

Werk

Titel: Arithmetik und Algebra : Nachträge zu Band 1 - 3

Jahr: 1900

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN236010751

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN236010751>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=236010751>

LOG Id: LOG_0082

LOG Titel: GEOMETRIA SITUS

LOG Typ: chapter

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235957348

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235957348>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235957348>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

GEOMETRIA SITUS.

NACHTRÄGE ZU BAND IV.

NACHLASS.

[I.]

[ZUR GEOMETRIA SITUS.]

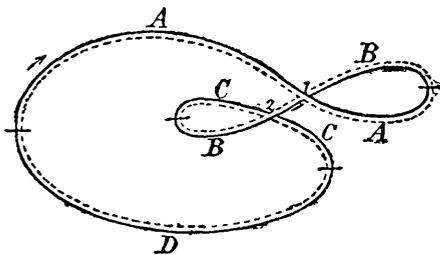
[1.]

THEOREM AUS DER GEOMETRIA SITUS.

Es sei die Amplitudo einer ganzen in sich selbst zurückkehrenden Curve $= \pm n \cdot 360^\circ$. Sie hat wenigstens Knoten

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \text{für } n = 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7. \end{array}$$

Der Beweis scheint nicht leicht zu sein; wahrscheinlich wird dazu dienen, dass man die Curve ihrem Laufe nach in Theile abtheilt, deren Grenzen die Punkte sind, in denen ihre Richtung $= 90^\circ(2n+1)$, dann eine unendliche gerade Linie, deren Richtung $= 90^\circ$, in der Richtung 0° durch die Fläche schiebt und die Folge der Stücke gehörig beachtet. So ist für diese Curve das Schema folgendes:



<i>A</i>	1	—
<i>B</i>	0	<i>AB</i>
<i>C</i>	1	<i>DCAB</i>
<i>D</i>	2	<i>DCBA</i>
<i>A</i>	3	<i>DBCA</i>
etc.		<i>DA</i>
		—

[2.]

Der Beweis ist doch sehr leicht. Man nenne n die Anzahl der Knoten und bezeichne sie in der Folge, wie man sie trifft, indem man die Curve in einem angenommenen Sinne der Bewegung durchläuft, durch $1, 2, 3, \dots, n$. Da bei dieser Bewegung jeder Knoten zweimal getroffen wird, so sei \mathcal{Q} die aus $2n$ Gliedern bestehende Reihe dieser Zahlen, indem man das Zeichen $+$ beischreibt, so oft man auf die innere (rechte) Seite des durchschnittenen Arms kommt, sonst $-$. Man zähle die $+$ und $-$ Zeichen bloss da zusammen, wo die Zahlen zum erstenmal vorkommen und habe so $+$ α -, $-$ β mal. Indem man nun die Charactere des Theils der Curve, der zunächst vor dem ersten Knoten liegt, durch γ, γ' ausdrückt, ist die Amplitudo der ganzen Curve

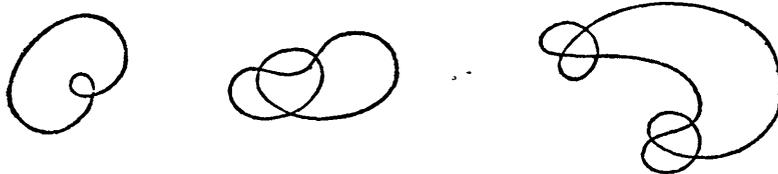
$$= (\gamma + \gamma' + \alpha - \beta) 360^\circ.$$

Es finden jedoch bei diesen Arrangements einige Bedingungen statt, so dass nicht jedes aus der Luft gegriffene Arrangement möglich ist; jeder Knoten muss einmal an einer geraden, einmal an einer ungeraden Stelle vorkommen; zwischen den beiden Plätzen muss die Summe aller $+$ α -, $-$ β Null werden. Diess reicht aber nicht zu, um die Unmöglichkeit des Schemas

a	b	c	b	a	b	c	b
1	2	3	1	4	3	2	4
+	-	+	-	+	-	+	-

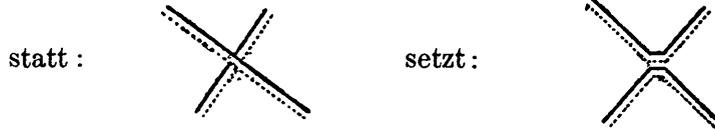
zu zeigen; hier müssen die Zeichen von 2 und 3 nothwendig geändert werden*).

