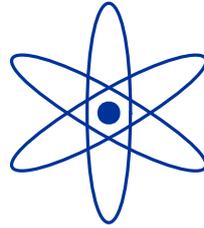


# PHYSIK-DEPARTMENT



**Verbesserte statistische Bildrekonstruktion  
für die hochauflösende PET:  
Bestimmung der Systemmatrix aus Monte  
Carlo Simulationen, Validierung und  
Anwendung auf Tiermessungen,  
sowie Erweiterung für einen  
Doppellagen-Tomographen**

Dissertation

von

Guido Böning



**TECHNISCHE UNIVERSITÄT  
MÜNCHEN**



Technische Universität München

Max-Planck-Institut für Physik

(Werner-Heisenberg-Institut)

**Verbesserte statistische Bildrekonstruktion  
für die hochauflösende PET:  
Bestimmung der Systemmatrix aus Monte  
Carlo Simulationen, Validierung und  
Anwendung auf Tiermessungen,  
sowie Erweiterung für einen  
Doppellagen-Tomographen**

Guido Böning

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Physik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. M. Lindner  
Prüfer der Dissertation: 1. Hon.-Prof. Dr. N. Schmitz  
2. Univ. Prof. Dr. H.-J. Körner

Die Dissertation wurde am 22. Mai 2002 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Physik am 9. Juli 2002 angenommen.



Diese Arbeit wurde angefertigt am

Max-Planck-Institut für Physik  
(Werner-Heisenberg-Institut),  
Föhringer Ring 6, 80805 München,

und an der

Nuklearmedizinischen Klinik und Poliklinik  
des Klinikums rechts der Isar  
der Technischen Universität München,  
Ismaninger Str. 22, 81675 München.



# Zusammenfassung

## Einleitung

Die Positronen-Emissions-Tomographie (PET) ist eine bildgebende Methode, mit der für die medizinische Diagnostik mehrdimensionale Abbilder von physiologischen Funktionen des menschlichen Organismus angefertigt werden. Durch die Verwendung von radioaktiven, Positronen emittierenden Atomkernen können Substanzen, die an diesen Funktionen beteiligt sind, radioaktiv markiert werden. Die biologischen Eigenschaften dieser Radiopharmaka unterscheiden sich nicht von den Eigenschaften der ursprünglichen Substanzen. Aufgrund der koinzidenten Messung der Vernichtungsquanten kann auf eine geometrische Kollimierung verzichtet werden, weshalb die PET-Methode gegenüber anderen Methoden sehr empfindlich ist. Die Entwicklung neuer Radiopharmaka durch Biologen, Radiochemiker und Ärzte ist ein wesentlicher Aspekt für eine Verbesserung des diagnostischen Potentials der PET. Für deren Erprobung an kleinen Tieren, wie Ratten und Mäusen, würde ein bildgebendes Verfahren, bei dem die Tiere nicht getötet werden müssen, von großem Vorteil sein. Die nuklearmedizinische Bildgebung an lebenden Kleintieren mittels PET stellt jedoch besondere Anforderungen an die verwendeten Tomographen. Das Volumen einer Ratte beträgt ungefähr ein Zweihundertstel des menschlichen Körpervolumens, das Körpervolumen einer Maus wiederum beträgt ungefähr ein Zehntel des Rattenvolumens. Um diese kleinsten Strukturen abbilden zu können, werden vermehrt spezielle Kleintier-Tomographen mit einer erhöhten Ortsauflösung entwickelt. Zusätzlich müssen diese Tomographen für eine hohe Sensitivität gegenüber dem vom Objekt abgestrahlten Quantenfluss ausgelegt sein, da die maximal applizierbare Stoffmenge bei diesen kleinen Tieren limitiert ist.

