

ДИФФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ НА СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ

*Д. В. Сивухин*

Дано общее решение задачи о диффракции плоской звуковой волны на сферической полости. При малых модулях сдвига, когда размеры полости порядка длины поперечной звуковой волны, наблюдается хорошо выраженный резонанс. Выведена общая формула для эффективного поперечника рассеяния. Исследовано рассеяние за счет излучения шаровой и дипольных волн. Исследовано поглощение за счет излучения шаровой волны.

1. Задача о диффракции звуковой волны на сферической полости представляет определенный теоретический и практический интерес в связи с тем, что при малых модулях сдвига наблюдается хорошо выраженный резонанс, на существование которого обратил внимание М. А. Исакович. Упругие свойства среды мы будем характеризовать постоянными Ламэ  $\lambda$  и  $\mu$ . Резонанс может наблюдаться тогда, когда модуль сдвига  $\mu$  мал по сравнению с модулем  $\lambda$ . К средам, обладающим этими свойствами, относятся прежде всего резины. Условие резонанса состоит в том, чтобы длина падающей продольной волны была велика по сравнению с размерами полости, а длина возбуждаемых поперечных волн была порядка размера полости.

Уравнения линейной теории упругости для монохроматических полей можно записать в виде

$$\rho\omega^2 s + \mu\Delta s + (\lambda + \mu) \text{grad div } s = 0, \tag{1}$$

где  $s$  — вектор смещения частицы среды из положения равновесия,  $\omega$  — круговая частота колебаний,  $\rho$  — плотность среды.

В случае поглощающих сред величины  $\lambda$  и  $\mu$  комплексны и, вообще говоря, зависят от частоты  $\omega$ .

Положим

$$s = \text{grad } \varphi + \text{rot } A. \tag{2}$$

Потенциалы  $\varphi$  и  $A$  всегда можно выбрать так, чтобы они удовлетворяли уравнениям

$$\rho\omega^2\varphi + (\lambda + 2\mu)\Delta\varphi = 0,$$

$$\rho\omega^2 A + \mu\Delta A = 0.$$

Доказательство этой теоремы проводится в точности так же, как и аналогичной теоремы, доказанной в [1]. Мы его опускаем. Введем волновые числа для продольных и поперечных волн:

$$k^2 = \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu}; \quad q^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu}. \tag{3}$$

Тогда

$$\Delta\varphi = k^2\varphi = 0; \quad \Delta A + q^2 A = 0. \tag{4}$$



Волны, описываемые скалярным потенциалом  $\varphi$ , сопровождаются изменениями плотности среды; волны, описываемые векторным потенциалом  $\mathbf{A}$ , не связаны с изменением плотности. Волны первого типа мы ради краткости будем называть продольными, а второго типа — поперечными, хотя о продольном или поперечном характере колебаний можно говорить лишь в случае плоских волн или сферических волн в волновой зоне. Их скорости распространения равны соответственно:

$$c = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}; \quad c' = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (5)$$

2. Допустим, что в неограниченной упругой среде имеется сферическая полость радиуса  $R$ , на которую падает плоская монохроматическая продольная волна:

$$\varphi^0 = \exp \{i(\omega t - kz)\}, \quad (6)$$

распространяющаяся в направлении оси  $Z$ . Требуется определить звуковое поле в среде.

Решение этой задачи однозначно определяется уравнениями (4) и граничными условиями к ним. Поскольку полость ничем не заполнена, последние требуют, чтобы на границе полости обращались в нуль тангенциальные и нормальные напряжения, вызванные звуковыми колебаниями, а в бесконечности было соблюдено условие излучения, согласно которому добавочное звуковое поле, накладывающееся на падающую волну, должно состоять только из уходящих волн. Полученное решение приближенно годится и в том случае, когда полость заполнена воздухом, так как упругость воздуха мала по сравнению с упругостью всех известных твердых и жидких сред, вследствие чего изменениями давления воздуха внутри полости, связанными с ее деформацией, можно пренебречь по сравнению с изменениями упругих напряжений в окружающей среде.

3. Поместим начало координат в центре полости и введем сферическую систему координат:  $r, \vartheta, \alpha$ , направив полярную ось  $Z$  вдоль направления распространения падающей волны. В силу осевой симметрии вектор смещения  $\mathbf{s}$ , а также тензор напряжений  $T_{ij}$  не могут зависеть от азимутального угла  $\alpha$ . Нормальное и тангенциальное напряжения

$$\left. \begin{aligned} T_{rr} &= \lambda \operatorname{div} \mathbf{s} + 2\mu \frac{\partial s_r}{\partial r}, \\ T_{r\vartheta} = T_{\vartheta r} &= \mu \left( \frac{\partial s_\vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_r}{\partial \vartheta} - \frac{s_\vartheta}{r} \right) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

на границах полости должны обращаться в нуль.

Векторный потенциал  $\mathbf{A}$  можно выбрать так, что в сферической системе координат он будет содержать только одну компоненту, отличную от нуля, именно компоненту  $A_\alpha$ . Действительно, вектор смещения  $\mathbf{s}$ , а следовательно, и  $\operatorname{rot} \mathbf{A}$  являются векторами полярными. Значит, вектор  $\mathbf{A}$  должен быть аксиальным. Единственные векторы, из которых он может быть составлен, это радиус-вектор  $\mathbf{r}$  и волновой вектор  $\mathbf{k}$  падающей волны. Из этих же полярных векторов можно составить только такие аксиальные векторы, которые коллинеарны с векторным произведением  $[\mathbf{k}\mathbf{r}]$ , т. е. векторы, касательные к параллелям:  $r = \text{const}$ ,  $\vartheta = \text{const}$ .

В справедливости этого утверждения можно убедиться также из выражений

$$\left. \begin{aligned} s_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\alpha) \\ s_\vartheta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\alpha)}{\partial r}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

в которые компоненты  $A_r$  и  $A_\vartheta$  не входят. В дальнейшем единственную компоненту  $A_\alpha$  вектора  $\mathbf{A}$  мы будем обозначать просто через  $A$ :  $A_\alpha \equiv A$ .

