

wird. Es ist immer zureichend, den bis auf die Ordnung hh damit übereinstimmenden Werth

$$\frac{Ah}{\sqrt{m^0 m'}}$$

dafür anzunehmen.

13.

Die Bestimmung der Grössen l^0, l' geschieht auf folgende Weise. Es sei χ der Winkel, welchen an irgend einer Stelle des Grössten Kreisbogens N dieser in dem Sinne wachsender x mit dem Meridian in dem Sinne von Norden nach Süden genommen macht, den Winkel von diesem zu jenem in dem Sinne von der Linken nach der Rechten gezählt; es sei ferner S die Breite an jener Stelle, T die Länge von einem beliebigen Meridian an ostwärts gerechnet. Man hat dann daselbst

$$\mathrm{d}S = -\cos\chi.\mathrm{d}x+\sin\chi.\mathrm{d}y$$
$$\mathrm{d}T = -\frac{\sin\chi}{\cos S}\mathrm{d}x-\frac{\cos\chi}{\cos S}\mathrm{d}y$$

und folglich den partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\mathrm{d}m}{m\mathrm{d}y} = \sin\chi.\frac{\mathrm{d}m}{m\mathrm{d}S}-\frac{\cos\chi}{\cos S}.\frac{\mathrm{d}m}{m\mathrm{d}T}$$

Da nun bei unserer conformen Uebertragung m von der Länge unabhängig oder $\frac{\mathrm{d}m}{m\mathrm{d}T}=0$ ist, so wird

$$l = \sin\chi.\frac{\mathrm{d}m}{m\mathrm{d}S}$$

Bezeichnet man die Werthe von χ in den Punkten F und G mit V^0 und $180^0+V'$ (so dass nach gewöhnlichem Sprachgebrauche V^0 das Azimuth des Grössten Kreisbogens FG in F, und V' das Azimuth des Grössten Kreisbogens

GF in G bedeutet); imgleichen die (immer negativen) Werthe von $\frac{206265'' \mathrm{d}m}{2m\,\mathrm{d}S}$ in denselben Punkten mit $-k^0$, $-k'$, so wird

$$206265'' l^0 = -2k^0 \sin V^0$$
$$206265'' l' = +2k' \sin V'$$

Die im vorhergehenden Artikel gegebenen Ausdrücke für ψ^0, ψ', in Secunden verwandelt, werden daher, wenn man die von der Einheit hier nur unmerklich abweichenden Factoren $\sqrt[6]{\frac{m^0}{m'}}$, $\sqrt[6]{\frac{m'}{m^0}}$ weglässt,

$$\psi^0 = -\tfrac{1}{3}h(2k^0 \sin V^0 - k' \sin V')$$
$$\psi' = -\tfrac{1}{3}h(2k' \sin V' - k^0 \sin V^0)$$

Die dieser Abhandlung beigefügte Tafel gibt in der letzten Columne unter der Ueberschrift k die Werthe von k^0, k' für die entsprechenden Werthe von S, die in der ersten Columne unter der Ueberschrift $Q+q$ aufzusuchen sind; da k immer positiv ist, und $\sin V^0$, $\sin V'$ immer entgegengesetzte Zeichen haben, so wird ψ^0 negativ, ψ' positiv, wenn G westlich von F liegt und umgekehrt: bei der Berechnung erinnere man sich, dass in diesen Formeln h als in Theilen des Halbmessers ausgedrückt verstanden wird, also der in irgend einem Längenmaasse gegebene Abstand der Punkte F, G zuvor mit dem in gleichem Maasse ausgedrücktem Werthe von A zu dividiren ist.

Da in unserer conformen Übertragung der Ellipsoidfläche auf die Kugelfläche ein Meridian auf jener wiederum durch einen Meridian auf dieser dargestellt wird, so ist klar, dass jedes Element von L dieselbe Neigung gegen den Meridian hat wie das entsprechende Element von M, und dass folglich die Azimuthe der geodaetischen Linie in ihren beiden Endpunkten resp. $V^0 + \psi^0$ und $V' + \psi'$ sein werden: sind aber umgekehrt diese gegeben, so werden sie auf die Kugelfläche reducirt durch Anbringung von $-\psi^0$, $-\psi'$. und für die Berechnung dieser stets fast ganz verschwindenden Reductionen ist es offenbar ganz gleichgültig, wenn man in den obigen Formeln anstatt V^0, V' die Azimuthe auf dem Ellipsoid anwendet.

14.

Um nach den gegebenen Vorschriften die Reductionen der Richtungen, behuf der Übertragung vom Ellipsoid auf die Kugel oder umgekehrt, berechnen zu können, ist zwar eine genäherte Kenntniss der Grösse der Linien, der orientirten Azimuthe, und der Breiten der Endpunkte erforderlich, was nur durch eine vorläufige Berechnung der Dreiecke zu erhalten ist: allein dieser Umstand ist durchaus unerheblich, da eine vorläufige schon die Ausführung der Messungen Schritt für Schritt begleitende Berechnung ohnehin in vielen Beziehungen räthlich, und zur Centrirung der excentrisch gemessenen Winkel, so wie zur Bestimmung des sphärischen oder sphäroidischen Excesses der Winkelsumme jedes Dreiecks sogar nothwendig ist: ja für den ersten Zweck wird, bei der Geringfügigkeit jener Reductionen, schon eine ganz rohe Annäherung immer zureichen, während das scharfe Centriren zuweilen, bei etwas beträchtlicher Excentricität der Standpunkte eine viel weiter getriebene Annäherung erfordern kann. Ich habe die Vorschriften deshalb entwickelt, damit man, *wenn* man jene Reductionen berücksichtigen will, alles zu ihrer schärfsten Berechnung nöthige bereit finde, oder wenn man sie *nicht* berücksichtigen will, leicht und bestimmt übersehen könne, wie wenig man dadurch aufopfert. Bei dem ganzen Hannoverschen Dreieckssystem sind die Reductionen durchgehends so äusserst gering, dass ihre Berücksichtigung als gänzlich überflüssig erscheint, und in der ganzen Ausdehnung der Zone von zwölf Breitengraden, für welche ich den Hülfsapparat beifüge, bleiben sie noch unterhalb derjenigen Bogensecundentheile, auf welche man sich bei den meisten Messungen in der Rechnung zu beschränken pflegt. Um diess recht evident hervortreten zu lassen, füge ich hier noch die numerische Rechnung für ein Paar Beispiele bei.

In dem Hannoverschen Dreieckssystem kommen die grössten Reductionen vor bei den Richtungen der Seiten des Dreiecks Brocken-Hohehagen-Inselsberg, welches Dreieck zugleich das grösste und das von dem Normal-Parallelkreise am entferntesten liegende ist: bei allen übrigen Dreiecksseiten überschreiten die Reductionen nirgends zwei Tausendtheile der Secunde, und die meisten erreichen nicht einmal den Werth 0″001.