*) 1844 Dec. 30 fand ich, dass die Anordnung der Zahlen (mittelste Reihe) zureicht, um auch die zugehörigen Schnittcharacteres ($+$ und $-$ Zeichen in der untersten Reihe) und die Verknüpfung der Tracte (oberste Reihe) daraus abzuleiten, dass aber jene Anordnung selbst nicht willkürlich ist, sondern gewissen Bedingungen unterliegt, deren vollständige Ermittlung Gegenstand neuer Arbeiten sein wird. Es leidet jedoch auch der obige Satz Einschränkungen, z. B.



[3.]

Interessant wird es in Beziehung auf diesen Gegenstand sein, zu untersuchen 1) die Resultate des Durchschneidens der Knoten, in so fern man



wodurch dann lauter getrennte Grenzlinien entstehen. Zählt man dann für jede Grenzlinie, die [die] +Seite innen hat, +1, und für jede, die die -Seite innen hat, -1, so ist das Aggregat $\times 360^\circ$ die ganze Amplitudo.

Vielleicht ist es fruchtbar, die Sache gleich anfangs noch allgemeiner anzugreifen und mehrere Linien zugleich zu betrachten, deren jede in sich selbst zurückkehrt, sich selbst und die andern schneidet.

[4.]

Das Vorhergehende ist richtig, verträgt aber grosse Vereinfachung. Indem man die Linie durch die erwähnte Schneidung der Knoten in eine Anzahl in sich zurückkehrender Linien theilt, die weder sich selbst noch einander schneiden, braucht man nur anzugeben, gegen wie viele (μ) Linien der unendliche Raum auf der -Seite und gegen wie viele (ν) auf der +Seite liegt; man hat dann die Amplitudo

$$= (\mu - \nu) 360^\circ.$$

Die Angabe ist aber leicht; da sogar die Relation jedes Punkts angegeben werden kann. Es seien nemlich die Linien a, b, c, d etc. und

$$\frac{\partial (a)}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial (a)}{\partial b} = \pm 1,$$

je nachdem a auf der + oder -Seite von b liegt, und so die übrigen. Man hat dann, wenn in der ursprünglichen Figur der Knoten vorkommt:

$$\begin{aligned} x & \quad y \\ & \quad n \\ & \quad \varepsilon, \\ & \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \varepsilon, \\ (y) - (x) & = \varepsilon y + \varepsilon x, \end{aligned}$$

1	$+a = -b^{\text{VIII}}$	12	$-b^{\text{V}} = +a^{\text{VII}}$
	$+a' = -b$		$+a^{\text{VII}} = -b^{\text{VI}}$
2	$+a'' = -b'$	13	$+a = -b^{\text{VII}}$
	$-a'' = +c'$		$+b^{\text{VII}} = -d$
3	$-a''' = +c$	14	$+b^{\text{VIII}} = -d'$
	$+c = -a^{\text{V}}$		$-d' = +b''$
4	$+c' = -a^{\text{VI}}$	15	$-d'' = +b'''$
	$+a^{\text{VI}} = -b^{\text{IV}}$		$-b''' = +a^{\text{IV}}$
5	$+a^{\text{VII}} = -b^{\text{V}}$	16	$-b^{\text{IV}} = +a^{\text{V}}$
	$+b^{\text{V}} = -d''$		$-a^{\text{V}} = +c$
6	$+b^{\text{VI}} = -d$	17	$-a^{\text{VI}} = +c'$
	$-d = +b^{\text{VII}}$		$+c' = -a''$
7	$-d' = +b^{\text{VIII}}$	18	$+c = -a'''$
	$-b^{\text{VIII}} = +a$		$+a''' = -b'$
8	$-b = +a'$	19	$+a^{\text{IV}} = -b''$
	$+a' = -b$		$+b'' = -d'$
9	$+a'' = -b'$	20	$+b''' = -d''$
	$-b' = +a'''$		$-d'' = +b^{\text{V}}$
10	$-b'' = +a^{\text{IV}}$	21	$-d = +b^{\text{VI}}$
	$+a^{\text{IV}} = -b'''$		$-b^{\text{VI}} = +a^{\text{VII}}$
11	$+a^{\text{V}} = -b^{\text{IV}}$	22	$-b^{\text{VII}} = +a$
	$-b^{\text{IV}} = +a^{\text{VI}}$		

1.8	+	a	12.5	-	b^{IV}
2.9	-	b	13.22	+	a^{VII}
3.18	-	a''	14.7	+	b^{VII}
4.17	+	c	15.20	-	d'
5.12	+	a^{VI}	16.11	-	b'''
6.21	+	b^V	17.4	-	a^V
7.14	-	d	18.3	+	c'
8.1	-	b^{VIII}	19.10	+	a'''
9.2	+	a'	20.15	+	b''
10.19	-	b'	21.6	-	d''
11.16	+	a^{IV}	22.13	-	b^{VI}

$$(a) = . - b + c - d$$

$$(b) = + a . + c - d$$

$$(c) = - a - b . - d$$

$$(d) = + a + b + c .$$

[6.]