Подставляя (8) в (7), получим

$$\begin{aligned} T_{rr} &= -\lambda k^2 \varphi + 2\mu \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \vartheta} + \operatorname{ctg} \vartheta \frac{\partial A}{r} \right), \right. \\ T_{r\vartheta} &= \mu \left[ 2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) - \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial \vartheta^2} + \operatorname{ctg} \vartheta \frac{\partial A}{\partial \vartheta} \right) + \left( 2 - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \right) \frac{A}{r^2} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

4. Разложим падающую волну (6) в ряд по полиномам Лежандра:

$$\varphi^0 = \exp \{-ikr \cos \vartheta\} = \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^m (2m+1) j_m(kr) P_m(\cos \vartheta) \quad (10)$$

(временной множитель  $e^{i\omega t}$  здесь и в дальнейшем опущен). Здесь  $j_m$  — сферическая функция Бесселя  $m$ -го порядка:

$$j_m(x) = (-1)^m x^m \frac{d^m}{(xdx)^m} \frac{\sin x}{x}. \quad (11)$$

Нам понадобятся также сферические функции Неймана

$$n_m(x) = (-1)^{m+1} x^m \frac{d^m}{(xdx)^m} \frac{\cos x}{x}, \quad (12)$$

а также сферические функции Ганкеля 1-го и 2-го рода

$$h_m^{(1)}(x) = j_m(x) + in_m(x) = i(-1)^{m+1} x^m \frac{d^m}{(xdx)^m} \frac{e^{ix}}{x}, \quad (13)$$

$$h_m^{(2)}(x) = j_m(x) - in_m(x) = i(-1)^m x^m \frac{d^m}{(xdx)^m} \frac{e^{-ix}}{x}. \quad (14)$$

Сферические функции Бесселя и Неймана сравнительно недавно табулированы в [2] для вещественных значений  $x$ .

Потенциал  $\varphi$  мы будем искать в виде

$$\varphi = \varphi^0 + \Phi(r, \vartheta). \quad (15)$$

Функция  $\Phi$ , очевидно, удовлетворяет уравнению (4), а поэтому общее выражение для  $\Phi$ , удовлетворяющее условию излучения, должно иметь вид:

$$\Phi = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m b_m (2m+1) h_m^{(2)}(kr) P_m(\cos \vartheta), \quad (16)$$

где  $b_m$  — постоянные.

Для определения  $A$  заметим, что вектор  $\mathbf{A}$ , а с ним и любая проекция на декартовы оси координат, например  $A_x$ , удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta A_x + q^2 A_x = 0.$$

Поэтому  $A_x$  должна иметь вид, аналогичный (16). Только вместо полиномов Лежандра будут входить какие-то другие сферические функции  $Y_m(\vartheta, \alpha)$ . Чтобы установить вид этих функций, заметим, что  $A_x = -A \sin \alpha$ , причем  $A$  может зависеть только от  $r$  и  $\vartheta$ , но не зависит от  $\alpha$ . Следовательно, сферическая функция  $Y_m(\vartheta, \alpha)$  должна распадаться на два множителя, из которых один есть  $\sin \alpha$ , а второй зависит



только от  $\vartheta$ . Общий вид таких функций, как известно, следующий:

$$Y_m(\vartheta, \alpha) = P_{m,1}(\cos \vartheta) \sin \alpha,$$

где  $P_{m,1}(\cos \vartheta)$  — присоединенный полином Лежандра:

$$P_{m,1}(\cos \vartheta) = \sin \vartheta \frac{dP_m(\cos \vartheta)}{d(\cos \vartheta)}.$$

Итак,

$$A = \sum_{m=1}^{\infty} (-i)^m a_m (2m+1) h_m^{(2)}(qr) P_{m,1}(\cos \vartheta). \quad (17)$$

Коэффициенты  $a_m$  и  $b_m$  определяются из требования, чтобы при  $r = R$  напряжения  $T_{rr}$  и  $T_{r\vartheta}$  обращались в нуль.

Длинные и утомительные вычисления приводят к результатам:

$$b_0 = - \frac{j_0(kR) + 2\gamma^2 \left[ j_0(kR) - 2 \frac{j_1(kR)}{kR} \right]}{h_0^{(2)}(kR) + 2\gamma^2 \left[ h_0^{(2)}(kR) - 2 \frac{h_1^{(2)}(kR)}{kR} \right]}, \quad (18)$$

$$b_m = - \frac{\Delta'_m}{\Delta_m}, \quad a_m = - \frac{\Delta''_m}{\Delta_m}, \quad (19)$$

где

$$\gamma = + \sqrt{\frac{\mu}{\gamma}}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \Delta_m = & \left\{ 1 + 2\gamma^2 \left[ 1 - \frac{(m+2)(2m+1)}{k^2 R^2} \right] \right\} h_m^{(2)}(kR) h_m^{(2)}(qR) + \\ & + \frac{2\gamma}{kR \sqrt{1+2\gamma^2}} \left\{ 1 + 2\gamma^2 \left[ 1 + \frac{(m^2-1)(m+2)}{k^2 R^2} \right] \right\} h_m^{(2)}(kR) h_{m-1}^{(2)}(qR) + \\ & + \frac{4\gamma^2}{kR} \left[ 1 + \gamma^2 \frac{(m-1)m(m+2)}{k^2 R^2 (1+2\gamma^2)} \right] h_{m-1}^{(2)}(kR) h_m^{(2)}(qR) + \\ & + \frac{4\gamma^3}{k^2 R^2 \sqrt{1+2\gamma^2}} [2 - m(m+1)] h_{m-1}^{(2)}(kR) h_{m-1}^{(2)}(qR), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \Delta'_m = & \left\{ 1 + 2\gamma^2 \left[ 1 - \frac{(m+2)(2m+1)}{k^2 R^2} \right] \right\} j_m(kR) h_m^{(2)}(qR) + \\ & + \frac{2\gamma}{kR \sqrt{1+2\gamma^2}} \left\{ 1 + 2\gamma^2 \left[ 1 + \frac{(m^2-1)(m+2)}{k^2 R^2} \right] \right\} j_m(kR) h_{m-1}^{(2)}(qR) + \\ & + \frac{4\gamma^2}{kR} \left[ 1 + \gamma^2 \frac{(m-1)m(m+2)}{k^2 R^2 (1+2\gamma^2)} \right] j_{m-1}(kR) h_m^{(2)}(qR) + \\ & + \frac{4\gamma^3}{k^2 R^2 \sqrt{1+2\gamma^2}} [2 - m(m+1)] j_{m-1}(kR) h_{m-1}^{(2)}(qR), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\Delta''_m = \frac{2i}{k^3 R^3} \frac{\gamma^2}{1+2\gamma^2} \left[ 1 + 2\gamma^2 \left( 1 - \frac{(m-1)(m+2)}{k^2 R^2} \right) \right]. \quad (23)$$

При  $x \gg 1$  можно пользоваться асимптотической формулой:

$$h_m^{(2)}(x) = \frac{i^{m+1}}{x} e^{-ix} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right]. \quad (24)$$

Поэтому в волновой зоне ( $kr \gg 1$ ,  $qr \gg 1$ )

$$\Phi = \frac{ie^{-ikr}}{kr} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) b_m P_m(\cos \vartheta), \quad (25)$$

$$A = i \frac{e^{-iqr}}{qr} \sum_{m=1}^{\infty} (2m+1) a_m P_{m,1}(\cos \vartheta). \quad (26)$$

Таким образом, на падающую волну накладывается поле излучения полости. Оно состоит из продольных и поперечных волн. Излучаемые волны слагаются из шаровой ( $m = 0$ ), дипольных ( $m = 1$ ), квадрупольных ( $m = 2$ ) и прочих мультипольных волн. В излучении поперечных волн шаровая компонента отсутствует. При  $\mu = 0$  излучаются только продольные волны. В этом случае

$$b_m = -\frac{j_m(kR)}{h_m^{(2)}(kR)}, \quad a_m = 0. \quad (27)$$

В волновой зоне амплитуды потенциалов  $\Phi$  и  $A$  всех волн, а также соответствующих им смещений и скоростей убывают обратно пропорционально первой степени расстояния.