## Motivation

Die vorliegende Arbeit beschreibt die besonderen Methoden der Datennahme und Verarbeitung für zwei Kleintiertomographen, den Sektortomographen MADPET (48 Kristalle, je  $3,7 \times 3,7 \times 12 \text{ mm}^3$ ) und den Doppellagen-Ringtomographen MADPET-II (1152 Kristalle, je  $2 \times 2 \times 6\text{-}8 \text{ mm}^3$ ), die innerhalb eines Gemeinschaftsprojektes der Technischen Universität München und des Max-Planck-Instituts für Physik in München entwickelt wurden. Zum Erreichen einer hohen Sensitivität wurden die Durchmesser der Detektorsysteme für beide Tomographen möglichst klein gewählt (86 mm für MADPET und 71,1 mm für MADPET-II). Um die vollständige Abbildung von Ratten, die einen Thoraxdurchmesser von bis zu 70 mm aufweisen können, zu gewährleisten, musste annähernd der gesamte Bereich im Inneren des Detektorsystems abbildbar sein. Dieses zu rekonstruierende Gesichtsfeld wurde für MADPET auf einen kreisförmigen Bereich mit 80 mm Durchmesser (93% des Systemdurchmessers) festgelegt. Für MADPET-II betrug der Durchmesser des Gesichtsfeldes 68 mm (96% des Systemdurchmessers). Eine weitere Forderung war, dass die Abbildungseigenschaften des Tomographen für alle Bereiche des Gesichtsfeldes identisch sein sollten. Dazu war eine unveränderliche Ortsauflösung ohne Variationen zum Rande des Gesichtsfeldes gefordert.

## Tomographische Bildrekonstruktion

Die Rekonstruktion tomographischer Daten kann auf zwei unterschiedlichen Wegen erfolgen.

Die gefilterte Rückprojektion basiert auf einer analytisch beschriebenen Beziehung von gemessenen und zu rekonstruierenden Daten. Sie ist einfach zu implementieren und erfordert einen sehr geringen Rechenaufwand. Jedoch enthält sie eine Gleichbehandlung aller Daten. Statistische Rekonstruktionsmethoden hingegen verknüpfen in einem linearen Gleichungssystem die gemessenen Projektionsdaten mit dem zu rekonstruierenden Bild. Die Rekonstruktion erfolgt durch iteratives Minimieren der Fehler zwischen gemessenen Daten und rekonstruiertem Bild. In der Koeffizienten- oder Gewichtematrix des linearen Gleichungssystems können alle bekannten physikalischen Effekte in Form von Nachweiswahrscheinlichkeiten berücksichtigt werden. Es erfolgt somit keine Gleichbehandlung aller Daten. Statistische Rekonstruktionsmethoden sind wesentlich aufwändiger zu implementieren und erfordern einen hohen Rechenaufwand. Im Besonderen die Bestimmung der Gewichtematrix ist für die Güte des rekonstruierten Bildes entscheidend.

Die Ortsauflösung eines PET-Gerätes wird maßgeblich durch die Größe der verwendeten Kristallelemente und deren Abstand, den Systemdurchmesser, beeinflusst. Die räumliche Sensitivität eines Detektorpaares wird mit einem Sensitivitätsprofil, der koinzidenten Antwortfunktion, charakterisiert. Sind zwei Einzelkristalle gegeneinander gekippt, wie es am Rande des Gesichtsfeldes ringförmiger Tomographen der Fall ist, so tritt der Parallaxeneffekt auf: die Antwortfunktion dieses Paares wird verbreitert und verzerrt.

Die rekonstruierte Ortsauflösung verhält sich ähnlich wie die Breiten der Antwortfunktionen der beteiligten Detektorpaare. Verteilungen, die nahe am Zentrum des Tomographen liegen, werden mit einer guten Auflösung rekonstruiert, da sie hauptsächlich von nicht zueinander gekippten Kristallen abgetastet werden. Die Breite der Antwortfunktion dieser Kristallpaare entspricht der intrinsischen Auflösung zweier optimal ausgerichteter Kristalle (ca. die Hälfte der Kristallbreite). Verteilungen am Rande des Gesichtsfeldes werden mit einer schlechteren Auflösung abgebildet, da die Antwortfunktionen der beteiligten (hauptsächlich zueinander gekippten) Detektorpaare aufgrund des Parallaxeneffekts verbreitert sind. Herkömmliche (meist analytische, jedoch auch statistische) Rekonstruktionsmethoden, wie sie z.B. in klinischen Tomographen zum Einsatz kommen, berücksichtigen die physikalischen Prozesse der Gammaquanten mit dem Detektorsystem nicht oder nur mangelhaft und weisen eine Verschlechterung der rekonstruierten Ortsauflösung auf ihren doppelten Wert vom Mittelpunkt des Tomographen zum Rande des meist nur 50-60% des Tomographendurchmessers messenden Gesichtsfeldes auf. Typische Größenordnungen bei klinischen PET-Geräten für die Humandiagnostik sind ein Ringdurchmesser von 80-100 cm und ein rekonstruiertes Gesichtsfeld mit 40-50 cm Durchmesser. Die Ortsauflösung im Zentrum beträgt ungefähr 4-8 mm, sie verschlechtert sich jedoch kontinuierlich mit zunehmendem Abstand zum Zentrum (z.B. 8-16 mm Auflösung bei 20 cm Abstand vom Zentrum).

