[PROJECTION DES WÜRFELS.]

[1.]

Sind die complexen Werthe der orthographischen Projectionen von drei gleich langen und unter einander senkrechten Geraden

$$a,\ b,\ c,$$

so ist

$$aa+bb+cc = 0,$$

z. B.

$$a = 1+8i, \qquad b = 8+i, \qquad c = 4-4i.$$

Allgemein kann man setzen

$$a = pp+qq, \qquad b = 2ipq, \qquad c = ipp-iqq.$$

[2.]

Die zierlichste Form der Auflösung der allgemeinen Gleichung

$$pp+qq+rr = 0$$

ist, a und b beliebige complexe Zahlen bedeutend,

$$p = (a-b)(b-aii)$$
$$q = (b-bi)(aii-ai)$$
$$r = (bi-a)(ai-b).$$

BEMERKUNGEN.

Ein Theil dieser beiden Notizen, die sich in einem Handbuche befinden und aus dem Jahre 1831 stammen, ist bereits in Bd. II, S. 309 abgedruckt worden.

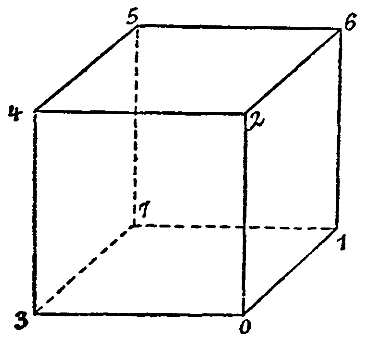
Vom December 1839 bis Ostern 1840 hat Gauss eine Vorlesung über die *Theorie der imaginären Grössen* gehalten, die E. Heine gehört und ausgearbeitet hat, wie bereits S. 330 angeführt. Dieser Ausarbeitung sind die folgenden auf die Projection des Würfels bezüglichen Ausführungen entnommen.

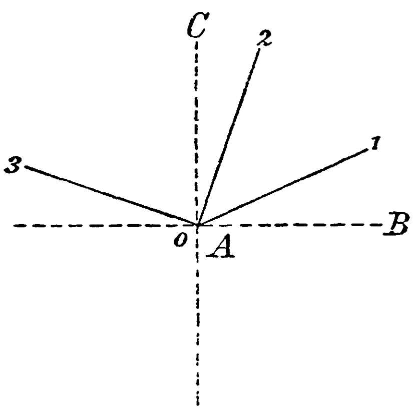
Stäckel.

[*Vorlesung über die Theorie der imaginären Grössen.*]

Projection des Würfels.

Will man einen Würfel auf eine Ebene projiciren, und zwar durch Senkrechte von den Ecken auf die Ebene, so muss die Projection die Eigenschaft haben, dass die Summe der Quadrate der Zahlen, die die Projection je dreier auf einander stossender Kanten anzeigen, $=0$ sei.





Um diess zu zeigen, bezeichnen wir mit $0, 1, 7, 3$ die Ecken der einen, mit $2, 4, 5, 6$ die der damit parallelen Fläche. Ist $(0,1)$, die Seite des Würfels, $=r$, so haben wir, dass an der Ecke 0 die drei Kanten zusammenstossen, deren jede $=r$ ist:

$$(0,1),\qquad (0,2),\qquad (0,3).$$

Legen wir zwei rechtwinklige Axen AB und AC, die Axe der x und der y, durch den Punkt 0 oder A der Projectionsebene, so ist, wenn die Complexen, die die Projectionen von $1, 2, 3$ ausdrücken, A, B, C sind:

$$r(\cos(1,0,x)+i\cos(1,0,y)) = A$$
$$r(\cos(2,0,x)+i\cos(2,0,y)) = B$$
$$r(\cos(3,0,x)+i\cos(3,0,y)) = C.$$

Ferner haben wir die Bedingungsgleichungen

$$\cos(1,0,x)^2+\cos(2,0,x)^2+\cos(3,0,x)^2 = 1$$
$$\cos(1,0,y)^2+\cos(2,0,y)^2+\cos(3,0,y)^2 = 1$$

und

$$\cos(1,0,x)\cos(1,0,y)+\cos(2,0,x)\cos(2,0,y)+\cos(3,0,x)\cos(3,0,y)$$
$$= \cos(x,0,y) = \cos 90^0 = 0.$$

Hieraus folgt, es sei wirklich

$$A^2+B^2+C^2 = 0.$$

Ein Gleiches folgt für die übrigen Ecken.