Es ist für diese Punkte

	Breite		
	auf dem Ellipsoid	auf der Kugel	k
Brocken	51° 48′ 2″	51° 46′ 3″	0″164
Hohehagen	51 28 31	51 26 35	0,303
Inselsberg	50 51 9	50 49 16	0,687

Die Logarithmen der Seiten des Dreiecks in Toisen sind

Hohehagen - Inselsberg	4,6393865
Inselsberg - Brocken	4,7353929
Brocken - Hohehagen	4,5502669

Die Azimuthe sind

	Standpunkt Brocken		
Inselsberg	5^0	42′	22″
Hohehagen	58	49	8
	Standpunkt Hohehagen		
Brocken	238	9	2
Inselsberg	324	23	1
	Standpunkt Inselsberg		
Hohehagen	144	55	51
Brocken	185	35	21

Man braucht hiebei zwischen Werthen auf dem Sphaeroid und denen auf der Kugel nicht zu unterscheiden, da für die Logarithmen der Abstände erst in der achten oder neunten Decimale, für die Azimuthe erst in den Tausendtheilen der Secunde Ungleichheit eintritt, und für unsern Zweck Logarithmen mit vier Decimalen und Azimuthe in Minuten schon überflüssig genau sind. Die Rechnung nach obigen Formeln gibt hiermit folgende Reductionen, wie sie mit ihren Zeichen zu den Azimuthen auf dem Sphaeroid addirt werden müssen, um die Azimuthe auf der Kugel zu erhalten:

Brocken - Inselsberg	+ 0″00055
Brocken - Hohehagen	+ 0,00196
Hohehagen - Brocken	− 0,00238
Hohehagen - Inselsberg	− 0,00332
Inselsberg - Hohehagen	+ 0,00428
Inselsberg - Brocken	− 0,00083

Die Winkel des Dreiecks auf dem Sphaeroid (zwischen den geodätischen Linien) empfangen also zur Reduction auf die Winkel des Kugeldreiecks (zwischen Grössten Kreisbögen) die Aenderungen

Brocken	$+0''00141$
Hohehagen	$-0,00094$
Inselsberg	$-0,00511$

Ein zweites Beispiel entlehne ich aus der trigonometrischen Vermessung der Schweiz*), wo das grösste Hauptdreieck zwischen den Punkten Chasseral, Suchet, Berra eben an die Grenze der Ausdehnung unserer Hülfstafel fällt. Wir haben für diese Punkte

	Breite.						
	auf dem Ellipsoid			auf der Kugel			k
Chasseral	47^0	$8'$	$1''$	47^0	$6'$	$33''$	$6''137$
Suchet	46	46	23	46	44	57	6,948
Berra	46	40	36	46	39	11	7,173

Die Logarithmen der Dreiecksseiten in Metern sind

Suchet-Berra	4,7474503
Berra-Chasseral	4,7133766
Chassseral-Suchet	4,7808768

Die Azimuthe

	Standpunkt Chasseral		
Suchet	48^0	$36'$	$41''$
Berra	349	21	54
	Standpunkt Suchet		
Chasseral	228	10	40
Berra	280	47	19
	Standpunkt Berra		
Suchet	101	18	40
Chasseral	169	27	22

Hieraus ergeben sich die Reductionen der Sphaeroid-Azimuthe auf die Kugel-Azimuthe

*) Ergebnisse der trigonometrischen Vermessungen in der Schweiz, herausgegeben von J. Eschmann. Zurich 1840. S. 79. 99. 159. 190. 196.

Chasseral-Suchet	$+0''04536$
Chasseral-Berra	$-0,00966$
Suchet-Chasseral	$+0,06221$
Suchet-Berra	$+0,01014$
Berra-Suchet	$-0,04717$
Berra-Chasseral	$-0,06039$

also auch hier ohne Einfluss auf die Rechnung, die in dem angeführten Werke auf Zehntel der Secunde geführt ist.

15.

Die in den Artt. 12 und 13 behandelte Aufgabe ist zwar durch die gegebenen Vorschriften mit einer für die Anwendung überflüssig ausreichenden Genauigkeit aufgelöset; indessen ist es doch der Mühe werth, und zur gleichmässigen Vollendung einer in der Folge mitzutheilenden Untersuchung sogar nothwendig, für einen speciellen Fall die Genauigkeit noch um eine Ordnung weiter zu treiben: dieser specielle Fall steht unter der Bedingung, dass die Linie N in einem zwischen F und G liegenden Punkte H den Normalparallelkreis treffe. Es ist in diesem Falle vortheilhafter, den Anfangspunkt der x, nicht wie oben in F, sondern in H zu setzen, wodurch bewirkt wird, dass bei der Entwicklung von l und m in nach Potenzen von x fortschreitende Reihen in der erstern das erste und zweite Glied, in der andern das zweite und dritte ausfallen, oder dass sie folgende Form haben:

$$l = \lambda xx + \lambda' x^3 + \text{ u. s. w.}$$
$$m = 1 + \mu x^3 + \mu' x^4 + \text{ u. s. w.}$$

Für unsern Zweck wird von den Coëfficienten in diesen Reihen nur der eine λ erforderlich sein, wofür sich aus der im 9 Art. für $\log m$ gegebenen Formel verbunden mit den Entwicklungen des 13 Art. leicht folgender Ausdruck ableiten lässt:

$$\lambda = -\frac{2ee\cos P \sin P \sin\chi \cos\chi^2}{\cos\varphi \cos\theta}$$

in welcher e, P, φ, θ ihre oben erklärten Bedeutungen behalten, und für χ das in dem Punkte H Statt findende Azimuth des Bogens N zu setzen ist.

Werden obige Reihen bei der Integration der Gleichungen

$$\mathrm{d}.\frac{\operatorname{tang}\psi}{m} = -\frac{l\,\mathrm{d}x}{m}$$
$$\mathrm{d}u = \operatorname{tang}\psi\,.\,\mathrm{d}x$$

angewandt, so ergibt sich

$$\operatorname{tang}\psi = \mathfrak{A}(1+\mu x^3+\mu' x^4+\text{ u. s. w.})-\tfrac{1}{3}\lambda x^3-\tfrac{1}{4}\lambda' x^4-\text{u. s. w.}$$
$$u = \mathfrak{B}+\mathfrak{A}(x+\tfrac{1}{4}\mu x^4+\tfrac{1}{5}\mu' x^5+\text{ u. s. w.})-\tfrac{1}{12}\lambda x^4-\tfrac{1}{20}\lambda' x^5-\text{ u. s. w.}$$

Die durch die Integration eingeführten Constanten, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, lassen sich durch die Bedingung bestimmen, dass $u=0$ werden muss für die beiden Werthe von x, welche den Punkten F, G entsprechen. Es seien diese Werthe $x=-\frac{1}{2}(h-\delta)$ und $x=+\frac{1}{2}(h+\delta)$, wo δ den Werth von $2x$ in dem mitten zwischen F und G liegenden Punkte ausdrückt, und allgemein zu reden eine Grösse von derselben Ordnung wie h ist, oder von einer höhern, wenn H dieser Mitte sehr nahe liegt. Man leitet hieraus leicht folgenden auf die Ordnung h^3 (einschl.) genauen Ausdruck für $\mathfrak{A}$ ab

$$\mathfrak{A} = \frac{\lambda((h+\delta)^4-(h-\delta)^4)}{192\,h} = \tfrac{1}{24}\lambda\delta(hh+\delta\delta)$$

Substituirt man diesen in der Reihe für $\operatorname{tang}\psi$. und legt dann der Veränderlichen x die bestimmten Werthe $-\frac{1}{2}(h-\delta)$, $+\frac{1}{2}(h+\delta)$ bei, so ergibt sich, gleichfalls auf die dritte Ordnung genau,

$$\operatorname{tang}\psi^0 = \tfrac{1}{24}\lambda h(hh-2h\delta+3\delta\delta)$$
$$\operatorname{tang}\psi' = -\tfrac{1}{24}\lambda h(hh-2h\delta+3\delta\delta)$$

