NACHLASS.

EINIGE ASYMPTOTISCHE GESETZE DER ZAHLENTHEORIE.

[I.]

[Handschriftliche Eintragung in dem Buche:] JOHANN CARL SCHULZE, Neue und erweiterte Sammlung logarithmischer .... Tafeln. I, Berlin 1778; [von GAUSS' Hand] Gauß. 1791.

[Auf der Rückseite des letzten Blattes.]

[1.]

Primzahlen unter a $(=\infty)$

$$\frac{a}{la}.$$

[2.]

Zahlen aus zwei Factoren

$$\frac{lla\,.\,a}{la},$$

(wahrsch.) aus 3 Factoren

$$\frac{\frac{1}{2}(lla)^2 a}{la}, \ldots$$

et sic in inf.

[3.]

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\dots+\frac{1}{x}=(\text{pro } x \text{ inf.})\; llx+V.$$

V esse Const. suspicor ac prope 1,266...

1796 Mai.

[4.]

Zahlen die keine gleichen F[actoren] haben

$$\frac{a}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots},$$

die höchstens 2 gl. F. h.

$$\frac{a}{1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\cdots}$$

die höchstens 3 gl. F. h.

$$\frac{a}{1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\cdots},$$

et sic in inf.

[5.]

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdots\frac{x}{x-1}=(x\text{ inf})\; a.lx$$

a Constans ac prope 1,874.

[Auf der Rückseite des hinteren Schutzblattes]

[6.]

Numerus factorum usque ad n

$$(lln+1)n.$$

[II.]

[Handschriftliche Eintragungen bei S. 209 des Buches:]
J. H. LAMBERT, Zusätze zu den Logarithmischen und Trigonometrischen Tabellen ...,
Berlin bei Haude & Spener, 1770; [von GAUSS' Hand] **K. Gauß. 1793.**

[1.]

Numerus omnium ex solis factoribus 2, 3, 5, 7 compositorum numerorum infra n est

$$\frac{\frac{1}{8}(ln)^4}{(l2)(l3)(l4)(l5)} \text{ praeter propter.}$$

[2.]

E $2 \ldots n$ Infra m

$$\frac{ln}{lm}m.$$

[III.]

[Aus dem Tagebuch.]

[1.]

Factorum Summae in Infinito $= \frac{\pi\pi}{6} \cdot$ Sum[ma] Num[erorum]

[1796] 20. Jun. G[ottingae].

[2.]

Numerus fractionum inaequalium, quarum denominatores certum limitem non superant, ad numerum fractionum omnium, quarum num[eratores] aut denom[inatores] sint diversi infra eundem limitem, in infinito ut $6 : \pi\pi$

[1796] Sept. 6.

[Aus den »Exercitationes Mathematicae«.]

[3.]

$$\text{Lim.}\ \frac{\Sigma\ \text{pr. ad}\ n\ \text{infra}\ n}{nn}$$

(Pr. usque ad $P+30n$) sunt

$$(4-1)(3^2-1)(5^2-1)n = 576n$$

ideo a

$$P\ldots Pn \quad \text{generaliter} \quad \frac{1.3}{2.2}\cdot\frac{2.4}{3.3}\cdot\frac{4.6}{5.5}\cdots nn.$$

Si $P:n = \infty:1$

adeoque

$$\text{Limes quaesitus} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1.3}{2.2}\cdot\frac{2.4}{3.3}\cdot\frac{4.6}{5.5}\cdots = \frac{3}{\pi\pi} = \frac{3}{9{,}8696} = 0{,}3039+$$

[IV.]

[Aus Scheda Ac, Varia, Nov. 1799, S. 19.]

[1.]

Accipiendo φ ita ut in Disqu. Ar. art. [38], summa seriei

$$1+\frac{\varphi 2}{4}+\frac{\varphi 3}{9}+\frac{\varphi 4}{16}+\ldots+\frac{\varphi n}{nn}$$

exhiberi potest quam proxime per

$$\frac{6}{\pi\pi}\log n+\text{Const.}$$

$$\text{Const.} = 0{,}71 \pm$$

Erit autem

$$\frac{\pi\pi}{6}\,\text{Const.} = 0{,}5772156$$
$$+\tfrac{1}{3}\log 2+\tfrac{1}{8}\log 3+\tfrac{1}{24}\log 5$$

pr[aeter] pr[opter] $= 0{,}5772156$

$$\underline{+\;0{,}569974} = \frac{6}{\pi\pi}\left(\tfrac{1}{4}\log 2+\tfrac{1}{9}\log 3+\tfrac{1}{16}\log 4\right)$$
$$1{,}1471896$$

unde Const. $= 0{,}697413.$

[2.]

