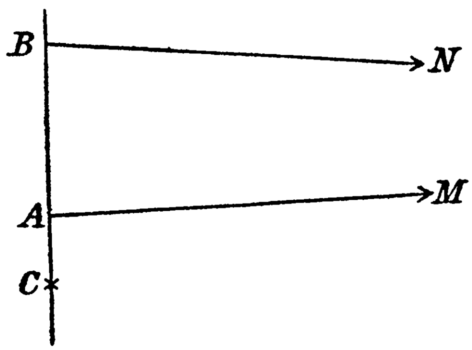
[ZUR THEORIE DER PARALLELLINIEN.]

[1.]

PARALLELLINIEN.

1. Wenn die Geraden $AM\ldots$, $BN\ldots$ einander nicht schneiden, jede durch A zwischen $AM\ldots$ und $AB\ldots$ gelegte Gerade hingegen die $BN\ldots$ schneidet: so heisst $AM\ldots$ mit $BN\ldots$ parallel.

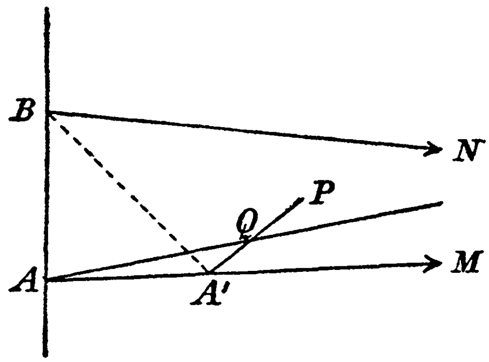


2. Geht eine Gerade beständig durch den Punkt A, und gelangt durch Drehung aus der Lage $AB\ldots$ auf der Seite, wo BN liegt, zuletzt in die Lage $AC\ldots$, die der ersten entgegengesetzt ist, so ist sie anfangs schneidend, zuletzt nicht schneidend, also muss es gewiss Eine und nur Eine Lage geben, die die Scheidung der schneidenden und nicht schneidenden [Geraden] ist, und zwar wird diess die erste nicht schneidende sein, also nach unserer Definition die Parallele $AM\ldots$, da es offenbar keine letzte schneidende geben kann.

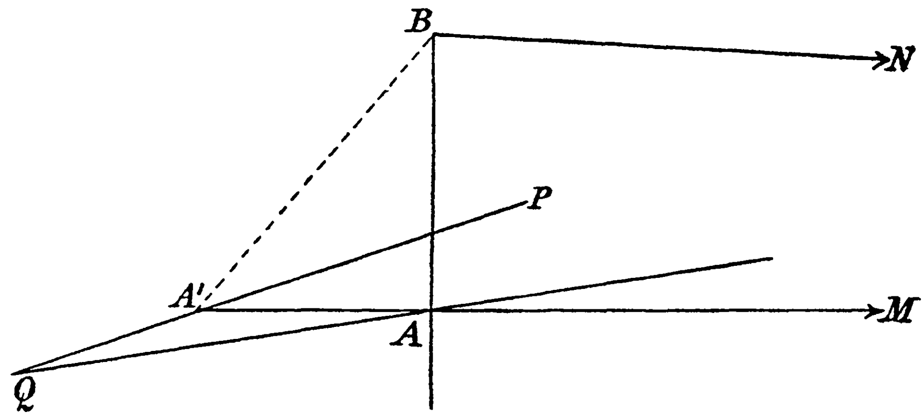
3. In unserer Definition sind in beiden Linien bestimmte Anfangspunkte A, B vorausgesetzt. Man sieht aber leicht, dass der Parallelismus davon unabhängig ist, in so fern nur der Sinn der Richtungen, nach welchen die Linien als unbegrenzt betrachtet werden, derselbe bleibt. Nimmt man nemlich statt B einen andern Anfangspunkt B', sei es auf der Linie $BN\ldots$, oder wo immer

auf ihrer Fortsetzung rückwärts, so ist von selbst klar, dass diess keinen Unterschied macht.