### **MADPET: Methoden und Ergebnisse**

In der hier vorgestellten Arbeit wurde für den Kleintier-Sektortomographen MADPET ein Rekonstruktionsverfahren entwickelt, das die Forderung nach einer hohen und unveränderlichen Ortsauflösung innerhalb eines ungewöhnlich großen Gesichtsfeldes (93 % des Systemdurchmessers) erfüllte. Hierzu wurden Monte Carlo Simulationen durchgeführt, anhand derer die Nachweiseigenschaften des Tomographen untersucht und die Gewichtematrix für eine statistische Rekonstruktion berechnet werden konnte. Weiterhin wurden aus den Monte Carlo Simulationen koinzidente Antwortfunktionen für alle Detektorpaare erstellt.

Der Parallaxeneffekt konnte deutlich beobachtet werden, die mittlere Halbwertsbreite der

Antwortfunktionen betrug  $2,8 \text{ mm} \pm 0,8 \text{ mm}$ . Der Maximalwert aller Halbwertsbreiten war  $4,5 \text{ mm}$ , also mehr als das Doppelte der intrinsischen Auflösung (ungefähr  $2 \text{ mm}$ ) der im MADPET verwendeten Kristalle.

Mit simulierten und gemessenen Daten konnten die hervorragenden, annähernd ortsunabhängigen, Abbildungseigenschaften des MADPET in Kombination mit dieser statistischen Rekonstruktion gezeigt werden. Eine lineare Anpassung an die rekonstruierte Ortsauflösung  $\Gamma$  in Abhängigkeit vom Abstand  $d$  ( $d$  in mm) zum Zentrum des Tomographen ergab  $\Gamma = 2,1 \text{ mm} + 0,01 \cdot d$  für die in dieser Arbeit entwickelten Methoden bei einer mittleren Auflösung von  $2,3 \text{ mm} \pm 0,1 \text{ mm}$ . Herkömmliche analytische Rekonstruktionsmethoden resultierten in einer stetigen Verschlechterung der Auflösung mit zunehmendem Abstand zum Zentrum,  $\Gamma = 2,4 \text{ mm} + 0,06 \cdot d$  (Mittelwert:  $3,5 \text{ mm} \pm 0,7 \text{ mm}$ ).

Die Messung von lebenden Kleintieren mit MADPET und die anschließende statistische Bildrekonstruktion unter Verwendung der Monte Carlo Gewichtematrix erlaubte die detaillierte Abbildung des Herzstoffwechsels einer Ratte sowie der Knochenaktivität einer Maus. Erst bei dem Versuch, die regionalen Stoffwechselaktivitäten eines Mäuseherzens zu untersuchen, wurden die konstruktiv bedingten Grenzen des MADPET für die Abbildung kleinster Strukturen erreicht.

## MADPET-II: Methoden und Ergebnisse

Für den Nachfolger des MADPET, MADPET-II, wurden Monte Carlo Simulationen des Tomographen durchgeführt und daraus die Gewichtematrix für die iterative statistische Rekonstruktion berechnet. Weiterhin wurde anhand von simulierten tomographischen Daten untersucht, ob mit MADPET-II auch ohne Rotation des Systems eine Abbildung guter Qualität möglich war, um bei späteren Messungen den Aufwand zu reduzieren und z.B. dynamische Messmethoden zu erlauben.

Durch die statistische Rekonstruktion mit der Monte Carlo Gewichtematrix konnte ohne Rotation des Systems eine annähernd ortsunabhängige Auflösung von  $\Gamma = 1,0 \text{ mm} + 0,01 \cdot d$  mit Mittelwert  $1,2 \text{ mm} \pm 0,2 \text{ mm}$  erreicht werden. Die analytischen Rekonstruktionsmethoden resultierten erst nach der Rotation in 20 Winkelschritten in einer brauchbaren Bildqualität, die Auflösung betrug hierbei  $\Gamma = 1,4 \text{ mm} + 0,04 \cdot d$  (Mittelwert:  $2,1 \text{ mm} \pm 0,5 \text{ mm}$ ). Die Überprüfung der Bildqualität anhand von simulierten Daten eines komplexen Strukturphantoms bestätigte diese Resultate.