Der Beweis der oben mitgetheilten Regel beruhet auf einer andern Vertheilung der Figur in mehrere geschlossene Figuren, von denen keine sich selbst schneidet, obwohl eine die andere schneiden kann; diess sind nemlich diejenigen, die sich nach und nach bilden, während die Linie erst beschrieben wird. Man hebe von den Intersectionen bloss diejenige Hälfte aus, wo sie zum zweitenmale geschehen, in unserm Beispiel

8.1	—
9.2	+
12.5	—
14.7	+
16.11	—
17.4	—
18.3	+
19.10	+
20.15	+
21.6	—
22.13	—

Es ist klar, dass, indem man von einem Punkte vor (1) ausgeht und in der Curve die Punkte 1, 2, 3 etc. durchläuft, sich zum erstenmale bei dem Schnitt 8 eine Figur bildet, die wir a nennen wollen, diese geht von 1 bis 8; offenbar liegen der Theil der ganzen Linie zunächst vor 1 und [der Theil] nach 8 auf der —Seite von a .

Indem man so weiter fortgeht, bildet sich eine neue zusammenhängende Curve, die vom Anfangspunkt bis 1 (dann den vorigen Weg 2, 3 etc. verlassend) auf 9, 10, 11 etc. fortgeht; bei 9 gelangt man auf die +Seite von a , bei 12 auf die —, bei 14 auf die +Seite von a ; bei 16 hingegen trifft die Curve sich selbst und schliesst eine zweite Figur, die von 11 durch 12, 13, 14, 15 bis 16 geht, diese heisse b ; offenbar liegt der Theil der Curve zunächst vor 1, dann das ganze Stück von 8 bis 11, endlich der zunächst an 16 grenzende Theil auf der —Seite von b . Nachdem jetzt auch b abgesondert ist, trifft die Curve in 17 wieder a und kommt auf die —Seite, in 18 abermals, indem sie auf die +Seite gelangt; in 19 schliesst sich die 3^{te} Figur (da 10 noch nicht in einem ausgeschlossenen Theil liegt), welche c heissen soll und von 10 bis 11 = 16, dann von 16 bis 19 geht, und wenn diese wieder abgesondert wird, liegt das übrig bleibende Stück so wie das nächst folgende auf der +Seite von c ; bei 20 gelangt man auf die +Seite von b , bei 21 auf die —Seite von a , bei 22 auf die —Seite von b und, indem man auf den Anfangspunkt (vor 1) zurückkommt, schliesst sich die 4^{te} Figur, die d heisst.

Die Lage gegen die schon beschriebenen Curven ergibt sich also

Anfangspunkt			
		$-a$	$-b + c$
8		$-a$	
9		$+a$	
12		$-a$	
14		$+a$	
16		$+a$	$-b$
17		$-a$	$-b$
18		$+a$	$-b$
19		$+a$	$-b + c$
20		$+a$	$+b + c$
21		$-a$	$+b + c$
22		$-a$	$-b + c$
Anfangspunkt			

Man sieht aus der vorigen Analyse, dass das letzte Zeichen, welches in diesem Tableau jeder Figur entspricht, nothwendig dasselbe sein muss, wie das erste, oder, dass die Zeichen $+ -$, die bei den einzelnen Intersectionen vorkommen, wenn man diejenigen abrechnet, die bei den einzelnen Bildungspunkten der Figuren vorkommen, einander destruiren; die Summe aller ist folglich dieselbe, wie die der letztern allein, und zugleich einerlei mit der Summe der Zeichen in dem Character des Anfangspunktes gegen die einzelnen Figuren a, b, c , d. i. alle, wenn man die erst zuletzt gebildete d nicht mitzählt.

Der Character auf der einen Seite der Figur d gegen die Einzelnen Figuren werde durch $\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d$ ausgedrückt und [man] setze $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \sigma$, der absolute Character jenes Platzes hingegen sei $= \chi$; dann ist die ganze Seitenbiegung

$$= -\sigma \cdot 360^\circ - \frac{F - \chi S}{S} \cdot 720^\circ,$$

wo F die Fläche der ganzen Figur, S die der ganzen Fläche bedeutet,

$$= (2\chi - \sigma) \cdot 360^\circ - \frac{F}{S} \cdot 720^\circ.$$

Diese Vorschrift begreift die oben gegebene unter sich, da der unendliche Raum in der Ebene den Character 0 hat, wodurch $\frac{F}{S} = 0$ wird; oben wurden die Zeichen da gezählt, wo die Intersectionsunkte zum erstenmale getroffen wurden, und wo sie den hier gebrauchten entgegengesetzt sind.