5. Допустим сначала, что поглощение отсутствует ( $\lambda$  и  $\mu$  вещественны). Вычислим среднюю энергию, рассеиваемую полостью в одну секунду. При отсутствии поглощения эта энергия, очевидно, равна среднему потоку энергии через бесконечно удаленную сферу, окружающую полость:

$$\frac{d\bar{W}}{dt} = \oint \bar{S}_r df, \quad (28)$$

где  $\bar{S}$  — вектор средней плотности потока энергии. В линейной теории упругости для  $S$  дается выражение

$$S_r = -T_{ri} v_i = -T_{rr} v_r - T_{r\vartheta} v_\vartheta, \quad (29)$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость частиц среды. Под  $T_{ij}$  и  $\mathbf{v}$  в формулах (28) и (29) следует понимать не полные тензор напряжений и скорость среды, а только их части, связанные с излучением полости. При отсутствии поглощения, средний поток энергии через всякую замкнутую поверхность, окружающую полость, равен нулю. Он состоит из трех слагаемых: потока, даваемого падающей плоской волной, потока энергии излучения волн и взаимного потока, обусловленного их наложением. Первое слагаемое, если его усреднить по времени, в точности равно нулю. Формула (28) дает только третье слагаемое. Пренебрегая в (29) членами третьей и высших степеней относительно  $1/r$ , получим:

$$T_{rr} = \lambda \operatorname{div} \mathbf{s} + 2\mu \frac{\partial s_r}{\partial r} = \lambda \Delta \Phi + 2\mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2},$$

причем в волновой зоне каждый малый участок излучаемой полостью волны можно рассматривать как плоский и на этом основании положить

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = \Delta \Phi = -k^2 \Phi.$$

Это дает

$$T_{rr} = -(\lambda + 2\mu) k^2 \Phi = -\rho \omega^2 \Phi.$$

В том же приближении

$$s_\vartheta = -\frac{\partial A}{\partial r};$$

$$T_{r\vartheta} = \mu \frac{\partial s_\vartheta}{\partial r} = -\mu \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} = -\mu \Delta A = \mu q^2 A = \rho \omega^2 A.$$

Предполагается, что вычисления ведутся в вещественной, а не в комплексной форме. Чтобы перейти к комплексной форме, необходимо сделать замену:

$$T_{ij} \rightarrow \frac{1}{2} (T_{ij} + T_{ij}^*); \quad s_i \rightarrow \frac{1}{2} (s_i + s_i^*) \quad \text{и т. д.}$$



Это дает

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{W}}{dt} &= -\frac{1}{4} \oint T_{ri} v_i^* df + \text{компл. сопр.} = \\ &= -i \frac{\rho\omega^3}{4} \oint \left( \Phi \frac{\partial \Phi^*}{\partial r} + A \frac{\partial A^*}{\partial r} \right) df + \text{компл. сопр.} = \\ &= \frac{\rho\omega^3}{2} \oint (k\Phi\Phi^* + qAA^*) df. \end{aligned}$$

Подставив сюда выражения (25) и (26) и воспользовавшись ортогональностью полиномов Лежандра, получим

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{W}}{dt} &= 2\pi\rho\omega^3 \left\{ \frac{1}{k} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) |b_m|^2 + \right. \\ &\left. + \frac{1}{q} \sum_{m=1}^{\infty} m(m+1)(2m+1) |a_m|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (30)$$

Для характеристики рассеивающей способности сферы введем эффективный поперечник рассеяния  $\sigma_s$ . Это есть отношение средней рассеиваемой в единицу времени энергии к средней плотности потока энергии падающей волны. Последняя величина равна  $\frac{1}{2}\rho\omega^3 k$ , а поэтому

$$\frac{\sigma_s}{\pi R^2} = \frac{4}{k^2 R^2} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) |b_m|^2 + \frac{k}{q} \sum_{m=1}^{\infty} m(m+1)(2m+1) |a_m|^2 \right\}. \quad (31)$$

6. Ввиду сложности формулы (31) мы ограничимся подробным рассмотрением рассеяния только за счет излучения шаровой и дипольных волн. Рассмотрим сначала поперечник рассеяния  $\sigma_s^0$ , связанный с излучением шаровой волны. Переходя к элементарным функциям, получим

$$\frac{\sigma_s^0}{\pi R^2} = 4 \left( \frac{\sin kR}{kR} \right)^2 \frac{\left\{ 1 + 2\gamma^2 \left[ 1 + 2 \frac{kR \operatorname{ctg} kR - 1}{k^2 R^2} \right] \right\}^2}{\left[ 1 + 2\gamma^2 \left( 1 - \frac{2}{k^2 R^2} \right) \right]^2 + \frac{16\gamma^4}{k^2 R^2}}. \quad (32)$$

В частности, при  $\gamma = 0$  (т. е. при  $\mu = 0$ )

$$\frac{\sigma_s^0}{\pi R^2} = 4 \left( \frac{\sin kR}{kR} \right)^2. \quad (33)$$

Особый интерес представляет случай малых, но отличных от нуля значений  $\gamma$  ( $\mu \ll \lambda$ ). Тогда в окрестности тех значений  $kR$ , при которых первый член в знаменателе (32) обращается в нуль, шаровые колебания полости и соответствующее им излучение шаровых волн особенно интенсивны. Мы имеем дело с явлением резонанса. Приравнивая нулю первый член в знаменателе (32), находим приближенную формулу для положения максимума:

$$kR = \frac{2\gamma}{V 1 + 2\gamma^2}. \quad (34)$$

Принимая во внимание, что

$$k = \frac{q\gamma}{V 1 + 2\gamma^2}, \quad (35)$$

формулу (34) можно записать в виде

$$qR = 2. \quad (36)$$

Отсюда видно, что резонанс имеет место в области таких частот, когда длина поперечных звуковых волн порядка размеров полости.

При  $\gamma^2 \ll 1$  вместо (32) можно пользоваться приближенной формулой

$$\frac{\sigma_s^0}{\pi R^2} = 4 \left( \frac{\sin kR}{kR} \right)^2 \frac{\left( 1 + \frac{2}{3} \gamma^2 \right)^2}{\left[ 1 + 2\gamma^2 \left( 1 - \frac{2}{k^2 R^2} \right) \right]^2 + \frac{16\gamma^4}{k^2 R^2}}. \quad (37)$$

Она получается из (32), если  $\text{ctg } kR$  разложить в ряд и оборвать разложение на члене третьей степени. При  $kR \gg 2\gamma$ , т. е. значительно левее области резонанса, эта формула переходит в

$$\frac{\sigma_s^0}{\pi R^2} = \frac{\left( 1 + \frac{2}{3} \gamma^2 \right)^2}{4\gamma^4} k^4 R^4. \quad (38)$$

В этой области поперечник рассеяния пропорционален четвертой степени частоты.