Der Verzicht auf Rotation, ermöglicht durch die hier entwickelte Monte Carlo Gewichtematrix für die statistische Rekonstruktion, wird das Potential des MADPET-II erheblich steigern. Da das System zu jedem Zeitpunkt der Messung alle für die statistische Rekonstruktion geforderten Projektionsrichtungen abtastet, können die gemessenen Daten unmittelbar nach ihrem Eintreffen, z.B. bezüglich ihres Eintreffzeitpunktes, verarbeitet werden. Dies ermöglicht unter anderem die Berechnung dynamischer Messdaten zur Bestimmung der zeitlichen Veränderung der gemessenen biologischen Eigenschaft. Weiterhin erlaubt dieser Messmodus eine statistische Bildrekonstruktion während der Messung.

## Schlussfolgerung

In dieser Arbeit konnte gezeigt werden, dass die genaue Untersuchung der Nachweiseigenschaften eines hochauflösenden PET Gerätes anhand von Monte Carlo Simulationen durchführbar ist. Es konnten für zwei Kleintiertomographen aus diesen Simulationen die Wahrscheinlichkeitsmatrizen für eine statistische Bildrekonstruktion berechnet werden. Deren Verwen-

dung für simulierte und gemessene tomographische Daten zeigte eine erheblich verbesserte Ausnützung der Abbildungseigenschaften dieser hochauflösenden Tomographen. Die dabei erreichte rekonstruierte Ortsauflösung war annähernd ortsunabhängig und annähernd identisch mit der intrinsischen Auflösung der in dem jeweiligen Detektorsystem verwendeten Kristalle.

Ein Vergleich mit den für Kleintiertomographen anderer Arbeitsgruppen entwickelten Methoden zeigte, dass die in dieser Arbeit berechneten Gewichtsmatrizen eine bisher nicht erreichte Genauigkeit bei der Beschreibung der physikalischen Prozesse von Gammaquanten mit dem Tomographen beinhalteten.

# Abstract

## Introduction

Positron-Emission-Tomography (PET) allows non-invasive multidimensional imaging of biological functions. It is widely used for medical diagnosis in patients with cancer, heart or brain diseases. By labeling physiological substances with positron-emitting radioactive nuclides, radiopharmaceuticals are synthesized. Although the molecular compound is manipulated, its biological properties are preserved. After positron-electron annihilation, the resulting two collinear 511 keV photons can be detected in coincidence with appropriate tomographs. Coincidence detection does not require collimators to determine the gamma trajectories, which results in the superior sensitivity of PET compared to other modalities. The development of new radiopharmaceuticals can help to improve the diagnostic potential of PET. For in-vivo evaluation of these new tracers, small animal PET measurements may be of great value. On the other hand, high resolution small animal PET imaging is a challenge: the volume of a human being, the object for which conventional clinical PET devices are designed for, is approximately 200 times larger than a rat and even 2000 times larger than a mouse. For imaging small objects such as rats and mice, dedicated small animal tomographs are designed to improve spatial resolution. In addition, high sensitivity is required to measure low radiopharmaceutical concentrations.

## Motivation

This work describes the data acquisition and data processing methods for two small animal tomographs: the sector tomograph MADPET (48 crystal elements,  $3.7 \times 3.7 \times 12 \text{ mm}^3$ ) and the dual-layer ring tomograph MADPET-II (1152 crystal elements,  $2 \times 2 \times 6\text{-}8 \text{ mm}^3$ ). Both devices were developed at the Technischen Universität München and the Max-Planck-Institut für Physik, München. To achieve a high sensitivity, small system diameters were chosen for MADPET (86 mm) and MADPET-II (71.1 mm). A prerequisite for the imaging of rats with up to 70 mm diameter (thorax) was that nearly the entire system aperture needed to be reconstructed. The required field-of-view diameters were 80 mm for MADPET (93 % of system diameter) and 68 mm for MADPET-II (96 % of system diameter). The goal of this work was to develop image reconstruction strategies which provide a space-invariant high resolution.

