PRINCIPIA GENERALIA

THEORIAE FIGURAE FLUIDORUM

IN STATU AEQUILIBRII.

Vires ascensionem vel depressionem fluidorum in tubis capillaribus gubernantes primus acute et accurate enumeravit sagax CLAIRAUT, sed quum legem virium omnino intactam liquerit, nihil fructus ad explicationem mathematicam phaenomenorum ex illa enumeratione nasci potuit. Attractio vulgaris quadrato distantiae reciproce proportionalis, quae omnes motus coelestes tam felici successu explicat, nullius usus est nec in phaenomenis capillaribus, nec in phaenomenis adhaesionis et cohaesionis explicandis; calculus enim recte institutus facile docet, ad normam illius legis attractionem cuiusvis corporis, quocum experimenta instituere licet, i. e. cuius moles respectu totius terrae pro nihilo haberi potest, in punctum ubicunque vel adeo in contactu positum, evanescere respectu gravitatis*). Recte hinc concluditur, illam attractionis legem in distantiis minimis naturae haud amplius consentaneam esse, sed modificationem quandam postulare, sive quod eodem redit, corporum particulas praeter illam vim attractivam exercere aliam in distantiis minimis tantum conspicuam. Phaenomena omnia conspirant ad arguendum, hancce alteram vis attractivae partem (*attractionem mole-*

---

*) Constat, maximam attractionem, quam massa homogenea data in punctum datum secundum illam legem exercere potest, esse ad attractionem, quam eadem massa in figuram sphaericam redacta exercet in punctum in superficie positum, ut 3 ad $\sqrt[3]{25}$: posterior vero attractio cum gravitate facile comparatur.

cularem), in distantiis vel minimis quas mensurare licet insensibilem esse, dum in distantiis insensibilibus partem priorem (quadrato distantiae reciproce proportionalem) longe superare possit.

Ill. Laplace ab hac unica suppositione circa indolem virium molecularium proficiscens, ceteroqui autem legem diminutionis pro distantiis crescentibus prorsus indeterminatam linquens, primus effectum earum in figuram superficiei fluidorum calculo accurato subiecit, et. stabilita aequatione generali pro figura aequilibrii, non modo phaenomena capillaria proprie sic dicta, sed multa alia his affinia inde explicare conatus est. Hae investigationes, per mirum cum experimentis accuratis consensum ubique confirmatae, inter pulcherrima philosophiae naturalis incrementa, quae illi magno geometrae debemus, referendae, obiectiones autem a quibusdam auctoribus contra illas directae ad maximam partem vel levis vel nullius momenti sunt *).

In calculis ill. Laplace utique occurrunt quaedam stricto argumentandi modo haud prorsus consentanea. In commentatione priori, *théorie de l'action capillaire*, denotata per φf intensitate attractionis in distantia f, integrale $\int\varphi f.\mathrm{d}f$ ab $f=x$ usque ad $f=\infty$ extensum statuitur $=\Pi x$; dein integrale $\int\Pi f.f\mathrm{d}f$ ab $f=x$ usque ad $f=\infty$ extensum, $=\Psi x$; denique valores integralium $2\pi\int\Psi f.\mathrm{d}f$, $2\pi\int\Psi f.f\mathrm{d}f$ ab $f=0$ usque ad $f=\infty$ extensorum statuuntur resp. $=K$, et $=H$, denotante π semicircumferentiam circuli pro radio $=1$. Indoles functionis φf prorsus intacta linquitur, dummodo insensibilis sit pro omnibus valoribus sensibilibus ipsius f. At ex hac *sola* suppositione neutiquam sequeretur, etiam Πf, Ψf pro valoribus sensibilibus ipsius f necessario insensibiles fieri, neque maiori iure, valores integralium $2\pi\int\Psi f.\mathrm{d}f$, $2\pi\int\Psi f.f\mathrm{d}f$ ab $f=0$ usque ad valorem sensibilem *finitum* ipsius f extensorum insensibiliter differre a K, H, uti in commentatione illa legitur; infinite multas enim formas functionis φf imaginari liceret, suppositioni fundamentali satisfacientes, pro quibus hae conclusiones erroneae forent. Quinadeo, si φf attractionem completam exprimere supponitur, revera etiam continebit partem formae $\frac{a}{ff}$, a qua attractio vulgaris pendet; sed etiamsi hic terminus pro insensibili habendus sit, dum di-

*) Ita iudicandum de plerisque obloquutionibus in ephemeridibus Ticinensibus (Giornale di fisica etc. T. 9) prolatis, quibus scite respondit clar. Petit in Annales de chimie et de physique T. 4.

mensiones corporum attrahentium, quales in experimentis occurrere possunt, insensibiles sunt prae tota terra, tamen iam secunda integratio, si in infinitum extenderetur, inferret functioni Ψf terminum infinitum.

At si his hisque similibus quaedam levis incuriae species subesse videtur, certe ad formam disserendi potius quam ad rem ipsam attinet. Apparet enim ex dissertatione secunda, *Supplément à la théorie de l'action capillaire*, ill. LAPLACE per φf non attractionem completam, sed partem eam tantum, quae attractioni vulgari accedit, tacite subintellexisse; posteriorem autem nullam experimentis nostris modificationem sensibilem afferre posse, facile elucet. Quinadeo addigitat, se functionem φf ad instar exponentialis e^{-if} considerare, denotante i quantitatem permagnam, aut potius $\frac{1}{i}$ lineam perparvam. Sed ne opus quidem est, generalitatem tantopere limitare, quum is, qui rem potius quam verba intuetur, facillime videat, sufficere, si integrationes illae non in infinitum, sed tantummodo usque ad distantiam sensibilem arbitrariam, aut si mavis ad distantiam finitam dimensionibus in experimentis occurrentibus maiorem extendantur.

Alio vero defectu laborat ista theoria longe graviori, et quem quantum scimus eius cavillatores ne animadverterunt quidem. Duabus illa partibus constat. Altera stabilit aequationem generalem pro fluidi superficie libera inter differentialia partialia coordinatarum: pendet haec aequatio a vi attractiva moleculari, quam fluidi particulae in se mutuo exercent, atque haec quidem theoriae pars ita absoluta est, ut nihil essentiale desiderandum restet. Sed talis aequatio inter differentialia partialia (cuius integratio, si in analysis potestate esset, functiones arbitrarias adduceret) non sufficit ad figuram superficiei *ex asse* determinandam, quod fieri nequit, nisi conditio *nova* accedat indolem figurae in limitibus definiens Talem conditionem sistit pars altera theoriae, eam scilicet, ut angulus plani superficiem fluidi liberam in confiniis vasis tangentis (sive exactius, in limite vis sensibilis attractivae parietis vasis) cum plano parietem vasis ibidem tangente *constans* sit, puta per relationem inter intensitates virium molecularium vasis et fluidi determinatus, siquidem continuitas figurae vasis apud confinia superficiei liberae fluidi non interrumpitur. At hancce propositionem cardinalem totius theoriae per calculum demonstrare ne suscepit quidem ill. LAPLACE; quae enim in dissertatione priori p. 5 huc spectantia afferuntur, argumentationem vagam tantummodo exhibent et quod demonstrandum erat iam supponunt: calculi autem p. 44 sq. suscepti effectu carent. In altera quidem dissertatione ascensus fluidi in tubis capillaribus per methodum aliam tractatur, cuius summa cum methodo priori collata formulam (veram utique) suppeditat pro angulo illo inter plana tangentia. Sed notare oportet, proprie hic iam *supponi* quod angulus sit constans, praetereaque methodum, per se parum satisfacientem, restringi ad casum maxime specialem, ubi vas prismaticum est, parietesque verticales. His perpensis fateri oportet, theoriam ab ill. Laplace propositam etiamnum essentialiter mancam et incompletam esse.

Resumemus itaque ab integro theoriam figurae aequilibrii fluidorum sub actione gravitatis et virium molecularium propriarum et vasis, in quo negotio methodum prorsus diversam e primis dynamicae principiis petitam sequemur, maximamque generalitatem statim ab initio amplectemur. Haec disquisitio perducet ad insigne theorema novum, theoriam completam in unicam formulam simplicissimam contrahens, e quo utraque pars theoriae ill. Laplace sponte demanabit.

1.

Ad stabiliendam aequationem aequilibrii systematis punctorum physicorum quotcunque, quorum motus conditionibus qualibuscunque adstringuntur, maxime idoneum est principium motuum virtualium, quod sic enunciamus.

Constet systema e punctis physicis m, m', m'' etc., in quibus massae per easdem literas denotandae concentratae concipiantur. Sit P una e viribus acceleratricibus in punctum m agentibus, et dum systemati motus qualiscunque infinite parvus cum conditionibus systematis sociabilis (motus virtualis) tribui fingitur, sit $\mathrm{d}p$ motus puncti m in directionem vis P proiectus, i. e. per cosinum anguli, quem facit cum directione vis P, multiplicatus; denique sit $\Sigma P\mathrm{d}p$ aggregatum omnium similium productorum respectu omnium virium punctum m sollicitantium. Perinde repraesentet P' indefinite vires punctum m' sollicitantes, atque $\mathrm{d}p'$ motus puncti m' ad singularum directiones proiectos, similiterque de reliquis punctis. Quibus ita intellectis, conditio aequilibrii systematis consistit in eo, ut aggregatum

$$m\Sigma P\mathrm{d}p + m'\Sigma P'\mathrm{d}p' + m''\Sigma P''\mathrm{d}p'' + \text{ etc.}$$

pro quocunque motu virtuali fiat $= 0$, uti principium motuum virtualium vulgo exprimitur, vel accuratius, in eo, ut illud aggregatum pro nullo motu virtuali adipisci possit valorem positivum.

2.

Vires hic considerandae ad tria capita reducuntur.

I. Gravitas, cuius intensitatem pro singulis punctis eandem, directiones parallelas supponere licet: illam denotabimus per g.

II. Vires attractivae, quas puncta m, m', m'' etc. a se mutuo experiuntur. Intensitas attractionis functioni distantiae proportionalis sive producto huius functionis per characteristicam f denotandae in massam in puncto attrahente concentratam aequalis supponitur.

III. Vires, quibus puncta m, m', m'' etc. ad puncta quotcunque fixa attrahuntur. Pro his viribus simili modo characteristica F distantiae praefigenda utemur, et per M, M', M'' etc. tum puncta fixa, tum massas, quae in ipsis concentratae supponuntur, designabimus.

Quodsi iam distantiam inter bina puncta m, m' per hoc signum denotamus (m, m'), et perinde per (m, M) distantiam inter puncta m, M etc., nec non per z, z', z'' etc. altitudines punctorum m, m', m'' etc. supra planum horizontale arbitrarium H, has partes complexus $\Sigma P\mathrm{d}p$ habebimus:

$$\begin{aligned}
&-g\,\mathrm{d}z\\
&-m'f(m,m')\,\mathrm{d}(m,m') - m''f(m,m'')\,\mathrm{d}(m,m'') - m'''f(m,m''')\,\mathrm{d}(m,m''') - \text{etc.}\\
&-MF(m,M)\,\mathrm{d}(m,M) - M'F(m,M')\,\mathrm{d}(m,M') - M''F(m,M'')\,\mathrm{d}(m,M'') - \text{etc.}
\end{aligned}$$

ubi differentialia $\mathrm{d}(m,m')$, $\mathrm{d}(m,m'')$ etc. sunt partialia, utpote ad solum motum virtualem puncti m relatae.

Iam introducamus loco functionis f eam, per cuius differentiationem oritur, puta statuatur $-fx.\mathrm{d}x = \mathrm{d}\varphi x$, sive $\int fx.\mathrm{d}x = -\varphi x$. Constans integrationis ad lubitum eligi potest; si placet (et si res fert), ita determinetur, ut fiat $\varphi\infty = 0$, in quo casu φt exhibebit integrale $\int fx.\mathrm{d}x$ ab $x = t$ usque ad $x = \infty$ extensum. Prorsus simili modo loco functionis F introducatur alia Φ talis, ut habeatur $-Fx.\mathrm{d}x = \mathrm{d}\Phi x$. Ita complexus $\Sigma P\mathrm{d}p$ fit $=$

$$\begin{aligned}
&-g\,\mathrm{d}z\\
&+m'\mathrm{d}\varphi(m,m') + m''\mathrm{d}\varphi(m,m'') + m'''\mathrm{d}\varphi(m,m''') + \text{etc.}\\
&+M\mathrm{d}\Phi(m,M) + M'\mathrm{d}\Phi(m,M') + M''\mathrm{d}\Phi(m,M'') + \text{etc.}
\end{aligned}$$

ubi notandum, differentialia in linea secunda esse partialia ad solum motum puncti m relata.

At manifesto quodvis harum differentialium partialium habet supplementum suum in alio complexu. Ita tum complexus $m\Sigma P\mathrm{d}p$ tum complexus $m'\Sigma P'\mathrm{d}p'$ continet differentiale partiale $mm'\mathrm{d}\varphi(m, m')$, sed quod in priori refertur ad solum motum ipsius m, in posteriori ad solum motum ipsius m'. Hinc patet, aggregatum in art. 1 prolatum revera esse differentiale completum, et quidem $= \mathrm{d}\Omega$, si statuatur $\Omega =$

$$\begin{aligned}
&- gmz - gm'z' - gm''z'' - \text{ etc.}\\
&+ mm'\varphi(m, m') + mm''\varphi(m, m'') + mm'''\varphi(m, m''') + \text{ etc.}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + m'm''\varphi(m', m'') + m'm'''\varphi(m', m''') + \text{ etc.}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + m''m'''\varphi(m'', m''') + \text{ etc.}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \text{ etc.}\\
&+ mM\Phi(m, M) + mM'\Phi(m, M') + mM''\Phi(m, M'') + \text{ etc.}\\
&+ m'M\Phi(m', M) + m'M'\Phi(m', M') + m'M''\Phi(m', M'') + \text{ etc.}\\
&+ m''M\Phi(m'', M) + m''M'\Phi(m'', M') + m''M''\Phi(m'', M'') + \text{ etc.}\\
&+ \text{ etc.}
\end{aligned}$$

Conditio aequilibrii itaque in eo consistit, ut valor functionis Ω per nullum motum virtualem accipere possit incrementum positivum, sive quod idem est, *ut* Ω *sit maximum.*

Functionem Ω etiam sequenti modo exhibere licet:

$$\begin{aligned}
\Omega = \Sigma m \{ &-gz + \tfrac{1}{2}m'\varphi(m, m') + \tfrac{1}{2}m''\varphi(m, m'') + \tfrac{1}{2}m'''\varphi(m, m''') + \text{ etc.}\\
&+ M\varphi(m, M) + M'\Phi(m, M') + M''\Phi(m, M'') + \text{ etc.}\}
\end{aligned}$$

ubi characteristica Σ repraesentat aggregatum expressionis adscriptae cum omnibus, in quas transit, dum deinceps m cum m', m'', m''' etc. permutatur.

3.

Si loco punctorum discretorum M, M', M'' etc. assumimus corpus continuum explens spatium S densitate uniformi $= C$, aggregatum

$$M\Phi(m, M) + M'\Phi(m, M') + M''\Phi(m, M'') + \text{ etc.}$$

transibit in integrale $C\int \mathrm{d}S \,.\, \Phi(m, \mathrm{d}S)$ per totum spatium S extendendum, denotando secundum analogiam per $(m, \mathrm{d}S)$ distantiam puncti m a quovis spatii S elemento $\mathrm{d}S$.