In dem speciellen Fall der in der Folge zu entwickelnden Untersuchung kommt übrigens zu der oben bezeichneten Bedingung noch der Umstand hinzu, dass der Normalparallelkreis mitten inne liegt zwischen den beiden Parallelkreisen, auf welchen sich die Punkte F, G befinden, und in Folge dieses Umstandes werden schon die abgekürzten Ausdrücke

$$\operatorname{tang}\psi^0 = \tfrac{1}{24}\lambda h^3$$
$$\operatorname{tang}\psi' = -\tfrac{1}{24}\lambda h^3$$

auf die dritte Ordnung genau sein, wie sich leicht auf folgende Art zeigen lässt. Bezeichnet man die Breite von F mit $Q+q$, die von G mit $Q-q$, so geben die sphaerischen Dreiecke F, H, Pol und G, H, Pol die Gleichungen

$$\sin(Q+q) = \sin Q \cos\tfrac{1}{2}(h-\delta) + \cos Q \sin\tfrac{1}{2}(h-\delta)\cos\chi$$
$$\sin(Q-q) = \sin Q \cos\tfrac{1}{2}(h+\delta) - \cos Q \sin\tfrac{1}{2}(h+\delta)\cos\chi$$

und ihre Summe mit $2\cos Q$ dividirt

$$\operatorname{tang} Q.(\cos q - \cos\tfrac{1}{2}h.\cos\tfrac{1}{2}\delta) = -\cos\tfrac{1}{2}h \sin\tfrac{1}{2}\delta \cos\chi$$

Da nun offenbar $\cos q - \cos\frac{1}{2}h.\cos\frac{1}{2}\delta$ eine Grösse zweiter Ordnung ist, so wird auch $\sin\frac{1}{2}\delta\cos\chi$, und $\delta\cos\chi$ von dieser Ordnung sein, mithin, da λ den Factor $\cos\chi^2$ implicirt, $\lambda hh\delta$ von der vierten, und $\lambda h\delta\delta$ von der fünften Ordnung; hiedurch ist also die Weglassung dieser Glieder gerechtfertigt.

Das Endresultat dieser Entwickelung ist demnach, unter der angegebenen Voraussetzung, in folgenden Formeln enthalten, wo anstatt der Tangenten von ψ^0, ψ' die Bögen selbst geschrieben sind:

$$\psi^0 = -\frac{ee\cos P \sin P \sin\chi \cos\chi^2 h^3}{12\cos\varphi \cos\theta}$$
$$\psi' = +\frac{ee\cos P \sin P \sin\chi \cos\chi^2 h^3}{12\cos\varphi \cos\theta}$$

16.

Die Berechnung des Dreieckssystems auf der Kugel zerfällt in drei Hauptstücke:

1) die Ausgleichung der Winkel nach allen den Bedingungsgleichungen, welche die Beschaffenheit des Systems darbietet.
2) die Berechnung der sämmtlichen Dreiecksseiten.
3) die Bestimmung der Längen und Breiten der Dreieckspunkte, in Verbindung mit der Orientirung der von jedem derselben ausgehenden Dreiecksseiten.

Die Verwandlung der Längen und Breiten auf der Kugel in die wahren Längen und Breiten auf dem Sphaeroid geschieht dann für die Längen durch die Division mit dem constanten Divisor α, für die Breiten vermittelst der hier beigefügten Hülfstafel, oder einer andern auf ähnliche Weise besonders construirten, wenn man einen andern Normal-Parallelkreis zu wählen Ursache hat.

Mit Übergehung der beiden ersten auf bekannten Gründen beruhenden Geschäfte füge ich hier noch einiges in Beziehung auf das dritte bei, welches sich auf die Auflösung der Aufgabe reducirt*): aus der in Bogentheilen ausgedrückten

*) Da diese Aufgabe hier wie eine für sich bestehende betrachtet wird, so können ohne Nachtheil einige Buchstaben hier in anderer Bedeutung als oben gebraucht werden.

Grösse einer Dreiecksseite r, ihrem Azimuthe T an dem Anfangspunkte, und der Breite dieses Anfangspunkts S, abzuleiten das Azimuth der Seite an dem andern Endpunkte $T'+180^0$, die Breite desselben S' und den Längenunterschied beider Punkte λ. Da dies nichts weiter ist als die Auflösung eines sphärischen Dreiecks, so verdient diese Aufgabe nur deshalb hier einen Platz, weil die gewöhnlich gebrauchten Formeln hier einiger Umformung bedürfen, wenn man in den Resultaten (nach der Bemerkung im 10 Art.) dieselbe Genauigkeit erreichen will, in welcher r gegeben ist, ohne mehrzifrige Logarithmen zu Hülfe zu nehmen. Um unter den verschiedenen Auflösungsarten nach jedesmaligem Bedürfniss wählen zu können, setze ich zuvörderst diejenigen hieher, die auf den bekannten elementaren Formeln der sphärischen Trigonometrie beruhen.

Erste Methode

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} s &= \cos T \operatorname{tang} r \\ \operatorname{tang}\lambda &= \frac{\operatorname{tang} T \sin s}{\cos(S-s)} \\ \operatorname{tang} S' &= \cos\lambda \operatorname{tang}(S-s) \\ \sin T' &= \frac{\sin T \cos S}{\cos S'} \end{aligned}$$

Zweite Methode

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} R &= \frac{\operatorname{tang} S}{\cos T} \\ \operatorname{tang} T' &= \frac{\operatorname{tang} T \cos R}{\cos(R-r)} \\ \operatorname{tang} S' &= \cos T' \operatorname{tang}(R-r) \\ \sin\lambda &= \frac{\sin r \sin T}{\cos S'} = \frac{\sin r \sin T'}{\cos S} \end{aligned}$$

Dritte Methode

$$\begin{aligned} \sin(45^0+\tfrac{1}{2}S')\sin\tfrac{1}{2}(T'+\lambda) &= \sin(45^0+\tfrac{1}{2}(S+r))\sin\tfrac{1}{2}T \\ \sin(45^0+\tfrac{1}{2}S')\cos\tfrac{1}{2}(T'+\lambda) &= \sin(45^0+\tfrac{1}{2}(S-r))\cos\tfrac{1}{2}T \\ \cos(45^0+\tfrac{1}{2}S')\sin\tfrac{1}{2}(T'-\lambda) &= \cos(45^0+\tfrac{1}{2}(S+r))\sin\tfrac{1}{2}T \\ \cos(45^0+\tfrac{1}{2}S')\cos\tfrac{1}{2}(T'-\lambda) &= \cos(45^0+\tfrac{1}{2}(S-r))\cos\tfrac{1}{2}T \end{aligned}$$

In Beziehung auf die Kürze der Rechnung hat die dritte Methode einigen Vorzug vor den beiden andern, während diese im Allgemeinen die Resultate ein wenig schärfer geben können, namentlich λ immer mit völlig genügender Schärfe: T' wird aber, wenn es einem rechten Winkel nahe kommt, durch die erste Methode vergleichungsweise nur ungenau bestimmt. Verlangt man aber alle drei Resultate mit gleichmässiger und, aus dem Gesichtspunkte des 10 Art. betrachtet, zureichender Schärfe, so ist zu einer directen strengen Auflösung folgende Umformung am vortheilhaftesten, wobei die beiden ersten Formeln dieselben bleiben wie in der ersten Methode.