Ponendo valorem medium mult[itudinis] gen[erum]

$$= \alpha\log N+\beta = M,$$

erit valor medius pro

N	
$8n+0$	$2M-5\alpha\log 2$
1	$M+\frac{3}{2}\alpha\log 2$
2	$M+\frac{1}{2}\alpha\log 2$
3	$\frac{1}{2}M+\frac{3}{4}\alpha\log 2$
4	$M-\frac{1}{2}\alpha\log 2$
5	$M+\frac{3}{2}\alpha\log 2$
6	$M+\frac{1}{2}\alpha\log 2$
7	$\frac{1}{2}M+\frac{3}{4}\alpha\log 2$
$3n+0$	$\frac{3}{2}M-\frac{9}{8}\alpha\log 3$
$3n+1$	$\frac{3}{4}M+\frac{9}{16}\alpha\log 3$
$3n+2$	$\frac{3}{4}M+\frac{9}{16}\alpha\log 3$
$5n+0$	$\frac{5}{3}M-\frac{25}{18}\alpha\log 5$
per 5 non div.	$\frac{5}{6}M+\frac{25}{72}\alpha\log 5$

[3.]

		med.	
a			
	a''	arithm.	a, a'
a'			
	a'''	harm.	a', a''
a''			
	a^{IV}	arithm.	a'', a'''
a'''			
		etc.	
etc.			

$$a^{\infty} = a + \frac{2}{3}\frac{a'-a}{a'} + \frac{2}{3}\cdot\frac{14}{15}\left(\frac{a'-a}{a'}\right)^2 \ldots$$

$$= a\frac{a'+a}{2a}\cdot\frac{7a'+a}{6a'+2a}\cdot\frac{31a'+a}{30a'+2a}.$$

[Aus Scheda Ae, Varia, Julius 1800, S. 39.]

[4]

Sit pro numero

$$a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\delta} \ldots = M,$$

$$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots = \varphi M,$$

erit

$$\Sigma\varphi M \text{ quam proxime } M(\log M + 0{,}15443) + ?$$

BEMERKUNGEN ZU DEN ASYMPTOTISCHEN GESETZEN DER ZAHLENTHEORIE.

Im Vorstehenden sind diejenigen Aufzeichnungen aus dem Nachlaß zusammengestellt, die sich auf »asymptotische Gesetze« und auf sogenannte »mittlere Werte« der Zahlentheorie beziehen. Die unter [III] [1] und [2] wiedergegebenen Aufzeichnungen gehören dem an anderer Stelle dieses Bandes vollständig abgedruckten »*Tagebuch*« an, die unter [III] [3] wiedergegebene Notiz den gleichfalls weiter unten abgedruckten »*Exercitationes mathematicae*« (1796). Sie sollen aber wegen des sachlichen Zusammenhangs hier zusammen mit den übrigen erläutert werden *).

*) Die folgenden Bemerkungen sind mit Benutzung der im IX. Bericht über den Stand der Herausgabe von GAUSS' Werken (Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Geschäftliche-

Den Beweis des Satzes [I] [1], wonach die Anzahl der unter a liegenden Primzahlen asymptotisch durch $\frac{a}{\log a}$ dargestellt wird, haben J. HADAMARD (Bulletin de la Soc. Mathém. **24**, 1896, S. 199) und CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN (Annales de la Societé scientif. de Bruxelles **20**, 2e partie, 1896, S. 360—361) erbracht. Vergl. auch den Werke II, S. 444 ff. abgedruckten Brief von GAUSS an ENCKE.

Der Beweis von [I] [2] ist in einer Arbeit von E. LANDAU (Bulletin de la Soc. Mathém. **28**, 1900, S. 25) enthalten, wo gezeigt wird, daß die Mengen aller Zahlen $\leqq a$, die aus k Primfaktoren zusammengesetzt sind, asymptotisch gleich

$$\frac{1}{(k-1)!}\,\frac{a(\log\log a)^{k-1}}{\log a}$$

ist.

Die in [I] [3] enthaltene Behauptung hat F. MERTENS (CRELLES Journal **78**, 1874, S. 52) unter der Form

$$\sum_{p \text{ Primzahl } \leqq x} \frac{1}{p} = \log\log x + C - \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{p} \frac{1}{mp^m} + O\left(\frac{1}{lx}\right)$$

bewiesen, wo C die EULER-MASCHERONIsche Konstante bedeutet. Für die von GAUSS mit V bezeichnete Konstante ergäbe sich hiernach der Wert 1,26149, der von dem von GAUSS vermuteten etwas abweicht.

Die Behauptung [I] [4] hat L. GEGENBAUER (Denkschriften der K. Akademie d. Wiss. Wien **49**, 1885, Abt. 1, S. 47) bewiesen.