At si insuper loco punctorum discretorum m, m', m'' etc. corpus continuum, spatium s densitate uniformi $= c$ explens, considerandum est, computus ipsius Ω integrationem duplicem requiret, atque ita perficiendus erit, ut primo pro puncto indefinito μ eruatur valor expressionis

$$-gz+\tfrac{1}{2}c\int ds.\varphi(\mu, ds)+C\int dS.\Phi(\mu, dS)$$

ubi z est altitudo puncti μ supra planum H, atque integrale primum per totum spatium s, secundum per totum spatium S extendendum est. Qui valor, a solo loco puncti μ pendens, si per $[\mu]$ denotatur, erit

$$\Omega = c\int ds.[ds]$$

integratione per totum spatium s extensa.

Brevius hoc ita exprimitur:

$$\Omega = -gc\int z ds+\tfrac{1}{2}cc\int\int ds.ds'.\varphi(ds, ds')+cC\int\int ds.dS.\Phi(ds, dS)$$

ubi s, s' proprie denotant unum idemque spatium (a corpore mobili expletum), sed bis in elementa sua pro duplici integratione resolvendum.

4.

Corporum fluidorum indoles characteristica consistit in perfecta mobilitate vel minimarum partium, ita ut figuram quamlibet induere possint, et vel minimae potentiae, figuram mutare nitenti, cedant. In fluidis inexpansibilibus (liquidis), quibus nostra disquisitio dicata est, volumen cuiusvis particulae constans manere debet pro omnibus figurae mutationibus. Considerando itaque corpus fluidum, cuius motus per corpus immobile solidum (vas) limitatur, et in cuius particulas praeter gravitatem agere supponimus tum attractionem partium mutuam, tum attractionem partium vasis, status aequilibrii poscet, ut valor ipsius Ω sit maximum, i.e. ut nulla transpositio infinite parva partium fluidi ipsi Ω incrementum positivum inducere possit. Quapropter quum manifesto valor ipsius Ω eatenus tantum mutari possit, quatenus figura spatii, quod totum fluidum implet, mutatur (neque vero per solum motum fluidi internum), aequilibrium aderit, quoties Ω pro nulla illius figurae mutatione infinite parva cum figura vasis conciliabili, manente volumine constante, augmentum capere potest. Sponte hinc sequitur, si figura omnino nullam mutationem assumere possit (vase fluidum undique cingente et tangente), vires illas in fluidum agentes motum internum fluidi producere non posse, sed sibi aequilibrium facere.

5.

Progredimur ad accuratiorem investigationem expressionis Ω, quae tamquam fundamentum theoriae aequilibrii fluidorum considerari debet. Incipiendo a termino primo, sponte patet, $\int z\,ds$ exhibere productum e volumine spatii s in altitudinem centri gravitatis eius supra planum H, adeoque $c\int z\,ds$ productum massae, $gc\int z\,ds$ productum ponderis fluidi in eandem altitudinem. Quodsi itaque partes fluidi praeter gravitatem alii vi non essent obnoxiae, altitudo centri gravitatis in statu aequilibrii esse deberet quam minima, unde facile colligitur, superficiei partem liberam, seu partes liberas, in uno eodemque plano horizontali esse debere, fluidum superne limitante.

6.

Evolutio termini secundi et tertii refertur ad duos casus particulares problematis generalis, ubi, propositis duobus spatiis quibuscunque, singula elementa primi spatii cum singulis elementis secundi combinari, et producta e ternis factoribus, puta e volumine elementi spatii primi, volumine elementi spatii secundi, et functione data distantiae mutuae, in summam colligi debent. Terminus secundus refertur ad casum eum, ubi ambo spatia identica sunt, tertius ad eum, ubi alterum spatium totum est extra alterum: problema completum duos alios casus complectitur, scilicet ubi vel alterum spatium est pars alterius, vel alterum cum altero partem communem habet. Quamquam vero tum duo priores casus ad institutum nostrum sufficere, tum duo reliqui ad illos facile reduci possent, tamen operae pretium erit, problema per se satis insigne generalitate completa amplecti. Spatia in hac disquisitione generali per s, S, functionem distantiae per characteristicam φ denotabimus, ita ut in applicatione ad terminum secundum loco ipsius S ipsum spatium s, in applicatione ad terminum tertium loco functionis φ ipsam Φ substituere oporteat. Agitur itaque de integrali

$$\iint ds.dS.\varphi(ds, dS)$$

quod speciem quidem prae se fert integrationis duplicis, sed revera, quum utriusque spatii elementa a ternis variabilibus pendeant, integrationem sextuplicem implicat, quam iam ad integrationem quadruplicem reducere docebimus.

7.

Initium facimus ab evolutione integralis $\int ds.\varphi(\mu, ds)$ per omnes partes spatii s extendendi, denotante μ punctum determinatum vel extra vel intra spatium s situm. Concipiatur superficies sphaerica radio $= 1$ circa centrum μ descripta, atque in elementa infinite parva divisa; sit $d\Pi$ tale elementum, secetque recta a μ versus punctum huius elementi ducta superficiem spatii s deinceps in punctis p', p'', p''' etc., quorum multitudo par erit vel impar, prout μ extra vel intra spatium s iacet; distantias $\mu p'$, $\mu p''$, $\mu p'''$ etc. denotabimus per r', r'', r''' etc. Ducantur porro rectae a μ versus singula puncta peripheriae elementi $d\Pi$, quo pacto formabitur spatium pyramidale, atque exsecabuntur e superficie spatii s, apud puncta p', p'', p''' etc., elementa resp. per dt', dt'', dt''' etc. denotanda. Denique sit q' angulus inter rectam $p'\mu$ atque normalem in elementum dt' extrorsum ductam; et perinde sint q'', q''' etc. inclinationes similium normalium apud puncta p'', p''' etc. ad rectam versus μ ductam. Ita manifesto erit

$$d\Pi = \pm\frac{dt'.\cos q'}{r'r'} = \mp\frac{dt''.\cos q''}{r''r''} = \pm\frac{dt'''.\cos q'''}{r'''r'''} \text{ etc.}$$

valentibus signis superioribus vel inferioribus, prout μ est extra vel intra spatium s.

Porro patet, integrale $\int ds.\varphi(\mu, ds)$ pro spatii s partibus intra spatium illud pyramidale contentis haberi per integrale $d\Pi.\int rr\varphi r.dr$ extensum ab $r = r'$ usque ad $r = r''$, dein ab $r = r'''$ usque ad $r = r''''$ etc., si μ iaceat extra spatium s, vel extensum ab $r = 0$ usque ad $r = r'$, dein ab $r = r''$ usque ad $r = r'''$ etc., si μ iaceat intra spatium s. Quodsi itaque statuimus indefinite

$$\int rr\varphi r.dr = -\psi r$$

constante integrationis ad lubitum accepta, integrale $\int ds.\varphi(\mu, ds)$, quatenus extenditur ad partes spatii s intra spatium illud pyramidale sitas, erit

$$= d\Pi.(\psi r' - \psi r'' + \psi r''' - \text{ etc.})$$
$$= \frac{dt'.\cos q'.\psi r'}{r'r'} + \frac{dt''.\cos q''.\psi r''}{r''r''} + \frac{dt'''.\cos q'''.\psi r'''}{r'''r'''} + \text{ etc.}$$

quoties μ iacet extra spatium s; sed

$$= d\Pi.(\psi 0 - \psi r' + \psi r'' - \psi r''' + \text{ etc.})$$
$$= d\Pi.\psi 0 + \frac{dt'.\cos q'.\psi r'}{r'r'} + \frac{dt''.\cos q''.\psi r''}{r''r''} + \frac{dt'''.\cos q'''.\psi r'''}{r'''r'''} + \text{ etc.}$$

quoties μ iacet intra spatium s.

Iam si haec summatio per omnes superficiei sphaericae partes colligitur, integrale $\int ds.\varphi(\mu, ds)$ completum fit in casu priori $= \int \frac{\mathrm{d}t.\cos q.\psi r}{rr}$

in casu posteriori $= 4\pi\psi 0 + \int \frac{\mathrm{d}t.\cos q.\psi r}{rr}$

denotando per $\mathrm{d}t$ indefinite omnia elementa superficiei spatii s, atque per q, r eorum respectu eadem, quae antea per literas accentuatas respectu elementorum determinatorum expressa sunt, denique per π semicircumferentiam circuli pro radio $= 1$.

Ceterum facile perspicitur, si punctum μ esset neque extra spatium s neque intra, sed in ipsa eius superficie, valere formulam secundam, mutato factore 4π in 2π, siquidem superficies in puncto μ neque cuspidem neque aciem offerat; sed ad propositum nostrum haud necessarium est, ad hunc casum attendere.

8.

Per disquisitionem art. praec. evolutio integralis $\iint \mathrm{d}s\,.\,\mathrm{d}S\,.\,\varphi(\mathrm{d}s, \mathrm{d}S)$ reducitur ad

$$4\pi\sigma\psi 0 + \iint \mathrm{d}t\,.\,\mathrm{d}S\,.\,\frac{\cos q\,.\,\psi(\mathrm{d}t, \mathrm{d}S)}{(\mathrm{d}t, \mathrm{d}S)^2}$$

si per σ denotamus volumen eius spatii, quod utrique spatio s, S commune est, ita ut prior pars $4\pi\sigma\psi 0$ excidat, si spatia s, S se invicem excludunt. Restat integrale novum, specie etiamnum duplex, revera quintuplex. Quod ut ad quadruplex reducamus, considerabimus integrale

$$\int \mathrm{d}S\,.\,\frac{\cos q\,.\,\psi(\mu, \mathrm{d}S)}{(\mu, \mathrm{d}S)^2}$$

per omnia elementa spatii S extendendum, denotante iterum μ punctum determinatum, atque q angulum inter duas rectas ab hoc puncto proficiscentes, alteram versus elementum $\mathrm{d}S$, alteram fixam. Hoc integrale, specie simplex, revera triplex, iam ad aliud integrale revera duplex reducere docebimus, et quidem duobus modis prorsus diversis.

Planum per punctum μ illi rectae fixae normale, per Π denotandum, quatenus per proiectionem spatii S attingitur, in elementa infinite parva $\mathrm{d}\Pi$ divisum esse concipiatur. Per punctum talis elementi $\mathrm{d}\Pi$ ducatur recta plano Π normalis, quae deinceps, i. e. progrediendo in directione rectae fixae parallela, secet superficiem spatii S in punctis P', P'', P'''etc., quorum distantiae a puncto μ sint resp. R', R'', R''' etc. Similes rectae per omnia puncta peripheriae elementi $\mathrm{d}\Pi$, plano ad angulos rectos, ductae, spatium prismaticum formabunt, et apud puncta P', P'', P''' etc. e superficie spatii S elementa exsecabunt, quae per $\mathrm{d}T'$, $\mathrm{d}T''$, $\mathrm{d}T'''$ etc. denotamus. Denique sit χ' angulus inter duas rectas a puncto P' proficiscentes, alteram extrorsum elemento $\mathrm{d}T'$ normalem, alteram rectae fixae parellelam, similesque angulos apud puncta P'', P''' etc. exprimant characteres χ'', χ''' etc. Ita manifesto erit

$$\mathrm{d}\Pi = -\mathrm{d}T'.\cos\chi' = +\mathrm{d}T''.\cos\chi'' = -\mathrm{d}T'''.\cos\chi''' \text{ etc.}$$

Spatium prismaticum in elementa infinite parva $\mathrm{d}\Pi.\mathrm{d}z$ dividatur, denotante z distantiam puncti indefiniti a plano Π (positive acceptam ab ea parte, a qua est recta fixa); si itaque eiusdem puncti distantiam a puncto μ per r designamus, erit $z = r\cos q$, nec non (quoniam $rr - zz$ constans est) $z\mathrm{d}z = r\mathrm{d}r$, sive $\mathrm{d}\Pi.\mathrm{d}z.\cos q = \mathrm{d}\Pi.\mathrm{d}r$. Hinc colligitur, integrale nostrum $\int \mathrm{d}S.\frac{\cos q.\psi(\mu,\mathrm{d}S)}{(\mu,\mathrm{d}S)^2}$, extensum per eas spatii S partes, quae in spatio isto prismatico continentur, obtineri per integrale $\mathrm{d}\Pi.\int\frac{\mathrm{d}r.\psi r}{rr}$, si extendatur ab $r = R'$ usque ad $r = R''$, dein ab $r = R'''$ usque ad $r = R''''$ etc. Quodsi itaque indefinite statuimus

$$\int\frac{\mathrm{d}r.\psi r}{rr} = -\vartheta r$$

constante integrationis ad lubitum accepta, integrale nostrum pro partibus spatii S intra spatium prismaticum sitis erit

$$\begin{aligned} &= \mathrm{d}\Pi.(\vartheta R' - \vartheta R'' + \vartheta R''' - \text{ etc.}) \\ &= -\mathrm{d}T'.\cos\chi'.\vartheta R' - \mathrm{d}T''.\cos\chi''.\vartheta R'' - \mathrm{d}T'''.\cos\chi'''.\vartheta R''' - \text{ etc.} \end{aligned}$$

Collectis his summationibus per prismata omnibus elementis $\mathrm{d}\Pi$ respondentia, manifesto omnia elementa superficiei spatii S exhausta erunt, habebimusque completum integrale

$$\int \mathrm{d}S.\frac{\cos q.\psi(\mu,\mathrm{d}S)}{(\mu,\mathrm{d}S)^2} = -\int \mathrm{d}T.\cos\chi.\vartheta R$$

denotante $\mathrm{d}T$ indefinite quodvis elementum superficiei spatii S, R eius distantiam a puncto μ, atque χ angulum inter normalem ad elementum $\mathrm{d}T$ extrorsum directam atque rectam rectae fixae parallelam.

Hoc itaque modo integrale $\iint \mathrm{d}s.\mathrm{d}S.\varphi(\mathrm{d}s,\mathrm{d}S)$ reductum est ad formam

$$4\pi\sigma\psi 0 - \iint \mathrm{d}t.\mathrm{d}T.\cos\chi.\vartheta(\mathrm{d}t,\mathrm{d}T)$$

ubi manifesto χ indicat inclinationem mutuam elementorum $\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}T$, mensuratam per inclinationem normalium utrinque extrorsum respectu spatiorum s, S ductarum, integrationesque per superficies completas utriusque spatii extendi debent.

9.