Nimmt man dagegen anstatt A einen andern Anfangspunkt A' auf der Linie $AM\ldots$, zieht durch A' zwischen $A'M\ldots$ und $A'B$ die Gerade $A'P$ in beliebiger Richtung, und durch einen Punkt Q zwischen A' und P die Gerade $AQ\ldots$, so wird solche (Definition) die $BN\ldots$ schneiden, woraus von selbst klar ist, dass auch $QP\ldots$ die $BN\ldots$ schneiden wird.



Nimmt man aber A' auf der rückwärts fortgesetzten $AM\ldots$ und zieht



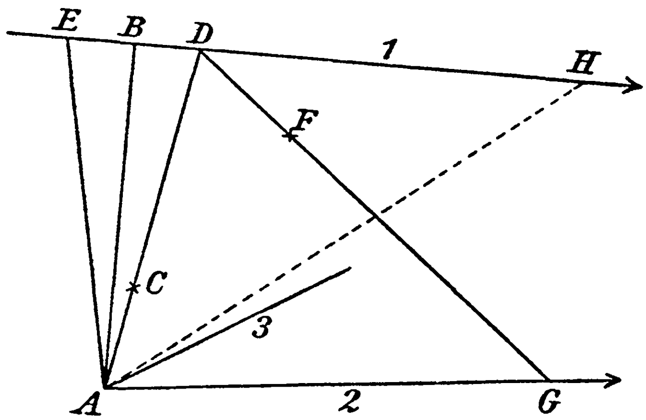
durch A' zwischen $A'M\ldots$ und $A'B\ldots$ in beliebiger Richtung die Gerade $A'P$, verlängert solche rückwärts und nimmt darauf einen beliebigen Punkt Q, so wird $QA\ldots$ die $BN\ldots$ schneiden (Definition), z. B. in R. $A'P$ ist also in der geschlossenen Figur $A'ARB$ und wird daher eine der vier Seiten $A'A$, AR, RB, BA' schneiden, offenbar muss diess aber die dritte RB sein, daher also auch $A'M\ldots$ mit $BN\ldots$ parallel ist.

4. Nicht ganz so evident ist die Reciprocität des Parallelismus. Es sei die Gerade 1 parallel mit 2. Von einem beliebigen Punkte in 2, A, fälle man ein Perpendikel AB auf 1. Es sei 3 eine beliebige Gerade durch A zwischen AB und 2, und AC eine Gerade zwischen denselben Grenzen, so dass der Winkel

$$BAC = \tfrac{1}{2}(3,2).$$

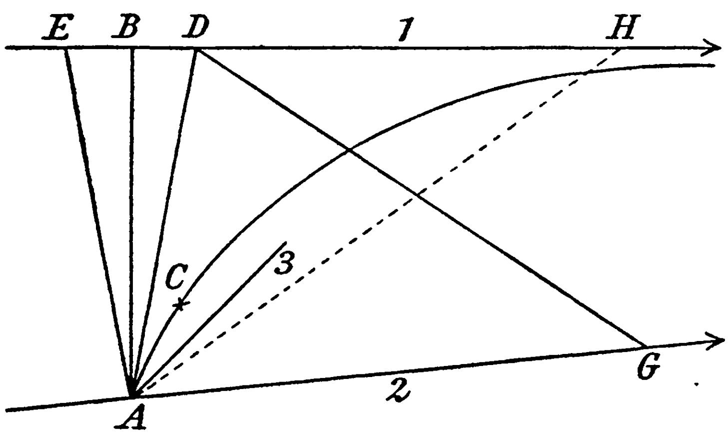
Wir haben nun zwei Fälle zu unterscheiden.

I. Schneidet $AC\ldots$ die Linie 1 in D, so mache man $BE = BD$, indem



E in 1 auf der entgegengesetzten Seite von D genommen wird. Durch D ziehe man zwischen 1 und DA die Gerade $DF\ldots$, so dass $ADF = AED$. Diese Gerade wird also 2 in G schneiden. Man mache [auf 1] $EH = DG$ und verbinde AH. Die Dreiecke ABD, ABE werden congruent sein, also $AE = AD$; folglich auch die Dreiecke ADG, AEH congruent, also $EAH = DAG$. [Mithin ist] $GAH = DAE = (2,3)$, [d. h.] AH ist mit 3 identisch oder 3 schneidet 1 in H und folglich ist, weil 3 jede beliebige zwischen 2 und AB liegende Gerade bedeuten kann, 2 mit 1 parallel.