Максимальное значение поперечника рассеяния приблизительно соответствует  $kR = 2\gamma$  и равно

$$\left( \frac{\sigma_s^0}{\pi R^2} \right)_{\text{макс}} = \frac{1}{\gamma^2} = \frac{\lambda}{\mu}. \quad (39)$$

Полуширина резонансной кривой на шкале  $kR$  определяется приближенной формулой

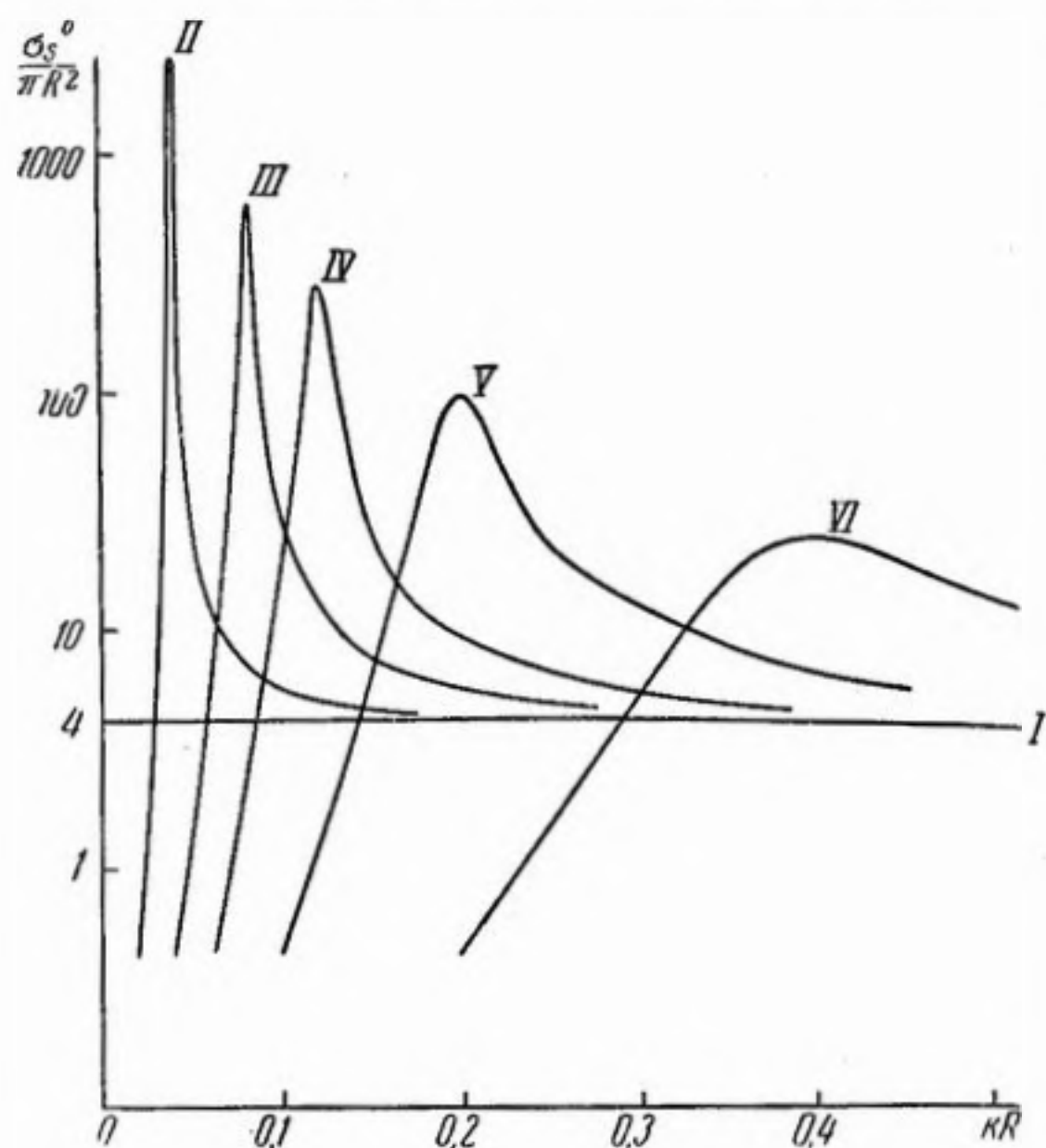
$$\delta(kR) = \frac{4\gamma^2}{1 + 2\gamma^2} = 4\gamma^2. \quad (40)$$

На фиг. 1 приведены в логарифмической шкале резонансные кривые, рассчитанные по формуле (37) для пяти значений  $\gamma$ . При малых

$\gamma$  резонанс очень острый. Интересен предельный переход от формулы (32) к (33) при  $\gamma \rightarrow 0$ . Если  $\gamma$  строго равно нулю, то, естественно, нет никакого резонанса. Если же  $\gamma \neq 0$ , то появляется резонанс и притом тем острее, чем меньше  $\gamma$ . При  $\gamma \rightarrow 0$  резонансная кривая переходит в ось ординат для  $kR = 0$  и в кривую (33) для  $kR \neq 0$ . Разумеется, для того, чтобы при очень малых  $\gamma$  можно было наблюдать резонанс, необходима высокая степень монохроматичности падающей звуковой волны. Время установления колебаний  $\tau$  связано с полушириной резонансной кривой  $\delta\omega$  обычным соотношением:  $\tau\delta\omega \approx 1$ . На основании (40)

$$\tau \approx \frac{R}{c} \frac{1}{4\gamma^2} = \frac{\tau_0}{4\gamma^2}, \quad (41)$$

где  $\tau_0$  — время, затрачиваемое звуком для прохождения расстояния  $R$ .



Фиг. 1. Эффективный поперечник рассеяния шаровой полости за счет излучения шаровых волн при отсутствии поглощения в среде

I — для  $\mu=0$  ( $\gamma=0$ ); II — для  $\frac{\mu}{\lambda}=0,0004$  ( $\gamma=0,02$ ); III — для  $\frac{\mu}{\lambda}=0,0016$  ( $\gamma=0,04$ ); IV — для  $\frac{\mu}{\lambda}=0,0036$  ( $\gamma=0,06$ ); V — для  $\frac{\mu}{\lambda}=0,01$  ( $\gamma=0,1$ ); VI — для  $\frac{\mu}{\lambda}=0,04$  ( $\gamma=0,2$ )



Впрочем, указанный предельный переход имеет лишь формальный характер, поскольку линейная теория упругости, на которой основывалось решение задачи, при очень больших амплитудах колебаний неприменима.