Sicuti methodus praecedens divisioni spatii S in elementa prismatica innixa est, ita methodus secunda a divisione eiusdem spatii in elementa pyramidalia petetur. Concipiatur superficies sphaerica radio $= 1$ circa centrum μ descripta atque in elementa infinite parva divisa. Versus punctum talis elementi $\mathrm{d}\Pi$ ducatur a puncto μ recta, quae superficiem spatii S secet deinceps in punctis P', P'', P''' etc.; distantiae horum punctorum a μ denotentur per R', R'', R''' etc. Rectae a μ versus omnia puncta peripheriae elementi $\mathrm{d}\Pi$ ductae formabunt spatium pyramidale, et apud puncta P', P'', P''' etc. e superficie spatii S elementa exsecabunt, quae per $\mathrm{d}T'$, $\mathrm{d}T''$, $\mathrm{d}T'''$ etc. designamus. Denique sit Q' angulus inter rectam $P'\mu$ atque normalem in elementum $\mathrm{d}T'$ extrorsum ductam, et perinde sint Q'', Q''' etc. inclinationes similium normalium apud puncta P'', P''' etc. ad rectam versus μ ductam. Ita erit

$$\mathrm{d}\Pi = \pm\frac{\mathrm{d}T'.\cos Q'}{R'R'} = \mp\frac{\mathrm{d}T''.\cos Q''}{R''R''} = \pm\frac{\mathrm{d}T'''.\cos Q'''}{R'''R'''} \text{ etc.}$$

valentibus signis superioribus vel inferioribus, prout μ est extra vel intra spatium S: casus, ubi μ est in ipsa superficie spatii S, adnumerandus est casui priori vel posteriori, prout linea $\mu P'$ extra vel intra spatium S cadit.

Porro patet, pro omnibus partibus spatii S intra illud spatium pyramidale sitis angulum q constantem esse, similique proin modo ut in art. 7 deducimus, si statuatur indefinite

$$\int \psi r.\mathrm{d}r = -\theta r$$

constante integrationis ad lubitum accepta, integrale

$$\int \frac{\mathrm{d}S.\cos q.\psi(\mu,\mathrm{d}S)}{(\mu,\mathrm{d}S)^2}$$

extensum per omnes partes spatii S intra illud spatium pyramidale sitas, fore in casu priori

$$= \cos q \,.\, \left(\frac{\mathrm{d}T'.\cos Q'.\theta R'}{R'R'} + \frac{\mathrm{d}T''.\cos Q''.\theta R''}{R''R''} + \frac{\mathrm{d}T'''.\cos Q'''.\theta R'''}{R'''R'''} + \text{etc.}\right)$$

in posteriori vero eidem formulae adiiciendum esse terminum $\mathrm{d}\Pi.\cos q.\theta 0$.

Iam si haec summatio per omnia superficiei sphaericae elementa colligitur, integrale completum

$$\int \frac{\mathrm{d}S.\cos q.\psi(\mu, \mathrm{d}S)}{(\mu, \mathrm{d}S)^2}$$

fiet

I. in casu eo, ubi punctum μ est extra spatium S,

$$= \int \frac{\mathrm{d}T.\cos q.\cos Q.\theta R}{RR}$$

denotante $\mathrm{d}T$ indefinite omnia elementa superficiei spatii S, atque Q, R illorum respectu eadem, quae antea per literas accentuatas respectu elementorum determinatorum expressa sunt, denique q inclinationem rectae a puncto μ versus elementum $\mathrm{d}T$ ductae ad rectam nostram fixam.

II. In casu eo, ubi punctum μ est intra spatium S, adiici debet terminus

$$\theta 0 . \int \mathrm{d}\Pi . \cos q$$

ubi q est inclinatio rectae a μ versus $\mathrm{d}\Pi$ ductae ad rectam fixam, integratioque per totam superficiem sphaericam extendi debet. Sed facile perspicietur, integrale istud, extensum per hemisphaerium id, pro quo q acutus est, fieri $= +\pi$, per hemisphaerium alterum autem $= -\pi$; quapropter integrale completum evanescit, valetque pro hoc casu secundo pure eadem formula, quam pro primo tradidimus. Sed aliter se habet res in casu tertio

III. quoties punctum μ est in superficie ipsa spatii S. Scilicet hic quoque adiiciendus est terminus

$$\theta 0 . \int \mathrm{d}\Pi . \cos q$$

sed integratione per eas tantummodo superficiei sphaericae partes extensa, pro quibus pars initialis rectae a μ versus $\mathrm{d}\Pi$ ductae cadit intra spatium S, sive (siquidem superficies spatii S in puncto μ neque cuspidem neque aciem offert) pro quibus haec recta facit angulum obtusum cum recta superficiei spatii S in puncto μ normali extrorsumque ducta. Superest itaque, ut integrale hoc sensu acceptum eruamus.

Secent haec normalis atque recta fixa superficiem sphaericam resp. in punctis G, H, statuatur arcus $GH = k$, arcus autem inter G et punctum indefinitum superficiei sphaericae $= v$; denique sit w angulus sphaericus inter arcus k, v. Ita erit $\cos q = \cos k . \cos v + \sin k . \sin v . \cos w$, et pro $\mathrm{d}\Pi$ accipiendum erit elementum $\sin v . \mathrm{d}v . \mathrm{d}w$. Integrale autem $\int \mathrm{d}\Pi . \cos q$

$$= \iint (\cos k . \cos v + \sin k . \sin v . \cos w) \sin v . \mathrm{d}v . \mathrm{d}w$$

extendi debet a $w = 0$ usque ad $w = 360^0$, atque a $v = 90^0$ usque ad $v = 180^0$. Hoc pacto integratio prior suppeditat

$$\int 2\pi \cos k . \cos v . \sin v . \mathrm{d}v$$

ac dein posterior $-\pi \cos k$.

Ad propositum nostrum hic casus tertius eatenus tantum in considerationem venit, quatenus superficies spatiorum s, S partem quandam finitam communem habent, in qua si punctum μ reperitur, erit vel $k = 0$ vel $= 180^0$, adeoque integrale $\int \mathrm{d}\Pi . \cos q$ vel $= -\pi$ vel $= +\pi$, prout scilicet apud punctum μ spatia s, S sunt vel in eadem plaga vel in plagis oppositis respectu plani utramque superficiem tangentis.

Applicando haec ad integrale nostrum primarium $\iint \mathrm{d}s . \mathrm{d}S . \varphi(\mathrm{d}s, \mathrm{d}S)$, huius valor fit

I. quoties superficies spatiorum s, S nullam partem finitam communem habent,

$$= 4\pi\sigma\psi 0 + \iint \frac{\mathrm{d}t . \mathrm{d}T . \cos q . \cos Q . \theta(\mathrm{d}t, \mathrm{d}T)}{(\mathrm{d}t, \mathrm{d}T)^2}$$

II. quoties superficies spatiorum s, S partem finitam $= 7$ communem habent,

$$= 4\pi\sigma\psi 0 \mp \pi 7 \theta 0 + \iint \frac{\mathrm{d}t . \mathrm{d}T . \cos q . \cos Q . \theta(\mathrm{d}t, \mathrm{d}T)}{(\mathrm{d}t, \mathrm{d}T)^2}$$

ubi signum superius vel inferius valet, prout spatia s, S sunt ab eadem plaga vel a plagis oppositis respectu superficiei communis 7.

III. Quoties superficies spatiorum s, S plures partes finitas discretas communes habent, sit 7 summa earum, quibus spatia s, S ab eadem plaga adiacent, $7'$ summa earum, quibus haec spatia a plagis oppositis contigua sunt, eritque integrale nostrum

$$= 4\pi\sigma\psi 0 + \pi(7'-7)\theta 0 + \iint \frac{\mathrm{d}t.\mathrm{d}T.\cos q.\cos Q.0(\mathrm{d}t,\mathrm{d}T)}{(\mathrm{d}t,\mathrm{d}T)^2}$$

Haec tertia formula omnes casus complecti censeri potest. Integrale duplex per omnia elementa utriusque superficiei extendi debet, denotantque q, Q angulos, quos facit recta bina elementa $\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}T$ iungens cum normalibus in haec elementa extrorsum ductis, directione illius rectae illinc a $\mathrm{d}t$ versus $\mathrm{d}T$, hinc a $\mathrm{d}T$ versus $\mathrm{d}t$ accepta.

10.

Duae transformationes integralis $\int \mathrm{d}s.\mathrm{d}S.\varphi(\mathrm{d}s,\mathrm{d}S)$ in artt. 8 et 9 evolutae aequali fere concinnitate se commendant, proposito autem nostro posterior magis accommodata est. Problema generale ulterius reduci nequit, nisi ad suppositiones determinatas vel circa spatia s, S, vel circa functionem φ descendamus. Et quum functio φ originem trahat a functione f, disquisitionem ulteriorem iam superstruemus eidem hypothesi, a qua ill. Laplace profectus est, puta vires attractivas moleculares in distantiis insensibilibus tantum sensibiles esse. Cui phrasi quum aliquid vagi inhaereat, quamdiu non assignatur unitas, ante omnia observamus, vim attractivam fr, per functionem distantiae r expressam, ut cum gvavitate g homogenea evadat, antea per massam aliquam multiplicari debere; iam mens illius suppositionis ea est, ut denotante M massam aliquam, qualis in experimentis occurrere potest, puta quam respectu totius terrae pro nihilo habere licet, Mfr semper maneat insensibilis respectu gravitatis, quamdiu r valorem mensuris nostris sensibilem quantumvis parvum habet, dum nihil impediat, quominus valor ipsius Mfr in distantiis insensibilibus non solum sensibilis fieri, sed adeo, decrescente ipsa r, omnes limites superare possit. Haud sane sine admiratione deprehendimus, quam gravia ex hac sola hypothesi, dum ceteroquin lex functionis fr tamquam omnino incognita spectatur, eruere liceat, characterem mathematicum prorsus peculiarem prae se ferentia: dum scilicet rebus sic stantibus praecisionem mathematicam absolutam sibi vindicare nequeunt, tamen tantam certissime praecisionem tuentur, ut per nullum experimentum ulla aberratio a veritate absoluta reperiri possit; quamprimum enim successisset, talem aberrationem ulli mensurationi subiicere, suppositio ipsa cessaret.

11.

Supponere licebit, functionem fr (et perinde functionem Fr) attractionem denotare, omissa ea parte, quae ipsi rr reciproce proportionalis phaenomenis astronomicis explicandis inservit; haec enim pars, quaecunque sit figura fluidi et vasis, in quovis puncto insensibilem tantummodo modificationem gravitati afferre valet. Crescente itaque r a valore sensibili in infinitum, fr non modo per se insensibilis erit, sed etiam citius decrescet quam $\frac{1}{rr}$. Hinc facile colligitur, etiam integrale $\int fr.\mathrm{d}r$ a valore quocunque sensibili in infinitum extensum insensibile esse, quapropter constantem integrationis $\int fr.\mathrm{d}r = -\varphi r$ ita acceptam supponemus, ut habeatur $\varphi\infty = 0$, sive ut sit φr ipse valor integralis $\int fx.\mathrm{d}x$ ab $x = r$ usque ad $x = \infty$ extensus. Hoc pacto φr pro qualibet distantia r denotat quantitatem positivam, sed insensibilem, quamdiu r sensibilis est; contra pro valore insensibili ipsius r non solum sensibilis esse, sed adeo, continuo decrescente distantia r, omnes limites superare poterit, sive secundum vulgarem loquendi modum nihil obstat, quominus sit $\varphi 0 = \infty$.

12.

Inde quod functio φr pro quovis valore sensibili ipsius r insensibilis est et crescente r continuo decrescit, statim quidem sequitur, integrale $\int rr\varphi r.\mathrm{d}r$ a valore aliquo sensibili usque ad alium maiorem extensum etiamnum insensibile manere, dummodo posterior sit intra ambitum eorum, circa quos experimenta instituere licet: sed neutiquam ex illa proprietate sola concludere fas esset, integrale insensibile manere, ad quantumvis magnum intervallum integratio extendatur. Calculi ill. LAPLACE ita quidem pronunciati sunt, ut talem suppositionem involvant; at dum natura functionis φr incognita est, consultius videtur, ab omnibus suppositonibus hypotheticis, quibus supersedere possumus, abstinere. Quum itaque constans integrationis $\int rr\varphi r.\mathrm{d}r = -\psi r$ arbitrio relicta sit, sufficiat nobis, eam ita electam supponere, ut fiat $\psi r = 0$ pro valore aliquo sensibili ipsius r arbitrario, sed intra ambitum dimensionum corporum, circa quae experimenta instituere licet. Hoc pacto ψr pro quovis alio eiusmodi valore semper insensibilis erit (positiva pro minori, negativa pro maiori), sed nihil hinc obstat, quominus pro valore insensibili ipsius r sensibilis evadere possit: addere tamen oportet, phaenomenorum explicationem postulare ut decrescente distantia r in infinitum, valor ipsius ψr semper maneat finitus, sive ut $\psi 0$ sit quantitas finita. Ceterum manifesto $\frac{c\psi r}{r}$ est quantitas cum gravitate g homogenea, sive $\frac{c\psi r}{g}$ linea, adeoque $\frac{c\psi 0}{g}$ linea determinata (pro natura corporum, ad quorum vires attractivas functio fr refertur), cuius magnitudinem ingentem suspicari quidem licet, sed quam in casibus determinatis vix approximative assignare valemus, saltem non absque suppositionibus hypotheticis*).

13.

Prorsus simili modo in integratione $\int \psi r.\mathrm{d}r = -\theta r$ constantem ita electam supponimus, ut fiat $\theta r = 0$ pro valore arbitrario ipsius r intra ambitum eorum, pro quibus experimenta instituere licet, quo pacto θr insensibilis erit pro quovis eiusmodi valore sensibili ipsius r, etiamsi sensibilis evadere possit pro valore insensibili. Manifesto $\frac{c\theta r}{g}$ exprimit aream figurae duarum dimensionum, adeoque $\frac{\theta r}{\psi r}$ lineam. Necessario autem $\frac{\theta 0}{\psi 0}$ est linea magnitudinis insensibilis, quod ita demonstramus. Quum ψr inde a $r = 0$ continuo decrescat, et quidem tam cito, ut iam insensibilis evaserit, quamprimum r valorem sensibilem acquisivit, valor ipsius r, pro quo fit $\psi r = \frac{1}{2}\psi 0$, insensibilis esse debet: denotetur ille per ρ. Consideremus integrale $\int(\psi 0 - \psi r)\mathrm{d}r$, quod ab $r = 0$ usque ad $r = R$ extensum fit $= R\psi 0 - \theta 0 + \theta R$. Manifesto hoc integrale maius erit, quam idem integrale ab $r = \rho$ usque ad $r = R$ extensum, atque hoc iterum maius, quam integrale $\int(\psi 0 - \psi\rho)\mathrm{d}r$ inter eosdem limites. Quare quum integrale postremum fiat $= (\psi 0 - \psi\rho)(R - \rho) = \frac{1}{2}\psi 0.(R - \rho)$, erit generaliter pro quovis valore ipsius R (maiori quam ρ)

$$R\psi 0 - \theta 0 + \theta R > \tfrac{1}{2}\psi 0.(R - \rho)$$

Iam si R denotare supponitur valorem fractionis $\frac{\theta 0}{\psi 0}$, haec relatio suppeditat

$$\theta R > \tfrac{1}{2}\psi 0.(R - \rho)$$

quod foret absurdum, si R esset quantitas sensibilis.

