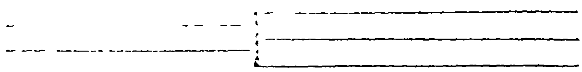
ZUR MATHEMATISCHEN THEORIE

DER ELECTRODYNAMISCHEN WIRKUNGEN.

[1.]

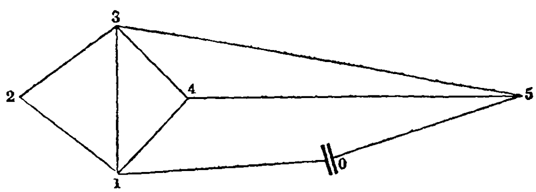
Das allgemeine Grundgesetz für die *Intensität in den einzelnen Theilen eines galvanischen Stromsystems* wird sich auf folgende Ansicht zurückführen lassen:

Man hat nur nöthig, Drähte von gleicher Dicke in Betracht zu ziehen, da man für ungleichförmige durch die Zahl der Drähte aushelfen kann; wäre z. B. ein Draht in einem Theile $= 2$, in einem andern $= 3$ stark, so könnte man dafür das System



substituiren.

So handelt es sich um die Intensität an jeder Stelle eines zu einem Netz verknüpften Systems von Linien



Man braucht statt derselben nur die Punkte, wo mehr als 2 Linien zusammentreffen, und die Kraftsitze zu betrachten. Für jeden Punkt des Systems hat die Intensität *einen* Werth, für die Kraftsitze *zwei*.

Das allgemeine Grundgesetz ist nun, dass wenn A ein beliebiger Punkt ist, A', A'', A'''.. Punkte, die jeder mit A einfach verbunden sind, und es keinen Punkt B gibt, so dass nicht AB entweder ein Stück von AA', AA'', AA'''.. wäre oder umgekehrt, man für jeden Punkt etwas einer Höhe analoges anzunehmen hat, also a im Punkt A; a' im Punkt A' u. s. w., dass dann immer

$$0 = \frac{a'-a}{AA'} + \frac{a''-a}{AA''} + \frac{a'''-a}{AA'''} + \ldots$$

und dass dann immer die einzelnen Theile dieses Aggregats die Stromintensität in den einzelnen Theilen ausdrücken.

Die allgemeine Auflösung obiger Aufgabe besteht in Folgendem: Es seien A^0, A^{n+1} die beiden Pole, A', A'', A''' etc. A^n die einzelnen Knotenpunkte des Systems, $\frac{1}{f^{\alpha,\beta}}$ der ganze Widerstand auf dem einfachen Wege von A^α nach A^β, wo also der Nenner $= 0$ zu setzen ist, wenn zwischen den Punkten eine directe Verbindung fehlt; man bestimme aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}
&(f^{1,0}+f^{1,2}+f^{1,3}+\ldots)p' - f^{1,0}p^0 - f^{1,2}p'' - f^{1,3}p''' - \text{ etc.} = 0\\
&(f^{2,0}+f^{2,1}+f^{2,3}+\ldots)p'' - f^{2,0}p^0 - f^{2,1}p' - f^{2,3}p''' - \text{ etc.} = 0\\
&(f^{3,0}+f^{3,1}+f^{3,2}+\ldots)p''' - f^{3,0}p^0 - f^{3,1}p' - f^{3,2}p'' - \text{ etc.} = 0
\end{aligned}$$

u. s. w. in Verbindung mit folgenden

p^0 willkürlich, $p^{n+1} = p^0 + k$, k die erzeugende Kraft bedeutend,

die Grössen p', p'', p'''.. dann ist Stromkraft zwischen A^α und A^β

$$= f^{\alpha,\beta}(p^\beta - p^\alpha)$$

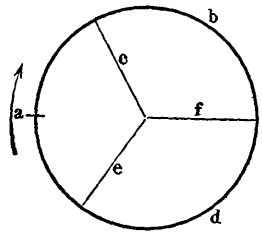
Noch einfacher lässt sich das Grundprincip folgendermaassen darstellen.

In jedem Punkt findet ein *bestimmter* Druck statt, sobald an *Einem* Punkt dessen Werth willkürlich angenommen ist. Zwei Sätze reichen dann zu, alles in Gleichungen zu bringen.

I. Sind A, B zwei Punkte, zwischen welchen kein Knotenpunkt ist, ist P die Summe der Kräfte zwischen diesen Punkten von A nach B zu geschätzt, ρ der Gesammtwiderstand zwischen diesen Punkten; a, b die Werthe des Drucks für jene Punkte, so ist $\frac{a-b+P}{\rho}$ = Intensität des Stromes von A nach B zu.

II. Die Summe der Intensitäten aller Ströme von Einem Punkte aus gerechnet (mehr als zwei wenn ein Knotenpunkt) ist $= 0$.

[2.]



In dem Schema, seien a, b, c, d, e, f die Widerstände in den bezeichneten Stücken, in a die Stromquelle, ferner

$$(b+c)(d+e)+f(b+d+c+e) = p$$
$$bcde\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right)+f(b+d)(c+e) = q$$

dann ist der Gesammtwiderstand des Systems ohne das Stück a

$$= \frac{q}{p}$$

die Intensität

$$A = \frac{(b+c)(d+e)+f(b+c+d+e)}{ap+q} = \frac{p}{ap+q}$$
$$B = \frac{cd+ce+cf+ef}{ap+q}$$
$$C = \frac{bd+be+bf+df}{ap+q}$$
$$D = \frac{be+ce+cf+ef}{ap+q}$$
$$E = \frac{bd+cd+bf+df}{ap+q}$$
$$F = \frac{be-cd}{ap+q}$$

Das Grundprincip führt zugleich dahin, dass

$$\Sigma rii$$

ein Minimum sein muss, wo r den einem Elemente entsprechenden Widerstand, i die Intensität des Stromes bedeuten. Noch einfacher muss

$$\Sigma \varepsilon vv$$

ein Minimum werden, wo ε ein Element des bewegten Fluidum, v die Geschwindigkeit bedeutet.

Sind in einem Leitungsnetz 0, 1, 2 etc. die Knotenpunkte

r^{01} der Widerstand
i^{01} die Stromstärke von 0 nach 1
p^{01} die bewegende Kraft von 0 nach 1 im Verbindungsstück 01
q^{0} der Druck in 0 u. s. w. so ist

$$\begin{aligned}\text{I.}\quad & q'-q^0 = p^{01}-i^{01}r^{01}\\ \text{II.}\quad & 0 = i^{01}+i^{02}+i^{03}+\text{ etc.}\end{aligned}$$

daraus lassen sich, wenn alle p und r gegeben sind, alle q und i bestimmen.

Es sei $\Omega = \Sigma pi$ durch alle Combinationen, so ist, da aus II.

$$\Sigma(q'-q^0)i^{01} = 0$$

folgt,

$$\Omega = \Sigma iir$$

betrachtet man ein zweites System von Werthen, wo die p ungeändert bleiben, die r unendlich wenig geändert sind, so ist

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Omega = & \quad \Sigma ii\mathrm{d}r+2\Sigma ir\mathrm{d}i = -\Sigma ii\mathrm{d}r+2\Sigma i.\mathrm{d}ir\\ = & -\Sigma ii\mathrm{d}r-2\Sigma i^{01}(\mathrm{d}q'-\mathrm{d}q^0) = -\Sigma ii\mathrm{d}r\end{aligned}$$

Jede Verminderung eines r, während die andern bleiben, vergrössert also das Ω.

[3.]

Die Wirkung *zweier galvanischer Stromelemente* 0, 1 *auf einander* ist nach meiner übrigens erst noch weiter zu prüfenden Vorstellung folgende.

Es seien die Coordinaten der beiden Stromelemente x, y, z und x', y', z' Distanz $= r$. Die Stromelemente selbst $\mathrm{d}x = \xi$, $\mathrm{d}y = \eta$, $\mathrm{d}z = \zeta$, $\mathrm{d}x' = \xi'$ etc. Die Wirkung, welche das zweite erleidet $\delta\xi' = X'$, $\delta\eta' = Y'$ etc. Dann ist

$$\begin{aligned}r^3X' &= \xi\{(y'-y)\eta'+(z'-z)\zeta'\}-(x'-x)(\eta\eta'+\zeta\zeta')\\ r^3Y' &= \eta\{(z'-z)\zeta'+(x'-x)\xi'\}-(y'-y)(\zeta\zeta'+\xi\xi')\\ r^3Z' &= \zeta\{(x'-x)\xi'+(y'-y)\eta'\}-(z'-z)(\xi\xi'+\eta\eta')\end{aligned}$$

[4.]