7. Поперечник рассеяния за счет излучения дипольных волн складывается из двух членов:  $\sigma_{sk}^{(1)}$  — поперечника рассеяния за счет излучения продольных и  $\sigma_{sq}^{(1)}$  — за счет излучения поперечных волн. Здесь также целесообразно выразить сферические функции Бесселя и Ганкеля через элементарные. В результате получим

$$\frac{\sigma_{sk}^{(1)}}{\pi R^2} = \frac{\Delta_{sk}^{(1)}}{\Delta_s^{(1)}}; \quad \frac{\sigma_{sq}^{(1)}}{\pi R^2} = \frac{\Delta_{sq}^{(1)}}{\Delta_s^{(1)}}, \quad (42)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_s^{(1)} &= \left\{ \left[ 1 + 2\gamma^2 \left( 1 - \frac{9}{k^2 R^2} \right) \right] \left[ k^2 R^2 \sqrt{1 + 2\gamma^2} - \gamma \right] - 2\gamma (1 + 4\gamma^2) \right\}^2 + \\ &+ \gamma^2 k^2 R^2 \left\{ \left[ 1 + 2\gamma^2 \left( 1 - \frac{9}{k^2 R^2} \right) \right] \left[ \gamma + \sqrt{1 + 2\gamma^2} \right] + 2\gamma \left[ 1 + 2\gamma^2 + 2\gamma \sqrt{1 + 2\gamma^2} \right] \right\}^2, \\ \Delta_{sk}^{(1)} &= \frac{12\gamma^2}{(kR)^2} \left[ \left\{ 3 \left[ 1 + 2\gamma^2 \left( 1 - \frac{3}{k^2 R^2} \right) \right] (kR \cos kR - \sin kR) - 4\gamma^2 \sin kR \right\}^2 + \right. \\ &+ \left. (1 + 2\gamma^2) k^2 R^2 \left\{ \left[ 1 + 2\gamma^2 \left( 1 - \frac{9}{k^2 R^2} \right) \right] (kR \cos kR - \sin kR) - 4\gamma^2 \sin kR \right\}^2 \right], \\ \Delta_{sq}^{(1)} &= 384 (\gamma \sqrt{1 + 2\gamma^2})^3 kR. \end{aligned}$$

При малых  $\gamma$  величины (42) достигают максимума приблизительно для тех значений  $kR$ , при которых обращается в нуль первая фигурная скобка в выражении для знаменателя  $\Delta_s^{(1)}$ . Приравнявая ее нулю, мы получаем квадратное относительно  $(kR)^2$  уравнение, оба корня которого положительны. Им соответствуют два резонансных максимума, положение которых при малых  $\gamma$  довольно точно определяется приближенными формулами

1-й максимум:

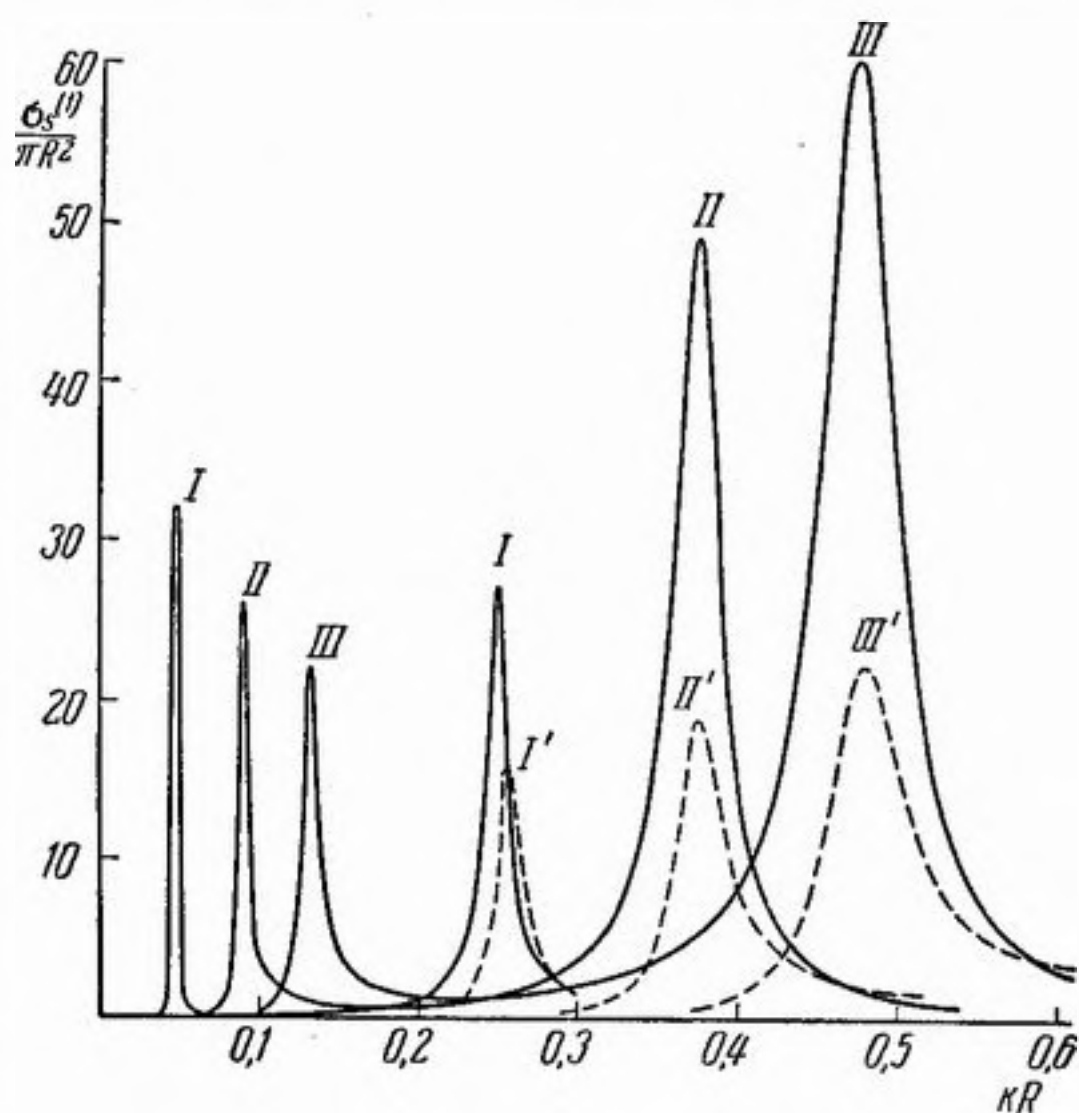
$$kR = \gamma \sqrt{6} (1 - 2\gamma), \quad (43)$$

2-й максимум:

$$kR = \sqrt{3\gamma(1 + 4\gamma)}. \quad (44)$$

Впрочем, первый максимум хорошо выражен лишь на кривых рассеяния поперечных волн; в случае рассеяния продольных волн он абсолютно и относительно выражен очень слабо. О характере резонанса при рассеянии дипольных волн можно судить по кривым на фиг. 2—3. Сплошные кривые соответствуют рассеянию поперечных, а пунктирные — продольных волн.