*) Concessa explicatione phaenomenorum lucis in systemate emanationis, refractio pendet ab attractione particularum corporis pellucidi in particulas lucis moleculari, ratioque refractionis a valore ipsius $\psi 0$, ita quidem ut habeatur

$$\frac{c\psi 0}{g} = \frac{(nn-1)kk}{8\pi^3 l}$$

denotante l longitudinem penduli per minutum secundum vibrantis, k motum luminis in vacuo intra minutum secundum, n rationem sinus anguli incidentiae ad sinum anguli refracti: hoc pacto pro aqua fit $\frac{c\psi 0}{g}$ bis millies maior quam distantia media solis a terra.

Non obstante itaque ingente magnitudine ipsius $\varphi 0$, nihil impedit, quominus $\theta 0$ esse possit quantitas satis modica et cum dimensionibus corporum experimentis subiectorum comparabilis.

14.

Superest, ut quae ex hac indole functionis θ respectu integralis (I)

$$\iint \frac{\mathrm{d}t.\mathrm{d}T.\cos q.\cos Q.\theta(\mathrm{d}t,\mathrm{d}T)}{(\mathrm{d}t,\mathrm{d}T)^2}$$

sequuntur, perscrutemur. Haec investigatio inchoare debet a simpliciori, dum in alterutra superficie punctum determinatum μ consideramus atque integrale (II)

$$\int \frac{\mathrm{d}t.\cos q.\cos Q.\theta(\mu,\mathrm{d}t)}{(\mu,\mathrm{d}t)^2}$$

per totam superficiem t extendendum evolvimus. Denotant hic Q angulum inter duas rectas a puncto μ proficiscentes, alteram versus elementum $\mathrm{d}t$, alteram fixam; q vero angulum inter duas rectas a puncto elementi $\mathrm{d}t$ proficiscentes, alteram versus punctum μ, alteram elemento normalem extrorsumque directam.

Primo loco observamus, si punctum μ sit in distantia sensibili a superficie t, valores omnium $\theta(\mu,\mathrm{d}t)$ insensibiles fore: in hoc itaque casu totum integrale (II) insensibile erit. Hoc itaque integrale eatenus tantum valorem sensibilem acquirere potest, quatenus superficies t offert partes in distantia insensibili a puncto μ positas, manifestoque sufficit, integrale (II) per tales partes extendere, neglectis omnibus, quae sunt in distantiis sensibilibus.

Porro pro $\frac{\mathrm{d}t.\cos q}{(\mu,\mathrm{d}t)^2}$ restituemus $\pm\mathrm{d}\Pi$, denotante $\mathrm{d}\Pi$ in superficie sphaerica radio $=1$ circa centrum μ descripta elementum id, in quod elementum $\mathrm{d}t$ inde a puncto μ visum proiicitur, et valente signo superiori vel inferiori, prout elementum $\mathrm{d}t$ plagam exteriorem vel interiorem puncto μ advertit. Hoc pacto integrale (II) ita exhibetur

$$\int \pm\mathrm{d}\Pi.\cos Q.\theta(\mu,\mathrm{d}t)$$

patetque, huius integralis valorem eatenus tantum sensibilem fieri posse, quatenus elementa $\mathrm{d}\Pi$ talia, quae ad distantias insensibiles $(\mu,\mathrm{d}t)$ referuntur, spatium magnitudinis sensibilis in superficie sphaerica explent.

Hinc facile colligitur, integrale nostrum, generaliter loquendo, etiam insensibile manere, quoties punctum μ iaceat in ipsa superficie t: patet enim, proiectiones omnium elementorum $\mathrm{d}t$ a puncto μ insensibiliter remotorum esse in distantia insensibili a circulo maximo, quem format in superficie sphaerica planum superficiem t in puncto μ tangens. Excipere oportet tres casus, puta

1) eum, ubi radii curvaturae superficiei t in puncto μ sunt magnitudinis insensibilis.

2) eum, ubi continuitas curvaturae in puncto μ, vel intra distantiam insensibilem ab eo interrumpitur (Conf. *Disquiss. gen. circa superficies curvas* art. 3).

3) eum, ubi superficies t offert partem aliam a puncto μ insensibiliter distantem, puta si apud hoc punctum crassities spatii s est insensibilis. Ceterum huncce casum ei, quem in art. seq. tractabimus, adnumerare licet.

15.

Superest scilicet casus, ubi punctum μ non est in superficie ipsa t, attamen in distantia insensibili ab ea: in hoc casu integrale nostrum utique valorem sensibilem habere potest, quem iam accuratius examinabimus.

Secent superficiem sphaericam recta a puncto μ normaliter in superficiem t ducta, atque recta fixa ibinde proficiscens resp. in punctis G, H; statuatur arcus $GH = k$, arcus autem inter G atque punctum indefinitum superficiei sphaericae $= v$; denique sit w angulus sphaericus inter arcus k, v. Hoc pacto pro elemento $\mathrm{d}\Pi$ accipere licet productum $\sin v \,.\, \mathrm{d}v \,.\, \mathrm{d}w$, unde scribendo brevitatis caussa r pro $(\mu, \mathrm{d}t)$, integrale (II) fit

$$= \int\int \pm (\cos k \,.\, \cos v + \sin k \,.\, \sin v \,.\, \cos w)\, \theta r \,.\, \sin v \,.\, \mathrm{d}v \,.\, \mathrm{d}w$$

quam integrationem extendere tantummodo oportet per eas partes superficiei sphaericae, in quas distantiae insensibiles r proiiciuntur. Referuntur hae ad partem insensibilem superficiei t, quam si pro *plana* habemus, distantiamque minimam (puncto G seu valori $v = 0$ respondentem) per ρ denotamus, fit $r = \frac{\rho}{\cos v}$, sive a w independens; perfecta itaque integratione respectu variabilis w, puta a $w = 0$ usque ad $w = 360^0$, integrale fit

$$= \pm \int 2\pi\theta r \,.\, \cos k \,.\, \cos v \,.\, \sin v \,.\, \mathrm{d}v = \pm \int \frac{2\pi \cos k \,.\, \rho\rho\theta r \,.\, \mathrm{d}r}{r^3}$$

quae integratio extendenda est ab $r = \rho$ usque ad valorem sensibilem arbitrarium quantumvis parvum. Statuendo itaque generaliter

$$2rr \int \frac{\theta r \,.\, \mathrm{d}r}{r^3} = -\theta' r$$

accepta constante integrationis, ita ut fiat $\int\frac{\theta r.\mathrm{d}r}{r^2} = 0$, pro valore arbitrario sensibili intra ambitum eorum, circa quos experimenta instituere licet, erit integrale (II), neglectis insensibilibus,

$$= \pm\pi\cos k.\theta'\rho$$

Si dubium videretur, utrum fas sit, partem superficiei t intra distantiam insensibilem a puncto μ positam pro plana habere, consideremus eius loco sphaericam, et quidem sit R distantia centri sphaerae a puncto μ positive vel negative sumenda, prout centrum est in directione versus G vel in opposita. Ita erit

$$\cos v = \frac{\rho}{r}\left(1-\frac{\rho}{2R}\right)+\frac{r}{2R}$$

$$\sin v.\mathrm{d}v = \left[\frac{\rho}{rr}\left(1-\frac{\rho}{2R}\right)-\frac{1}{2R}\right]\mathrm{d}r$$

unde facile colligitur, integrale pro hoc casu non differre quantitate sensibili a valore prius invento $\pm\pi\cos k.\theta'\rho$, si modo R sit quantitas sensibilis. Quaecunque autem sit curvatura superficiei t in ea parte, de qua agitur, dummodo radii curvaturae non sint insensibiles, semper duae superficies sphaericae assignari poterunt, superficiem t in puncto ipsi μ proximo tangentes, intra quas t sita sit, et quarum radii sint magnitudinis sensibilis, manifestoque tunc integrale nostrum intra integralia ad illas superficies relata cadet, et proin absque errore sensibili per eandem formulam exprimetur, quae tunc tantummodo exceptionem patitur, ubi superficies t in distantia insensibili a puncto μ vel curvaturam radii insensibilis, vel aciem vel cuspidem offert.

16.

Quodsi iam ab integratione (II) ad integrale (I) progredimur, manifestum est, hoc insensibile fieri, non solum in eo casu, ubi illa pro *nullo* puncto superficiei T valorem sensibilem produxit, sed in eo quoque, ubi complexus elementorum superficiei T, pro quorum punctis integrale (II) sensibile evaserat, aream tantummodo insensibilis magnitudinis sistit. Quae si rite perpenduntur, apparebit, integrale (I) eatenus tantum valorem sensibilem acquirere posse, quatenus superficies T partem vel partes sensibilis magnitudinis contineat in distantia insensibili a superficie t positas. Quales partes quum a parallelismo cum superficie t sensibiliter deviare nequeant, pro quovis earum puncto $\cos k$ non sensibiliter differet vel a $+1$ vel a -1, prout plaga superficiei T exterior vel interior superficiei t advertitur. Quodsi itaque per τ, τ' eas partes superficiei T denotamus, quae sunt in distantia insensibili a superficie t, et quidem per τ eas, ubi plaga exterior alterius superficiei plagae interiori alterius advertitur, per τ' autem eas, ubi plagae homonymae sibi mutuo obvertuntur, denique per ρ distantiam minimam cuiusvis elementi $\mathrm{d}\tau$ vel $\mathrm{d}\tau'$ a superficie t, integrale nostrum (I) neglectis insensibilibus fit

$$= -\int \pi\theta'\rho\,.\,\mathrm{d}\tau + \int \pi\theta'\rho\,.\,\mathrm{d}\tau'$$

Manifesto hic nihil interest, utrum partes τ, τ' ad superficiem T an ad t referantur.

Hoc itaque modo iam nacti sumus solutionem completam problematis, quod in art. 6 nobis proposueramus, pro ea functionis φ indole, cui tamquam basi disquisitio principalis de figura aequilibrii fluidorum innititur, scilicet habemus

$$\iint \mathrm{d}s\,.\,\mathrm{d}S\,.\,\varphi(\mathrm{d}s, \mathrm{d}S) = 4\pi\sigma\psi 0 - \pi 7\theta 0 + \pi 7'\theta 0 - \pi\int \mathrm{d}\tau\,.\,\theta'\rho + \pi\int \mathrm{d}\tau'\,.\,\theta'\rho$$

17.

Origo functionis θ' ita enunciari potest, ut sit

$$\frac{\theta' r}{rr} = \int \frac{2\,\theta x\,.\,\mathrm{d}x}{x^3}$$

sumto integrali ab $x = r$ usque ad valorem constantem sensibilem arbitrarium, quem hic per R denotamus. Manifesto hoc integrale minus erit quam hoc $\int \frac{2\theta r\,.\,\mathrm{d}x}{x^3}$ inter eosdem limites, quod est $= \frac{\theta r}{rr} - \frac{\theta r}{RR}$, adeoque a potiori minus quam $\frac{\theta r}{rr}$. Quum autem indefinite habeatur

$$\int \frac{2\,\theta x\,.\,\mathrm{d}x}{x^3} = -\frac{\theta x}{xx} + \int \frac{\mathrm{d}\theta x}{xx} = -\frac{\theta x}{xx} - \int \frac{\psi x\,.\,\mathrm{d}x}{xx}$$

erit

$$\frac{\theta' r}{rr} = \frac{\theta r}{rr} - \frac{\theta R}{RR} - \int \frac{\psi x\,.\,\mathrm{d}x}{xx}$$

sumto integrali inter eosdem limites, quod minus erit quam integrale $\int \frac{\psi r\,\mathrm{d}x}{xx}$, adeoque etiam minus quam $\frac{\psi r}{r}$; quocirca valor ipsius $\frac{\theta' r}{rr}$ maior erit quam

$$\frac{\theta r}{rr} - \frac{\theta R}{RR} - \frac{\psi r}{r}$$

Cadit itaque $\theta' r$ inter limites

$$\theta r \text{ atque } \theta r - rr.\frac{\theta R}{RR} - r\psi r$$

quorum differentia, decrescente r in infinitum, manifesto quavis quantitate assignabili minor evadere potest, quum supponamus esse vel $\psi 0$ quantitatem finitam. Colligimus hinc, statui debere $\theta' 0 = \theta 0$. Patet itaque, in formula, ad quam in art. praec. pervenimus, terminum $-\pi 7\theta 0$ tamquam sub termino $-\pi\int d\tau.\theta'\rho$, atque terminum $\pi 7'\theta 0$ tamquam sub termino $\pi\int d\tau'.\theta'\rho$ comprehensum considerari posse, si distinctionem, quam inter distantiam insensibilem et distantiam nullam fecimus, tolleremus, atque partes 7, $7'$ resp. partibus τ, τ' adnumeraremus. Sed quamquam hoc modo solutionis elegantia sensu mathematico augeretur, tamen ad propositum nostrum praestat, distinctionem illam conservare.

18.

In applicatione disquisitionis praecedentis ad evolutionem termini secundi expressionis Ω art. 3, spatium secundum inde ab art. 6 per S denotatum cum primo identicum est; quae itaque in art. 16 erant σ, 7, $7'$, hic erunt s, t, 0, si t denotat totam superficiem spatii s a fluido impleti. Quapropter quoties hoc spatium neque partes sensibilis extensionis sed insensibilis crassitiei continet, neque eiusmodi interstitia (fissuras), pars secunda expressionis Ω fit

$$= \tfrac{1}{2}\pi cc(s\psi 0 - t\theta 0)$$

Exceptiones itaque adsunt duae:

1) Si spatium s continet partem insensibilis crassitiei, huius superficies duas partes sensibiliter aequales offeret, quarum alterutra per t' denotata, crassitieque spatii apud quodvis elementum dt' indefinite per ρ, accedet expressioni praecedenti terminus

$$\pi cc\int \theta'\rho.dt'$$

2) Si spatium s continet cavitatem insensibilis crassitiei, accedet similis terminus, puta $\pi cc\int\theta'\rho.dt''$, denotante t'' alterutram partem superficiei t fissurae contiguam, atque ρ indefinite crassitiem fissurae in quovis puncto.

In evolutione termini tertii expressionis Ω signum S retinendum erit, ut denotet spatium a vase repletum, sed loco characteristicae f characteristicam F

ad vim attractivam molecularum vasis relatam substituere oportebit, et perinde loco functionum per characteristicas φ, ψ, θ, θ' denotatarum alias per characteristicas Φ, Ψ, Θ, Θ' denotandas adhibere, quas perinde ab F pendere supponimus ut illas ab f. Quae in disquisitione generali erant $\sigma, 7'$, hic manifesto erunt 0: pro 7 vero hic simpliciter literam T adoptabimus, ut indicet non superficiem totam spatii S, sed eam partem, quae fluido contigua est. Hoc pacto pars tertia expressionis Ω fit, generaliter loquendo,

$$= \pi c C T \Theta 0$$

exceptis etiam hic duobus casibus, puta

3) Si apud partem sensibilem T' superficiei T fluidum crassitiem insensibilem habet, indefinite per ρ exprimendam, accedet terminus

$$-\pi c C \int \Theta' \rho . \mathrm{d}\, T'$$

4) Si superficies vasis praeter partem T fluido contiguam, offert aliam T'' in distantia quidem sed insensibili a fluido positam, accedet, denotante ρ indefinite hanc distantiam pro quolibet puncto, terminus

$$+\pi c C \int \Theta' \rho . \mathrm{d}\, T''$$

Superfluum foret, exceptioni primae, quatenus sub tertia non continetur, nec non secundae vel quartae immorari: etiamsi enim aequilibrium fluidi in casibus quibusdam huc referendis, attamen maxime specialibus, locum habere queat, tale aequilibrium nec stabile neque experimentis accessibile esse posset. Contra casus exceptus primus, quatenus sub tertio continetur, utique theoriae essentialis est, verumtamen aliquantisper hic seponetur, ut conditiones aequilibrii, quatenus absque cute fluidi insensibili, vasi adhaerente, consistere potest, explorentur.