Von der *Geometria Situs*, die LEIBNITZ ahnte und in die nur einem Paar Geometern (EULER und VANDERMONDE) einen schwachen Blick zu thun vergönnt war, wissen und haben wir nach anderthalbhundert Jahren noch nicht viel mehr wie nichts.

Eine Hauptaufgabe aus dem *Grenzgebiet* der *Geometria Situs* und der *Geometria Magnitudinis* wird die sein, die Umschlingungen zweier geschlossener oder unendlicher Linien zu zählen.

Es seien die Coordinaten eines unbestimmten Punkts der ersten Linie x, y, z; der zweiten x', y', z' und

$$\iint \frac{(x'-x)(\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z'-\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y')+(y'-y)(\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x'-\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z')+(z-z')(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y'-\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x')}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}} = V$$

dann ist dies Integral durch beide Linien ausgedehnt

$$= 4m\pi$$

und m die Anzahl der Umschlingungen.

Der Werth ist gegenseitig, d. i. er bleibt derselbe, wenn beide Linien gegen einander umgetauscht werden. 1833. Jan. 22.

[5.]

Gesetz des Galvanischen Stroms:

1. Positiver Strom ist der, welcher an der Wasserberührung in dem Sinn Zink, Wasser, Kupfer fliesst.

2. Es sei RR' ein Strom-Element, wo die Richtung des positiven Stroms von R nach R' geht, P ein Punkt, worin sich ein Element positiven nordlichen magnetischen Fluidums befindet.

Das Strom-Element $RR' = \mu$ übt dann auf P eine Kraft aus, deren Stärke

$$= \frac{\mu . \sin R'RP}{(RR')^2}$$

ist und deren Richtung PQ senkrecht gegen die Ebene durch P, R, R' ist und nach unten geht, in sofern P rechts von RR' oder R' rechts von PR liegt.

3. Der Wirkung eines geschlossenen Stroms $RR'R''R$ kann man magnetische Wirkung auf folgende Art gleich setzen. Es begrenze $RR'R''R$ eine beliebige Fläche, auf welcher man nordlichen Magnetismus nach beliebigem Verhältnisse ausgebreitet denke, mit Dichtigkeit $= \delta$. An jeder Stelle der Fläche errichte man eine unendlich kleine Normale im zusammengesetzten geraden Verhältniss der Intensität des Stromes, des verkehrten von δ und zwar nach oben oder nach unten gerichtet, je nachdem der Strom beim Umlauf um die Fläche diese rechts oder links hat. Die Endpunkte jener Normalen liegen in einer zweiten Fläche, auf welcher und in deren Theilen man genau ebenso viel südlichen Magnetismus ausbreite, als sich auf der andern und deren correspondirenden Theilen befindet. Diese zwei magnetischen Flächen aequivaliren für jeden ausser ihnen liegenden Punkt jenem galvanischen Strom.

[6.]

Zur mathematischen Theorie der electrodynamischen Wirkungen.

1. Die gegenseitige Wirkung zweier Stromelemente ds, ds' auf einander, die Intensität der Ströme durch i, i' bezeichnet, drückt Ampère durch die Formel

$$ii'(\sin\theta\,\sin\theta'\cos\omega + k\cos\theta\,\cos\theta')\,r^n ds\,.\,ds'$$

aus, indem er voraussetzt, sie habe in der verbindenden geraden Linie Statt, und positive oder negative Zeichen beziehen sich auf Anziehung oder Abstossung. Es bedeuten hier r den Abstand der Elemente von einander, θ und θ' die Winkel der Elemente ds, ds' mit r, letztere Linie bei beiden in gleicher Richtung genommen, endlich ω den Winkel der beiden Ebenen durch r und ds einerseits, und r und ds' andererseits. Aus seinen Versuchen hat Ampère geschlossen, dass $n = -2$, $k = -\frac{1}{2}$ gesetzt werden müsse. Die gegenseitige Anziehung wird also durch

$$\frac{ii'(\sin\theta\,\sin\theta'\cos\omega - \frac{1}{2}\cos\theta\,\cos\theta')\,ds\,.\,ds'}{rr}$$

gemessen, und ein negativer Werth dieses Ausdrucks bedeutet eine Abstossung.

2. Wir bezeichnen noch durch a, a' die ganzen Stromlängen, durch ρ die Quadratwurzel aus r, durch x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punkts in s, durch x', y', z' die Coordinaten eines beliebigen Punkts in s', durch ε den

Winkel, welchen zwei Stromelemente ds, ds' mit einander machen. Partielle Differentiationen in Beziehung auf s und s' sollen durch die Charakteristiken d, d' unterschieden werden; eben so partielle Integrationen durch die Zeichen $\int, \int'$. Wir haben

$$\begin{aligned} dr = 2\rho d\rho &= \cos\theta . ds, \qquad d'r = 2\rho d'\rho = -\cos\theta' . ds' \\ \rho^4 &= (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2 \\ 2\rho^3 d\rho &= -(x'-x)dx - (y'-y)dy - (z'-z)dz \\ 6\rho\rho d\rho . d'\rho + 2\rho^3 dd'\rho &= -dx.d'x' - dy.d'y' - dz.d'z' = -\cos\varepsilon . ds . ds' \\ 2\rho^3 dd'\rho &= (-\cos\varepsilon + \tfrac{3}{2}\cos\theta . \cos\theta') ds . ds' \\ &= -(\sin\theta \sin\theta' . \cos\omega - \tfrac{1}{2}\cos\theta . \cos\theta') ds . ds' \end{aligned}$$

Der obige AMPÈRESche Ausdruck verwandelt sich also in

$$-\frac{2ii' dd'\rho}{\rho}$$

3. Durch die Charakteristik δ bezeichnen wir die unendlich kleinen Variationen der Grösse, welcher sie vorgesetzt ist, in so fern solche von unendlich kleinen virtuellen Ortsänderungen der Punkte der Reophoren s, s' abhängen. Virtuelle Ortsänderungen sind alle willkürlich gedachte, die mit den Bedingungen verträglich sind, die die Natur der Reophoren und ihre äussern Verhältnisse mit sich bringen.

4. Man hat die ganze Wirkung der Ströme auf einander als bekannt anzusehen, wenn man andere Kräfte, die auf einzelne Punkte derselben in endlicher oder unendlicher Anzahl wirken, angeben kann, die ihnen aequivaliren, d. i. deren entgegengesetzte jenen das Gleichgewicht halten. Es sei W das Aggregat der letztern Kräfte in ihre virtuellen Bewegungen multiplicirt. Es wird dann nach dem Princip der virtuellen Bewegungen

$$W + \int\int' \delta r . \frac{2ii' dd'\rho}{\rho} = W + 4ii' \int\int' dd'\rho . \delta\rho$$

$= 0$ sein müssen, oder wenigstens nicht positiv werden können, für jedes System von virtuellen Bewegungen der Reophoren, welches mit den Statt findenden Bedingungen verträglich ist. Für sich allein hingegen halten die Stromkräfte die Reophoren im Gleichgewicht, wenn $\int\int' \delta\rho \frac{dd'\rho}{\rho}$ für alle virtuelle Bewegungen $= 0$ oder negativ ist. Die Integrationen sind hier von $s = 0$ bis $s = a$, und von $s' = 0$ bis $s' = a'$ auszuführen.

5. Um die Natur dieses Integrals kennen zu lernen, entwickeln wir die Variation von $\int\int' \mathrm{d}\rho \,.\, \mathrm{d}'\rho$. Wir haben

$$\delta \int\int' \mathrm{d}\rho \,.\, \mathrm{d}'\rho = \int\int' \delta(\mathrm{d}\rho \,.\, \mathrm{d}'\rho) = \int\int' \delta \mathrm{d}\rho \,.\, \mathrm{d}'\rho + \int\int' \delta \mathrm{d}'\rho \,.\, \mathrm{d}\rho$$

Nun aber ist

$$\mathrm{d}\int' \mathrm{d}'\rho \delta\rho = \int' \mathrm{d}\delta\rho \,.\, \mathrm{d}'\rho + \int' \delta\rho \,.\, \mathrm{d}\mathrm{d}'\rho$$

oder wenn man von $s = 0$ bis $s = a$ integrirt und die Werthe von $\int' \mathrm{d}'\rho \,.\, \delta\rho$ für $s = 0$ und $s = a$ durch F', G',

$$-F' + G' = \int\int' \mathrm{d}\delta\rho \,.\, \mathrm{d}'\rho + \int\int' \delta\rho \,.\, \mathrm{d}\mathrm{d}'\rho$$

und eben so wenn man die Werthe von $\int \mathrm{d}\rho \,.\, \delta\rho$ für $s' = 0$, und $s' = a'$ durch F, G bezeichnet

$$-F + G = \int\int' \mathrm{d}'\delta\rho \,.\, \mathrm{d}\rho + \int\int' \delta\rho \,.\, \mathrm{d}\mathrm{d}'\rho$$