[7.]

EINE ANDERE ART, DIESE GEGENSTÄNDE ZU BEHANDELN.

Es sei S die ganze Curve, und s ein unbestimmtes Stück. Im Anfangspunkte ziehe man eine Tangente und bezeichne durch $(0, s)$ den Winkel, welchen die gerade Linie vom Anfangspunkte zum Endpunkte des Stücks s macht. Offenbar wird sich $(0, s)$ von $s = 0$ an so lange nach dem Gesetz der Stetigkeit ändern, als die Curve nicht wieder in den Anfangspunkt zurückgekommen ist; wir nehmen an, dass diess nicht eher geschehe, als bis $s = S$ geworden ist, und der letzte Werth, ehe s diesen Werth erreicht hat, wird sein

$$(0, s) = \pm 180^\circ,$$

in so fern man die Winkel nach der innern oder äussern Seite der Linie wachsen lässt.

Indem man s als constant ansieht, ziehe man von jedem Punkt der Linie, die als Endpunkt des kleinern Stücks s' angesehen wird, eine gerade Linie zum Endpunkt des Stücks s und nenne deren Neigung gegen die erste Tangente (s', s) . So lange der Endpunkt von s' mit dem von s nicht zusammenfällt, wird sich also, bei stetig geändertem s' , (s', s) nach dem Gesetz der Stetigkeit ändern, falls das Stück s sich nicht selbst schneidet, bis $s' = s$. Für diesen Grenzwert selbst ist (s', s) , genau genommen, unbestimmt; so lange aber $s' < s$, wie nahe sich auch die Werthe liegen, ist er bestimmt; und er nähert sich, je näher s' dem s kommt, immer mehr der Neigung der Tangente gegen die Tangente im Anfangspunkte. Es sei nun $s = S - \omega$, und s' verändere sich von 0 bis $S - \omega - \omega'$; es ist klar, dass die Veränderung von s' dadurch 180° desto näher kommen wird, je kleiner ω, ω' sind, so dass $(S - \omega - \omega', S - \omega)$ dem

Werth 360° desto näher kommt, je kleiner ω , ω' sind; d. i. die Tangente an der Curve hat ihre Neigung vom Anfang bis zum Ende um 360° geändert.

Schneidet die Curve sich einmal selbst, so bekommen diese Schlüsse eine Abänderung. Sind nemlich die Endpunkte von $s = \sigma$, $s' = \sigma'$ identisch, so leidet (s', s) für diese Werthe eine Sprungsänderung: nemlich für $s = \sigma$, als constant betrachtet, ändert sich (s', s) , indem s' den Werth σ' erreicht, auf einmal um $\pm 180^\circ$; um zu entscheiden, welcher Werth hier gilt, müssen die Werthe für $s = \sigma \mp \omega$ betrachtet werden, wo ω unendlich klein ist; man sieht, dass, wie $s' - \sigma'$ von einem [negativen] Werthe [an] die immer kleiner werdenden negativen Werthe erhält und durch 0 wieder wächst, $(s', \sigma - \omega)$ um eine Grösse zunimmt oder abnimmt, die unendlich wenig von 180° verschieden ist, je nachdem man bei s' von der innern auf die äussere Seite der Linie s' übergeht oder umgekehrt; für $(s', \sigma + \omega)$ ist es hingegen umgekehrt; man sieht also, dass überhaupt für ein constantes s' , grösser als σ' , (s', s) beim Durchgang durch den Werth $s = \sigma$ auf einmal um 360° ab(zu)nimmt und dass die Änderung des (s', σ) , indem s' durch den Werth σ' geht, um $\pm 180^\circ$ eigentlich mit beiden Zeichen zugleich gilt, je nachdem man $s = \sigma$ als den letzten der bis σ oder als den ersten der von σ an weiter zu nehmenden Werthe ansieht. Das Solidum hat hier die Gestalt einer Wendeltreppe. Die Änderung der Richtung der Tangente wird nunmehr entweder 720° oder 0° , man kann aber dieser Betrachtung ganz enthoben sein, wenn man die gegenwärtige Methode auf den Fall einschränkt, wo die Curve sich nicht selbst schneidet.