Vierte Methode

$$\begin{aligned}
\operatorname{tang} s &= \cos T \operatorname{tang} r \\
\operatorname{tang} \lambda &= \frac{\operatorname{tang} T \sin s}{\cos(S-s)} \\
\operatorname{tang} t &= \sin T \sin r \operatorname{tang}(S-s) \\
\sin \tau &= \sin T \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} r \sin s \\
\sin \sigma &= \operatorname{tang} t \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\lambda \cos(S-s) \\
S' &= S-s-\sigma \\
T' &= T-t-\tau
\end{aligned}$$

Diese vierte Methode lässt für die Schärfe nichts zu wünschen übrig; aber die unmittelbar in dieser Form geführte Rechnung erfordert ein etwas beschwerliches Interpoliren bei Bestimmung der kleinen Bögen durch die Logarithmen der Tangenten oder Sinus; man kann jedoch diesem Übelstande leicht ausweichen, indem man die trigonometrischen Functionen in Reihen entwickelt, wodurch man in den Stand gesetzt wird, ohne Nachtheil für die Schärfe, die Rechnungen vermittelst der Logarithmen der Zahlen zu führen. Es wird zureichend sein, von dieser Verwandlung nur die Hauptmomente hieher zu setzen.

Es sei

$$\begin{aligned}
r \cos T &= s^0 \\
r \sin T &= v
\end{aligned}$$

Es wird dann, wenn zur Abkürzung die Grösse des Bogens von einer Secunde in Theilen des Halbmessers oder der Bruch $\frac{\pi}{648000}$ durch ρ bezeichnet und r wie eine Grösse erster Ordnung betrachtet wird, bis auf Grössen fünfter Ordnung (ausschliesslich) genau

$$s = s^0(1+\tfrac{1}{3}\rho\rho rr - \tfrac{1}{3}\rho\rho s^0 s^0) = s^0(1+\tfrac{1}{3}\rho\rho vv)$$

Setzt man dann ferner

$$\begin{aligned}
v \operatorname{tang}(S-s) &= t^0 \\
\frac{v}{\cos(S-s)} &= \lambda^0
\end{aligned}$$

so wird

$$
\begin{aligned}
t &= t^0(1-\tfrac{1}{6}\rho\rho rr \;-\tfrac{1}{3}\rho\rho t^0t^0)\\
\lambda &= \lambda^0(1-\tfrac{1}{6}\rho\rho s^0s^0-\tfrac{1}{3}\rho\rho t^0t^0)\\
\sigma &= \tfrac{1}{2}\rho v t^0(1-\tfrac{1}{12}\rho\rho rr-\tfrac{1}{4}\rho\rho s^0s^0-\tfrac{1}{4}\rho\rho t^0t^0)\\
\tau &= \tfrac{1}{2}\rho v s^0(1+\tfrac{5}{12}\rho\rho rr-\tfrac{1}{2}\rho\rho s^0s^0)
\end{aligned}
$$

für t und λ auf die fünfte, für σ und τ auf die sechste Ordnung (ausschl.) genau. Noch bequemer und eben so genau ist es, hiebei sogleich die Logarithmen zu gebrauchen, wodurch die Formeln, wenn man zur Abkürzung das Product der Grösse $\frac{1}{12}\rho\rho$ in den Modulus der briggischen Logarithmen mit μ bezeichnet, folgende Gestalt erhalten:

$$
\begin{aligned}
\log s &= \log s^0+4\mu rr\;-4\mu s^0s^0\\
\log t &= \log t^0-2\mu rr\;-4\mu t^0t^0\\
\log\lambda &= \log\lambda^0-2\mu s^0s^0-4\mu t^0t^0\\
\log\sigma &= \log\tfrac{1}{2}\rho v t^0-\;\mu rr-3\mu s^0s^0-3\mu t^0t^0\\
\log\tau &= \log\tfrac{1}{2}\rho v s^0+5\mu rr-6\mu s^0s^0
\end{aligned}
$$

Diese fünf Formeln in Verbindung mit den vorhergehenden für s^0, t^0, λ^0 bilden eine fünfte Auflösungsart, deren eigenthümliches es ist, dass genäherte Werthe der Grössen $s, t, \lambda, \sigma, \tau$ durch kleine sehr leicht zu berechnende an den Logarithmen anzubringende Correctionen zu scharfen erhoben werden. Die hiebei vorkommenden constanten Logarithmen sind

$$
\begin{aligned}
\log\rho\; &= 4{,}6855748668 \quad (-10)\\
\log\tfrac{1}{2}\rho &= 4{,}3845448712 \quad (-10)\\
\log\mu\; &= 7{,}9297527989 \quad (-20)
\end{aligned}
$$

oder wenn jene Correctionen sofort als Einheiten der siebenten Decimale erscheinen sollen

$$\log\mu = 4{,}9297527989 \quad (-10)$$

von welchen Logarithmen jedoch hier nur die ersten Ziffern zur Anwendung kommen.

17.

Viel einfacher lassen sich aber die Relationen zwischen den Grössen r, S, S', T, T', λ ausdrücken, wenn man von dem Mittel der beiden Breiten und der beiden Azimuthe ausgeht. Schreiben wir

$$\tfrac{1}{2}(S+S') = B, \qquad \tfrac{1}{2}(T+T') = A, \qquad S-S' = b, \qquad T-T' = a$$

so haben wir zuvörderst die Formeln

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}r\sin A &= \sin\tfrac{1}{2}\lambda\cos B\\
\sin\tfrac{1}{2}r\cos A &= \cos\tfrac{1}{2}\lambda\sin\tfrac{1}{2}b\\
\cos\tfrac{1}{2}r\sin\tfrac{1}{2}a &= \sin\tfrac{1}{2}\lambda\sin B\\
\cos\tfrac{1}{2}r\cos\tfrac{1}{2}a &= \cos\tfrac{1}{2}\lambda\cos\tfrac{1}{2}b
\end{aligned}$$

wonach man also, wenn A, B, r als gegeben betrachtet werden, a und λ durch die Formeln

$$\begin{aligned}
\sin A\tang B\tang\tfrac{1}{2}r &= \sin\tfrac{1}{2}a\\
\frac{\sin A\sin\tfrac{1}{2}r}{\cos B} &= \sin\tfrac{1}{2}\lambda
\end{aligned}$$

und sodann b aus

$$\frac{\cos A\tang\tfrac{1}{2}r}{\cos\tfrac{1}{2}a} = \tang\tfrac{1}{2}b$$

oder

$$\frac{\cos A\sin\tfrac{1}{2}r}{\cos\tfrac{1}{2}\lambda} = \sin\tfrac{1}{2}b$$

bestimmt. Anstatt dieser Formeln wird man aber, wegen der Kleinheit von r, a, λ, b, lieber die folgenden anwenden, welche viel bequemer, und bis auf die fünfte Ordnung (ausschl.) genau sind:

$$\begin{aligned}
a^0 &= r\sin A\tang B\\
\lambda^0 &= \frac{r\sin A}{\cos B}\\
b^0 &= r\cos A\\
\log a &= \log a^0 + \mu rr + \tfrac{1}{2}\mu a^0a^0\\
\log\lambda &= \log\lambda^0 - \tfrac{1}{2}\mu rr + \tfrac{1}{2}\mu\lambda^0\lambda^0\\
\log b &= \log b^0 + \tfrac{1}{2}\mu a^0a^0 + \mu\lambda^0\lambda^0
\end{aligned}$$

wo, wie man sieht, die dritte Correction der Summe der ersten und der doppelten zweiten gleich ist.