Dum itaque omnes has exceptiones seponimus, expressio, cuius valor in statu aequilibrii maximum esse debet, haec erit

$$-g c \int z \,\mathrm{d}s + \tfrac{1}{2} c c s \psi 0 - \tfrac{1}{2} \pi c c t \theta 0 + \pi c C T \Theta 0$$

et quum in omnibus mutationibus, quas figura fluidi subire potest, spatium s invariatum maneat, expressio sequens

$$\int z \,\mathrm{d}s + \frac{\pi c \theta 0}{2g} . t - \frac{\pi C \Theta 0}{g} . T$$

in statu aequilibrii *minimum* esse debebit.

Iam supra monuimus, $\frac{c\theta_0}{g}$ exhibere spatium duarum dimensionum, idemque de $\frac{C\theta_0}{g}$ valet. Statuendo itaque

$$\frac{\pi c\theta_0}{2g} = \alpha\alpha, \quad \frac{\pi C\theta_0}{2g} = \beta\beta$$

erunt α, β lineae constantes a relatione gravitatis ad intensitatem virium, quas partes fluidi a se mutuo et a moleculis vasis patiuntur, pendentes; et si porro partem liberam superficiei fluidi, i. e. eam, quae vasi non est contigua, per U denotamus, ut habeatur $t = T + U$, minimum esse debet in statu aequilibrii expressio sequens, abhinc per W denotanda:

$$\int z\,\mathrm{d}s + (\alpha\alpha - 2\beta\beta)\,T + \alpha\alpha U$$

19.

Antequam quae ex hoc theoremate gravissimo sequuntur generaliter et complete evolvamus, operae pretium erit ostendere, quanta facilitate phaenomenon principale tuborum capillarium inde demanet.

Consideremus fluidum in aequilibrio in vase bicrurali, ita ut pars superficiei liberae fluidi sit in primo crure, pars alia in secundo: parietes vasis in confiniis harum partium verticales supponimus. Sit a area sectionis horizontalis internae primi cruris (vel exactius proiectionis horizontalis superficiei liberae fluidi in primo crure), b eiusdem peripheria, denique ah volumen fluidi in hoc crure, pariete verticali deorsum usque ad planum, a quo numerantur distantiae z, continuato, sive, quod eodem redit, h altitudo media fluidi supra hoc planum: similia denotentur pro secundo crure per literas a', b', h'. Si statum fluidi mutationem infinite parvam subire concipimus, et quidem talem, ut utraque superficiei liberae pars figuram suam servet, variatio partis primae expressionis W, puta integralis $\int z\,\mathrm{d}s$, manifesto erit

$$= ah\,\mathrm{d}h + a'h'\mathrm{d}h$$

variatio ipsius T autem

$$= b\,\mathrm{d}h + b'\mathrm{d}h'$$

denique per hyp $\mathrm{d}U = 0$. Hinc colligitur

$$\mathrm{d}W = ah\,\mathrm{d}h + a'h'\mathrm{d}h' - (2\beta\beta - \alpha\alpha)(b\,\mathrm{d}h + b'\mathrm{d}h')$$

Porro quum volumen integrum fluidi invariatum maneat, erit

$$a\,\mathrm{d}h + a'\mathrm{d}h' = 0$$

et proin

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}h\left[a(h-h') - (2\beta\beta - \alpha\alpha)\left(b - \frac{ab'}{a'}\right)\right]$$

Conditio itaque, ut W in statu aequilibrii sit minimum, perducit ad aequationem, phaenomenon principale tuborum capillarium implicantem

$$h - h' = (2\beta\beta - \alpha\alpha)\left(\frac{b}{a} - \frac{b'}{a'}\right)$$

sponteque patet, huic aequationi revera respondere valorem *minimum* ipsius W, quum valor ipsius $\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}W}{\mathrm{d}h^2}$ fiat $= a + \frac{aa}{a'}$, i. e. natura sua positivus

Crus secundum priori largius pronunciatur, si quotiens $\frac{a'}{b'}$ est maior quam $\frac{a}{b}$; fluidum itaque in crure arctiori magis depressum vel magis elevatum erit quam in largiori, prout quadratum $\beta\beta$ minus vel maius est quam $\frac{1}{2}\alpha\alpha$; et si forte haberetur $\beta\beta = \frac{1}{2}\alpha\alpha$, altitudo in utroque crure eadem foret. Si crus secundum tam largum est, ut $\frac{b'}{a'}$ negligi possit prae $\frac{b}{a}$, erit proxime

$$h - h' = (2\beta\beta - \alpha\alpha)\frac{b}{a}$$

In tubis itaque capillaribus cylindricis fluidi depressio vel elevatio diametro tubo reciproce proportionalis est. Haec omnia tum cum experientia tum cum iis, quae ill. Laplace per theoriam stabilire conatus est, conveniunt.

Si vas pluribus cruribus verticalibus inter se communicantibus instructum est, designent a'', b'', h'' pro tertio, a''', b''', h''' pro quarto etc. eadem, quae a, b, h pro primo, eritque etiam

$$h - h'' = (2\beta\beta - \alpha\alpha)\left(\frac{b}{a} - \frac{b''}{a''}\right)$$
$$h - h''' = (2\beta\beta - \alpha\alpha)\left(\frac{b}{a} - \frac{b'''}{a'''}\right)$$

Concinnius hae aequationes ita exhibentur:

$$h - (2\beta\beta - \alpha\alpha)\frac{b}{a} = h' - (2\beta\beta - \alpha\alpha)\frac{b'}{a'} = h'' - (2\beta\beta - \alpha\alpha)\frac{b''}{a''} = h''' - (2\beta\beta - \alpha\alpha)\frac{b'''}{a'''} \text{ etc.}$$

Quum planum horizontale, a quo altitudines numerantur, arbitrarium sit, patet, si illud ita assumatur, ut sit

$$h = (2\beta\beta - \alpha\alpha)\frac{b}{a}$$

etiam in reliquis cruribus fore

$$h' = (2\beta\beta - \alpha\alpha)\frac{b'}{a'}, \quad h'' = (2\beta\beta - \alpha\alpha)\frac{b''}{a''}, \quad h''' = (2\beta\beta - \alpha\alpha)\frac{b'''}{a'''} \text{ etc.}$$

Hocce planum, cuius conceptum infra generalius stabiliemus, vocari potest planum horizontale normale (plan de niveau). Supponendo (si opus est) parietes verticales singulorum crurium usque ad hoc planum productos, ah, $a'h'$, $a''h''$ etc. expriment, pro $2\beta\beta > \alpha\alpha$, quantitates fluidi in singulis cruribus supra hoc planum elevati, vel pro $2\beta\beta < \alpha\alpha$, quantitates fluidi infra hoc planum in singulis cruribus deficientis: hae itaque quantitates aequales sunt productis ex area constante $2\beta\beta - \alpha\alpha$ in circumferentias b, b', b'', b''' etc.

20.

Superest iam, ut e theoremate art. 18 indolem figurae aequilibrii determinemus, cuius negotii cardo vertitur in evolutione generali variationis, quam expressio W patitur, dum figura spatii a fluido impleti mutationem quamcunque infinite parvam subit. Sed quum calculus variationum integralium duplicium pro casu, ubi etiam limites tamquam variabiles spectari debent, hactenus parum excultus sit, hanc disquisitionem subtilem paullo profundius petere oportet.

Considerabimus superficiei, quae spatium s a reliquo spatio separat, partem U, atque quodvis illius punctum per tres coordinatas x, y, z determinari supponemus, quarum tertia sit distantia a plano horizontali arbitrario. Spectari itaque poterit z tamquam functio indeterminatarum x, y, cuius differentialia partialia secundum morem suetum, sed omissis vinculis, per

$$\frac{dz}{dx} \cdot dx, \quad \frac{dz}{dy} \cdot dy$$

denotabimus. In quovis superficiei puncto rectam superficiei normalem et respectu spatii s extrorsum directam concipimus, cosinusque angulorum inter hanc normalem atque rectas axibus coordinatarum x, y, z parallelas per ξ, η, ζ denotamus. Hoc pacto erit

$$\xi\xi + \eta\eta + \zeta\zeta = 1$$
$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\xi}{\zeta}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{\eta}{\zeta}$$

Limes superficiei U erit linea in se rediens, quam per P denotamus, et dum motu continuo descripta supponitur, eius elementa $\mathrm{d}P$ (perinde ut elementa superficiei $\mathrm{d}U$) semper positive accipiemus. Cosinus angulorum, quos directio elementi $\mathrm{d}P$ facit cum axibus coordinatarum x, y, z, per X, Y, Z denotamus: ne vero sensus directionis ambiguus maneat, hanc ita decernimus, ut ipsa primo loco, directio normalis in elementum $\mathrm{d}P$ superficiem U tangentis et huius respectu introrsum ductae secundo loco, denique normalis in superficiem respectuque spatii s extrorsum ducta tertio loco, constituant systema trium rectarum similiter deinceps sitarum, ut axes coordinatarum x, y, z. Ita facile perspicietur (cf. *Disquiss. gen. circa superficies curvas* art. 2), cosinus angulorum inter directionem illam secundam atque axes coordinatarum x, y, z esse resp.

$$\eta^0 Z - \zeta^0 Y, \quad \zeta^0 X - \xi^0 Z, \quad \xi^0 Y - \eta^0 X$$

si ξ^0, η^0, ζ^0 sint valores ipsarum ξ, η, ζ pro puncto elementi $\mathrm{d}P$.

21.

His ita praeparatis supponamus, superficiem U pati mutationem qualemcunque infinite parvam. Si sufficeret, tales tantummodo mutationes considerare, pro quibus limes P semper invariatus, vel saltem in eadem superficie verticali maneret, manifesto soli coordinatae tertiae z variationem inducere oporteret, quo pacto problema longe facilius evaderet; sed quum problema maxima generalitate nobis ventilandum sit, in tali investigationis modo consideratio variabilitatis limitum in ambages incommodas concinnitatemque turbantes perduceret; quamobrem praestabit, statim ab initio omnes tres coordinatas variationi subiicere. Rem itaque sic imaginabimur, ut cuivis puncto superficiei, cuius coordinatae sunt x, y, z, substituamus aliud, cuius coordinatae sint $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$, ubi $\delta x, \delta y, \delta z$ spectari possunt tamquam functiones indeterminatae ipsarum x, y, sed quarum valores manent infinite parvae. Inquiramus nunc in variationes singulorum elementorum expressionis W, et quidem initium faciamus a variatione ipsius elementi $\mathrm{d}U$.

Concipiamus elementum superficiei U triangulare $\mathrm{d}U$ inter puncta, quorum coordinatae sint

$$\begin{array}{lll} x, & y, & z \\ x+\mathrm{d}x, & y+\mathrm{d}y, & z+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}.\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}.\mathrm{d}y \\ x+\mathrm{d}'x, & y+\mathrm{d}'y, & z+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}.\mathrm{d}'x+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}.\mathrm{d}'y \end{array}$$

Area duplex huius trianguli per principia nota invenitur

$$= (\mathrm{d}x.\mathrm{d}'y - \mathrm{d}y.\mathrm{d}'x)\sqrt{\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)^2\right]}$$

si, quod licet, supponimus, $\mathrm{d}x.\mathrm{d}'y - \mathrm{d}y.\mathrm{d}'x$ esse quantitatem positivam.

In superficie variata loco illorum punctorum tria alia habebimus, quorum coordinatae erunt

puncti primi $\quad x+\delta x, \quad y+\delta y, \quad z+\delta z$

puncti secundi

$$x+\mathrm{d}x+\delta x+\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}.\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}y}.\mathrm{d}y$$

$$y+\mathrm{d}y+\delta y+\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}.\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}y}.\mathrm{d}y$$

$$z+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}.\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}.\mathrm{d}y+\delta z+\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}x}.\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}y}.\mathrm{d}y$$

puncti tertii

$$x+\mathrm{d}'x+\delta x+\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}.\mathrm{d}'x+\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}y}.\mathrm{d}'y$$

$$y+\mathrm{d}'y+\delta y+\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}.\mathrm{d}'x+\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}y}.\mathrm{d}'y$$

$$z+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}.\mathrm{d}'x+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}.\mathrm{d}'y+\delta z+\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}x}.\mathrm{d}'x+\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}y}.\mathrm{d}'y$$

Area duplex trianguli inter haec puncta invenitur per eandem methodum

$$= (\mathrm{d}x.\mathrm{d}'y - \mathrm{d}y.\mathrm{d}'x)\sqrt{N}$$

si brevitatis caussa per N denotatur aggregatum

$$\left[\left(1+\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}\right)\left(1+\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}y}\right)-\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}y}.\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}\right]^2$$

$$+\left[\left(1+\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}\right)\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}y}\right)-\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}x}\right)\right]^2$$

$$+\left[\left(1+\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}y}\right)\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}x}\right)-\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}y}\right)\right]^2$$

Facta evolutione et reiectis quantitatibus secundi ordinis, invenitur

$$\sqrt{N} = \sqrt{\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)^2\right]}.\left[1+\frac{L}{1+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)^2}\right]$$

si brevitatis gratia per L denotatur aggregatum

$$\frac{d\delta x}{dx}\left[1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]-\frac{d\delta x}{dy}\cdot\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dz}{dy}-\frac{d\delta y}{dx}\cdot\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dz}{dy}+\frac{d\delta y}{dy}\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]+\frac{d\delta z}{dx}\cdot\frac{dz}{dx}+\frac{d\delta z}{dy}\cdot\frac{dz}{dy}$$

Est itaque ratio trianguli primi ad secundum ut 1 ad

$$1+\frac{L}{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

adeoque independens a figura trianguli dU, resultatque

$$\delta dU=\frac{L\,dU}{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

sive in terminis explicitis

$$\delta dU=dU\left(\frac{d\delta x}{dx}(\eta\eta+\zeta\zeta)-\frac{d\delta x}{dy}.\xi\eta-\frac{d\delta y}{dx}.\xi\eta+\frac{d\delta y}{dy}(\xi\xi+\zeta\zeta)-\frac{d\delta z}{dx}.\xi\zeta-\frac{d\delta z}{dy}.\eta\zeta\right)$$

22.

Variationem totius superficiei U obtinebimus per integrationem huius expressionis per omnia elementa dU extendendam. Ad hunc finem duas huius integralis partes, puta

$$\int dU.\left((\eta\eta+\zeta\zeta)\frac{d\delta x}{dx}-\xi\eta\frac{d\delta y}{dx}-\xi\zeta\frac{d\delta z}{dx}\right)=A$$

atque

$$\int dU\left(-\xi\eta\frac{d\delta x}{dy}+(\xi\xi+\zeta\zeta)\frac{d\delta y}{dy}-\eta\zeta\frac{d\delta z}{dy}\right)=B$$

seorsim tractabimus.