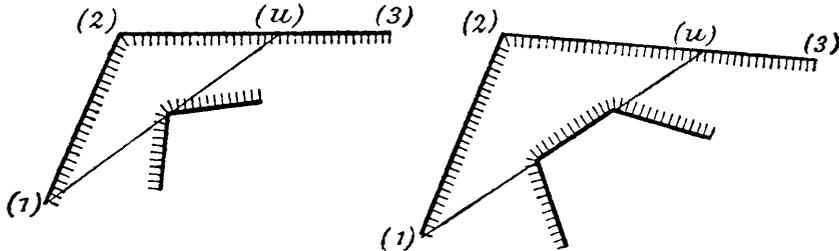
[8.]

Überhaupt lässt sich in dieser Theorie vieles sehr vereinfachen, wenn man die Zerlegbarkeit der Polygone in Dreiecke voraussetzt. Diese aber lässt sich auf folgende Art beweisen.

Zuerst ist klar, dass jede Figur durch Eine Theilungslinie (gerade; kürzeste) sich in zwei zerlegen lässt, die zusammen einen Einwärts gehenden Winkel weniger haben. Durch wiederholte Theilung dieser Art wird also das Polygon in andere zerlegt, die gar keine einwärts gehende Winkel haben.

Es sei nun P ein Polygon mit lauter auswärts gehenden Winkeln an den Punkten (1), (2), (3) . . . (n); ich behaupte, die Linie (1)(3) wird ganz im Innern des Polygons liegen.

Beweis. Zuerst ist klar, dass der Winkel (1) und die Linie (2)(3) auf der innern Seite von (1)(2) liegen; indem man also eine Linie durch (1) sich so bewegen lässt, dass sie von (1)(2) auf (1)(3) übergeht, wird sie anfangs im Innern der Figur liegen. Gesetzt nun, dass sie in der Lage (1)(3) nicht mehr ganz im Innern der Figur liege, so sei (1)(u) diejenige Lage, bis wohin sie ganz im Innern liegt und dann aufhört, diese Eigenschaft zu haben; sie wird



also in der Lage (1)(u) die Aussenseite der Figur berühren, entweder in einem Punkte oder in einer Linie (oder mehrern getrennten Punkten oder Linien).

Offenbar wird also an dieser Stelle oder an diesen Stellen einer oder mehrere einwärts gehende Winkel sein, gegen die Voraussetzung.

Es ist hierdurch zugleich bewiesen, dass alle Linien (1)(2), (1)(3), (1)(4) etc. ganz im Innern der Figur liegen und in einem Sinn fortgehen.

[9.]

Eine interessante Aufgabe scheint zu sein, die Bedingung analytisch anzugeben, ob ein gegebener Punkt innerhalb oder ausserhalb der Figur fällt.

Die Auflösung ist leicht. Indem man den Punkt zum Anfangspunkt der Coordinaten wählt, zähle man alle Punkte

$$\begin{array}{ll}
 \alpha, & \text{wo } y, -y', xy' - yx' \\
 \beta, & \text{wo } y, -y', yx' - xy' \\
 \gamma, & \text{wo } -y, y', xy' - yx' \\
 \delta, & \text{wo } -y, y', yx' - xy'
 \end{array}$$

positiv sind; man hat dann

$$\alpha = \gamma, \quad \beta = \delta.$$

Ist nun $\alpha - \beta = 0$, so liegt der Punkt ausserhalb, ist $\alpha - \beta = \pm 1$, so liegt er innerhalb.

[II.]

ZUR GEOMETRIE DER LAGE,
FÜR ZWEI RAUMDIMENSIONEN.

Bei den dargestellten Tracten werden alle nur einmal vorkommenden Knotenpunkte weggelassen. Mit zwei Sternen sind diejenigen bezeichnet, die für sich schon unmöglich sind; mit Einem Stern die, wo unter Vor- und Nachsetzung eines neuen Knotenpunkts der Tract unmöglich; ohne Stern, wo dieser Zusatz einen möglichen Tract ergibt.

Ein vollständiger Knoten.

1. *aa*

Zwei vollständige Knoten.

1. *aabb*

2. *abab* *

3. *abba*

Drei vollständige Knoten.

1. *aabbcc*

2. *abcabc* *

3. *abccb*

4. *ababcc* *

5. *abacbc* **

6. *abaccb* *

7. *abbacc*

8. *abbcac* *

9. *abbcca*

10. *abcabc*

11. *abcacb* *

12. *abcbac* *

13. *abcbca* **

14. *abccab* *

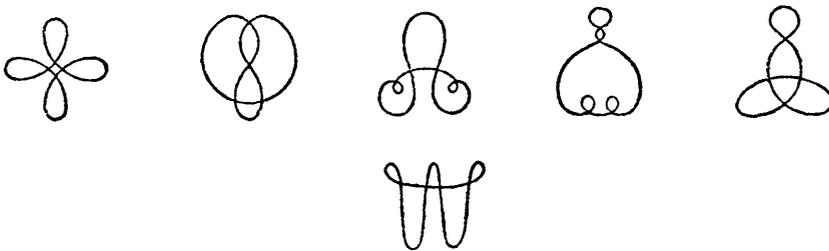
15. *abccba*

Vier vollständige Knoten.