Für unsere Aufgabe geben zwar diese Formeln keine directe Auflösung: indessen kann man sie als Controlle oder als concentrirte übersichtliche Inhaltswiederholung der directen Auflösung gebrauchen. Wer aber in numerischen Rechnungen einige Gewandtheit besitzt, wird sie auch leicht zu einer indirecten Auflösung benutzen können, und dieser, zumal wo anderer Zwecke wegen eine grob genäherte schon vorangegangen ist, wegen ihrer Bequemlichkeit und Schärfe vor allen andern Auflösungen den Vorzug geben.

291

T A F E L N.

$Q+q$	$P+p$	$\log m$ +	k	$Q+q$	$P+p$	$\log m$ +	k
46° 40′	46° 41′ 24″74900	10559	7″141	47° 30′	47° 31′ 31″34250	6759	5″313
41	42 24.88515	10472	7.101	31	32 31.46992	6694	5.279
42	43 25.02112	10385	7.062	32	33 31.59717	6630	5.245
43	44 25.15692	10299	7.024	33	34 31.72424	6566	5.211
44	45 25.29255	10213	6.985	34	35 31.85113	6502	5.178
45	46 25.42799	10128	6.946	35	36 31.97785	6439	5.144
46	47 25.56327	10043	6.907	36	37 32.10440	6376	5.111
47	48 25.69837	9959	6.869	37	38 32.23077	6314	5.078
48	49 25.83330	9875	6.830	38	39 32.35696	6252	5.045
49	50 25.96805	9792	6.792	39	40 32.48299	6190	5.012
50	51 26.10262	9709	6.754	40	41 32.60883	6129	4.979
51	52 26.23702	9626	6.716	41	42 32.73451	6068	4.946
52	53 26.37125	9544	6.678	42	43 32.86001	6008	4.913
53	54 26.50530	9462	6.640	43	44 32.98533	5948	4.880
54	55 26.63918	9381	6.602	44	45 33.11048	5888	4.848
55	56 26.77288	9301	6.565	45	46 33.23546	5829	4.816
56	57 26.90641	9221	6.527	46	47 33.36026	5770	4.783
57	58 27.03977	9141	6.490	47	48 33.48488	5712	4.751
58	59 27.17295	9062	6.452	48	49 33.60934	5654	4.719
59	47 0 27.30595	8983	6.415	49	50 33.73361	5596	4.687
47 0	1 27.43878	8904	6.378	50	51 33.85772	5539	4.655
1	2 27.57144	8826	6.341	51	52 33.98165	5482	4.624
2	3 27.70392	8749	6.304	52	53 34.10540	5426	4.592
3	4 27.83622	8672	6.267	53	54 34.22898	5370	4.560
4	5 27.96836	8595	6.230	54	55 34.35239	5314	4.529
5	6 28.10031	8519	6.194	55	56 34.47562	5259	4.498
6	7 28.23210	8444	6.157	56	57 34.59867	5204	4.466
7	8 28.36370	8369	6.121	57	58 34.72156	5149	4.435
8	9 28.49514	8294	6.084	58	59 34.84426	5095	4.404
9	10 28.62640	8219	6.048	59	48 0 34.96680	5042	4.373
10	11 28.75748	8146	6.012	48° 0	1 35.08916	4988	4.343
11	12 28.88839	8072	5.976	1	2 35.21134	4935	4.312
12	13 29.01913	7999	5.940	2	3 35.33335	4883	4.281
13	14 29.14969	7927	5.904	3	4 35.45519	4830	4.251
14	15 29.28007	7855	5.869	4	5 35.57685	4778	4.221
15	16 29.41028	7783	5.833	5	6 35.69834	4727	4.190
16	17 29.54032	7712	5.798	6	7 35.81965	4676	4.160
17	18 29.67018	7641	5.762	7	8 35.94079	4625	4.130
18	19 29.79987	7570	5.727	8	9 36.06175	4575	4.100
19	20 29.92938	7501	5.692	9	10 36.18254	4525	4.070
20	21 30.05872	7431	5.657	10	11 36.30316	4475	4.041
21	22 30.18788	7362	5.622	11	12 36.42360	4426	4.011
22	23 30.31687	7293	5.587	12	13 36.54387	4377	3.982
23	24 30.44569	7225	5.553	13	14 36.66396	4328	3.952
24	25 30.57433	7157	5.518	14	15 36.78388	4280	3.923
25	26 30.70279	7090	5.483	15	16 36.90362	4232	3.894
26	27 30.83108	7023	5.449	16	17 37.02319	4184	3.865
27	28 30.95920	6956	5.415	17	18 37.14259	4137	3.836
28	29 31.08714	6890	5.381	18	19 37.26181	4090	3.807
29	30 31.21491	6825	5.346	19	20 37.38086	4044	3.778
30	31 31.34250	6759	5.313	20	21 37.49973	3998	3.749

$Q+q$	$P+p$	$\log m$ +	k	$Q+q$	$P+p$	$\log m$ +	k
48° 20′	48° 21′ 37″49973	3998	3″749	49° 10′	49° 11′ 43″22141	2112	2″454
21	22 37.61843	3952	3.721	11	12 43.33141	2082	2.431
22	23 37.73695	3907	3.692	12	13 43.44123	2052	2.408
23	24 37.85530	3862	3.664	13	14 43.55088	2023	2.385
24	25 37.97348	3817	3.636	14	15 43.66036	1994	2.362
25	26 38.09148	3773	3.608	15	16 43.76967	1965	2.339
26	27 38.20931	3729	3.580	16	17 43.87880	1937	2.317
27	28 38.32696	3685	3.552	17	18 43.98775	1908	2.294
28	29 38.44444	3641	3.524	18	19 44.09653	1880	2.272
29	30 38.56175	3598	3.496	19	20 44.20514	1853	2.250
30	31 38.67888	3556	3.469	20	21 44.31358	1825	2.227
31	32 38.79583	3514	3.441	21	22 44.42184	1798	2.205
32	33 38.91262	3472	3.414	22	23 44.52993	1771	2.183
33	34 39.02923	3430	3.387	23	24 44.63784	1745	2.162
34	35 39.14566	3389	3.360	24	25 44.74558	1718	2.140
35	36 39.26192	3348	3.333	25	26 44.85315	1692	2.118
36	37 39.37801	3307	3.306	26	27 44.96054	1666	2.097
37	38 39.49392	3267	3.279	27	28 45.06777	1641	2.075
38	39 39.60966	3227	3.252	28	29 45.17481	1615	2.054
39	40 39.72522	3187	3.226	29	30 45.28169	1590	2.033
40	41 39.84061	3148	3.199	30	31 45.38838	1566	2.012
41	42 39.95583	3109	3.173	31	32 45.49491	1541	1.991
42	43 40.07087	3070	3.146	32	33 45.60126	1517	1.970
43	44 40.18574	3031	3.120	33	34 45.70744	1493	1.949
44	45 40.30043	2993	3.094	34	35 45.81345	1469	1.928
45	46 40.41495	2956	3.068	35	36 45.91928	1446	1.908
46	47 40.52929	2918	3.042	36	37 46.02494	1422	1.887
47	48 40.64347	2881	3.017	37	38 46.13043	1399	1.867
48	49 40.75746	2844	2.991	38	39 46.23574	1377	1.847
49	50 40.87129	2808	2.965	39	40 46.34088	1354	1.827
50	51 40.98494	2772	2.940	40	41 46.44584	1332	1.807
51	52 41.09841	2736	2.915	41	42 46.55063	1310	1.787
52	53 41.21171	2700	2.889	42	43 46.65525	1288	1.767
53	54 41.32484	2665	2.864	43	44 46.75970	1267	1.747
54	55 41.43780	2630	2.839	44	45 46.86397	1245	1.728
55	56 41.55058	2595	2.814	45	46 46.96807	1224	1.708
56	57 41.66318	2561	2.790	46	47 47.07199	1203	1.689
57	58 41.77561	2527	2.765	47	48 47.17574	1183	1.670
58	59 41.88787	2493	2.740	48	49 47.27932	1163	1.651
59	49 0 41.99996	2460	2.716	49	50 47.38273	1142	1.632
49° 0	1 42.11187	2427	2.692	50	51 47.48596	1123	1.613
1	2 42.22360	2394	2.667	51	52 47.58902	1103	1.594
2	3 42.33517	2362	2.643	52	53 47.69191	1084	1.575
3	4 42.44655	2329	2.619	53	54 47.79462	1064	1.556
4	5 42.55777	2297	2.595	54	55 47.89716	1045	1.538
5	6 42.66881	2266	2.572	55	56 47.99952	1027	1.520
6	7 42.77968	2234	2.548	56	57 48.10172	1008	1.501
7	8 42.89037	2203	2.524	57	58 48.20374	990	1.483
8	9 43.00089	2172	2.501	58	59 48.30559	972	1.465
9	10 43.11124	2142	2.477	59	50 0 48.40726	954	1.447
10	11 43.22141	2112	2.454	50 0	1 48.50876	936	1.429