8. При  $m \geq 2$  переход к элементарным функциям не дает упрощения. Здесь лучше пользоваться непосредственно таблицами сферических бес-

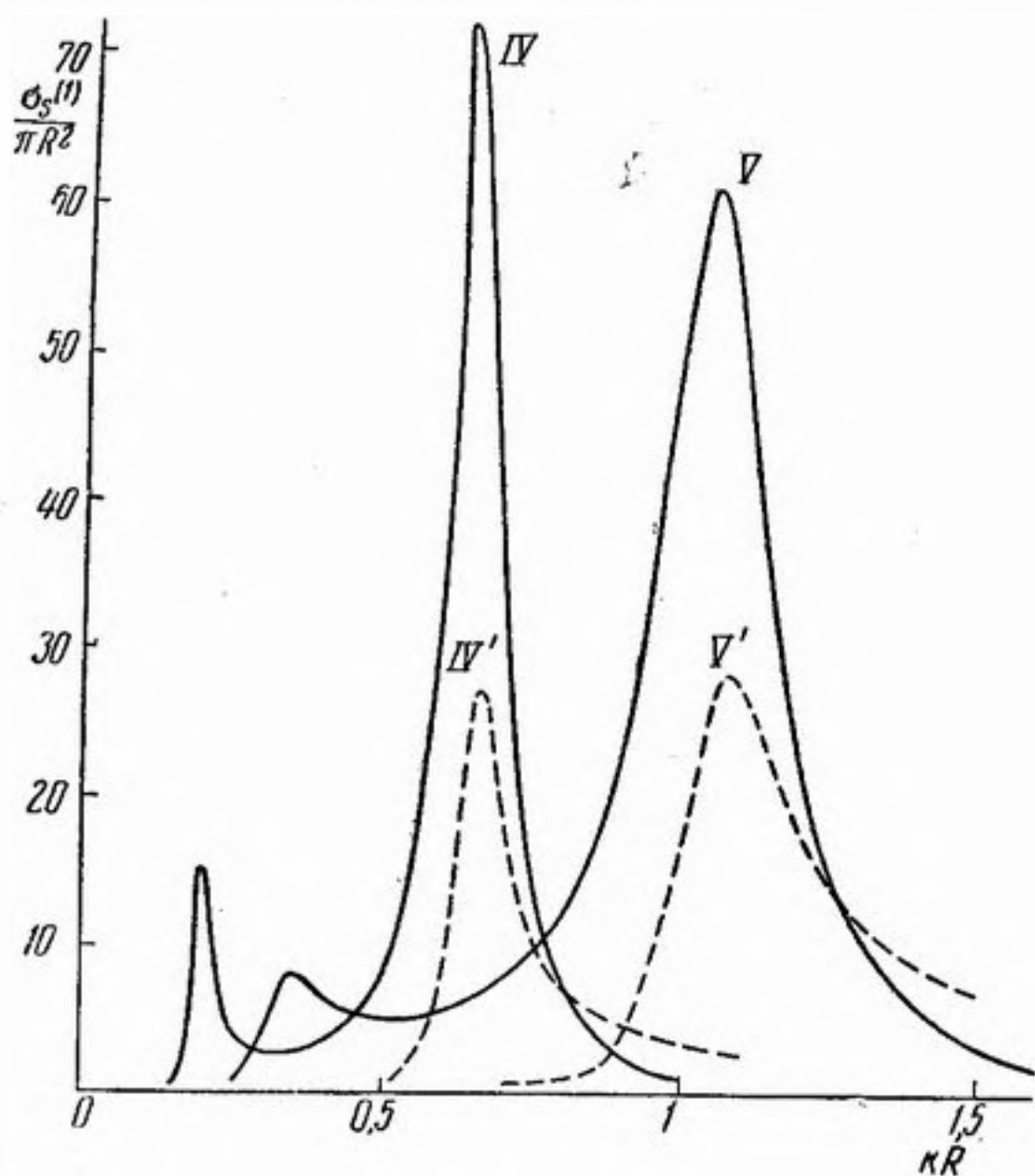


Фиг. 2. Эффективный поперечник рассеяния шаровой полости за счет излучения дипольных волн при отсутствии поглощения в среде. Сплошные кривые для поперечных, пунктирные — для продольных волн. I и I' — для  $\frac{\mu}{\lambda} = 0,0004$  ( $\gamma = 0,02$ ); II и II' для  $\frac{\mu}{\lambda} = 0,0016$  ( $\gamma = 0,04$ ); III и III' для  $\frac{\mu}{\lambda} = 0,0036$  ( $\gamma = 0,06$ )



селевых функций. Однако вычисления становятся слишком громоздкими. Мы не будем их производить, а заметим только следующее. Как видно из сравнения шаровой и дипольных волн, при малых  $kR$  последние не играют существенной роли. Еще в большей степени это относится к квадрупольному излучению и к излучениям высшей мультипольности. В наиболее интересном случае малых  $kR$  все эти излучения не играют существенной роли; основное значение имеет излучение шаровых волн.

9. Перейдем теперь к исследованию того случая, когда  $\lambda$  и  $\mu$  комплексны, т. е. среда, в которой распространяется звук, поглощающая. Ввиду сложности вычислений ограничимся исследованием рассеяния



Фиг. 3. Эффективный поперечник рассеяния шаровой полости за счет излучения дипольных волн при отсутствии поглощения в среде

Сплошные кривые для поперечных, пунктирные — для продольных волн. IV и IV' — для  $\frac{\mu}{\lambda} = 0,01$  ( $\gamma = 0,1$ ); V и

V' — для  $\frac{\mu}{\lambda} = 0,04$  ( $\gamma = 0,2$ )

пренебречь, а также пренебречь мультипольным излучением, то все поле сведется к шаровой волне:

$$\varphi = \frac{i}{kr} e^{-ikr} b_0 P_0(\cos \vartheta) = \frac{ib_0}{kr} e^{-ikr}. \quad (46)$$

Поскольку  $k_2 \ll k_1$ , ослабление поля вследствие экспоненциального множителя  $e^{-k_2 r}$  очень слабое. В неволновой зоне им можно пренебречь. В таком случае плотность потока энергии, достигающего волновой зоны, будет пропорциональна  $1/r^2$ , а полный поток не будет зависеть от  $r$ . Эту часть энергии излучения полости, т. е. ту, которая достигает волновой зоны, мы будем называть рассеянной. Ту же энергию, которая теряется в неволновой зоне, т. е. вблизи полости, будем называть поглощенной. Здесь потенциал меняется как  $1/r$ , скорость и смещение как  $1/r^2$ , тензор напряжений как  $1/r^3$ . Следовательно, плотность потока энергии будет пропорциональна  $1/r^5$ , а полный поток  $1/r^3$ . Такое быстрое убывание

и поглощения только шаровых волн. Формулы для рассеяния и поглощения мультипольных излучений можно было бы получить сравнительно нетрудно. Однако они мало что могут дать, поскольку таблиц сферических бесселевых функций для комплексных значений аргумента не существует. Наши результаты будут, следовательно, относиться к области не слишком высоких частот, в которой можно пренебречь мультипольным излучением.

