

## Werk

**Titel:** Arithmetik und Algebra : Nachträge zu Band 1 - 3

**Jahr:** 1900

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN236010751

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN236010751>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=236010751>

**LOG Id:** LOG\_0094

**LOG Titel:** Projection des Würfels

**LOG Typ:** chapter

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN235957348

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235957348>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235957348>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

## [PROJECTION DES WÜRFELS.]

[1.]

Sind die complexen Werthe der orthographischen Projectionen von drei gleich langen und unter einander senkrechten Geraden

$$a, b, c,$$

so ist

$$aa + bb + cc = 0,$$

z. B.

$$a = 1 + 8i, \quad b = 8 + i, \quad c = 4 - 4i.$$

Allgemein kann man setzen

$$a = pp + qq, \quad b = 2ipq, \quad c = ipp - iqq.$$

[2.]

Die zierlichste Form der Auflösung der allgemeinen Gleichung

$$pp + qq + rr = 0$$

ist,  $a$  und  $b$  beliebige complexe Zahlen bedeutend,

$$p = (a - b)(b - aii)$$

$$q = (b - bi)(aai - ai)$$

$$r = (bi - a)(ai - b).$$

### BEMERKUNGEN.

Ein Theil dieser beiden Notizen, die sich in einem Handbuche befinden und aus dem Jahre 1831 stammen, ist bereits in Bd. II, S. 309 abgedruckt worden.

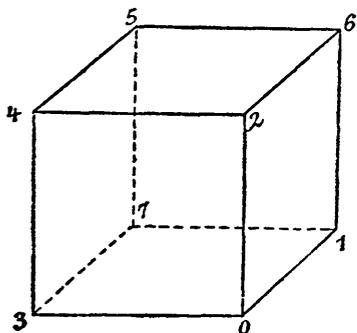
Vom December 1839 bis Ostern 1840 hat GAUSS eine Vorlesung über die *Theorie der imaginären Grössen* gehalten, die E. HEINE gehört und ausgearbeitet hat, wie bereits S. 330 angeführt. Dieser Ausarbeitung sind die folgenden auf die Projection des Würfels bezüglichen Ausführungen entnommen.

STÄCKEL.

[Vorlesung über die Theorie der imaginären Grössen.]

Projection des Würfels.

Will man einen Würfel auf eine Ebene projiciren, und zwar durch Senkrechte von den Ecken auf die Ebene, so muss die Projection die Eigenschaft haben, dass die Summe der Quadrate der Zahlen, die die Projection je dreier auf einander stossender Kanten anzeigen,  $= 0$  sei.



Um diess zu zeigen, bezeichnen wir mit 0, 1, 2, 3 die Ecken der einen, mit 4, 5, 6 die der damit parallelen Fläche. Ist  $(0, 1)$ , die Seite des Würfels,  $= r$ , so haben wir, dass an der Ecke 0 die drei Kanten zusammenstossen, deren jede  $= r$  ist:

$$(0, 1), \quad (0, 2), \quad (0, 3).$$

Legen wir zwei rechtwinklige Axen  $AB$  und  $AC$ , die Axe der  $x$  und der  $y$ , durch den Punkt 0 oder  $A$  der Projectionsebene, so ist, wenn die Complexen, die die Projectionen von 1, 2, 3 ausdrücken,  $A, B, C$  sind:

$$r(\cos(1, 0, x) + i \cos(1, 0, y)) = A$$

$$r(\cos(2, 0, x) + i \cos(2, 0, y)) = B$$

$$r(\cos(3, 0, x) + i \cos(3, 0, y)) = C.$$

Ferner haben wir die Bedingungsgleichungen

$$\cos(1, 0, x)^2 + \cos(2, 0, x)^2 + \cos(3, 0, x)^2 = 1$$

$$\cos(1, 0, y)^2 + \cos(2, 0, y)^2 + \cos(3, 0, y)^2 = 1$$

und

$$\begin{aligned} \cos(1, 0, x)\cos(1, 0, y) + \cos(2, 0, x)\cos(2, 0, y) + \cos(3, 0, x)\cos(3, 0, y) \\ = \cos(x, 0, y) = \cos 90^\circ = 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, es sei wirklich

$$A^2 + B^2 + C^2 = 0.$$

Ein Gleiches folgt für die übrigen Ecken.