$Q+q$	$P+p$	$\log m$ +	k	$Q+q$	$P+p$	$\log m$ +	k
50° 0′	50° 1′ 48″50876	936	1″429	50° 50′	50° 51′ 53″36348	305	0″678
1	2 48.61009	919	1.412	51	52 53.45618	297	0.666
2	3 48.71124	902	1.394	52	53 53.54870	289	0.654
3	4 48.81222	885	1.377	53	54 53.64105	281	0.642
4	5 48.91303	868	1.359	54	55 53.73323	273	0.630
5	6 49.01367	852	1.342	55	56 53.82524	265	0.618
6	7 49.11413	835	1.325	56	57 53.91708	258	0.606
7	8 49.21442	819	1.308	57	58 54.00874	251	0.595
8	9 49.31454	803	1.291	58	59 54.10023	243	0.583
9	10 49.41448	787	1.274	59	51 0 54.19155	236	0.572
10	11 49.51425	772	1.257	51 0	1 54.28270	229	0.561
11	12 49.61385	757	1.241	1	2 54.37367	223	0.550
12	13 49.71327	742	1.224	2	3 54.46447	216	0.539
13	14 49.81253	727	1.208	3	4 54.55511	209	0.528
14	15 49.91161	712	1.191	4	5 54.64556	203	0.517
15	16 50.01051	697	1.175	5	6 54.73585	197	0.506
16	17 50.10925	683	1.159	6	7 54.82597	191	0.496
17	18 50.20781	669	1.143	7	8 54.91591	185	0.485
18	19 50.30619	655	1.127	8	9 55.00568	179	0.475
19	20 50.40441	641	1.112	9	10 55.09528	173	0.465
20	21 50.50245	628	1.096	10	11 55.18471	167	0.454
21	22 50.60032	615	1.080	11	12 55.27397	162	0.444
22	23 50.69802	601	1.065	12	13 55.36305	156	0.435
23	24 50.79554	589	1.050	13	14 55.45196	151	0.425
24	25 50.89290	576	1.034	14	15 55.54070	146	0.415
25	26 50.99007	563	1.019	15	16 55.62927	141	0.405
26	27 51.08708	551	1.004	16	17 55.71767	136	0.396
27	28 51.18391	539	0.990	17	18 55.80590	131	0.387
28	29 51.28058	527	0.975	18	19 55.89395	127	0.377
29	30 51.37706	515	0.960	19	20 55.98183	122	0.368
30	31 51.47338	503	0.946	20	21 56.06955	118	0.359
31	32 51.56952	492	0.931	21	22 56.15709	113	0.350
32	33 51.66549	480	0.917	22	23 56.24445	109	0.342
33	34 51.76129	469	0.903	23	24 56.33165	105	0.333
34	35 51.85692	458	0.889	24	25 56.41867	101	0.324
35	36 51.95237	447	0.875	25	26 56.50553	97	0.316
36	37 52.04765	437	0.861	26	27 56.59221	93	0.308
37	38 52.14276	426	0.847	27	28 56.67872	89	0.299
38	39 52.23770	416	0.833	28	29 56.76506	86	0.291
39	40 52.33246	406	0.820	29	30 56.85123	82	0.283
40	41 52.42705	396	0.806	30	31 56.93722	79	0.275
41	42 52.52147	386	0.793	31	32 57.02305	75	0.267
42	43 52.61572	376	0.780	32	33 57.10870	72	0.260
43	44 52.70979	367	0.767	33	34 57.19418	69	0.252
44	45 52.80369	358	0.754	34	35 57.27950	66	0.245
45	46 52.89742	348	0.741	35	36 57.36464	63	0.237
46	47 52.99098	339	0.728	36	37 57.44960	60	0.230
47	48 53.08436	331	0.715	37	38 57.53440	57	0.223
48	49 53.17757	322	0.703	38	39 57.61903	55	0.216
49	50 53.27062	313	0.690	39	40 57.70348	52	0.209
50	51 53.36348	305	0.678	40	41 57.78777	50	0.202

$Q+q$	$P+p$	$\log m$ +	k	$Q+q$	$P+p$	$\log m$ +	k
51° 40′	51° 41′ 57″78777	50	0″202	52° 30′	52° 32′ 1″78428	0	0″006
41	42 57.87188	47	0.196	31	33 1.85986		0.005
42	43 57.95582	45	0.189	32	34 1.93528		0.004
43	44 58.03959	43	0.183	33	35 2.01053		0.003
44	45 58.12319	40	0.176	34	36 2.08561		0.002
45	46 58.20662	38	0.170	35	37 2.16052		0.001
46	47 58.28988	36	0.164	36	38 2.23526		0.001
47	48 58.37296	34	0.158	37	39 2.30982		0.001
48	49 58.45588	32	0.152	38	40 2.38422		0.000
49	50 58.53862	31	0.146	39	41 2.45845		0.000
50	51 58.62120	29	0.141	40	42 2.53251		0.000
51	52 58.70360	27	0.135	41	43 2.60640		0.000
52	53 58.78583	25	0.130	42	44 2.68013		0.000
53	54 58.86789	24	0.124	43	45 2.75368		0.001
54	55 58.94978	22	0.119	44	46 2.82706		0.001
55	56 59.03150	21	0.114	45	47 2.90027		0.001
56	57 59.11305	20	0.109	46	48 2.97331		0.002
57	58 59.19443	18	0.104	47	49 3.04619		0.003
58	59 59.27563	17	0.099	48	50 3.11889		0.004
59	52 0 59.35667	16	0.095	49	51 3.19143		0.005
52 0	1 59.43754	15	0.090	50	52 3.26379		0.006
1	2 59.51823	14	0.086	51	53 3.33599		0.007
2	3 59.59876	13	0.081	52	54 3.40802	0	0.008
3	4 59.67911	12	0.077	53	55 3.47987	1	0.010
4	5 59.75929	11	0.073	54	56 3.55156	1	0.011
5	6 59.83931	10	0.069	55	57 3.62308	1	0.013
6	7 59.91915	9	0.065	56	58 3.69443	1	0.014
7	8 59.99882	8	0.061	57	59 3.76561	1	0.016
8	10 0.07832	8	0.058	58	53 0 3.83662	1	0.018
9	11 0.15765	7	0.054	59	1 3.90747	2	0.020
10	12 0.23681	6	0.051	53 0	2 3.97814	2	0.023
11	13 0.31580	6	0.047	1	3 4.04864	2	0.025
12	14 0.39462	5	0.044	2	4 4.11898	2	0.027
13	15 0.47327	5	0.041	3	5 4.18915	3	0.030
14	16 0.55175	4	0.038	4	6 4.25914	3	0.033
15	17 0.63006	4	0.035	5	7 4.32897	4	0.036
16	18 0.70820	3	0.032	6	8 4.39863	4	0.038
17	19 0.78617	3	0.030	7	9 4.46813	5	0.041
18	20 0.86397	2	0.027	8	10 4.53745	5	0.044
19	21 0.94159	2	0.025	9	11 4.60660	6	0.048
20	22 1.01905	2	0.023	10	12 4.67559	6	0.051
21	23 1.09634	2	0.020	11	13 4.74440	7	0.054
22	24 1.17346	1	0.018	12	14 4.81305	8	0.058
23	25 1.25040	1	0.016	13	15 4.88153	8	0.062
24	26 1.32718	1	0.014	14	16 4.94984	9	0.065
25	27 1.40379	1	0.013	15	17 5.01798	10	0.069
26	28 1.48023	1	0.011	16	18 5.08595	11	0.073
27	29 1.55649	1	0.010	17	19 5.15376	12	0.078
28	30 1.63259	0	0.008	18	20 5.22139	14	0.082
29	31 1.70852		0.007	19	21 5.28886	14	0.086
30	32 1.78428	0	0.006	20	22 5.35616	15	0.091