Folglich

$$\begin{aligned} -F - F' + G + G' &= \int\int' \mathrm{d}\delta\rho \,.\, \mathrm{d}'\rho + \int\int' \mathrm{d}'\delta\rho \,.\, \mathrm{d}\rho + 2\int\int' \delta\rho \,.\, \mathrm{d}\mathrm{d}'\rho \\ &= \delta \int\int' \mathrm{d}\rho \,.\, \mathrm{d}'\rho + 2\int\int' \delta\rho \,.\, \mathrm{d}\mathrm{d}'\rho \end{aligned}$$

Es ist also das virtuelle Moment der gegenseitigen Einwirkung der Stromstücke s, s' auf einander

$$\begin{aligned} V = 4ii' \int\int' \mathrm{d}\mathrm{d}'\rho \,.\, \delta\rho &= -2ii'\delta \int\int' \mathrm{d}\rho \,.\, \mathrm{d}'\rho \\ &\quad + 2ii'(G + G' - F - F') \end{aligned}$$

6. Eine stromerzeugende oder electromotorische Kraft übt ein Strom nur aus, indem er entsteht oder indem er sich bewegt. Die electromotorische Kraft eines Stromelements $i\mathrm{d}s$ wirkt in jedem Punkt mit einer Stärke, welche der Entfernung r verkehrt, hingegen dem auf diese Linie projicirten Stromelement direct proportional ist, und in der Richtung der Linie r selbst, aber stets im entgegengesetzten Sinn. Man schliesst hieraus leicht, dass das virtuelle Moment der electromotorischen Kraft des Elements $i\mathrm{d}s$ durch

$$+\frac{i\mathrm{d}s}{r} \,.\, \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s} \,.\, \delta r$$

ausgedrückt werden kann oder durch

$$4 i \mathrm{d}\rho . \delta\rho$$

In dem Rheophorelement $\mathrm{d}s'$ ist also die electromotorische Kraft des Stromelements $i\mathrm{d}s$

$$= 4 i \mathrm{d}\rho . \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s'} . \mathrm{d}s' = 4 i \mathrm{d}\rho . \mathrm{d}'\rho$$

Das doppelte Integral $4 i \int\int' \mathrm{d}\rho . \mathrm{d}'\rho$ ist also die ganze electromotorische Kraft in dem Rheophorstück $s' = 0$ bis $s' = a'$, welche durch das Stromstück is, von $s = 0$ bis $s = a$ ausgeübt wird. Wir bezeichnen diese mit A. Ferner ist das virtuelle Moment der electromotorischen Kraft, welche dasselbe Stromstück in einem gegebenen Punkte ausübt

$$= 4 i \int \mathrm{d}\rho . \delta\rho \qquad \text{von } s = 0 \text{ bis } s = a$$

ist diese, in dem Anfang des Rheophorstücks s', $= B$, an dessen Ende $= C$, so ist

$$B = 4 i F, \qquad C = 4 i G$$

Bedeuten ebenso B', C' die virtuellen Momente der electromotorischen Kraft, welche ein Stromstück $i's'$ von $s' = 0$ bis $s' = a'$ in den Punkten Anfang und Ende von s ausübt, so ist $B' = 4 i' F'$, $C' = 4 i' G'$.

Wir haben folglich

$$V = -\tfrac{1}{2} i' \delta A - \tfrac{1}{2} i' B + \tfrac{1}{2} i' C - \tfrac{1}{2} i B' + \tfrac{1}{2} i C'$$

[7.]

Das Inductionsgesetz.

(Gefunden 1835. Januar 23. Morgens 7^{u} v. d. Aufst.)

I. Die Stromerzeugende Kraft, welche in einem Punkte P hervorgebracht wird durch ein Rheophorelement γ, dessen Entfernung von P, $= r$, ist während des Zeitelements $\mathrm{d}t$ die Differenz der beiden Werthe von $\frac{\gamma}{r}$, welche den Augenblicken t und $t + \mathrm{d}t$ entsprechen, durch $\mathrm{d}t$ dividirt, wo γ nach Grösse und Richtung zu berücksichtigen ist, was kurz und verständlich durch

$$-\frac{\mathrm{d}\,\frac{\gamma}{r}}{\mathrm{d}t}$$

ausgedrückt werden kann.

II. Die Stärke eines erzeugten Stroms ist

$$=\frac{\int p\,\mathrm{d}s}{\theta}$$

wo p die Stromerzeugende Kraft in jedem Element $\mathrm{d}s$ des Rheophors, θ der ganze Widerstand.

[8.]

Es seien s, s' zwei geschlossene Rheophoren, r die gegenseitige Distanz zweier Punkte in s und s', $r=\rho\rho$, θ der ganze Widerstand in s'.

Folgendes sind die beiden Grundgesetze:

I. Sind in s und s' galvanische Ströme mit den Intensitäten ε, ε', die als positiv betrachtet werden, wenn sie die Rheophoren in dem Sinn durchlaufen, in welchem deren Elemente $\mathrm{d}s$, $\mathrm{d}s'$ gewählt werden, so ist die abstossende Kraft der Elemente

$$=+\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\rho}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s.\mathrm{d}s'}.\mathrm{d}s.\mathrm{d}s'$$

oder wenn man durch d, d' die partiellen auf beide Ströme sich beziehenden Differentiationen bezeichnet

$$=+\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\rho}.\mathrm{d}\mathrm{d}'\rho$$

Diese Kraft wirkt in der Richtung der geraden Linie r.

II. Entsteht während der sehr kleinen Zeit δt der Strom in s, so ist damit eine oben bemerkte Stromerzeugende Kraft in jedem Punkte begleitet; vom Element $\mathrm{d}s'$ ist das Maass derselben

$$=-\frac{\varepsilon\,\mathrm{d}s.\mathrm{d}s'}{\delta t.r}\cos u$$

wenn u die Neigung der Richtungen $\mathrm{d}s$, $\mathrm{d}s'$ gegen einander bezeichnet.

Bezeichnet man durch z die Projection von r auf die Richtung von $\mathrm{d}s'$, so ist $\mathrm{d}s.\cos u=\mathrm{d}z$, also jene Formel

$$=-\frac{\varepsilon\,\mathrm{d}z}{\delta t.r}.\mathrm{d}s'$$

oder die ganze aus is in $\mathrm{d}s'$ erregte Stromerzeugende Kraft

$$= -\frac{\varepsilon . ds'}{\delta t}\int\frac{dz}{r}$$

Da $\frac{dz}{r} - \frac{z dr}{rr}$ ein vollständiges Differential, mithin dessen Integral durch den geschlossenen Rheophor s ausgedehnt $= 0$ ist, so ist obiges Integral auch

$$= -\frac{\varepsilon ds'}{\delta t}\int\frac{z dr}{rr}$$

oder da $-\frac{z}{r}.ds' = d'r$

$$= +\frac{\varepsilon}{\delta t}\int\frac{dr.d'r}{r} = +\frac{4\varepsilon}{\delta t}\int d\rho.d'\rho$$

oder die ganze Stromerzeugende Kraft $= \frac{4\varepsilon}{\delta t}\int\int' d\rho.d'\rho$ folglich hat der in s' während der Zeit δt Statt findende Strom die Intensität

$$\frac{4\varepsilon}{\theta\delta t}.\int\int' d\rho.d'\rho$$

wofür man auch offenbar

$$-\frac{4\varepsilon}{\theta\delta t}.\int\int' \rho\, d d'\rho$$

schreiben kann. Es ist nemlich $\int.\int' d\rho.d'\rho = \int\rho d\rho - \int\int'\rho d d'\rho$ und $\int\rho d\rho = 0$ indem es durch die ganze Stromlinie s ausgedehnt wird.

[9.]
Induction durch Bewegung.

I. In jedem Punkte des Raumes, dessen Coordinaten x, y, z, bezeichne V den körperlichen Winkel, welchen ein Strom S' in jenem Punkte umspannt.

$V =$ Const. bestimmt daher eine Fläche, deren tangirende Ebene und Normale dasselbe sind, was Ampère Plan directeur, und Directrice nennt.

II. In jedem bewegten körperlichen Molecule μ, dessen partielle Geschwindigkeiten $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ sind, findet eine electrodynamische *Kraft* Statt, deren partielle Zerlegungen ξ, η, ζ sein mögen. Man hat dann

$$\xi = \left(\frac{dV}{dy}.\frac{dz}{dt} - \frac{dV}{dz}.\frac{dy}{dt}\right)\mu$$
$$\eta = \left(\frac{dV}{dz}.\frac{dx}{dt} - \frac{dV}{dx}.\frac{dz}{dt}\right)\mu$$
$$\zeta = \left(\frac{dV}{dx}.\frac{dy}{dt} - \frac{dV}{dy}.\frac{dx}{dt}\right)\mu$$

III. Geht hingegen durch jenen Punkt ein Element eines Stromkörpers ds, so wird solcher von S sollicitirt, und sind die partiellen Kräfte ξ, η, ζ, so ist, i Intensität des Stroms,

$$\xi = \left(\frac{dV}{dy}\cdot\frac{dz}{ds} - \frac{dV}{dz}\cdot\frac{dy}{ds}\right) i\,ds$$

etc.