Es kann gewünscht werden,  $A, B, C$  so zu wählen, dass die reellen Theile ganze Zahlen sind. Um diess thun zu können, kommen wir auf die reellen Zahlen zurück, und erinnern, dass, wenn  $a^2 + b^2 = c^2$  sein soll, und  $a, b, c$  ganze Zahlen,  $p$  und  $q$  auch ganze Zahlen sind, man haben müsse

$$a^2 = (p^2 - q^2)^2, \quad b^2 = 4p^2q^2, \quad c^2 = (p^2 + q^2)^2,$$

also

$$a = p^2 - q^2, \quad b = 2pq, \quad c = p^2 + q^2.$$

Z. B., ist  $p = 2, q = 1$ , so ist  $a = 3, b = 4, c = 5$  und

$$5^2 = 4^2 + 3^2.$$

Soll nun  
sein, so werden wir haben:

$$A^2 + B^2 = -C^2$$

$$\begin{aligned} A &= (m + m'i)^2 - (n + n'i)^2 \\ B &= 2(m + m'i)(n + n'i) \\ C &= (m + m'i)^2 i + (n + n'i)^2 i. \end{aligned}$$

Führt man diess aus, so ist:

$$\begin{aligned} (m + m'i)^2 &= m^2 - m'^2 + 2mm'i \\ (n + n'i)^2 &= n^2 - n'^2 + 2nn'i \end{aligned}$$

also:

$$(m + m'i)(n + n'i) = mn - m'n' + i(m'n + n'm),$$

$$\begin{aligned} A &= m^2 - m'^2 - n^2 + n'^2 + 2i(mm' - nn') \\ B &= 2(mn - m'n') + 2i(m'n + n'm) \\ C &= -2(mm' + nn') + i(m^2 + n^2 - m'^2 - n'^2). \end{aligned}$$

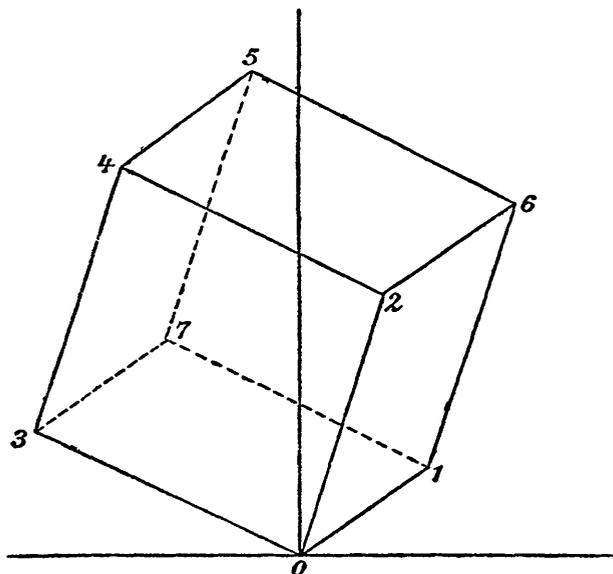
Umgekehrt kann man auch von diesen Zahlen auf die reellen zurückkommen.

Ist hier  $m = 2, n = 1, m' = 1, n' = 1$ , so erhält man:

$$\begin{aligned} A &= 3 + 2i \\ B &= 2 + 6i \\ C &= -6 + 3i \end{aligned} \quad A^2 + B^2 + C^2 = \begin{Bmatrix} 5 + 12i \\ -32 + 24i \\ +27 - 36i \end{Bmatrix} = 0.$$

Zusatz. Sind die complexen Zahlen für die Ecken 1, 2, 3 gefunden, so hat man auch die für die andern 4. Es sind nemlich die für:

0	0
1	A
2	B
3	C
6	A + B
7	A + C
5	A + B + C
4	B + C



[Bei dem Beispiel haben diese Zahlen beziehungsweise die Werthe:

$$0, \quad 3 + 2i, \quad 2 + 6i, \quad -6 + 3i, \quad 5 + 8i, \quad -3 + 5i, \quad -1 + 11i, \quad -4 + 9i.]$$