Теперь волновое число комплексно:

$$k = k_1 - ik_2. \quad (45)$$

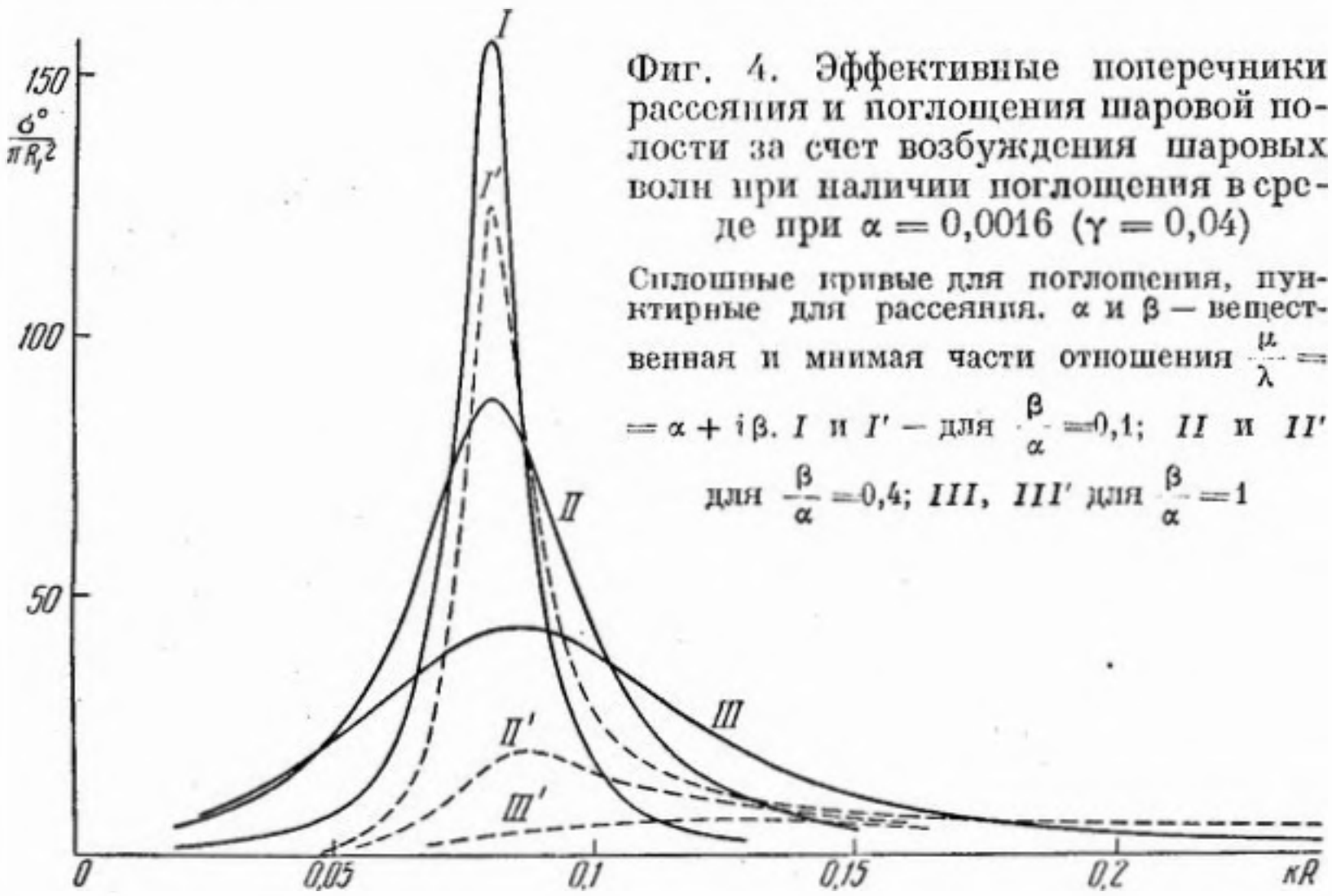
Мы ограничимся случаем, когда  $k_2 \ll k_1$ . В этом случае имеет смысл разделить энергию, излучаемую полостью, на рассеиваемую и поглощаемую. В самом деле, вблизи полости поле падающей волны мало по сравнению с полем излучаемой шаровой волны. Если им пренебречь, а также пренебречь мультипольным излучением, то все поле сведется к шаровой волне:

потока энергии связано с сильным поглощением энергии вблизи полости; поглощаемая энергия обратно пропорциональна кубу радиуса полости.

Поперечник рассеяния по прежнему будет выражаться формулой

$$\frac{\sigma_s^0}{\pi R^2} = \frac{4}{|kR|^2} |b_0|^2. \quad (47)$$

Влияние комплексности  $\lambda$  и  $\mu$  скажется на значении  $|b_0|$ . Проведя вычисления с той же точностью, что и при выводе формулы (37),



Фиг. 4. Эффективные поперечники рассеяния и поглощения шаровой полости за счет возбуждения шаровых волн при наличии поглощения в среде при  $\alpha = 0,0016$  ( $\gamma = 0,04$ )

Сплошные кривые для поглощения, пунктирные для рассеяния.  $\alpha$  и  $\beta$  — вещественная и мнимая части отношения  $\frac{\mu}{\lambda} = \alpha + i\beta$ . I и I' — для  $\frac{\beta}{\alpha} = 0,1$ ; II и II' для  $\frac{\beta}{\alpha} = 0,4$ ; III, III' для  $\frac{\beta}{\alpha} = 1$

получим

$$\frac{\sigma_s^0}{\pi R^2} = \frac{4 \left(1 + \frac{2}{3} \alpha\right)^2 \left(\frac{\sin kR}{kR}\right)}{\left[1 + 2\alpha \left(1 - \frac{2}{k^2 R^2}\right) + \frac{4\beta}{kR}\right]^2 + 4 \left[\frac{2\alpha}{kR} - \beta + \frac{2\beta}{k^2 R^2}\right]^2}, \quad (48)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — вещественные величины, смысл которых ясен из выражения

$$\gamma^2 = \frac{\mu}{\lambda} = \alpha + i\beta. \quad (49)$$

При этом  $\beta \ll \alpha$ . При выводе формулы (48) мы пренебрегли в числителе членом, пропорциональным  $\beta^2$ . Величина  $k$  в формуле (48) означает вещественную часть волнового числа.