Der Beweis von [I] [5] ergibt sich aus der bei [3] genannten Abhandlung von MERTENS (a.a.O. S. 53).

Der Satz [I] [6] ist wohl ein nicht völlig zutreffender Ausspruch der Formel

$$\sum_{p \leqq x} \left[\frac{x}{p}\right] = x.\log\log x + (V-1)x + o(x),$$

die aus den Sätzen [I] [1] und [3] hervorgeht.

In [II] [1] ist $l4$ und $l5$ im Nenner wohl ein Schreibfehler für $l5$ und $l7$, aber selbst dann wäre die Formel nicht ganz zutreffend, da wie GRAM (K. Danske Vid. Selsk. Skr. Ser. 6, Bd. 7, 1890—1894, S. 1) gezeigt hat, der richtige Wert der gemeinten Anzahl asymptotisch gleich

$$\frac{1}{24}\cdot\frac{(\log n)^4}{\log 2 . \log 3 . \log 5 . \log 7}$$

ist.

Die Bedeutung von [II] [2] haben wir nicht ermitteln können.

Die Aussage [III] [1] hat DIRICHLET (Abhandl. der K. preuß. Akad. d. Wissenschaften 1849, Werke **2**, 1897, S. 59) bewiesen. Bezeichnet man nämlich mit DIRICHLET die Summe der Faktoren von n mit $f(n)$, so hat nach GAUSS

Mitteilungen 1911, S. 26 ff.) enthaltenen Ausführungen von P. BACHMANN und E. LANDAU, sowie einiger schriftlichen Mitteilungen von P. BACHMANN abgefaßt worden. Die zu benutzenden Zeichen O und o haben die folgende Bedeutung (vergl. etwa LANDAU, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen I, Leipzig und Berlin 1909, S. 31 und 61): Es seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei für alle reellen Werte von x, von einem gewissen an, erklärte reelle Funktionen, $g(x)$ positiv; dann bedeutet $f(x) = O(g(x))$, daß es zwei Zahlen ξ und A gibt, so daß für $x \geqq \xi$

$$|f(x)| < A\,g(x)$$

ist, und $f(x) = o(g(x))$, daß

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

$$\frac{f(1)+f(2)+\cdots+f(n)}{\frac{1}{2}n(n+1)}$$

den asymptotischen Wert $\frac{\pi^2}{6}$, was offenbar auf die von DIRICHLET a. a. O. bewiesene Gleichung

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(n) = \frac{\pi^2}{12}n^2+O(n.\log n)$$

hinauskommt.

Die Aussagen [III] [2] und [3] finden in der von DIRICHLET (a. a. O., S. 60—64) bewiesenen Formel

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\cdots+\varphi(n) = \frac{3}{\pi^2}n^2+O(n^\delta)$$

ihren Ausdruck, wo $\varphi(n)$ die Anzahl der zu n teilerfremden Zahlen nicht größer als n und δ eine zwischen 1 und 2 gelegene Größe bedeutet. In [III] [3] wird der Fall $n = 30$ betrachtet. Es ist für $n = 30$

$$\sum_{m=1}^{30}\varphi(m) = 278.$$

Nun ist aber

$$(4-1)(3^2-1)(5^2-1) = 576 = 2.288,$$

also *angenähert*

$$\frac{\sum\limits_{m=1}^{30}\varphi(m)}{30.30} = \frac{1}{2}\,\frac{(2^2-1)(3^2-1)(5^2-1)}{2^2.3^2.5^2} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1.3}{2.2}\cdot\frac{2.4}{3.3}\cdot\frac{4.6}{5.5}.$$

Analog ist dann allgemein *angenähert*

$$\frac{\sum\limits_{m=1}^{n}\varphi(m)}{nn} = \frac{1}{2}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{2}\prod\frac{p-1.p+1}{pp}.$$

Aus derselben DIRICHLETschen Formel läßt sich auch der in [IV] [1] gegebene asymptotische Ausdruck erschließen.

In [IV] [2] finden wir eine Formel für den Mittelwert der Anzahl der Geschlechter binärer quadratischer Formen der Determinante $-N$, die in den artt. 301—302 der *Disqu. Arithm.* in viel schärferer Fassung auftritt.

Der Beweis von [IV] [4] ergibt sich aus der genannten Abhandlung von DIRICHLET (a. a. O. S. 52—57); die von GAUSS angegebene Konstante stimmt in allen fünf Dezimalen mit dem richtigen Werte $2C-1$ überein, wo C die EULER-MASCHERONIsche Konstante bedeutet.

Man vergleiche auch die Artikel **26** und **27** des in der zweiten Abteilung dieses Bandes abgedruckten Aufsatzes von P. BACHMANN »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten«.

SCHLESINGER.