Es ist übrigens

$$V = \int \frac{z'(x'dy' - y'dx')}{r'(x'x'+y'y')} = \int \frac{x'(y'dz' - z'dy')}{r'(y'y'+z'z')} = \int \frac{y'(z'dx' - x'dz')}{r'(z'z'+x'x')}$$

wenn x', y', z' sich auf den *wirkenden* Strom S' beziehen, woraus

$$\frac{dV}{dz} = \int \frac{x'dy' - y'dx'}{r'^3}$$

welches Ampères Ausdruck ist. Es ist indefinit

$$\int \left\{ \frac{z(x\,dy - y\,dx)}{r(xx+yy)} - \frac{y(z\,dx - x\,dz)}{r(xx+zz)} \right\} = \text{Arc. tg}\,\frac{yz}{xr}$$

am einfachsten bewiesen indem man es in die Form setzt

$$\frac{-yzrr\,dx - xyzx\,dx + xzrr\,dy - xyzy\,dy + xyrr\,dz - xyzz\,dz}{r(xx+yy)(xx+zz)}$$

Die ganze, von der *Entstehung eines Stroms* herrührende Stromerzeugende Kraft in jedem Punkte des Raums, z. B. in dem Punkte, dessen Coordinaten alle $= 0$, wird in drei partielle Kräfte zerlegt, nemlich

$$X = \int \frac{dx'}{r} \qquad \text{also} \qquad \frac{dV}{dx} = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}$$

$$Y = \int \frac{dy'}{r} \qquad\qquad\quad \frac{dV}{dy} = \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}$$

$$Z = \int \frac{dz'}{r} \qquad\qquad\quad \frac{dV}{dz} = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}$$

(Februar 4.) [Späterer Zusatz:] (1836 April 7.)

(Für plane Curve ist z' constant also $Z = 0$. Es sei

$$\int r\,\frac{(x'-x)\,dy' - (y'-y)\,dx'}{(x'-x)^2 + (y'-y)^2} = U$$

$$U = \int r\,d'\lambda = (z'-z)\int \frac{d'\lambda}{\sin 6} \quad \text{wenn} \quad z'-z = r\sin 6, \ \frac{y'-y}{x'-x} = \text{tg}\,\lambda$$

dann erhält man

$$X = \frac{dU}{dy}$$
$$Y = -\frac{dU}{dx}$$

Die Richtung der Kraft, deren Componenten X, Y, Z, fällt also immer in die Fläche, wofür $U =$ const. und zugleich in das Planum, wofür z constant. Diese Linie kehrt also in sich selbst zurück.)

Man hat

$$\xi = \frac{dV}{dy} \cdot dz - \frac{dV}{dz} \cdot dy$$
$$= \int' \frac{((z'-z)dx' - (x'-x)dz')dz - ((x'-x)dy' - (y'-y)dx')dy}{r^3}$$
$$= \int' \left\{ \frac{dx'[(x'-x)dx + (y'-y)dy + (z'-z)dz]}{r^3} - \frac{(x'-x)(dx dx' + dy dy' + dz dz')}{r^3} \right\}$$

also

$$\xi\delta x + \eta\delta y + \zeta\delta z = -\int' \frac{dr}{rr}(dx'.\delta x + dy'.\delta y + dz'.\delta z)$$
$$+ \int' \frac{\delta r}{rr}(dx'.dx + dy'.dy + dz'.dz)$$
$$= -\int' \delta . \frac{dx.dx' + dy.dy' + dz.dz'}{r}$$
$$+ \int' (dx'.\frac{\delta dx}{r} + dy'.\frac{\delta dy}{r} + dz'.\frac{\delta dz}{r})$$
$$- \int' (dx'.\frac{\delta x.dr}{rr} + dy'.\frac{\delta y.dr}{rr} + dz'.\frac{\delta z.dr}{rr})$$

die beiden letzten Theile werden

$$\int' dx'.d\frac{\delta x}{r} + dy'.d\frac{\delta y}{r} + dz'.d\frac{\delta z}{r}$$

welches durch ganz S integrirt verschwindet. Man hat also

$$\int \xi\delta x + \eta\delta y + \zeta dz = -\delta \int\int' \frac{dx.dx' + dy.dy' + dz.dz'}{r}$$

Kürzer wird der Beweis so geführt. Man hat

1) $$\delta \int\int \rho\, dd'\rho = \int\int \delta\rho . dd'\rho + \int\int \rho\, \delta dd'\rho$$

2) $$\int\int \rho\, d'd\delta\rho + \int\int d'\rho . d\delta\rho = \int\int d'(\rho\, d\delta\rho) = 0$$

3) $$0 = \int\int d(\delta\rho . d'\rho) = \int\int d'\rho . d\delta\rho + \int\int dd'\rho . \delta\rho$$

also durch Addition

$$\delta\iint \rho\, \mathrm{d}\mathrm{d}'\rho = 2\iint \delta\rho . \mathrm{d}\mathrm{d}'\rho = \iint \delta r . \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}'\rho}{\rho}$$

Das unter dem Variationszeichen stehende Doppel-Integral kann auf verschiedene Arten ausgedrückt werden

$$\begin{aligned}
\iint \rho\, \mathrm{d}\mathrm{d}'\rho &= -\iint \mathrm{d}\rho . \mathrm{d}'\rho \\
&= \iint \frac{1}{4r} \cos\theta . \cos\theta' . \mathrm{d}s . \mathrm{d}s' \\
&= \iint \frac{1}{4r} (\cos\theta . \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos\omega)\, \mathrm{d}s . \mathrm{d}s' \\
&= \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{2-m} \iint \rho^{2-m}\, \mathrm{d}\mathrm{d}'\rho^m \\
&= -\frac{1}{mm} \iint \rho^{2-2m}\, \mathrm{d}\rho^m . \mathrm{d}'\rho^m
\end{aligned}$$

[10.]

Einfachste Ausdrücke für die Wirkungen galvanischer Ströme.

Die Fundamentalebene geht durch das wirkende Stromelement AB und den Punkt auf welchen gewirkt wird C.

Die complexen Grössen, welche die Plätze B, C relativ gegen A bezeichnen, seien β, γ; ferner sei r der Modul von β. Endlich, falls auch in C ein Strom in dessen Element CD bereits vorhanden, sei $\gamma + \delta + i'\zeta$ die complexe Grösse, die den Platz von D gegen A bezeichnet. Man hat dann

I. Wenn in C ein Strom ist, für die Kraft, welche dessen materieller Träger durch AB erleidet

$$\frac{\delta}{r}\ \mathrm{Im.}\ \frac{\beta}{\gamma}$$

II. Wenn in C kein Strom ist, aber eine Bewegung in C Statt findet die durch ε in dem durch BC gehenden Planum bezeichnet wird, die electromotorische Kraft

$$\frac{\beta}{r}\ \mathrm{R}\ \frac{\varepsilon}{\gamma}$$

oder in übersichtlichern Zeichen

G wirkendes Stromelement

$\left.\begin{array}{l} g \\ m \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} \text{vorhandenes Stromelement} \\ \text{vorhandene Bewegung} \end{array}\right\}$ in dem Punkte auf welchen gewirkt wird

$\left.\begin{array}{l} \gamma \\ \mu \end{array}\right\}$ Kraft zur Erregung $\left\{\begin{array}{l} \text{eines Stroms} \\ \text{einer Bewegung} \end{array}\right.$

r Entfernung als Modul der complexen Grösse l

1) $$r\mu = g.\,\mathrm{J}.\,\frac{G}{l}$$

2) $$r\gamma = G.\,\mathrm{R}.\,\frac{m}{l}$$

[11.]

Geradlinige Polygone.