II. Schneidet AC die 1 nicht, so sei D ein beliebiger Punkt auf 1. Es

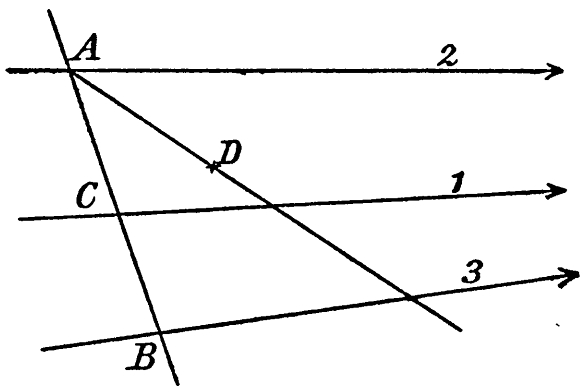


gelten dann dieselben Schlüsse wie vorher bis zu dem Resultat $GAH = DAE$.

Allein in diesem Fall ist $DAB < CAB$ oder $DAE < (2,3)$. Also $(2,3) > GAH$ und 3 wird folglich in der geschlossenen Figur AHD liegen, also DH schneiden. Das übrige wie in I.

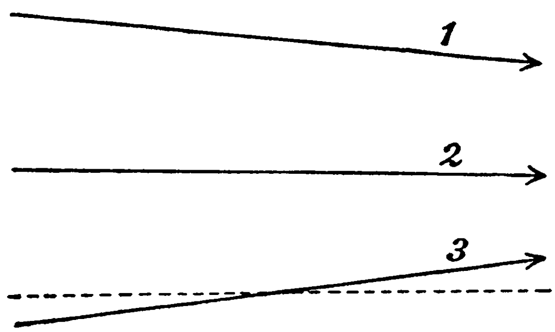
5. *Lehrsatz.* Ist die Gerade 1 sowohl mit 2 als mit 3 parallel, so ist auch 2 mit 3 parallel.

Beweis. Erster Fall, wenn 1 zwischen 2 und 3 liegt. Es seien A, B



Punkte auf 2 und 3 und AB schneide die 1 in C. Durch A ziehe man eine beliebige Gerade $AD\ldots$ zwischen 2 und AB, welche also 1 schneiden wird; weiter fortgesetzt wird sie also auch 3 schneiden; da diess von jeder $AD\ldots$ gilt, so ist 2 mit 3 parallel.

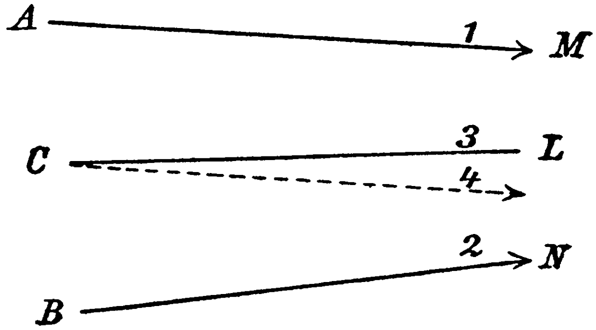
Zweiter Fall, wenn 1 ausserhalb 2 und 3 liegt. Es liege 2 zwischen 1



und 3. Wäre 2 mit 3 nicht parallel, so lässt sich durch einen beliebigen Punkt von 3 eine von 3 verschiedene Gerade ziehen, die mit 2 parallel ist. Diese ist also vermöge des ersten Falls auch mit 1 parallel, welches absurd ist. (Lehrsatz oben nachzusehen.)

6. *Lehrsatz.* Eine Gerade $CL\ldots$ oder 3, die sich zwischen zwei Parallelen $AM\ldots$ oder 1, $BN\ldots$ oder 2 befindet, und keine von beiden schneidet, ist mit denselben parallel.