Concipiatur planum axi coordinatarum y normale, et quidem tale, ut valor determinatus ipsius y, ei competens, sit intra ambitum valorum extremorum, quos habet y in superficie U. Hoc planum peripheriam P secabit vel in duobus, vel in quatuor, vel in sex etc. punctis, quorum coordinatae primae sint deinceps x^0, x', x'' etc.; perinde reliquae quantitates ad haec puncta pertinentes per indices distinguantur. Eodem modo secetur superficies per aliud planum illi infinite propinquum et parallelum, cui competat coordinata secunda $y+dy$; inter haec plana reperientur elementa peripheriae dP^0, dP', dP'' etc., perspicieturque facile, haberi

$$dy=-Y^0dP^0=+Y'dP'=-Y''dP''=+Y'''dP'''\text{ etc.}$$

Si insuper concipimus infinite multa plana axi coordinatarum x normalia, cuivis elemento $\mathrm{d}x$ inter x^0 et x', vel inter x'' et x''' etc. sito respondebit elementum $\mathrm{d}U = \frac{\mathrm{d}x\,.\,\mathrm{d}y}{\zeta}$, unde patet, eam partem integralis A, quae respondet parti superficiei inter plana y, $y+\mathrm{d}y$ sitae, haberi ex integratione

$$\mathrm{d}y\int \mathrm{d}x\,.\left(\frac{\eta\eta+\zeta\zeta}{\zeta}\,.\,\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x} - \frac{\xi\eta}{\zeta}\,.\,\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x} - \xi\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}x}\right)$$

extensa ab $x = x^0$ usque ad $x = x'$, dein ab $x = x''$ usque ad $x = x'''$ etc. Indefinite vero hoc integrale exhibetur per

$$\left(\frac{\eta\eta+\zeta\zeta}{\zeta}\,.\,\delta x - \frac{\xi\eta}{\zeta}\,.\,\delta y - \xi\,\delta z\right)\mathrm{d}y - \mathrm{d}y\int\left(\delta x\,.\,\frac{\mathrm{d}\frac{\eta\eta+\zeta\zeta}{\zeta}}{\mathrm{d}x} - \delta y\,.\,\frac{\mathrm{d}\frac{\xi\eta}{\zeta}}{\mathrm{d}x} - \delta z\,.\,\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x$$

unde colligitur, prodire pro casu nostro

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\eta^0\eta^0+\zeta^0\zeta^0}{\zeta^0}\,.\,\delta x^0 - \frac{\xi^0\eta^0}{\zeta^0}\,.\,\delta y^0 - \xi^0\delta z^0\right) Y^0\mathrm{d}P^0\\
&+\left(\frac{\eta'\eta'+\zeta'\zeta'}{\zeta'}\,.\,\delta x' - \frac{\xi'\eta'}{\zeta'}\,.\,\delta y' - \xi'\delta z'\right) Y'\mathrm{d}P'\\
&+\left(\frac{\eta''\eta''+\zeta''\zeta''}{\zeta''}\,.\,\delta x'' - \frac{\xi''\eta''}{\zeta''}\,.\,\delta y'' - \xi''\delta z''\right) Y''\mathrm{d}P''\\
&+\text{etc.}\\
&-\int\zeta\,\mathrm{d}U\,.\left(\delta x\,.\,\frac{\mathrm{d}\frac{\eta\eta+\zeta\zeta}{\zeta}}{\mathrm{d}x} - \delta y\,.\,\frac{\mathrm{d}\frac{\xi\eta}{\zeta}}{\mathrm{d}x} - \delta z\,.\,\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}\right)
\end{aligned}$$

sive, quod idem est,

$$\Sigma\left(\frac{\eta\eta+\zeta\zeta}{\zeta}\,.\,\delta x - \frac{\xi\eta}{\zeta}\,.\,\delta y - \xi\delta z\right) Y\mathrm{d}P - \int\zeta\,\mathrm{d}U\,.\left(\delta x\,.\,\frac{\mathrm{d}\frac{\eta\eta+\zeta\zeta}{\zeta}}{\mathrm{d}x} - \delta y\,.\,\frac{\mathrm{d}\frac{\xi\eta}{\zeta}}{\mathrm{d}x} - \delta z\,.\,\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}\right)$$

ubi tum summatio per omnia elementa $\mathrm{d}P$, tum integratio per omnia elementa $\mathrm{d}U$, intra plana y et $y+\mathrm{d}y$ sita, extendenda est.

Tota itaque quantitas A exprimetur per

$$\int\left(\frac{\eta\eta+\zeta\zeta}{\zeta}\,.\,\delta x - \frac{\xi\eta}{\zeta}\,.\,\delta y - \xi\delta z\right) Y\mathrm{d}P - \int\zeta\,\mathrm{d}U\,.\left(\delta x\,.\,\frac{\mathrm{d}\frac{\eta\eta+\zeta\zeta}{\zeta}}{\mathrm{d}x} - \delta y\,.\,\frac{\mathrm{d}\frac{\xi\eta}{\zeta}}{\mathrm{d}x} - \delta z\,.\,\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}\right)$$

ubi integrationem priorem per totam peripheriam P, posteriorem per totam superficiem U extendere oportet.

23.

Per ratiocinia prorsus similia invenimus

$$B = \int(\tfrac{\xi\eta}{\zeta}.\delta x - \tfrac{\xi\xi+\zeta\zeta}{\zeta}.\delta y + \eta\delta z)X\,\mathrm{d}P + \int\zeta\,\mathrm{d}U(\delta x.\frac{\mathrm{d}\frac{\xi\eta}{\zeta}}{\mathrm{d}y} - \delta y.\frac{\mathrm{d}\frac{\xi\xi+\zeta\zeta}{\zeta}}{\mathrm{d}y} + \delta z.\tfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}y})$$

Statuendo itaque, pro quovis puncto peripheriae P,

$$[X\xi\eta + Y(\eta\eta+\zeta\zeta)]\delta x - [X(\xi\xi+\zeta\zeta)+Y\xi\eta]\delta y + (X\eta\zeta - Y\xi\zeta)\delta z = \zeta Q$$

nec non, pro quovis puncto superficiei U,

$$\left(\frac{\mathrm{d}\frac{\xi\eta}{\zeta}}{\mathrm{d}y} - \frac{\mathrm{d}\frac{\eta\eta+\zeta\zeta}{\zeta}}{\mathrm{d}x}\right)\zeta\delta x + \left(\frac{\mathrm{d}\frac{\xi\eta}{\zeta}}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}\frac{\xi\xi+\zeta\zeta}{\zeta}}{\mathrm{d}y}\right)\zeta\,\mathrm{d}y + (\tfrac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} + \tfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}y})\zeta\delta z = V$$

erit tandem

$$\delta U = \int Q\,\mathrm{d}P + \int V\,\mathrm{d}U$$

ubi integratio prima per totam peripheriam P, secunda per totam superficiem U extendi debet.

24.

Formulas pro Q et V modo allatas notabiliter contrahere licet. Et quidem, adiumento aequationis $X\xi + Y\eta + Z\zeta = 0$, Q statim induit formam symmetricam sequentem:

$$Q = (Y\zeta - Z\eta)\delta x + (Z\xi - X\zeta)\delta y + (X\eta - Y\xi)\delta z$$

Quo etiam expressio pro V eruta in formam concinniorem reducatur, observamus, e formulis

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\frac{\xi}{\zeta}, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = -\frac{\eta}{\zeta}$$

sequi

$$\frac{\mathrm{d}\frac{\xi}{\zeta}}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}\frac{\eta}{\zeta}}{\mathrm{d}x}$$

Hinc fit

$$\frac{\mathrm{d}\frac{\xi\eta}{\zeta}}{\mathrm{d}y} = \frac{\xi}{\zeta}.\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}y} + \eta\frac{\mathrm{d}\frac{\xi}{\zeta}}{\mathrm{d}y} = \frac{\xi}{\zeta}.\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}y} + \eta\frac{\mathrm{d}\frac{\eta}{\zeta}}{\mathrm{d}x}$$

Porro ex $\xi\xi+\eta\eta+\zeta\zeta=1$ deducimus

$$\xi\frac{d\xi}{dx}+\eta\frac{d\eta}{dx}+\zeta\frac{d\zeta}{dx}=0$$

atque hinc

$$\frac{d\frac{\eta\eta+\zeta\zeta}{\zeta}}{dx}=\eta\frac{d\frac{\eta}{\zeta}}{dx}+\frac{\eta}{\zeta}\cdot\frac{d\eta}{dx}+\frac{d\zeta}{dx}=\eta\frac{d\frac{\eta}{\zeta}}{dx}-\frac{\xi}{\zeta}\cdot\frac{d\xi}{dx}$$

Substitutis his valoribus in coëfficiente ipsius δx in expressione pro V, ille fit

$$=\xi\left(\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}\right)$$

Prorsus simili modo coëfficiens ipsius δy in eadem expressione transit in

$$\eta\left(\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}\right)$$

Hoc itaque pacto nanciscimur

$$V=(\xi\delta x+\eta\delta y+\zeta\delta z)\left(\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}\right)$$

25.

Antequam ulterius progrediamur, significationem geometricam expressionum erutarum illustrare conveniet. Ad hunc finem directiones varias hic occurrentes intuitioni faciliori subiiciemus sequendo eum modum, quem in Disquiss. gen. circa superficies curvas introduximus, puta referendo illas ad puncta superficiei sphaericae radio $=1$ circa centrum arbitrarium descriptae. Primo itaque directiones axium coordinatarum x, y, z denotabimus per puncta (1), (2), (3); dein directionem normalis in superficiem et respectu spatii s extrorsum ductae per punctum (4); denique directionem rectae a quolibet superficiei puncto versus ipsius locum variatum ductae, per punctum (5). Variationem loci ipsam, seu quantitatem $\sqrt{(\delta x^2+\delta y^2+\delta z^2)}$, semper positive sumendam, brevitatis caussa per δe denotabimus, arcumque inter duo sphaerae puncta, ut e. g. (1) et (5), sive angulum, qui illum arcum mensurat, ita (1, 5) scribemus. Erit itaque

$$\delta x=\delta e.\cos(1,5),\quad \delta y=\delta e.\cos(2,5),\quad \delta z=\delta e.\cos(3,5)$$

Haec pro quovis superficiei puncto valent. In eius limite, seu peripheria P, duae aliae directiones accedunt. Primo directio elementi dP, cui respondeat punctum (6); dein directio rectae huic normalis superficiem tangentis eiusque respectu introrsum ductae, cui respondeat punctum (7). Per hypothesin nostram puncta (6), (7), (4) eodem ordine iacent, ut (1), (2), (3), observetur praeterea, (4, 6), (4, 7), (6, 7) exhibere quadrantes seu angulos rectos. Ita prodeunt aequationes iam supra (art. 20) traditae

$$\eta Z-\zeta Y=\cos(1,7),\quad \zeta X-\xi Z=\cos(2,7),\quad \xi Y-\eta X=\cos(3,7)$$

formulaeque art. praec. has formas induunt:

$$\begin{aligned} Q &= -\delta e.\cos(5,7)\\ V &= \delta e.\cos(4,5).\left(\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}\right)\end{aligned}$$

Exprimit itaque Q translationem cuiusvis puncti peripheriae P a plano hanc tangente superficiei U normali, in plaga ab hac aversa positive sumendam; factor ipsius V autem $\delta e.\cos(4,5)$ manifesto indicat translationem cuiusvis puncti superficiei U a plano hanc tangente, positive sumendam in plaga a spatio s aversa.

Sed etiam factorem alterum ipsius V per significationem geometricam explicare licet. Habemus enim

$$\begin{aligned} &\xi=-\zeta.\frac{dz}{dx},\quad \eta=-\zeta.\frac{dz}{dy}\\ &\frac{1}{\zeta\zeta}=1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\end{aligned}$$

Hinc prodit

$$\begin{aligned} d\zeta &= \xi\zeta\zeta d\frac{dz}{dx}+\eta\zeta\zeta d\frac{dz}{dy}\\ \frac{d\xi}{dx} &= -\zeta\frac{ddz}{dx^2}-\frac{dz}{dx}.\frac{d\zeta}{dx}\\ &= -\zeta\frac{ddz}{dx^2}+\xi\xi\zeta\frac{ddz}{dx^2}+\xi\eta\zeta\frac{ddz}{dx.dy}\\ &= -\zeta(\eta\eta+\zeta\zeta)\frac{ddz}{dx^2}+\xi\eta\zeta\frac{ddz}{dx.dy}\\ \frac{d\eta}{dy} &= -\zeta\frac{ddz}{dy^2}+\eta\eta\zeta\frac{ddz}{dy^2}+\xi\eta\zeta\frac{ddz}{dx.dy}\\ &= -\zeta(\xi\xi+\zeta\zeta)\frac{ddz}{dy^2}+\xi\eta\zeta\frac{ddz}{dx.dy}\end{aligned}$$

et proin

$$\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}=-\zeta^3\left\{\frac{ddz}{dx^2}\left[1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]-\frac{2ddz}{dx.dy}.\frac{dz}{dx}.\frac{dz}{dy}+\frac{ddz}{dy^2}\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]\right\}$$

cuius expressionis valorem constat esse

$$= \frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$$

denotantibus R, R' radios curvaturae extremos in puncto de quo agitur, et quidem positive accipiendos, quoties convexitas superficiei extrorsum vertitur.

26.

Examen attentum analysis nostrae inde ab art. 22 patefaciet suppositionem tacitam illi adhaerentem, scilicet quibusvis valoribus coordinatarum x, y unicum tantummodo valorem ipsius z respondere, atque valorem ipsius ζ ubique per totam superficiem U esse positivum. Nihilominus veritas theorematis finalis, ad quod analysis ista perduxit, puta (I)

$$\delta U = -\int \delta e . \cos(5,7) . \mathrm{d}P + \int \delta e . \cos(4,5) . (\tfrac{1}{R} + \tfrac{1}{R'}) \mathrm{d}U$$

ad hanc suppositionem non restringitur, sed generaliter valet. Quam generalitatem si statim ab initio amplecti voluissemus, vel quasdam ambages incurrere, vel methodum aliquantum diversam sequi oportuisset: sed ad eundem finem etiam per considerationes sequentes facile pervenire licet.

Analysis nostra manifesto independens est a suppositione, quod axis coordinatarum z est verticalis, quin potius in illa situs axium prorsus arbitrarius manet, veritasque theorematis stabilita est pro omnibus superficiebus, pro quibus complexus omnium punctorum (4) unico hemisphaerio includi potest; sufficit enim, talis hemisphaerii centrum (polum) pro (3) adoptare.