Der Punkt auf welchen gewirkt wird sei der Nullpunkt, dann ist

I. für $$X = \int \frac{\mathrm{d}x}{r}$$

der Betrag aus der ersten Seite PP'

$$\frac{x'-x}{r} \log \frac{\operatorname{cotg} \frac{1}{2}\theta'}{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\theta}$$

wenn θ, θ' die Winkel zwischen PP' und $0P$, $0P'$ sind, PP' in gleicher Richtung verstanden. Die Grösse unter der Characteristik log. ist

$$= \frac{r' + \dfrac{(x'-x)x' + (y'-y)y' + (z'-'z)z'}{PP'}}{r + \dfrac{(x'-x)x + (y'-y)y + (z'-z)z}{PP'}}$$

$$= \frac{PP'.r' + r'r' - (r', PP')}{PP'.r - rr + (r, PP')}$$

II. Für V der Betrag aus dem Winkel an P', der Unterschied des Winkels zwischen den Ebenen $0PP'$, $0P'P''$ von 180^0. Der Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks, dessen Seiten a, b, c, $= \omega$ gesetzt ist

$$\sin \tfrac{1}{2}\omega = \frac{6 \text{ Pyramide } 0PP'P''}{4rr'r' \cos\frac{1}{2}a . \cos\frac{1}{2}b . \cos\frac{1}{2}c}$$

[12.]

g Intensität eines galvanischen Stroms
μ Dichtigkeit des Magnetismus auf einer durch den Rheophor begrenzten Fläche
ρ Abstand dieser Fläche von einer zweiten negativ magnetisirten

1. $$g = \mu\rho$$

2. Wirkung eines electrischen Elements auf ein anderes, relativ gegen welches der Platz des erstern durch die complexe Grösse u für die Zeit t bestimmt wird, Entfernung $= r$

$$-\frac{u}{r^3} - \frac{\alpha}{ur}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \frac{\beta}{r}\frac{\mathrm{dd}u}{\mathrm{d}t^2}$$

3. Gegenseitige Wirkung zwischen einem electrischen und magnetischen Elemente unter relativer Geschwindigkeit v

$$\frac{\gamma v}{rr}$$

4. In einer galvanischen Strömung von der Intensität g, schiebt sich in der Zeit t durch jeden Querschnitt die positive Electricität $\varepsilon g t$ nach der einen, die negative $-\varepsilon g t$ nach der andern Richtung.

5. Es handelt sich darum die Relationen zwischen $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ zu bestimmen, $\gamma = 2\beta\varepsilon$ aus der Induction bei Entstehung eines Stromes während der Zeit θ wobei die Kraft, so lange die Entstehung dauert —

$$= \frac{\gamma\pi hhg}{\theta RR} = \frac{2\beta\pi hh\varepsilon g}{\theta RR} \text{ wird}$$

$$\gamma = 4\alpha\varepsilon, \qquad \frac{\gamma\pi hhgv}{R^3} = \frac{4\alpha\pi hh\varepsilon gv}{R^3}$$

$$2\gamma\varepsilon = 1, \quad \alpha = \frac{1}{8\varepsilon\varepsilon} = \tfrac{1}{2}\gamma\gamma, \quad \beta = \frac{1}{4\varepsilon\varepsilon} = \gamma\gamma$$

[13.]

Grundgesetz für alle Wechselwirkungen galvanischer Ströme.

(Gefunden im Juli 1835.)

Zwei Elemente von Electricität in gegenseitiger Bewegung ziehen einander an, oder stossen einander ab, nicht eben so als wenn sie in gegenseitiger Ruhe sind.

$$\begin{array}{ll} e,\ x,\ y,\ z & \text{Element und Coordinaten} \\ e',\ x',\ y',\ z' & \end{array}$$

$$(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2 = rr$$

Gegenseitige Wirkung (Abstossung)

$$= \frac{ee'}{rr}\left\{1+k\left(\left(\frac{\mathrm{d}(x'-x)}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}(y'-y)}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}(z'-z)}{\mathrm{d}t}\right)^2-\tfrac{3}{2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2\right)\right\}$$

wo $\sqrt{\frac{1}{k}}$ eine bestimmte Geschwindigkeit vorstellt.

[14.]

Auf *andere* Weise stellt sich das *Grundgesetz* folgendermaassen dar.

Es seien P und P' Punkte in zwei Strömen; x, y, z und x', y', z' die Coordinaten dieser Punkte, r ihre Distanz; $\mathrm{d}s$, $\mathrm{d}s'$ zwei bei jenen Punkten anfangende Stromelemente.

$$\begin{array}{llll} u & \text{Winkel zwischen} & \mathrm{d}s \text{ und } \mathrm{d}s' \\ q & \text{-} \quad\quad \text{-} & \mathrm{d}s \text{ und } PP' \\ q' & \text{-} \quad\quad \text{-} & \mathrm{d}s' \text{ und } P'P \end{array}$$

Mit Weglassung der von der Intensität der Ströme abhangenden Factoren, üben die Elemente $\mathrm{d}s, \mathrm{d}s'$ eine gegenseitige Anziehung auf einander aus, die durch

$$\frac{\mathrm{d}s\,.\,\mathrm{d}s'.(\cos u+\frac{3}{2}\cos q\,.\cos q')}{rr}$$

gemessen werden kann.

Setzen wir $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y = 0$, so ist diese Kraft

$$= \frac{\mathrm{d}s\,.\,\mathrm{d}z'}{rr}-\tfrac{3}{2}.\frac{z'-z}{r^3}\mathrm{d}s\,.\,\mathrm{d}s'.\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s'}\right)$$

oder die partiellen Kräfte, welche $\mathrm{d}s$ parallel mit den Coordinatenaxen sollicitiren

$$\mathrm{d}s\,.\left\{\frac{(x'-x)\,\mathrm{d}z'}{r^3}-\frac{3\,(x'-x)(z'-z)\,\mathrm{d}'r}{2\,r^4}\right\}$$

$$\mathrm{d}s\,.\left\{\frac{(y'-y)\,\mathrm{d}z'}{r^3}-\frac{3\,(y'-y)(z'-z)\,\mathrm{d}'r}{2\,r^4}\right\}$$

$$\mathrm{d}s\,.\left\{\frac{(z'-z)\,\mathrm{d}z'}{r^3}-\frac{3\,(z'-z)(z'-z)\,\mathrm{d}'r}{2\,r^4}\right\}$$

oder, wenn man die Kräfte

$$-\mathrm{d}s\,.\,\mathrm{d}'\frac{(x'-x)(z'-z)}{2r^3}$$
$$-\mathrm{d}s\,.\,\mathrm{d}'\frac{(y'-y)(z'-z)}{2r^3}$$
$$-\mathrm{d}s\,.\,\mathrm{d}'\frac{(z'-z)(z'-z)}{2r^3}$$

hinzusetzt, was, in sofern $\mathrm{d}s'$ Element eines geschlossenen Stroms ist, erlaubt ist

$$\frac{\mathrm{d}s}{2r^3}((x'-x)\,\mathrm{d}z'-(z'-z)\,\mathrm{d}x')$$
$$\frac{\mathrm{d}s}{2r^3}((y'-y)\,\mathrm{d}z'-(z'-z)\,\mathrm{d}y')$$
$$\frac{\mathrm{d}s}{2r^3}((z'-z)\,\mathrm{d}z'-(z'-z)\,\mathrm{d}z')$$

Die letzte offenbar $=0$. Diesen Kräften aequivaliren aber offenbar folgende, insofern auf $\mathrm{d}s$ gewirkt wird

1. In der Richtung PP' . . . . . $\frac{\mathrm{d}s\,.\,\mathrm{d}z'}{2rr}=\frac{\mathrm{d}s\,.\,\mathrm{d}s'}{2rr}\cos u$
2. in der Richtung parallel mit $\mathrm{d}s'$ . . . . . $-\frac{\mathrm{d}s\,.\,\mathrm{d}s'}{2rr}\,.\cos q$

welchen man noch beifügen darf

3. in der Richtung $\mathrm{d}s$ . . . . . . $+\frac{\mathrm{d}s\,.\,\mathrm{d}s'}{2rr}\,.\cos q'$

wogegen dann auf $\mathrm{d}s'$ drei diesen genau entgegengesetzte Kräfte wirken werden.