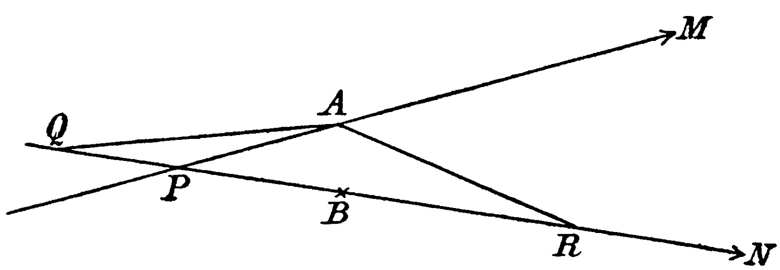
Beweis. Man ziehe durch einen beliebigen Punkt C in der Geraden 3



eine Parallele 4 mit 2; wäre diese von 3 verschieden, so müsste 3 entweder zwischen 1 und 4 oder zwischen 2 und 4 fallen; in jenem Fall würde sie (Definition der Parallelen) die 1, im andern die 2 schneiden müssen, gegen die Voraussetzung.

7. *Lehrsatz.* Zwei Parallellinien, rückwärts fortgesetzt, können einander auf dieser Seite nicht schneiden.

Beweis. Gesetzt $AM\ldots$, $BN\ldots$ schnitten einander auf ihren Fortsetzungen rückwärts in P, so sei Q ein beliebiger Punkt in der noch über P hinaus rückwärts geführten Fortsetzung von $BN\ldots$. Man verbinde QA, welche Gerade noch weiter fortgesetzt PN in einem Punkt R schneiden wird. Wir haben also durch die Punkte Q, R zwei verschiedene gerade Linien, welches absurd ist.

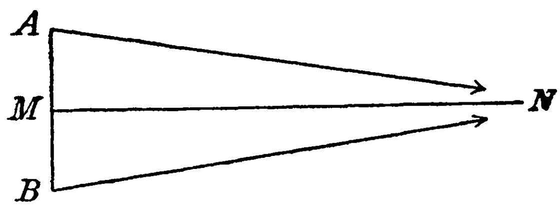


[2.]

[CORRESPONDIRENDE PUNKTE IN PARALLELLINIEN.]

1. *Definition.* Correspondirende Punkte in Parallellinien, auf den gleichen Winkeln an der Verbindungslinie beruhend.

2. Sind A, B correspondirende Punkte und M in der Mitte von AB,



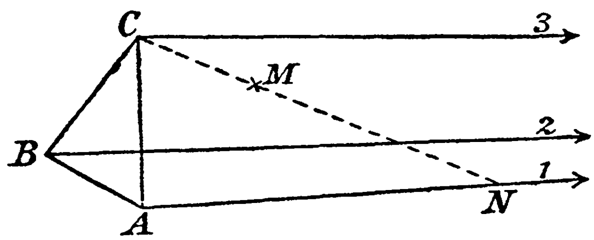
MN senkrecht auf AB, so wird 1) MN mit beiden parallel sein, 2) jeder Punkt, welcher mit A auf Einer Seite von MN liegt, wird dem A näher sein als [dem] B.

. . . .

4. *Theorem.* Sind A, B correspondirende Punkte auf den Parallelen 1, 2 und A', B' desgleichen, so ist $AA' = BB'$ und vice versa.

5. *Theorem.* Sind A, B, C Punkte auf den Parallelen 1, 2, 3 und A mit B, B mit C correspondirend; so ist auch A mit C correspondirend.

Beweis. Im entgegengesetzten Fall sei der Winkel $C > A$; man nehme



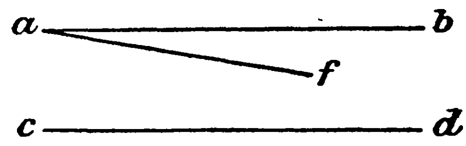
$ACM = A$, so wird CM die AN in N schneiden. Man hat also $AN = CN$; allein vermöge *Th.Th.* ist $AN < BN$ und $BN < CN$, welches also ein Widerspruch ist.

Setzte man voraus, dass $A = B$; $A = C$, und wäre B nicht $= C$, so sei $B = C'$, woraus $A = C'$ folgen würde.