Si vero proponitur superficies huic conditioni non satisfaciens, certe in duas pluresve partes dispesci poterit, quae singulae tali conditioni satisfaciant. Iam facile perspicietur, si superficies quaedam in duas partes divisa fuerit, veritatem theorematis pro figura tota statim sequi e veritate pro singulis partibus. Constet enim figura U e partibus U', U'', sitque P' peripheria figurae U', atque P'' peripheria figurae U''; porro habeant P', P'' partem communem P''', ita ut P' constet ex P''' et P'''', P'' vero ex P''' et P''''', unde manifesto peripheria figurae U integra P constabit ex P'''' et P''''' Ita erit quidem

$$\int \delta e . \cos(5,7) \mathrm{d}P' = \int \delta e . \cos(5,7) \mathrm{d}P''' + \int \delta e . \cos(5,7) \mathrm{d}P''''$$
$$\int \delta e . \cos(5,7) \mathrm{d}P'' = \int \delta e . \cos(5,7) \mathrm{d}P''' + \int \delta e . \cos(5,7) \mathrm{d}P'''''$$

sed probe notandum, valorem integralis $\int \delta e . \cos(5,7) \mathrm{d} P'''$, quatenus est pars prioris integralis, exacte oppositum esse valori eiusdem integralis, quatenus est pars posterioris integralis, quum cuivis puncto lineae P''', in his duobus casibus directionibus oppositis describendae, loca puncti (7) opposita adeoque valores oppositi factoris $\cos(5,7)$ respondeant. In additione itaque hae partes sese destruunt, fitque

$$\int \delta e . \cos(5,7) \mathrm{d} P' + \int \delta e . \cos(5,7) \mathrm{d} P'' = \int \delta e . \cos(5,7) \mathrm{d} P$$

unde, quum habeatur $\delta U = \delta U' + \delta U''$, valor ipsius δU cum formula allata (I) conspirans sponte demanat, dum haec formula cum valoribus variationum $\delta U'$, $\delta U''$ quadrare supponitur.

Denique observamus, veritatem theorematis (I) etiam e considerationibus geometricis hauriri potuisse, et quidem facilius quam per methodum analyticam, quam tamen hic ideo praetulimus, ut occasionem, calculo variationum, pro integralibus duplicibus limitibus variabilibus inclusis parum hactenus exculto, aliquid lucis effundendi arriperemus, methodum alteram geometricam satis obviam lectori perito relinquentes.

27.

Superest, ut variationes evolvamus, quas elementa reliqua expressionis W per variationem figurae spatii s patiuntur, et primo de variatione voluminis spatii s agemus.

Resumamus duo triangula in art. 21 considerata, iungamusque laterum puncta respondentia per rectas, ut oriatur solidum, cuius loco accipere licet prisma basis $\mathrm{d}U$, altitudinis $\xi \delta x + \eta \delta y + \zeta \delta z = \delta e . \cos(4,5)$, et quidem haec forma dabit altitudinem in forma positiva seu negativa, prout triangulum transpositum et proin totum solidum iacet extra vel intra spatium s. Hinc habemus (II)

$$\delta s = \int \mathrm{d} U . \delta e . \cos(4,5)$$

Porro hinc sequitur, variationem integralis $\int z \mathrm{d} s$ esse (III)

$$\delta \int z \mathrm{d} s = \int z \mathrm{d} U . \delta e . \cos(4,5)$$

Quod vero attinet ad variationem quantitatis T, ante omnia observamus, quum P denotet limitem communem superficierum T, U, transpositiones punctorum peripheriae P satisfacere debere huic conditioni, ut loca nova in superficie spatii S maneant. Manifesto itaque per transpositionem elementi $\mathrm{d}P$, superficies T patitur mutationem $\pm \mathrm{d}P.\delta e.\sin(5,6)$, perspicieturque facile, generaliter loquendo signum positivum vel negativum a signo quantitatis $\cos(4,5)$ pendere. Sed concinnius haec variatio exprimitur introducendo directionem novam, quae sit in plano superficiem spatii S tangente, lineae P normalis, et respectu spatii s extrorsum ducta. Denotando per (8) punctum huic directioni respondens, variatio superficiei T a transpositione elementi $\mathrm{d}P$ oriunda erit $\mathrm{d}P.\delta e.\cos(5,8)$, sive (IV)

$$\delta T = \int \mathrm{d}P.\delta e.\cos(5,8)$$

ubi signum factoris $\cos(5,8)$ sponte decidet, utrum mutatio sit incrementum an decrementum.

Quum punctum (6) sit polus circuli maximi per puncta (7), (8) ducti, punctumque (5) iaceat in circulo maximo per puncta (6), (8) ducto, puncta (5), (7), (8) formabunt triangulum in (8) rectangulum, eritque adeo $\cos(5,7) = \cos(5,8).\cos(7,8)$: arcus (7,8) autem est mensura anguli inter duo plana superficies spatiorum s, S in eorum intersectione P tangentia, et quidem inter eas horum planorum plagas, quae spatium vacuum includunt. Hunc angulum per i denotabimus, unde $180^0 - i$ erit angulus inter planorum plagas eas, quae spatium s continent, formulaque nostra (V)

$$\cos(5,7) = \cos(5,8).\cos i.$$

28.

E combinatione formularum I....IV prodit variatio expressionis W

$$\begin{aligned}\delta W = & \int \mathrm{d}U.\delta e.\cos(4,5).[z + \alpha\alpha(\tfrac{1}{R} + \tfrac{1}{R'})] \\ & - \int \mathrm{d}P.\delta e.\cos(5.8).(\alpha\alpha\cos i - \alpha\alpha + 2\beta\beta)\end{aligned}$$

ubi integrale prius extendi debet per omnia elementa $\mathrm{d}U$ partis liberae superficiei spatii s, vel partium liberarum (si forte plures separatae adsint), integrale posterius autem per omnia elementa $\mathrm{d}P$ lineae vel linearum, quae illam partem liberam, vel illas partes liberas a reliquis spatio S contiguis separant.

Iam quum in statu aequilibrii valor ipsius W debeat esse minimum, adeoque admittere nequeat mutationem negativam pro ulla mutatione infinite parva figurae fluidi, pro qua volumen s invariatum manet, i. e. pro qua $\delta s = \int \mathrm{d}U.\delta e.\cos(4,5)$ evanescit, facile perspicietur, figuram superficiei U in statu aequilibrii talem esse debere, ut in omnibus eius punctis elementum variationis δW hoc

$$\mathrm{d}U.\delta e.\cos(4,5).\left[z + \alpha\alpha\left(\tfrac{1}{R} + \tfrac{1}{R'}\right)\right]$$

proportionale sit elemento variationis δs, puta quantitati $\mathrm{d}U.\delta e.\cos(4,5)$, sive quod idem est, ut fiat

$$z + \alpha\alpha\left(\tfrac{1}{R} + \tfrac{1}{R'}\right) = \text{Const.}$$

Manifesto enim, si haec proportionalitas locum non haberet, valor ipsius W decrementi capax foret per idoneam mutationem figurae superficiei U, limite P adeo invariato manente. Ceterum aequatio illa pro *tota* superficie U valet, etiamsi haec e pluribus partibus separatis constet, dummodo fluidum ipsum cohaereat.

Aequatio ista constituit theorema fundamentale primum in theoria aequilibrii fluidorum, quod iam ab ill. Laplace erutum est, sed per methodum a nostra plane diversam.

Si planum, pro quo z quantitati aequationis constanti aequalis est, et quod planum horizontale normale (plan de niveau) vocare possumus, loco eius, a quo coordinatae z numeratae erant, adoptamus, erit

$$z = -\alpha\alpha\left(\tfrac{1}{R} + \tfrac{1}{R'}\right)$$

unde protinus demanant corollaria sequentia.

I. Si planum normale superficiem liberam U ullibi secat, in quovis sectionis puncto superficies necessario concavo-convexa erit, atque radius maximus convexitatis radio maximo concavitatis aequalis.

II. Supra planum normale superficies vel concavo-concava erit, vel, sicubi fuerit concavo-convexa, curvatura concava convexam superabit.

III. Infra planum normale superficies vel erit convexo-convexa, vel sicubi fuerit concavo-convexa, curvatura convexa concavam superabit.

IV. Superficies libera U nequit habere partem finitam planam nisi horizontalem et cum plano normali coincidentem.

29.

Aequatione, quam modo stabilivimus, subsistente, variatio valoris ipsius W reducitur ad

$$\delta W = -\int \mathrm{d}P.\delta e.\cos(5,8)(\alpha\alpha\cos i - \alpha\alpha + 2\beta\beta)$$

unde introducendo angulum A talem ut sit

$$\cos A = \frac{\alpha\alpha - 2\beta\beta}{\alpha\alpha} \quad \text{sive} \quad \sin\tfrac{1}{2}A = \frac{\beta}{\alpha}$$

habemus

$$\delta W = \alpha\alpha\int \mathrm{d}P.\delta e.\cos(5,8).(\cos A - \cos i)$$

integratione per totam lineam P extensa. Memores esse debemus, factorem $\cos(5,8)$ aequalem esse ipsi $\sin(5,6)$, signo positivo vel negativo affecto, prout fluidum in motu suo virtuali apud elementum $\mathrm{d}P$ vel ultra limitem P redundare, vel citra recedere concipitur. Hinc facile concludimus, in statu aequilibrii, generaliter loquendo, ubique esse debere $i = A$. Si enim in aliqua parte lineae P esset $i < A$, motus virtualis primi generis in hac parte, manente parte reliqua limitis P invariata, manifesto ipsi W variationem negativam induceret, et perinde negativa variatio ipsius W prodiret per motum virtualem fluidi secundi generis, si in ulla parte lineae P esset $i > A$: utraque igitur suppositio conditioni minimi in aequilibrio adversatur.

Hoc est theorema fundamentale secundum, quod etiam investigationibus ill. Laplace intertextum, sed e principio virium molecularium haud demonstratum videmus.

30.

Theorema art. praec. modificatione quadam eget in casu singulari, quem silentio praeterire non licet. Tacite scilicet supposuimus, superficiem vasis iuxta totum limitem P curvatura continua gaudere, ita ut in quovis huius limitis puncto *unicum* planum superficiem vasis tangens exstet. Si continuitas curvaturae in aliquo puncto singulari lineae P interrumpitur, sive cuspis ibi adsit, sive acies lineam P traiiciens, facile perspicietur, conclusionem nostram hinc non immutari; sed aliter res se habet. si continuitas curvaturae interrupta est in parte finita lineae P. i. e. si superficies vasis per partem finitam lineae P (vel adeo per totam hanc lineam) aciem offert. Tunc scilicet in quovis talis partis puncto bina plana superficiem vasis tangentia aderunt, quorum alterum refertur ad partem liberam superficiei vasis, alterum ad partem T. Retinendo itaque characterem i pro angulo inter planum prius atque planum tangens superficiem U, denotandoque per k angulum inter hoc planum et planum posterius, haud amplius erit $i+k=180^0$, sed maior minorve, prout acies est convexa vel concava. Et dum elementum variationis δW, pro motu virtuali fluidi ultra limitem P redundantis, etiamnum exprimitur per

$$\alpha\alpha \,\mathrm{d}P.\delta e.\sin(5,6).(\cos A - \cos i)$$

elementum illius variationis pro motu virtuali fluidi citra limitem P recedentis iam erit

$$-\alpha\alpha \,\mathrm{d}P.\delta e.\sin(5,6).(\cos A + \cos k)$$

Ne igitur valor ipsius W capax sit variationis negativae, requiritur, ut neque valor ipsius $\cos A - \cos i$ sit negativus, neque valor ipsius $\cos A + \cos k$ positivus, i. e. esse debet

$$\begin{array}{rll} \text{vel} & i = A, & \text{vel } i > A \\ \text{atque vel} & k = 180^0 - A, & \text{vel } k > 180^0 - A \end{array}$$

In statu aequilibrii itaque esse nequit $i+k<180^0$, sive, quod idem est, *in statu aequilibrii limes superficiei fluidi liberae U esse nequit, per extensionem finitam, in acie concava superficiei vasis.* Contra, quoties pars illius limitis coincidit cum acie convexa, ad aequilibrium requiritur et sufficit, ut angulus inter plana fluidum et vas tangentia sit inter limites A et $A+a$ (incl.), extra fluidum, sive inter $180^0 - A$ et $180^0 - A + a$, intra fluidum mensuratus, si angulum inter duo plana superficiem vasis utrimque ab acie tangentia in quovis puncto indefinite per $180^0 - a$ denotamus, quatenus hic angulus a plaga vasis mensuratur.

31.

Constantes $\alpha\alpha$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}$, quarum ratio angulum A determinat, a functionibus f, F pendent, et quodammodo tamquam mensurae intensitatis virium molecularium, quas particulae fluidi et vasis exercent, considerari possunt. Si functiones istae ita comparatae sunt, ut fx, Fx sint in ratione determinata a distantia x independente, puta ut n ad N, manifesto statuere possumus

$\alpha\alpha : \beta\beta = cn : CN$, i. e. constantes $\alpha\alpha$, $\beta\beta$ erunt proportionales attractionibus, quas in eadem distantia exercent duae moleculae quoad volumen aequales, altera fluidi altera vasis. Iam quum angulus A fiat acutus, recto aequalis, obtusus, duobus rectis aequalis, prout $\beta\beta < \frac{1}{2}\alpha\alpha$, $\beta\beta = \frac{1}{2}\alpha\alpha$, $\beta\beta > \frac{1}{2}\alpha\alpha$ sed $< \alpha\alpha$, $\beta\beta = \alpha\alpha$: in sensu istius suppositionis (quae si gratuita est, tamen verisimilitudini non repugnat) dicere oportet, casum primum locum habere, quoties attractio partium fluidi mutua maior sit quam duplum attractionis partium vasis in fluidum; secundum, quoties prior attractio sit duplum posterioris; tertium, quoties prior maior quidem sit posteriori, sed minor eius duplo; denique quartum, quoties ambae attractiones sint aequales. Exemplum casus primi exhibet argentum vivum in vasibus vitreis.

32.

At quantus est valor anguli A in casu eo, ubi attractio vasis maior est quam attractio partium fluidi mutua? Valor imaginarius, quem pro $\beta\beta > \alpha\alpha$ formula $\sin\frac{1}{2}A = \frac{\beta}{\alpha}$ angulo A assignat, iam testatur, suppositionem aliquam in tali casu non admissibilem subesse. Revera quoties $\beta\beta > \alpha\alpha$, suppositio *limitationis* superficiei T cum conditione minimi respectu functionis W consistere nequit. Ubicunque enim limitem posueris, patet, si ultra hunc limitem cutem fluidi tenuissimam expansam concipias, ita ut T capiat augmentum T', et proin U augmentum huic proxime aequale, valorem functionis W assumere mutationem sensibiliter aequalem quantitati negativae $-(2\beta\beta - 2\alpha\alpha)T'$; quinadeo valorem ipsius W tamdiu ulterioris diminutionis capacem manere, donec T' totam superficiem vasis reliquam occupaverit. Valor mutationis $-(2\beta\beta - 2\alpha\alpha)T'$ eo magis exactus erit, quo minor crassities accipiatur, et quatenus tantummodo de valore expressionis W agitur, nihil impedit, quominus crassities usque ad evanescendum diminui concipiatur. Attamen cutis crassitiei evanescentis (probe distinguendae ab insensibili) nihil esset nisi fictio mathematica, figuraque spatii s tali fictioni accommodata revera non differret ab ea, pro qua W in casu $\beta\beta = \alpha\alpha$ valorem minimum acquirit.