10. Энергию, поглощаемую в одну секунду, можно найти, вычислив поток энергии через поверхность полости и отняв от него рассеянную энергию. Для средней плотности потока энергии имеем

$$\bar{S}_r = -\frac{1}{4} T_{rr} v_r^* + \text{компл. сопр.} \quad (50)$$

Здесь

$$v_r = \frac{\partial s_r}{\partial t} = \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial r} = -i\omega \varphi \left(ik + \frac{1}{r}\right),$$

$$T_{rr} = \lambda \operatorname{div} s + 2\mu \frac{\partial s_r}{\partial r} = \left[-\rho\omega^2 + 4\mu \left(\frac{ik}{r} + \frac{1}{r^2}\right)\right] \varphi.$$

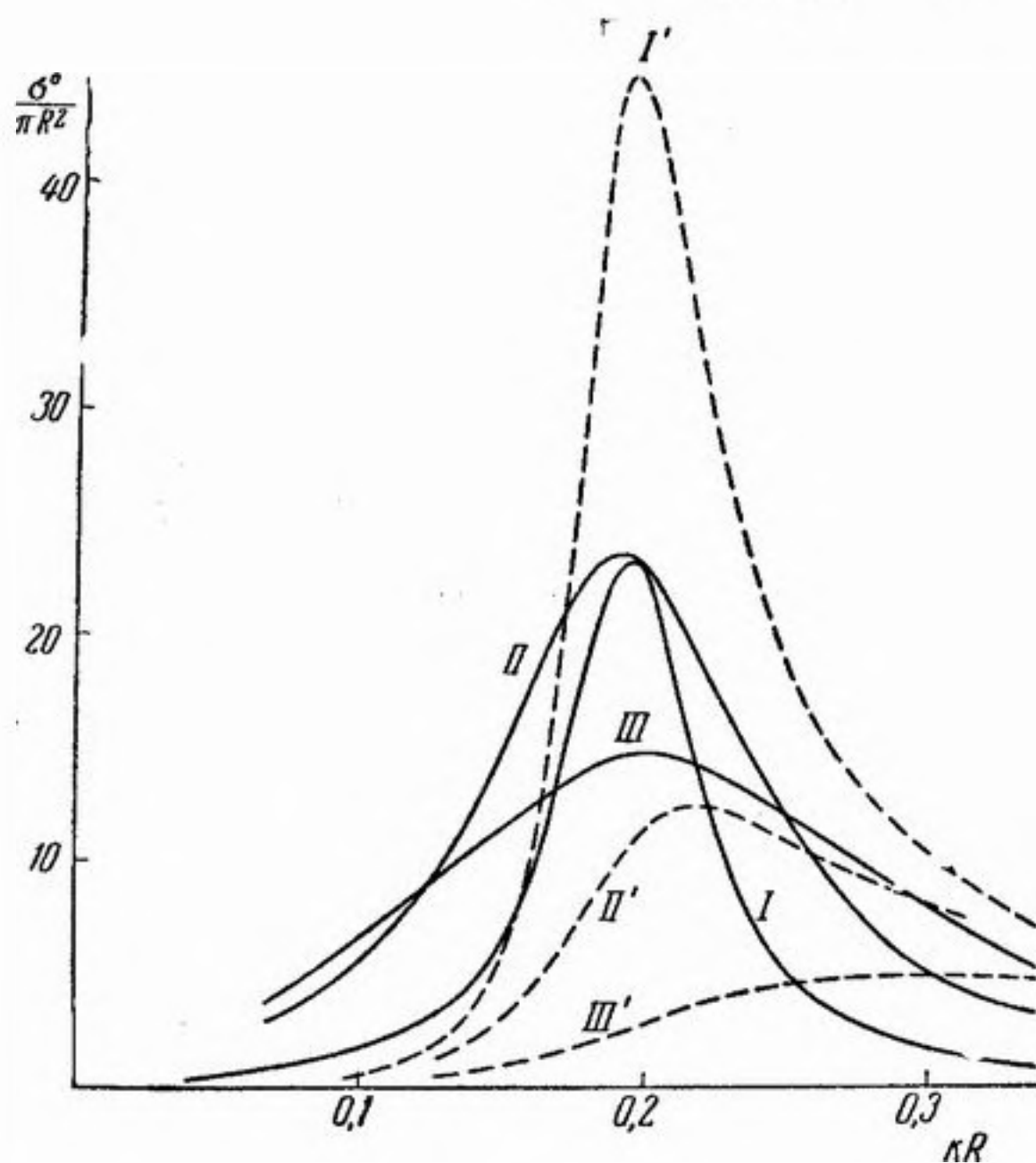


Пользуясь этими выражениями, легко получить

$$\bar{S}_r = \frac{\omega\varphi\varphi^*}{2} \left\{ \rho\omega^2 k_1 + \frac{4\mu_2}{r} (k_1^2 + k_2^2) + \frac{8\mu_2 k_2}{r^2} + \frac{4\mu_2}{r^3} \right\}.$$

Пренебрежем здесь членами, содержащими малую величину  $k_2$ . Тогда для эффективного поперечника поглощения найдем

$$\sigma_c^0 = \frac{4\mu_2 (1 + k^2 R^2)}{R^3 \rho \omega^2 k} \sigma_s^0. \quad (51)$$



Фиг. 5. Эффективные поперечники рассеяния и поглощения шаровой полости за счет возбуждения шаровых волн при наличии поглощения в среде при  $\alpha = 0,01$  ( $\gamma = 0,1$ )

Сплошные кривые для поглощения, пунктирные для рассеяния.  $\alpha$  и  $\beta$  — вещественная и мнимая части отношения  $\frac{\mu}{\lambda} = \alpha + i\beta$ . I и I' — для  $\frac{\beta}{\alpha} = 0,1$ ; II и II' — для  $\frac{\beta}{\alpha} = 0,4$ ; III и III' — для  $\frac{\beta}{\alpha} = 1$

Это выражение можно упростить, пользуясь малостью  $\mu$  по сравнению с  $\lambda$ . Пренебрегая в первой формуле (3) величиной  $\mu$ , имеем  $\rho\omega^2 = \lambda k^2$ . Подставляя это значение в выражения (51), получим окончательно

$$\sigma_c^0 = \frac{4\beta}{k^3 R^3} (1 + k^2 R^2) \sigma_s^0. \quad (52)$$

На фиг. 4 и 5 сплошными линиями изображены кривые для поперечника поглощения, а пунктирными для поперечника рассеяния.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Д. В. Сивухин, ЖЭТФ, 1940, 10, 679.
2. Tables of spherical Bessel functions. New York. Columbia University press. 1947.

Институт физических проблем АН СССР  
им. С. И. Вавилова  
Москва

Поступила в редакцию  
2 октября 1954 г.