Sind die Coordinaten des wirkenden Stromelements x, y, z, die des Elements, auf welches gewirkt wird $0, 0, 0$; die Richtung und Stärke des ersten und zweiten Elements nach den Coordinaten geschätzt ξ', η', ζ'; ξ, η, ζ, so ist nach Ampère die ganze Kraft anziehend

$$\frac{\xi\xi'+\eta\eta'+\zeta\zeta'}{rr}-\frac{3}{2}\frac{(x\xi+y\eta+z\zeta)(x\xi'+y\eta'+z\zeta')}{r^4}$$

also die eine partielle Kraft

$$\frac{x}{r^3}(\xi'\mathrm{d}x+\eta'\mathrm{d}y+\zeta'\mathrm{d}z)-\frac{3x}{2r^4}(x\xi'+y\eta'+z\zeta')\,\mathrm{d}r$$
$$=\tfrac{1}{2}\xi'\mathrm{d}\frac{xx}{r^3}+\tfrac{1}{2}\eta'\mathrm{d}\frac{xy}{r^3}+\tfrac{1}{2}\zeta'\mathrm{d}\frac{xz}{r^3}+\frac{\eta'}{2r^3}(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x)+\frac{\zeta'}{2r^3}(x\,\mathrm{d}z-z\,\mathrm{d}x)$$

oder da man vollständige Differentiale weglassen kann

$$\frac{\eta'(x\eta - y\xi) + \zeta'(x\zeta - z\xi)}{2r^3} = \frac{x(\eta\eta' + \zeta\zeta') - y\xi\eta' - z\xi\zeta'}{2r^3}$$

Hier ist es nun erlaubt noch zuzusetzen oder wegzulassen

$$\frac{x\xi\xi' + y\eta\xi' + z\zeta\xi'}{2r^3}$$

wodurch die Formel symmetrisch in Beziehung auf beide Elemente wird. Wählen wir das letztere, so haben wir die Kraft

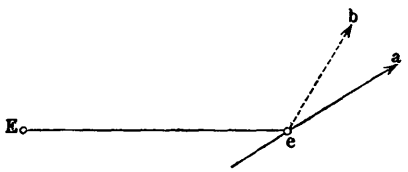
$$\frac{x(-\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta') - y(\xi\eta' + \eta\xi') - z(\xi\zeta' + \zeta\xi')}{2r^3}$$

Dies erklärt sich durch eine Kraft, die von den *relativen* Bewegungen α, β, γ abhangt

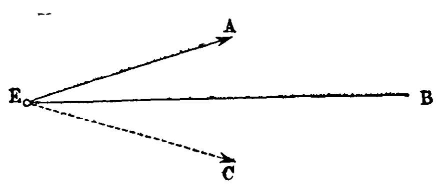
$$= -\frac{x(\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma) - 2\alpha(x\alpha + y\beta + z\gamma)}{2r^3}$$

Hier reichen wir nun mit Einer Zusatzkraft aus, die nach eb mit der Stärke $\frac{vv}{kk}ee$ wirkt, wenn ea die Richtung der relativen Bewegung v ist

aeb $= 180^0 -$ aeE, eE positiv



Noch einfacher und ganz allgemein wird das Gesetz folgendermaassen ausgedrückt



Wenn ein electrisches Element E durch die Wirkung eines andern nach der Richtung EA mit der Kraft p sollicitirt wird, insofern beide in gegenseitiger Ruhe sind, so kommt, im Fall einer gegenseitigen Bewegung, deren Richtung in Beziehung auf E, die Gerade EB und Geschwindigkeit $= v$ ist, zu jener Kraft noch eine zweite hinzu, deren

$$\text{Stärke} = \frac{pvv}{kk}, \qquad \text{Richtung} = \mathrm{EC}$$

wobei EA, EB, EC in Einem Planum liegen und EB mitten zwischen EA und EC.

[15.]

Kugelfläche.

Es seien x, y, z die Coordinaten eines Punktes in einer auf der Kugelfläche liegenden in sich selbst zurückkehrenden Linie. $xx + yy + zz = rr$

Das Integral

$$\int \frac{z(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)}{r(xx+yy)} = V$$

wird durch die Länge der ganzen Linie genommen verstanden.

Jene Linie scheidet die Kugelfläche in zwei oder mehrere Theile A, B, C u. s. w.

Es wird dann

$$V = \alpha A + \beta B + \gamma C + \ldots$$

sein, wo die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ folgenden zwei Bedingungen Genüge leisten:

1. Die Coefficienten zweier an einander grenzenden Stücke sind immer um eine Einheit verschieden, und zwar gehört demjenigen Stück der kleinere Coefficient an, welches gegen die Scheidungslinie ebenso liegt, wie der positive Pol der z gegen den grössten Kreis, der vom Pole der x nach dem Pole der y gezogen ist.

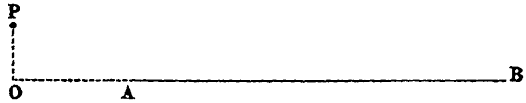
2. Die Summe der Coefficienten, welche denjenigen Stücken angehören, in denen die beiden Pole der z liegen, ist $= 0$.

Der Beweis ist leicht geführt, indem man vom negativen zum positiven Pole der z eine unendlich grosse Menge von Halbkreisen zieht.

Der Fall, wo einer der beiden Pole in die Linie selbst fiele, ist durch die Natur des Integrals von selbst ausgeschlossen.

[16.]

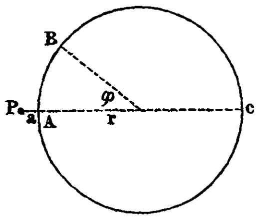
Electromotorische Kraft, durch Entstehung eines Stromes.



Electromotorische Kraft in P, vermöge Entstehung des Stromes in $A \ldots B$

$$= \log \frac{x' + \sqrt{(x'x' + yy)}}{x^0 + \sqrt{(x^0 x^0 + yy)}}, \quad \text{wenn} \quad 0A = x^0, \quad 0B = x', \quad 0P = y$$

Electromotorische Kraft in P vermöge Entstehung eines Stromes durch den Kreis



1) durch das Stück AB.. proxime $\log \frac{2r \sin \varphi}{a}$

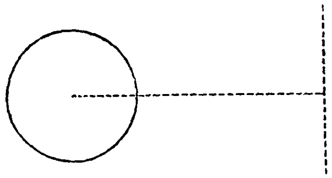
2) durch das Stück BC proxime $-2 - \log \operatorname{tg} \frac{1}{4}\varphi$

Zusammen $\log \frac{8r\varphi}{a} - 2 = \log \frac{8r\varphi}{aee}$

Durch den ganzen Kreis $2 \log \frac{8r}{aee}$

[17.]

Es entstehe durch Umdrehung eines Kreises, dessen Halbmesser $= \rho$ um eine in jener Ebene liegende Axe, von welcher der Mittelpunkt des Kreises die Entfernung $= R$ hat, ein ringförmiger körperlicher Raum der gleichförmig mit einer Rheophorkette ausgefüllt ist. Die Anzahl der Umwindungen sei M. Es wird angenommen, dass ρ gegen R sehr klein sei. Man verlangt die electromotorische Wirkung des Ringes auf einen Punkt, der entweder innerhalb oder sehr nahe am Ringe liegt.



Es sei a die Distanz des Punktes von der Centrallinie des Ringes, so wird die verlangte Wirkung sein

$$2M \log \frac{8R}{aee} = 2M \left\{ \log \frac{8R}{a} - 2 \right\} \quad \text{wenn} \quad a > \rho$$

$$2M \left(\log \frac{8R}{\rho} - \frac{3}{2} - \frac{aa}{2\rho\rho} \right) \quad \text{wenn} \quad a < \rho$$

Der mittlere Werth für alle *im* Ringe gleichförmig vertheilten Punkte ist

$$2M\left\{\log\frac{8R}{\rho}-\tfrac{7}{4}\right\}$$

oder die ganze electromotorische Kraft, welche eindem inducirenden Ringe gleichförmig eingewirkter von m Umwindungen erleidet

$$= 4\pi m MR\left\{\log\frac{8R}{\rho}-\tfrac{7}{4}\right\} = E$$

Bei gegebenem Drahtvorrath für jede Kette ist mR, MR und $\frac{m}{\rho\rho}$ gegeben, da nun

$$E = 16\pi.\ MR.\ (mR)^{\frac{2}{3}}.\ \left(\frac{m}{\rho\rho}\right)^{\frac{1}{3}}.\ \left(\frac{8R}{\rho}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\log\frac{8R}{\rho}-\tfrac{7}{4}\right)$$

so muss, damit E *ein Maximum* werde

$$\left(\frac{8R}{\rho}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\log\frac{8R}{\rho}-\tfrac{7}{4}\right)$$

ein Maximum werden, oder $\left(\frac{8R}{\rho}\right)^{\frac{2}{3}} = x$ gesetzt, muss

$$\frac{\log x^{\frac{3}{2}}-\frac{7}{4}}{x} = \tfrac{3}{2}\left\{\frac{\log x-\frac{7}{6}}{x}\right\}$$

ein Maximum werden.

Dies geschieht, wenn $\log x = \frac{13}{6}$

$$\text{oder } \log\frac{8R}{\rho} = \tfrac{13}{4} \text{ wird}$$

$$\text{oder log Brigg}\frac{8R}{\rho} = 1{,}4114580$$

$$\text{oder } \frac{8R}{\rho} = 25{,}79$$

$$R = 3{,}22\,\rho$$

[18.]

Wenn man zu *den Massen im Innern eines körperlichen Raumes* noch die ihnen für den äussern Raum aequivalirenden auf der Oberfläche mit entgegengesetzten Zeichen beifügt, so erhält man einen Körper als Träger von positiven und negativen Massen, deren Complex auf alle Punkte des äussern Raumes gar keine Anziehungskraft ausübt.