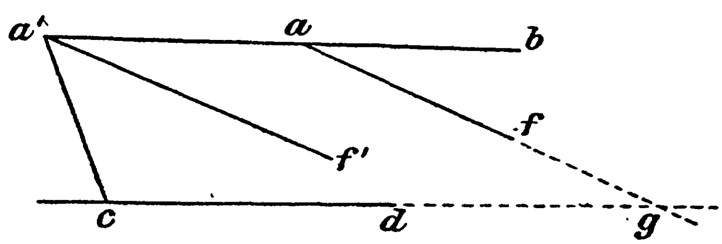
[3.]

PARALLELISMUS.

1. $ab*$ ist mit $cd*$ parallel, wenn
   1) beide in einer Ebene sind,
   2) einander nicht schneiden,
   3) jede Linie $af*$ innerhalb des Raumes $*bacd*$ die $cd*$ schneidet.

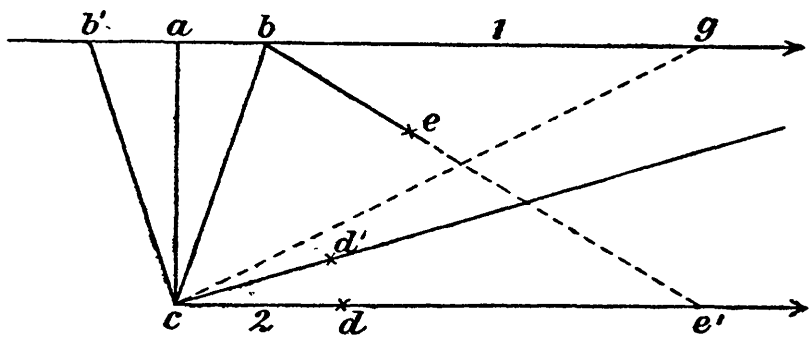


2. Der Parallelismus ist unabhängig von dem Anfang der Linie $cd*$.
3. Der Parallelismus ist unabhängig von dem Anfang der Linie $ab*$.
   I. Es ist auch $a'b*$ parallel mit $cd*$, wenn a' auf $ab*$.
   Beweis. $af*$ schneidet $cd*$; so wird auch $a'f*$ schneiden.
   II. [Es ist auch $a'b*$ parallel mit $cd*$,] wenn a' ausserhalb $ab*$.



Man mache $baf = ba'f'$; es schneide $af*$ die $cd*$ in g, so wird $a'f'$ die $af*$ nicht schneiden, also cg.

4. Es ist verstattet $ab*$ und $cd*$ zu vertauschen.



Es sei 1 und 2 parallel. Wäre nun nicht 2 mit 1 parallel, so sei cd' mit 1 parallel. Es sei ca senkrecht auf 1 und $acb = acb' = \frac{1}{2} dcd'$. Ferner

$\sphericalangle cbe = cb'b$. Es wird also be die 2 schneiden, in e'. Macht man nun $b'g = be'$, so wird cg und cd' mit cb' einerlei Winkel machen. Welches absurd ist.

5. Wenn 1 mit 2 und 1 mit 3 parallel, so ist auch 2 mit 3 parallel.

6. Was correspondirende Punkte auf zwei Parallelen sind.

7. Aequidistanz der correspondirenden Punkte.

8. Der Punkt auf einer dritten Parallelen correspondirt correspondirenden Punkten auf den beiden ersten.

9. Trope ist die L[inie, die von correspondirenden Punkten gebildet wird, wenn man alle Parallelen zu einer Geraden betrachtet.]

BEMERKUNG.

In dem Briefe an SCHUMACHER vom 17. Mai 1831 (S. 213 dieses Bandes) sagt GAUSS, dass er von seinen Meditationen über die Theorie der Parallellinien, die schon gegen 40 Jahr alt seien, früher nie etwas aufgeschrieben habe, dass er jedoch vor einigen Wochen begonnen habe, einiges aufzuschreiben; auch in dem Briefe an BOLYAI vom 6. März 1832 erwähnt GAUSS solche Aufzeichnungen. Man wird daher nicht fehlgehen, wenn man annimmt, dass die vorstehenden nicht datirten Notizen, die sich auf einzelnen Zetteln befinden, aus dem Jahre 1831 stammen.

Die Figuren in der Notiz [1], sowie die erste Figur in der Notiz [3] sind dem Texte hinzugefügt worden.

STÄCKEL.