Es kann gewünscht werden, A, B, C so zu wählen, dass die reellen Theile ganze Zahlen sind. Um diess thun zu können, kommen wir auf die reellen Zahlen zurück, und erinnern, dass, wenn $a^2+b^2=c^2$ sein soll, und a, b, c ganze Zahlen, p und q auch ganze Zahlen sind, man haben müsse

$$a^2 = (p^2-q^2)^2,\qquad b^2 = 4p^2q^2,\qquad c^2 = (p^2+q^2)^2,$$

also

$$a = p^2-q^2,\qquad b = 2pq,\qquad c = p^2+q^2.$$

Z. B., ist $p=2$, $q=1$, so ist $a=3$, $b=4$, $c=5$ und

$$5^2 = 4^2+3^2.$$

Soll nun

$$A^2 + B^2 = -C^2$$

sein, so werden wir haben:

$$A = (m+m'i)^2 - (n+n'i)^2$$
$$B = 2(m+m'i)(n+n'i)$$
$$C = (m+m'i)^2 i + (n+n'i)^2 i.$$

Führt man diess aus, so ist:

$$(m+m'i)^2 = m^2 - m'^2 + 2mm'i$$
$$(n+n'i)^2 = n^2 - n'^2 + 2nn'i$$
$$(m+m'i)(n+n'i) = mn - m'n' + i(m'n + n'm),$$

also:

$$A = m^2 - m'^2 - n^2 + n'^2 + 2i(mm' - nn')$$
$$B = 2(mn - m'n') + 2i(m'n + n'm)$$
$$C = -2(mm' + nn') + i(m^2 + n^2 - m'^2 - n'^2).$$

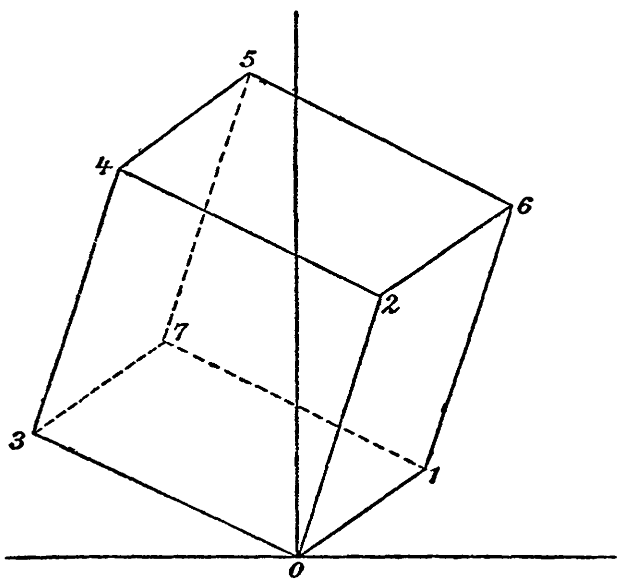
Umgekehrt kann man auch von diesen Zahlen auf die reellen zurückkommen.

Ist hier $m = 2$, $n = 1$, $m' = 1$, $n' = 1$, so erhält man:

$$A = 3 + 2i \qquad B = 2 + 6i \qquad C = -6 + 3i \qquad A^2 + B^2 + C^2 = \left\{\begin{array}{r} 5 + 12i \\ -32 + 24i \\ +27 - 36i \end{array}\right\} = 0.$$

Zusatz. Sind die complexen Zahlen für die Ecken 1, 2, 3 gefunden, so hat man auch die für die andern 4. Es sind nemlich die für:

0	0
1	A
2	B
3	C
6	$A+B$
7	$A+C$
5	$A+B+C$
4	$B+C$



[Bei dem Beispiel haben diese Zahlen beziehungsweise die Werthe:

$0,\quad 3+2i,\quad 2+6i,\quad -6+3i,\quad 5+8i,\quad -3+5i,\quad -1+11i,\quad -4+9i.$]