Man beweiset leicht

1. dass in Folge der Reaction äusserer Massen jener Körper auch im Gleichgewicht bleibt

2. dass der Körper, wenn die betreffenden Massen magnetische Fluida sind, auch auf einen Rheophor gar keine Kraft ausübt.

Schwerer aber

3. dass auch trotz der Reaction des Rheophors jener Körper im Gleichgewicht bleibt.

Das letzte beruht auf folgenden Momenten:

Es sei dm ein Element des Körpers; x, y, z dessen Coordinaten; die Characteristik $\int$ beziehe sich auf alle dm. Es sei ferner ds ein Element eines galvanischen Stroms, a, b, c; $a+da$, $b+db$, $c+dc$ die Coordinaten seiner Endpunkte, wo also a, b, c Functionen von s. Die Intensität des Stromes $= 1$. Charakteristik S Summation in Beziehung auf ds.

Sind X, Y, Z die Componenten der ganzen auf dm wirkenden beschleunigenden Kraft, so sind die Bedingungen des Gleichgewichts bekanntlich

$$\int X dm, \int Y dm, \int Z dm, \int (zY - yZ) dm, \int (xZ - zX) dm, \int (yX - xY) dm \text{ alle } = 0$$

Es ist $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = rr$ gesetzt (die positiven x, y, z bez. nach vorn, rechts oben gerichtet)

$$X = S\frac{(y-b)dc - (z-c)db}{r^3}, \quad Y = S\frac{(z-c)da - (x-a)dc}{r^3}, \quad Z = S\frac{(x-a)db - (y-b)da}{r^3}$$

also
$$\int X dm = S(\eta dc - \zeta db)$$

$$\int (yX - xY) dm$$
$$= SVdc + S\{(\xi c - \zeta a)da + (\eta c - \zeta b)db + (a\xi + b\eta + c\zeta)dc\} - \int z dm S\frac{d\frac{1}{r}}{ds}ds$$

[wo $\int \frac{dm}{r} = V$, $\int \frac{x-a}{r^3} dm = \xi$ u. s. f. gesetzt sind, welche alle zu Null werden.]

1836 Februar 18.

Viel einfacher wird die Ableitung auf folgende Art gemacht.

Wenn x, y, z; $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ die Coordinaten zweier beliebiger einander unendlich naher Punkte sind, so muss die Variation von

$$dx^2 + dy^2 + dz^2$$

unabhängig von den Werthen von $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$, $= 0$ werden. Zur Abkürzung bezeichnen wir δx, δy, δz mit $\alpha\xi$, $\alpha\eta$, $\alpha\zeta$, wo α einen constanten unendlich kleinen Coëfficienten bedeutet. Man hat also

$$\delta(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2) = 2\alpha(\mathrm{d}x.\mathrm{d}\xi+\mathrm{d}y.\mathrm{d}\eta+\mathrm{d}z.\mathrm{d}\zeta)$$
$$= 2\alpha\Big\{\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}.\mathrm{d}x^2+\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}y}.\mathrm{d}y^2+\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}.\mathrm{d}z^2$$
$$+\Big(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}y}+\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}\Big)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\Big(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}z}+\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x}\Big)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z+\Big(\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}z}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\Big)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\Big\}$$

Offenbar muss also sein

1. $0 = \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}$
2. $0 = \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}y}$
3. $0 = \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}$
4. $\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}y} = -\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x} = r$
5. $\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}z} = q$
6. $\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}z} = -\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}y} = p$

Man hat aus (6) (4) (5) (6), aus (6) (2), aus (6) (3):

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z} = -\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z} = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y} = 0$$

also p constant,

ebenso folgt q, r constant

und daher

$$\xi = a+ry-qz$$
$$\eta = b+pz-rx$$
$$\zeta = c+qx-py$$

[19.]

Beweis von AMPÈRES *Fundamentalsatze.*

Über eine begrenzte Fläche (I), in der jedem unbestimmten Punkte die Coordinaten x, y, z angehören, sei positives magnetisches Fluidum gleichförmig so verbreitet, dass auf die Flächeneinheit das Quantum magnetischen Fluidums $= k$ komme.

Ein Element eines galvanischen Stroms von der Intensität i erstrecke sich von $0, 0, 0$, bis $0, 0, \zeta$.

Zur Abkürzung schreibe man

$$r = \sqrt{(xx + yy + zz)}$$

Einem Elemente ω der Coordinatenebene der x, y entspricht das Element der Fläche (I) ... $\omega\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}$ und das Quantum magnetischen Fluidums $k\omega\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}$. Dessen Wirkung auf das Stromelement $i\zeta$ zerlegt sich also in die drei partiellen Kräfte

$$\begin{aligned} & ik\zeta\omega.\frac{y}{r^3}\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)} \\ -& ik\zeta\omega.\frac{x}{r^3}\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)} \\ & 0 \end{aligned}$$

Nehmen wir jetzt eine zweite Fläche (II) mit (I) parallel in der unendlich kleinen Entfernung ε unter dieser, d. i. jedem Punkte x, y, z, in (I) entspreche in II der Punkt

$$\begin{aligned} & x + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}}.\left(\frac{dz}{dx}\right) \\ & y + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}}.\left(\frac{dz}{dy}\right) \\ & z - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}} \end{aligned}$$

Über diese zweite Fläche sei negatives magnetisches Fluidum dergestalt verbreitet, dass jeder Flächentheil von II eben so viel negatives Fluidum enthalte, als der entsprechende Flächentheil von I positives. Die Gesammtwirkung derjenigen Fluida, die auf den einander entsprechenden Elementen von I. II enthalten sind, werden demnach

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon ik\zeta.\omega}{r^5}\left\{3xy.\left(\frac{dz}{dx}\right)+(3yy-rr)\left(\frac{dz}{dy}\right)-3yz\right\} &= X\omega \\ -\frac{\varepsilon ik\zeta.\omega}{r^5}\left\{(3xx-rr)\left(\frac{dz}{dx}\right)+3xy\left(\frac{dz}{dy}\right)-3xz\right\} &= Y\omega \\ 0 \qquad\qquad &= Z\omega \end{aligned}$$

Fangen wir mit der Umformung von ωX an, welches wir zuerst in die Form setzen

$$\omega X = \frac{\varepsilon i k \zeta \omega}{r^5}\left\{3xy\left(\frac{dz}{dx}\right)+(2rr-3xx-3zz)\left(\frac{dz}{dy}\right)-3yz\right\}$$

$$= \frac{\varepsilon i k \zeta \omega}{r^5}\left\{\left(x\frac{ddz}{dx\,dy}+\frac{dz}{dy}\right)rr-3\left(x+z\frac{dz}{dx}\right)x\frac{dz}{dy}\right.$$

$$\left.-\left(x\frac{ddz}{dx\,dy}-\frac{dz}{dy}\right)rr+3\left(y+z\frac{dz}{dy}\right)\left(x\frac{dz}{dx}-z\right)\right\}$$

$$= \varepsilon i k \zeta \omega\left\{\frac{d\,\frac{x\left(\frac{dz}{dy}\right)}{r^3}}{dx}-\frac{d\,\frac{x\left(\frac{dz}{dx}\right)-z}{r^3}}{dy}\right\}$$

Soll nun die Totalwirkung parallel mit der Axe der x ermittelt werden, so nennen wir III die Projection von I auf die Ebene der x, y oder den Inbegriff aller ω und haben mithin das Integral $\int \omega X$ über alle ω ausgedehnt aufzusuchen, oder wenn wir $dx\,dy$ anstatt ω schreiben, haben wir die doppelte Integration von $X\,dx\,dy$ auszuführen.

Man hat hiebei

$$\varepsilon i k \zeta\, dy . \left\{\frac{d\,\frac{x\left(\frac{dz}{dy}\right)}{r^3}}{dx} . dx\right\}$$

und

$$\varepsilon i k \zeta\, dx . \left\{\frac{d\,\frac{x\left(\frac{dz}{dx}\right)-z}{r^3}}{dy} . dy\right\}$$

besonders zu betrachten. Für ersteres theilt man III in unendlich viele unendlich schmale Streifen parallel mit der Axe der x, für zweites in ähnliche Streifen, aber parallel mit der Axe der y. Daraus folgt dann sehr leicht, dass das Ganze wird

$$\varepsilon i k \zeta \int \frac{x\,dz - z\,dx}{r^3} = \varepsilon i k \zeta \int \frac{x\frac{dz}{ds}-z\frac{dx}{ds}}{r^3} . ds$$

durch den ganzen Umfang von III ausgedehnt, indem man diesen in einer solchen Richtung durchläuft, dass III rechts liegt.