- | | | |
|--------------------------|-------------------------|--------------------------|
| 1. <i>aabbccdd</i> | 36. <i>abbcaddc</i> * | 71. <i>abccaddb</i> ** |
| 2. <i>aabbcdcd</i> * | 37. <i>abbcadd</i> | 72. <i>abccaddb</i> * |
| 3. <i>aabbcdde</i> | 38. <i>abbcadda</i> * | 73. <i>abccbadd</i> |
| 4. <i>aabcb added</i> * | 39. <i>abbcadda</i> | 74. <i>abccbada</i> * |
| 5. <i>aabcb added</i> ** | 40. <i>abbcaddc</i> | 75. <i>abccbadda</i> |
| 6. <i>aabcb added</i> * | 41. <i>abbcaddc</i> * | 76. <i>abccdad</i> |
| 7. <i>aabcb added</i> | 42. <i>abbcaddc</i> * | 77. <i>abccdad</i> * |
| 8. <i>aabccdbd</i> * | 43. <i>abbcadda</i> ** | 78. <i>abccdbad</i> * |
| 9. <i>aabccddb</i> | 44. <i>abbcaddc</i> * | 79. <i>abccdbda</i> ** |
| 10. <i>aabcb bcd</i> | 45. <i>abbcaddca</i> | 80. <i>abccddab</i> * |
| 11. <i>aabcb bdc</i> * | 46. <i>abcabcdd</i> | 81. <i>abccddba</i> |
| 12. <i>aabcb cdb</i> * | 47. <i>abcab dcd</i> ** | 82. <i>abcdabcd</i> * |
| 13. <i>aabcb cdb</i> ** | 48. <i>abcab ddc</i> | 83. <i>abcdabdc</i> * |
| 14. <i>aabcb ddb</i> * | 49. <i>abcacbdd</i> * | 84. <i>abcdacbd</i> ** |
| 15. <i>aabcb ddb</i> | 50. <i>abcacbdd</i> ** | 85. <i>abcdacdb</i> ** |
| 16. <i>ababccdd</i> * | 51. <i>abcacddb</i> * | 86. <i>abcdadbc</i> * |
| 17. <i>ababccdd</i> * | 52. <i>abcadbcd</i> * | 87. <i>abcdadcb</i> * |
| 18. <i>ababccdd</i> * | 53. <i>abcadbdc</i> ** | 88. <i>abcdbacd</i> * |
| 19. <i>ababccdd</i> ** | 54. <i>abcadbcb</i> | 89. <i>abcdbadc</i> |
| 20. <i>ababccdd</i> ** | 55. <i>abcadbcb</i> ** | 90. <i>abcdbccad</i> ** |
| 21. <i>ababccdd</i> ** | 56. <i>abcaddbc</i> | 91. <i>abcdbccda</i> |
| 22. <i>ababccdd</i> ** | 57. <i>abcaddcb</i> * | 92. <i>abcdbbdac</i> * |
| 23. <i>ababccdd</i> ** | 58. <i>abcbacdd</i> * | 93. <i>abcdbbdca</i> ** |
| 24. <i>ababccdd</i> ** | 59. <i>abcbadcd</i> ** | 94. <i>abcdcabd</i> ** |
| 25. <i>ababccdd</i> ** | 60. <i>abcbaddd</i> * | 95. <i>abcdcabb</i> ** |
| 26. <i>ababccdd</i> ** | 61. <i>abcbacadd</i> ** | 96. <i>abcdcbad</i> * |
| 27. <i>ababccdd</i> ** | 62. <i>abcbacdad</i> ** | 97. <i>abcdcbda</i> * |
| 28. <i>ababccdd</i> ** | 63. <i>abcbacdda</i> ** | 98. <i>abcdcdab</i> ** |
| 29. <i>ababccdd</i> ** | 64. <i>abcbadcd</i> ** | 99. <i>abcdcdba</i> ** |
| 30. <i>ababccdd</i> ** | 65. <i>abcbaddd</i> ** | 100. <i>abcdcdabc</i> |
| 31. <i>ababccdd</i> | 66. <i>abcbadcd</i> ** | 101. <i>abcdcdacb</i> * |
| 32. <i>ababccdd</i> * | 67. <i>abcbaddda</i> ** | 102. <i>abcdcdbac</i> * |
| 33. <i>ababccdd</i> | 68. <i>abcbaddd</i> * | 103. <i>abcdcdbca</i> ** |
| 34. <i>ababccdd</i> * | 69. <i>abcbaddd</i> ** | 104. <i>abcdcdcab</i> * |
| 35. <i>ababccdd</i> ** | 70. <i>abccabdd</i> * | 105. <i>abcdcdcba</i> |