Sed paullo aliter res se habet in problemate nostro physico, ubi talis cutis accessoria necessario gaudere debet certa crassitie, utut insensibili, quo aequilibrium consistere possit. Quoties talis pars adest, expressio W, uti in art. 18 docuimus, incompleta est, et denotata ea parte vasis, quam cutis tegit, per T', huiusque crassitie in quovis puncto indefinite per ρ, expressioni Ω adhuc adiiciendi erunt termini

$$\pi c c \int \theta' \rho \,.\, \mathrm{d} T' - \pi c C \int \Theta' \rho \,.\, \mathrm{d} T'$$

adeoque valori ipsius W hi

$$\frac{\pi C}{g} \int \Theta' \rho \,.\, \mathrm{d} T' - \frac{\pi c}{g} \int \theta' \rho \,.\, \mathrm{d} T'$$
$$= \int \mathrm{d} T' . \left(\frac{2 \mathfrak{6}\mathfrak{6}}{\Theta 0} . \Theta' \rho - \frac{2 \alpha \alpha}{\theta 0} . \theta' \rho\right)$$

Quocirca quum valor ipsius W, per accessionem istius cutis, iam acceperit mutationem $(2\mathfrak{6}\mathfrak{6} - 2\alpha\alpha) T'$, mutatio tota, ei valori ipsius W, qui omittendo cutem locum habet, adiicienda, erit

$$-2 \int \mathrm{d} T' . \left[\mathfrak{6}\mathfrak{6}\left(1 - \frac{\Theta' \rho}{\Theta 0}\right) - \alpha\alpha\left(1 - \frac{\theta' \rho}{\theta 0}\right)\right]$$

Haec mutatio propter $\theta' 0 = \theta 0$, $\Theta' 0 = \Theta 0$, nulla esset pro crassitie evanescente; at quum $\theta' \rho$, $\Theta' \rho$, crescente crassitie ρ, citissime decrescant, et iam pro valore insensibili ipsius ρ insensibiles evadant, mutatio ista citissime versus valorem $-(2\mathfrak{6}\mathfrak{6} - 2\alpha\alpha) T'$ converget, atque pro statu aequilibrii fluidi, ne valor expressionis W correctae capax sit ulterioris diminutionis sensibilis, sensibiliter eidem aequalis esse debebit. Ceterum investigatio completa legis, quam crassities ρ sequi debet, profundiores evolutiones requireret, quibus tamen hic non immoramur, quum absque cognitione functionum f, F, a quibus functiones θ', Θ' pendent, nec non propter rationes in art. 34 indicandas, nimis otiosae videri possent. Ad investigationem partis substantialis fluidi, i. e. eius, cuius dimensiones omnes sensibiles sunt, sufficit, pro casu nostro, ubi $\mathfrak{6}\mathfrak{6} > \alpha\alpha$, vas in vicinia limitis partis substantialis *madefactum* concipere, i. e. cute fluida obductam, cuius crassities insensibilis quidem sit, attamen tanta, ut $\theta' \rho$, $\Theta' \rho$ negligi possint. Hoc pacto functio, quae in statu aequilibrii minimum esse debet, erit

$$\int z \,\mathrm{d} s - 2(\mathfrak{6}\mathfrak{6} - \alpha\alpha)(T + T') - \alpha\alpha T + \alpha\alpha U$$

ubi T, U ad solam partem substantialem fluidi referri supponuntur. Patet itaque, variationem huius functionis e mutatione virtuali figurae partis substantialis fluidi oriundam (qualis mutatio aggregatum $T + T'$ non afficit) convenire cum variatione expressionis

$$\int z\,ds - \alpha\alpha T + \alpha\alpha U$$

i. e. eiusdem expressionis, quae minimum esse debet pro casu $\beta\beta = \alpha\alpha$. Hinc colligimus, figuram aequilibrii fluidi in vase, pro quo $\beta\beta > \alpha\alpha$, convenire cum figura aequilibrii eiusdem fluidi in vase, pro quo $\beta\beta = \alpha\alpha$, ea tamen differentia, ut illa in aequilibrio stricto desinere debeat in cutem crassitiei insensibilis. Ceterum ill. Laplace iam monuit, pro illo casu vas cute fluidi insensibilis crassitie obductum aequipollere vasi tali, cuius particulae vim attractivam in fluidum exerceant vi attractivae partium fluidi mutuae aequalem.

Sponte hinc sequitur modificatio, propositionibus art. 18 circa ascensum fluidorum in tubis capillaribus verticalibus adiicienda: quoties scilicet $\beta\beta > \alpha\alpha$, in formulis illic allatis $\alpha\alpha$ loco ipsius $\beta\beta$ substituere oportet.

33.

In casu eo, ubi $\beta\beta < \alpha\alpha$, madefactio vasis per cutem fluidi insensibilis crassitiei locum habere nequit, siquidem lex functionum θ', Θ' ea est, ut valor functionis

$$\alpha\alpha\left(1 - \frac{\theta'\rho}{\theta'0}\right) - \beta\beta\left(1 - \frac{\Theta'\rho}{\Theta'0}\right)$$

pro qua brevitatis caussa scribemus $Q\rho$, continuo crescat, dum ρ a valore 0 versus valorem sensibilem progreditur: manifesto enim pro tali functionis $Q\rho$ indole existentia talis cutis conditioni minimi repugnaret. Sponte illam indolem affert hypothesis, de qua in art. 31 loquuti sumus, puta ubi fx, Fx sunt in ratione determinata ab x independente, quoniam hinc etiam sequitur $\frac{\theta'\rho}{\theta'0} = \frac{\Theta'\rho}{\Theta'0}$, et proin $Q\rho = (\alpha\alpha - \beta\beta)(1 - \frac{\theta'\rho}{\theta'0})$. At si functiones f, F legem diversam sequerentur, haud impossibile esset, ut valore ipsius $\frac{\theta'\rho}{\theta'0}$ rapidius decrescente, quam valore ipsius $\frac{\Theta'\rho}{\Theta'0}$, functio $Q\rho$. intra ambitum valorum insensibilium ipsius ρ, primo fieret negativa, et postquam attigisset valorem suum minimum (i. e. extremum negativum) rursus ascenderet per valorem 0 versus limitem suum positivum $\alpha\alpha - \beta\beta$. In tali casu aequilibrium utique postularet cutem insensibilem, cuius crassities generaliter loquendo tanta esse deberet, ut $Q\rho$ haud sensibiliter discrepet a valore suo minimo. Qui si per $-\beta'\beta'$ denotatur, erit $\beta'\beta' < \beta\beta$; figura autem partis substantialis fluidi perinde determinabitur, ac si esset in vase, cuius respectu loco quantitatis $\beta\beta$ substituere oportet $\beta'\beta'$, i. e. angulus inter planum superficiem fluidi liberam in confiniis partis substantialis tangens atque parietem vasis erit $= 2\,\mathrm{arc.\,sin}\,\frac{\beta'}{\alpha}$. Sed quum valde dubium sit, an talis casus in rerum natura exstet, superfluum videtur, diutius ei immorari.

34.

Alienum foret ab instituto nostro praesente, a principiis generalibus hic stabilitis ad phaenomena specialia descendere, praesertim quod illorum principiorum essentia quadrat cum theoria ea, per quam ill. LAPLACE aequali arte et successu permulta phaenomena in aequilibrio fluidorum conspicua iam explicavit. Vastus utique superest campus, largam messem novam pollicens: sed haec curis futuris reservata maneat. Contra e re erit, quasdam annotationes adiicere, quae vel novam lucem huic argumento affundere, vel interpretationem erroneam arcere poterunt.

I. Theoria nostra non arrogat sibi determinationem figurae aequilibrii mathematice exactam, sed acquiescit in determinatione figurae talis, a qua figura aequilibrii vera differre nequit quantitate sensibili. Errares, si hoc alicui imperfectioni theoriae tribueres, quae ex asse praestitit, quantum praestare possibile est, quamdiu lex attractionis molecularis ignoratur. In statu aequilibrii functio Ω exacte maximum esse debet, adeoque functio

$$\frac{2\pi c s \psi 0}{g} - \frac{\Omega}{gc}$$

minimum; haec autem, pro indole attractionis molecularis, non quidem exacte aequalis est functioni W, attamen insensibiliter tantum ab ea differt. Figura igitur, pro qua W fit minimum, non est exacta figura aequilibrii, sed differentia esse debet insensibilis, quatenus quidem quaelibet mutatio sensibilis istius figurae valorem sensibiliter maiorem functionis W produceret. Manifesto hinc non excluditur differentia sensibilis in curvatura superficiei, dummodo limitetur ad partem superficiei insensibilem: quapropter in figura aequilibrii exacta angulum constantem supra per A denotatum haud amplius considerare licet tamquam inclinationem superficiei fluidi ad parietem vasis in ipso contactu, sed tantummodo in distantia immensurabili a vase, sive, ut ill. LAPLACE recte iam monuit, inclinatio in limite sphaerae sensibilis attractionis vasis cum valore ipsius A sensibiliter coincidet.

II. Probe distinguere oportet figuram aequilibrii a figura quietis. Quoties fluidum est in statu aequilibrii, certo in eo perseverare debebit. At quoties figura fluidi aliquantum a figura aequilibrii differt, nihilominus accidere potest, ut fluidum vel in quiete permaneat, vel, si moveatur, motum iam amittat, antequam statum aequilibrii attigerit, perinde ut e. g. cubus plano horizontali tantum impositus in aequilibrio versatur, sed etiam supra planum inclinatum quiescere potest, frictione motum impediente. Ita fluidum talem statum occupans, pro quo W habet valorem minimum, certo quiescet: sed quoties est in statu ab illo diverso, puta ubi W diminutionis capax est, ex hoc statu in statum aequilibrii eatenus tantum transibit, quatenus frictio non impediverit. Hocce autem respectu duae conditiones aequilibrii essentialiter diversae sunt. Scilicet aequatio fundamentalis prior (art. 28) independens est a mutabilitate limitis P, i. e. ad conditionem minimi tunc quoque necessaria, ubi hic limes invariabilis supponitur: quapropter, quatenus quidem fluidum perfecta fluiditate gaudet, ut pars una supra alteram libere gliscere possit, dum vel minima vis motum postulat, fluidum necessario illi conditioni se accommodabit. Longe vero alia est ratio principii secundi (art. 29), quod essentialiter pendet a perfecta limitis P mobilitate in superficie vasis. Conditio minimi in valore ipsius W utique postulat aequationem $i = A$: si vero, postquam superficies fluidi priori quidem principio se accommodavit, angulus i nondum assequutus est valorem normalem, neque adeo W valorem absolute minimum, transitus in statum aequilibrii perfecti fieri nequit absque translocatione limitis P, sive absque motu fluidi in contactu cum vase, quali motui utique obstare potest frictio. Hinc manifestum est, cur in experimentis circa eadem corpora institutis tantas differentias in valore anguli i offendamus. Perinde in casu eo, ubi $\mathfrak{b}\mathfrak{b} > \alpha\alpha$, fluidum in vase, cuius parietes iam sunt madefacti, utique se componet ad legem aequilibrii, secundum quam pro parte substantiali fluidi esse debet $i = 180^0$: sed in vase, cuius parietes extra fluidum etiamnum sunt sicci, fluidum a statu non aequilibrato proficiscens parietesque vasis siccas invadens iam ad quietem pervenire poterit, antequam angulus i valorem 180^0 attigit. Hinc simul elucet ratio, cur phaenomena capillaria fluidorum talium, quae madefactioni non adversantur, in tubis siccis tantas irregularitates offerant, ascensumque saepissime longe minorem, quam in tubis iam humectatis, ubi consensum pulcherrimum cum theoria semper aspicimus.

III. Ratio constantium α, β e phaenomenis derivari nequit, quoties β est maior quam α: figura enim eiusdem fluidi in vasibus forma aequalibus materia diversis pro isto casu non differt nisi respectu cutis immensurabilis vás madefacientis. Quoties autem β minor est quam α, determinatio rationis inter has constantes possibilis quidem est adiumento anguli i, sed propter rationes modo allatas magnam praecisionem vix feret. Pro mercurio in vasibus vitreis ill. LAPLACE statuit angulum $i = 43^0\,12'$.

Longe maioris praecisionis capax est determinatio constantis α, praesertim si vasibus madefactionem admittentibus uti licet. Pro aqua sub temperatura 8,5 graduum thermometri centesimalis statuere oportet secundum experimenta ab ill. LAPLACE citata *)

$$\alpha\alpha = 7{,}5675 \text{ millim. quadr., sive}$$
$$\alpha = 2{,}7509 \text{ millim.}$$

Pro spiritu vini, cuius pondus specificum $= 0{,}81961$, sub eadem temperatura

$$\alpha\alpha = 3{,}0441 \text{ millim. quadr., sive}$$
$$\alpha = 1{,}7447 \text{ millim.}$$

Pro oleo terebinthino sub temperatura 8 graduum

$$\alpha\alpha = 3{,}305 \text{ millim. quadr., sive}$$
$$\alpha = 1{,}818 \text{ millim.}$$

Pro mercurio, sub temperatura 10 graduum, statuere licet, donec experimenta nova maiorem praecisionem suppeditaverint,

$$\alpha\alpha = 3{,}25 \text{ millim. quadr., sive}$$
$$\alpha = 1{,}803 \text{ millim.}$$

Ceterum verisimile est, temperaturam eatenus tantum valorem constantis $\alpha\alpha$ afficere, quatenus densitas inde pendet, cui itaque in hac hypothesi valor ipsius $\alpha\alpha$ proportionalis erit.

---

*) Observare convenit, quantitatem ab ill. LAPLACE per H denotatam convenire cum nostro $\pi c \theta_0$, adeoque α apud illum auctorem idem denotare, quod in signis nostris est $\frac{g}{\pi c \theta_0}$ sive $\frac{1}{2\alpha\alpha}$.

Valores isti conclusi sunt ex ascensione vel depressione fluidorum in tubis capillaribus: attamen valde difficile est, horum diametros exacte mensurare, difficilius, de forma circulari sectionis transversalis certitudinem acquirere. Longe maiorem praecisionem pollicentur experimenta circa diametros et volumina magnarum guttarum mercurii tabulae horizontali vel curvaturae perparvae notae insidentium, qualia iam instituerunt physici SEGNER et GAY-LUSSAC: nec non, pro liquidis vasa vitrea madefacientibus, experimenta circa dimensiones bullarum magnarum aeris in vasibus superne operculo madefacto plano horizontali vel parum et secundum radium notum curvato clausis, ad quae instituenda physicos invitamus.

IV. Ne limites huic commentationi praescriptos excederemus, applicationem principiorum nostrorum generalium hocce quidem loco ad casum simplicissimum restringere oportuit, ubi liquidum unicum in vase firmo consideratur. Nihil vero obstat, quominus theoriae summa generalitas concilietur, ita ut etiam problema plurium liquidorum in eodem vase, nec non casum eum amplectatur, ubi insuper corpora rigida, vel omnino vel ex parte libera, fluido immersa sunt. Sed harum quaestionum uberiorem expositionem ad aliam occasionem nobis reservare debemus.

INTENSITAS

VIS MAGNETICAE TERRESTRIS

AD MENSURAM ACSOLUTAM REVOCATA.

COMMENTATIO

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS

IN CONSESSU SOCIETATIS MDCCCXXXII. DEC. XV. RECITATA.

Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores. Vol. VIII.
Gottingae MDCCCXLI.