Auf ähnliche Weise erhält man für die Summe aller $Y\omega$

$$\varepsilon i k \zeta \int \frac{y\,dz - z\,dy}{r^3} = \varepsilon i k \zeta \int \frac{y\frac{dz}{ds}-z\frac{dy}{ds}}{r^3} . ds$$

Hiedurch in Verbindung mit [Nr. 14] ist das Ampèresche Gesetz bewiesen.

[20]

[*C. F. Gauss an W. Weber.*]

Hoch geschätzter Freund.

Seit Anfang dieses Jahrs ist unaufhörlich auf so vielfache Weise meine Zeit in Anspruch genommen und zersplittert, und von der andern Seite mein Gesundheitszustand anhaltenden Arbeiten so wenig günstig gewesen, dass ich bisher gar nicht habe dazu kommen können, den mir von Ihnen gütigst vor zwei Monaten zugesandten kleinen Aufsatz durchzugehen, und dass ich erst jetzt eine flüchtige Durchsicht habe vornehmen können. Diese hat mir aber gezeigt, dass der Gegenstand zu denselben Untersuchungen gehört, mit denen ich mich vor etwa 10 Jahren (ich meine besonders 1834—1836) sehr ausgedehnt beschäftigt habe, und dass um ein gründliches und erschöpfendes Urtheil über Ihren Aufsatz aussprechen zu können, es nicht zureicht *diesen* durchzulesen, sondern dass ich mich erst ganz wieder in meine eignen Arbeiten aus jener Zeit würde hineinstudiren müssen, was einen um so längern Zeitraum erfordern würde, da ich jetzt, bei einer versuchsweise vorgenommenen Papier-Durchmusterung erst einige nur fragmentarische Bruchstücke aufgefunden habe, obwohl wahrscheinlich viel mehr noch vorhanden sein wird, wenn auch nicht in vollständig geordneter Form.

Darf ich aber, jenen Gegenständen seit mehreren Jahren entfremdet, auf den Grund des Gedächtnisses eine Urtheilsäusserung mir verstatten, so würde ich glauben, dass von vorne herein AMPÈRE, lebte er noch, entschieden dagegen protestiren würde, wenn Sie das AMPÈREsche Fundamentalgesetz durch die Formel

$$-\frac{\alpha\alpha'}{rr}\, i\,i' \sin\theta \sin\theta' \cos\varepsilon \tag{I}$$

ausdrücken, da jenes ein ganz davon verschiedenes nemlich in der Formel

$$-\frac{\alpha\alpha'}{rr}\, i\,i' \left(\tfrac{1}{2}\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\varepsilon\right) \tag{II}$$

enthaltenes ist. Ich glaube auch nicht, dass AMPÈRE durch die Zusatznote, deren Sie in einem spätern Briefe erwähnen, befriedigt sein würde, wo Sie nemlich den Unterschied so einkleiden, dass AMPÈRES Formel eine *allgemeinere* sei, eben wie $-\frac{\alpha\alpha'}{rr}(F\cos\theta\cos\theta' + G\sin\theta\sin\theta'\cos\varepsilon)$. wo AMPÈRE aus Versuchen $F = \frac{1}{2}G$ abgeleitet habe, während Sie, weil AMPÈRES Versuche nicht sehr scharf seien, mit demselben Rechte den Werth $F = 0$ in Anspruch nehmen zu können glauben. In jedem andern Falle, als dem vorliegenden, würde ich zugeben, dass ein dritter bei dieser Discordanz zwischen Ihnen und AMPÈRE sich etwa so erklärte:

ob man (mit Ihnen) dies nur als eine Modification des Ampèreschen Gesetzes ansehen, oder

ob (wie meines Erachtens Ampère die Sache würde ansehen müssen) dies ebenso viel heisse als ein completer Umsturz der Ampèreschen Fundamentalformel und das Einsetzen einer wesentlich andern

sei doch im Grunde wenig mehr als ein müssiger Wortstreit. Wie gesagt, in jedem andern Fall würde ich dies gern einräumen, da niemand *in verbis facilior* als ich sein kann. Aber in gegenwärtigem ist der Unterschied eine Lebensfrage, denn die ganze Ampèresche Theorie der Umtauschbarkeit des Magnetismus mit galvanischen Strömen hängt durchaus von der Richtigkeit der Formel II ab und geht gänzlich verloren, wenn eine andere dafür gewählt würde.

Ich kann Ihnen nicht widersprechen, wenn Sie die Versuche von Ampère für nicht sehr concludent erklären, zumal, da ich Ampères classische Abhandlung nicht zur Hand und die Art seiner Versuche gar nicht im Gedächtniss habe, indessen glaube ich doch nicht, dass Ampère, auch wenn er die Unvollkommenheit seiner Versuche selbst einräumte, die Befugniss, eine ganz andere Formel (I), wodurch seine ganze Theorie zerfiele, zu adoptiren zugeben würde, so lange nicht diese andere Formel durch *ganz entscheidende* Versuche befestigt wäre. Die Bedenken, die ich selbst Ihrem zweiten Briefe zufolge, geäussert habe, müssen von Ihnen misverstanden sein. Ich habe früh die Überzeugung gewonnen und festgehalten, dass die oben erwähnte Vertauschbarkeit *nothwendig* die Ampèresche Formel II erfordert und keine andere zulässt, die nicht mit jener, für einen geschlossenen Strom identisch wird, *wenn die Wirkung in der Richtung der die beiden Stromelemente verbindenden geraden Linie* geschehen soll, dass man aber allerdings unzählige andere Formen wählen kann, wenn man die eben ausgesprochene Bedingung verlässt, die aber für einen geschlossenen Strom immer dasselbe Endresultat geben müssen wie Ampères Formel. Man könnte übrigens auch noch hinzufügen, dass da es bei jenen Zwecken immer nur um Wirkungen in messbaren Entfernungen sich handelt, nichts uns hindern würde, vorauszusetzen, dass auch noch möglicherweise andere Theile zu der Formel hinzukommen mögen, die nur in unmessbar kleinen Entfernungen wirksam sind (wie die Molecularattraction zu der Gravitation hinzutritt), und dass dadurch die Schwierigkeit des Abstossens zweier auf einander folgenden Elemente desselben Stromes beseitigt werden könnte.

Um Missverständniss zu verhüten, will ich noch bemerken, dass die obige Formel II auch so geschrieben werden kann

$$-\frac{\alpha\alpha'}{rr}ii'(-\tfrac{1}{2}\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos\varepsilon)$$

und dass ich nicht weiss, ob AMPÈRE (dessen Memoire ich wie gesagt nicht zur Hand habe) die erste oder zweite Schreibart gebraucht hat. Beide bedeuten nemlich dasselbe, und man schreibt die erste Form, wenn man die Winkel θ, θ' mit derselben (begrenzten) geraden Linie misst, also diese Linie bei dem zweiten Winkel im entgegengesetzten Sinn zum Schenkel wählt, die andere Form hingegen, wenn man eine gerade Linie von unbestimmter Länge betrachtet und zur Messung der Winkel θ, θ', jene Linie beidemal in einerlei Sinn zuzieht. Und ebenso kann man der ganzen Formel anstatt des — Zeichens ein + Zeichen vorsetzen, wenn man nicht Abstossung sondern Anziehung wie eine positive Wirkung betrachtet.

Vielleicht bin ich im Stande, mich etwas mehr wieder in diese mir jetzt so fremd gewordenen Sachen hineinzustudiren, bis Sie, wie Sie mir Hoffnung gemacht haben Ende April oder Anfang Mai mich mit einem Besuche erfreuen. Ich würde ohne Zweifel meine Untersuchungen längst bekannt gemacht haben, hätte nicht zu der Zeit, wo ich sie abbrach, das gefehlt, was ich wie den eigentlichen Schlussstein betrachtet hatte

Nil actum reputans si quid superesset agendum

nemlich *die Ableitung* der Zusatzkräfte (die zu der gegenseitigen Wirkung ruhender Electricitätstheile noch hinzukommen, wenn sie in gegenseitiger Bewegung sind) *aus der nicht instantaneen*, sondern (auf ähnliche Weise wie beim Licht) in der Zeit sich fortpflanzenden Wirkung. Mir hatte dies damals nicht gelingen wollen; ich verliess aber so viel ich mich erinnere die Untersuchung damals doch nicht ganz ohne Hoffnung, dass dies später vielleicht gelingen könnte, obwohl — erinnere ich mich recht — mit der subjectiven Überzeugung, dass es vorher nöthig sei, sich von der Art, *wie* die Fortpflanzung geschieht, eine construirbare Vorstellung zu machen.

— — — — — — — — — — — — — — — —

Unter herzlichen Grüssen an Ihre Geschwister und an Herrn Prof. MÖBIUS

Göttingen, 19. März 1845. stets der Ihrige

C. F. GAUSS.