Man kann die möglichen Tracte auch als geschlossene ansehen, und folglich aus jedem möglichen durch Vorrückung des Anfangsgliedes andere ableiten. Die 24 möglichen, welche sich unter den 105 Tracten für 4 vollständige Knoten befinden, erscheinen in dieser Abhängigkeit so:

1.	39	I.	4	IV.	1	VIII.	1
54.	89	II.	2	III.	4		
15.	105.	II.	5				
3.	45.						
	7.						
	75.						
	31.						
	9.						
	81.						
	37						
10.	91.						
	46.						
	48.						
	56.						
	100.						
	76.						
	40						



Sehr vereinfacht wird die Registrirung, indem man die Plätze mit 0, 1, 2, 3 u. s. w. bezeichnet, und diejenigen Paare von Plätzen, die Einem Knoten entsprechen, neben einander setzt. In einem möglichen geschlossenen Tracte muss jedes Paar aus einer geraden und einer ungeraden Zahl bestehen. Z. B.

Nr. 91	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>0.7</td></tr> <tr><td>2.5</td></tr> <tr><td>4.1</td></tr> <tr><td>6.3</td></tr> </table>	0.7	2.5	4.1	6.3		Nr. 48	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>0.3</td></tr> <tr><td>2.7</td></tr> <tr><td>4.1</td></tr> <tr><td>6.5</td></tr> </table>	0.3	2.7	4.1	6.5	u. s. w.
0.7													
2.5													
4.1													
6.3													
0.3													
2.7													
4.1													
6.5													

Dieses Criterium hört aber bei Perioden von mehr als 4 Knoten auf, für die Möglichkeit zureichend zu sein; z. B. *abcadcedbe* oder $\begin{pmatrix} 0. 2. 4. 6. 8 \\ 3. 5. 7. 9. 1 \end{pmatrix}$ ist, obgleich dem Criterium genügt ist, unmöglich.

Ebenso ist unmöglich *abcabdecde* [oder] $\begin{pmatrix} 0. 2. 4. 6. 8 \\ 3. 7. 1. 9. 5 \end{pmatrix}$.

Die vollständige lexicographische Aufzählung aller 120 Tractcombinations für 5 Knoten auf der folgenden Seite [, wobei die unmöglichen Tracte durch einen Stern bezeichnet sind.]

1. <i>aabbccdde</i>	31. <i>abbccaddee</i>	61. <i>abcaddecbe</i>	91. <i>abcdbceade*</i>
2. <i>ccdeed</i>	32. <i>adeed</i>	62. <i>deebc</i>	92. <i>ceeda</i>
3. <i>cddcee</i>	33. <i>ddaee</i>	63. <i>ebced</i>	93. <i>edaec*</i>
4. <i>cddeec</i>	34. <i>ddeea</i>	64. <i>ebdec*</i>	94. <i>edcea</i>
5. <i>cdecde</i>	35. <i>deade</i>	65. <i>eecbd</i>	95. <i>eeadc</i>
6. <i>cdeedc</i>	36. <i>deeda</i>	66. <i>eedbc</i>	96. <i>eedca</i>
7. <i>aabccbdee</i>	37. <i>abbcdacdee</i>	67. <i>abccbadd</i>	97. <i>abcdadabcee</i>
8. <i>bdeed</i>	38. <i>aceed</i>	68. <i>adeed</i>	98. <i>abeec</i>
9. <i>ddbee</i>	39. <i>aedce</i>	69. <i>ddaee</i>	99. <i>aecbe</i>
10. <i>ddeeb</i>	40. <i>aeeed</i>	70. <i>ddeea</i>	100. <i>aeebc</i>
11. <i>debde</i>	41. <i>dcaee</i>	71. <i>deade</i>	101. <i>cbae</i>
12. <i>deedb</i>	42. <i>dceea</i>	72. <i>deeda</i>	102. <i>cbeea</i>
13. <i>abcdbcdee</i>	43. <i>deace</i>	73. <i>abccdabdee</i>	103. <i>ceabe</i>
14. <i>bceed</i>	44. <i>deeca</i>	74. <i>abeed</i>	104. <i>ceeba</i>
15. <i>bedce</i>	45. <i>- ecaed</i>	75. <i>aedbe</i>	105. <i>ebaec</i>
16. <i>beecd</i>	46. <i>ecdea</i>	76. <i>aeebd</i>	106. <i>ebcea</i>
17. <i>dcbee</i>	47. <i>eeacd</i>	77. <i>dbaee</i>	107. <i>eeabc</i>
18. <i>dceeb</i>	48. <i>eedca</i>	78. <i>dbeea</i>	108. <i>eeeba</i>
19. <i>debce</i>	49. <i>abcabcdee</i>	79. <i>deabe</i>	109. <i>abcdeabcde</i>
20. <i>deecb</i>	50. <i>cdeed</i>	80. <i>deeba</i>	110. <i>abedc</i>
21. <i>ecbed</i>	51. <i>ddcee</i>	81. <i>ebaed</i>	111. <i>adcbe</i>
22. <i>ecdeb</i>	52. <i>ddeec</i>	82. <i>ebdea</i>	112. <i>adebc*</i>
23. <i>eebcd</i>	53. <i>decde*</i>	83. <i>eeabd</i>	113. <i>cbade</i>
24. <i>eedcb</i>	54. <i>deedc</i>	84. <i>eedba</i>	114. <i>cbeda</i>
25. <i>abbaccdee</i>	55. <i>abcadcbdee</i>	85. <i>abcdbadcee</i>	115. <i>cdabe*</i>
26. <i>cdeed</i>	56. <i>cbeed</i>	86. <i>adeec</i>	116. <i>cdeba</i>
27. <i>ddcee</i>	57. <i>cedbe*</i>	87. <i>aecde</i>	117. <i>ebadc</i>
28. <i>ddeec</i>	58. <i>ceebd</i>	88. <i>aeedc</i>	118. <i>ebcda</i>
29. <i>decde</i>	59. <i>dbcee</i>	89. <i>cdmee</i>	119. <i>edabc</i>
30. <i>deedc</i>	60. <i>dbeec</i>	90. <i>cdeea</i>	120. <i>edcba</i>