$Q+q$	$P+p$	$\log m$	k	$Q+q$	$P+p$	$\log m$	k
53° 20′	53° 22′ 5″35616	15	0″091	54° 10′	54° 12′ 8″50704	169	0″460
21	23 5.42329	16	0.095	11	13 8.56579	175	0.471
22	24 5.49025	17	0.100	12	14 8.62438	180	0.481
23	25 5.55705	18	0.105	13	15 8.68279	186	0.492
24	26 5.62367	20	0.110	14	16 8.74104	192	0.502
25	27 5.69013	21	0.115	15	17 8.79913	199	0.513
26	28 5.75642	22	0.120	16	18 8.85705	205	0.524
27	29 5.82254	24	0.125	17	19 8.91480	212	0.535
28	30 5.88849	26	0.131	18	20 8.97238	218	0.546
29	31 5.95428	27	0.136	19	21 9.02980	225	0.557
30	32 6.01989	29	0.142	20	22 9.08705	232	0.569
31	33 6.08534	31	0.147	21	23 9.14413	239	0.580
32	34 6.15062	33	0.153	22	24 9.20105	246	0.592
33	35 6.21573	34	0.159	23	25 9.25781	253	0.604
34	36 6.28068	36	0.165	24	26 9.31439	261	0.615
35	37 6.34545	38	0.171	25	27 9.37081	268	0.627
36	38 6.41006	41	0.178	26	28 9.42706	276	0.639
37	39 6.47450	43	0.184	27	29 9.48315	284	0.652
38	40 6.53877	45	0.191	28	30 9.53907	292	0.664
39	41 6.60288	47	0.197	29	31 9.59483	300	0.676
40	42 6.66681	50	0.204	30	32 9.65042	309	0.689
41	43 6.73058	53	0.211	31	33 9.70584	317	0.701
42	44 6.79418	55	0.218	32	34 9.76110	326	0.714
43	45 6.85762	58	0.225	33	35 9.81619	335	0.727
44	46 6.92088	61	0.232	34	36 9.87111	344	0.740
45	47 6.98398	64	0.240	35	37 9.92587	353	0.753
46	48 7.04691	67	0.247	36	38 9.98046	362	0.766
47	49 7.10967	70	0.255	37	39 10.03489	372	0.780
48	50 7.17227	73	0.262	38	40 10.08915	381	0.793
49	51 7.23470	76	0.270	39	41 10.14325	391	0.807
50	52 7.29696	79	0.278	40	42 10.19718	401	0.820
51	53 7.35905	83	0.286	41	43 10.25094	411	0.834
52	54 7.42098	86	0.294	42	44 10.30454	421	0.848
53	55 7.48273	90	0.303	43	45 10.35797	432	0.862
54	56 7.54432	94	0.311	44	46 10.41124	443	0.876
55	57 7.60575	98	0.319	45	47 10.46434	453	0.890
56	58 7.66700	102	0.328	46	48 10.51727	464	0.905
57	59 7.72809	106	0.337	47	49 10.57004	476	0.919
58	54 0 7.78901	110	0.345	48	50 10.62265	487	0.934
59	1 7.84977	114	0.354	49	51 10.67509	498	0.949
54 0	2 7.91036	119	0.363	50	52 10.72736	510	0.964
1	3 7.97078	123	0.373	51	53 10.77947	522	0.978
2	4 8.03103	128	0.382	52	54 10.83142	534	0.994
3	5 8.09111	132	0.391	53	55 10.88320	546	1.009
4	6 8.15103	137	0.401	54	56 10.93481	559	1.024
5	7 8.21079	142	0.411	55	57 10.98626	571	1.039
6	8 8.27037	147	0.420	56	58 11.03754	584	1.055
7	9 8.32979	153	0.430	57	59 11.08866	597	1.071
8	10 8.38904	158	0.440	58	55 0 11.13961	611	1.086
9	11 8.44812	163	0.450	59	1 11.19040	624	1.102
10	12 8.50704	169	0.460	55 0	2 11.24102	638	1.118

$Q+q$	$P+p$	$\log m$ —	k	$Q+q$	$P+p$	$\log m$ —	k
55° 0′	55° 2′ 11″24102	638	1″118	55° 50′	55° 52′ 13″56267	1598	2″068
1	3 11.29148	651	1.134	51	53 13.60493	1624	2.090
2	4 11.34177	665	1.151	52	54 13.64703	1650	2.112
3	5 11.39190	680	1.167	53	55 13.68896	1676	2.134
4	6 11.44186	694	1.184	54	56 13.73074	1702	2.157
5	7 11.49166	709	1.200	55	57 13.77235	1728	2.179
6	8 11.54129	723	1.217	56	58 13.81379	1755	2.202
7	9 11.59076	738	1.234	57	59 13.85508	1782	2.225
8	10 11.64007	754	1.251	58	56 0 13.89620	1810	2.247
9	11 11.68921	769	1.268	59	1 13.93716	1837	2.270
10	12 11.73818	785	1.285	56 0	2 13.97795	1865	2.293
11	13 11.78699	800	1.302	1	3 14.01859	1894	2.317
12	14 11.83564	817	1.320	2	4 14.05906	1922	2.340
13	15 11.88412	833	1.337	3	5 14.09937	1951	2.363
14	16 11.93244	849	1.355	4	6 14.13952	1980	2.387
15	17 11.98059	866	1.372	5	7 14.17950	2009	2.411
16	18 12.02858	883	1.390	6	8 14.21932	2039	2.434
17	19 12.07640	900	1.408	7	9 14.25898	2069	2.458
18	20 12.12406	917	1.426	8	10 14.29848	2099	2.482
19	21 12.17156	935	1.445	9	11 14.33782	2130	2.506
20	22 12.21889	953	1.463	10	12 14.37699	2161	2.531
21	23 12.26605	971	1.481	11	13 14.41600	2192	2.555
22	24 12.31306	989	1.500	12	14 14.45485	2223	2.579
23	25 12.35990	1008	1.519	13	15 14.49354	2255	2.604
24	26 12.40657	1026	1.538	14	16 14.53206	2287	2.629
25	27 12.45308	1045	1.557	15	17 14.57043	2319	2.654
26	28 12.49943	1064	1.576	16	18 14.60863	2352	2.679
27	29 12.54561	1084	1.595	17	19 14.64667	2385	2.704
28	30 12.59163	1104	1.614	18	20 14.68455	2418	2.729
29	31 12.63749	1123	1.633	19	21 14.72226	2452	2.754
30	32 12.68318	1144	1.653	20	22 14.75982	2486	2.780
31	33 12.72870	1164	1.673	21	23 14.79721	2520	2.805
32	34 12.77407	1185	1.692	22	24 14.83444	2555	2.831
33	35 12.81927	1205	1.712	23	25 14.87151	2589	2.857
34	36 12.86430	1226	1.732	24	26 14.90842	2625	2.883
35	37 12.90918	1248	1.752	25	27 14.94517	2660	2.909
36	38 12.95389	1269	1.773	26	28 14.98175	2696	2.935
37	39 12.99843	1291	1.793	27	29 15.01818	2732	2.961
38	40 13.04282	1313	1.813	28	30 15.05444	2768	2.988
39	41 13.08703	1336	1.834	29	31 15.09054	2805	3.014
40	42 13.13109	1358	1.855	30	32 15.12648	2842	3.041
41	43 13.17498	1381	1.875	31	33 15.16226	2880	3.067
42	44 13.21871	1404	1.896	32	34 15.19788	2917	3.094
43	45 13.26228	1428	1.917	33	35 15.23334	2955	3.121
44	46 13.30568	1451	1.939	34	36 15.26863	2994	3.148
45	47 13.34892	1475	1.960	35	37 15.30377	3033	3.176
46	48 13.39199	1499	1.981	36	38 15.33874	3072	3.203
47	49 13.43491	1524	2.003	37	39 15.37356	3111	3.230
48	50 13.47766	1548	2.024	38	40 15.40821	3151	3.258
49	51 13.52024	1573	2.046	39	41 15.44270	3191	3.286
50	52 13.56267	1598	2.068	40	42 15.47703	3231	3.314

$Q+q$	$P+p$	$\log m$	k	$Q+q$	$P+p$	$\log m$	k
56° 40′	56° 42′ 15″47703	3231	3″314	57° 30′	57° 32′ 16″98962	5719	4″859
41	43 15.51120	3272	3.342	31	33 17.01581	5778	4.893
42	44 15.54521	3313	3.370	32	34 17.04185	5839	4.927
43	45 15.57906	3355	3.398	33	35 17.06772	5899	4.962
44	46 15.61275	3396	3.426	34	36 17.09344	5960	4.996
45	47 15.64627	3439	3.455	35	37 17.11900	6021	5.030
46	48 15.67964	3481	3.483	36	38 17.14441	6083	5.065
47	49 15.71285	3524	3.512	37	39 17.16965	6146	5.100
48	50 15.74589	3567	3.541	38	40 17.19474	6208	5.135
49	51 15.77878	3611	3.570	39	41 17.21967	6271	5.170
50	52 15.81150	3654	3.599	40	42 17.24444	6335	5.205
51	53 15.84407	3699	3.628	41	43 17.26905	6399	5.240
52	54 15.87647	3743	3.657	42	44 17.29351	6463	5.275
53	55 15.90872	3788	3.686	43	45 17.31780	6528	5.311
54	56 15.94080	3834	3.716	44	46 17.34194	6593	5.346
55	57 15.97273	3879	3.746	45	47 17.36593	6659	5.382
56	58 16.00449	3925	3.775	46	48 17.38975	6725	5.418
57	59 16.03610	3972	3.805	47	49 17.41342	6792	5.454
58	57 0 16.06754	4019	3.835	48	50 17.43693	6859	5.490
59	1 16.09883	4066	3.865	49	51 17.46028	6926	5.526
57 0	2 16.12995	4113	3.896	50	52 17.48348	6994	5.563
1	3 16.16092	4161	3.926	51	53 17.50652	7063	5.599
2	4 16.19172	4210	3.956	52	54 17.52940	7131	5.636
3	5 16.22237	4258	3.987	53	55 17.55212	7201	5.672
4	6 16.25286	4307	4.018	54	56 17.57468	7270	5.709
5	7 16.28318	4357	4.049	55	57 17.59709	7341	5.746
6	8 16.31335	4406	4.080	56	58 17.61935	7411	5.783
7	9 16.34336	4457	4.111	57	59 17.64144	7482	5.820
8	10 16.37320	4507	4.142	58	58 0 17.66338	7554	5.858
9	11 16.40289	4558	4.173	59	1 17.68516	7626	5.895
10	12 16.43242	4609	4.205	58 0	2 17.70678	7698	5.933
11	13 16.46179	4661	4.236	1	3 17.72825	7771	5.970
12	14 16.49100	4713	4.268	2	4 17.74956	7844	6.008
13	15 16.52005	4766	4.300	3	5 17.77072	7918	6.046
14	16 16.54895	4818	4.332	4	6 17.79171	7993	6.084
15	17 16.57768	4872	4.364	5	7 17.81255	8067	6.122
16	18 16.60625	4925	4.396	6	8 17.83324	8143	6.160
17	19 16.63467	4979	4.428	7	9 17.85376	8218	6.199
18	20 16.66293	5034	4.461	8	10 17.87414	8294	6.237
19	21 16.69102	5089	4.493	9	11 17.89435	8371	6.276
20	22 16.71896	5144	4.526	10	12 17.91441	8448	6.315
21	23 16.74674	5200	4.559	11	13 17.93431	8526	6.354
22	24 16.77436	5256	4.592	12	14 17.95406	8604	6.393
23	25 16.80182	5312	4.625	13	15 17.97365	8682	6.432
24	26 16.82913	5369	4.658	14	16 17.99308	8761	6.471
25	27 16.85627	5426	4.691	15	17 18.01236	8841	6.511
26	28 16.88326	5484	4.724	16	18 18.03148	8921	6.550
27	29 16.91008	5542	4.758	17	19 18.05045	9001	6.590
28	30 16.93675	5600	4.792	18	20 18.06925	9082	6.630
29	31 16.96326	5659	4.825	19	21 18.08791	9164	6.670
30	32 16.98962	5719	4.859	20	22 18.10641	9246	6.710

$Q+q$	$P+p$	$\underline{\log m}$	k	$Q+q$	$P+p$	$\underline{\log m}$	k
58° 20′	58° 22′ 18″10641	9246	6″710	58° 30′	58° 32′ 18″28283	10092	7″117
21	23 18. 12475	9328	6. 750	31	33 18. 29962	10180	7. 158
22	24 18. 14293	9411	6. 790	32	34 18. 31625	10268	7. 200
23	25 18. 16097	9495	6. 830	33	35 18. 33272	10356	7. 241
24	26 18. 17884	9578	6. 871	34	36 18. 34905	10445	7. 283
25	27 18. 19656	9663	6. 912	35	37 18. 36521	10535	7. 325
26	28 18. 21412	9748	6. 952	36	38 18. 38123	10625	7. 367
27	29 18. 23153	9833	6. 993	37	39 18. 39708	10715	7. 409
28	30 18. 24879	9919	7. 034	38	40 18. 41279	10806	7. 451
29	31 18. 26588	10006	7. 075	39	41 18. 42833	10898	7. 484
30	32 18. 28283	10092	7. 117	40	42 18. 44373	10990	7. 536