BEMERKUNGEN ZU DEN NOTIZEN ÜBER GEOMETRIA SITUS.

Die unter [I] zusammengefassten Notizen stehen hinter einander in einem Handbuche, sind jedoch augenscheinlich zu sehr verschiedenen Zeiten niedergeschrieben worden, die Notizen [1] und [2] stammen wahrscheinlich aus der Zeit zwischen 1823 und 1827, während die Notiz [9] vermuthlich in die Zeit nach 1840 fällt.

In SCHERINGS Nachlass haben sich folgende Erläuterungen zu den Notizen [I] gefunden:

»Um die Charactere γ, γ' [S. 272] irgend eines bestimmten Theils der Curve zu erhalten, ziehe man von beliebig weiter Ferne nach zwei Punkten, die unmittelbar neben dem Curventheil und auf verschiedenen Seiten des Zuges liegen, zwei gerade Linien und zähle für jeden Durchschnitt, welchen eine der beiden Linien mit dem gegebenen Zuge macht, $+1$, wenn die Linie von der äussern Seite zur innern übergeht, -1 im entgegengesetzten Falle. Die Resultate für die beiden Linien sind die gesuchten Charactere γ, γ' .

Nennt man $+1$ oder -1 den Character eines durch eine einzelne der in sich zurückkehrenden Linien begrenzten Flächentheils, je nachdem die Fläche auf der positiven oder negativen Seite ihrer Begrenzung liegt, so bezeichnet $Ch \epsilon a$ [S. 274] die Summe der Charactere aller der Flächentheile, die an a stossen, sowohl derjenigen, die über a hinausgehen, als auch des Flächentheils, der von ϵa begrenzt wird und dessen Character ϵ ist.

Der absolute Character χ eines Punktes [S. 278] ist die Summe der Charactere aller Flächentheile, in denen der Punkt liegt.

Bei der Zählung [S. 281] hat man die Seiten des Polygons in einem und demselben Sinne, immer in der Richtung von (x, y) nach (x', y') , zu durchlaufen.«

Die Notiz [II] hat SCHERING, wahrscheinlich auf Grund der Äusserungen von GAUSS in der Anmerkung S. 272, mit dem Datum: 1844. Dec. 30 versehen und zu ihr folgende Bemerkungen gemacht:

»Zwei Punkte des Tractes, die zusammenfallen und dadurch einen Knoten bilden, sind mit denselben Buchstaben a und a, b und b u. s. w. bezeichnet. Bei der Darstellung eines Tractes werden diese Punkte in der Ordnung angegeben, in welcher sie auf dem Tracte nach einander folgen.

Durch die Figuren werden die Nummern

1	54	15	3	10
15				

dargestellt.«

STÄCKEL.