## Tomographic Image Reconstruction

There are two major methods for tomographic image reconstruction. Filtered backprojection is based on analytical descriptions of the relationship between measured and image data. Its main advantages are that it can be implemented easily and that it is very efficient and fast. Nevertheless, it treats all measured data identically without taking into account the differences in geometrical or physical sensitivity of the measurement system. Statistical reconstruction methods use a set of linear equations to connect each measured data sample to each image element to be reconstructed. By iteratively minimizing the error between measured and reconstructed data, the resulting image is expected to be closer to the original distribution of the radiopharmaceutical. The main advantage of statistical methods is that

the coefficient matrix can contain exact descriptions of the measurement process, such as detection probabilities.

The spatial resolution of PET devices depends on the size and distance of the detector elements. It is mainly affected by the spatial sensitivity profiles of all coincident detector pairs, described with coincident response functions. For oblique detector pairs, the sensitive area is broadened and a distorted response function can be observed. Therefore, compared to perfectly aligned crystals which can be described by their intrinsic resolution being half of the crystal width, a significantly degraded resolution is found for oblique crystal pairs.

The reconstructed image resolution depends on the individual spatial resolution of all contributing detector pairs. In the center of the field-of-view, where data are mainly measured with aligned crystals, the reconstructed resolution approaches the crystal intrinsic resolution. But when imaging objects displaced from the center, e.g. being close to the detector ring, projection data are measured by an increasing number of oblique crystal pairs and therefore the reconstructed resolution will be strongly influenced by the parallax effect. Clinical PET systems usually provide image reconstruction methods based on conventional reconstruction techniques which do not account for the physical processes of photons within the detector system. To suppress the influence of the parallax effects, PET devices are usually built with large system diameters (80-100 cm) which allow a relatively small size of the field-of-view of about 40-50 cm (50-60 % of the system diameter). Nevertheless, strong resolution degradation from the center to the boundaries of the limited field-of-view are observed in reconstructed images (e.g. from 4-8 mm in the center to 8-16 mm at 20 cm distance).

## **MADPET: Methods and Results**

In this work, image reconstruction methods providing high and constant resolution within an exceptionally large field-of-view (93 % of the system diameter) were developed for the small animal PET system MADPET. For this purpose, the physical processes of photons hitting the detector system were studied and characterized by means of Monte Carlo simulations. From these simulations, a detection probability matrix was calculated for its application in iterative statistical image reconstruction. Furthermore, coincidence response functions were determined for all crystal pairs.

The response functions of oblique detector pairs showed notable parallax effects. The mean full-width at half-maximum of all response functions was  $2.8 \text{ mm} \pm 0.8 \text{ mm}$  with a maximum value of 4.5 mm. The large mean and especially high maximum value - being more than twice as large as the intrinsic resolution of two aligned crystals - indicated significant resolution degradation in reconstructed images if no corrections for the parallax effect were applied.

The reconstructed resolution was studied with simulated point source and measured line source data. Using the Monte Carlo system matrix in combination with iterative statistical reconstruction algorithms yielded a nearly space invariant reconstructed resolution. The resolution could be expressed with the linear function  $\Gamma = 2.1 \text{ mm} + 0.01 \cdot d$ ,  $d$  being the source displacement (in mm) from the field-of-view center. The mean value was  $2.3 \text{ mm} \pm 0.1 \text{ mm}$ . Conventional reconstruction techniques showed a worsened mean resolution of  $3.5 \text{ mm} \pm 0.7 \text{ mm}$ . Furthermore, strong resolution degradation with increasing distance from the field-of-view center ( $\Gamma = 2.4 \text{ mm} + 0.06 \cdot d$ ) was observed.

Three small animal studies with MADPET are presented and analyzed by means of the methods which were developed in this work. The reconstructed volume data, achieved with iterative statistical methods using the Monte Carlo system matrix, allowed a detailed

identification of the metabolism of a rat heart and of the mineral consumption of a mouse's skeleton. In contrast, the heart scan of a mouse could not be analyzed for regional tracer distributions due to the limited system resolution.

## **MADPET-II: Methods and Results**

To study the full ring tomograph MADPET-II, Monte Carlo simulations were performed for this device. From these, coincidence response functions were calculated for all detector pairs. In addition, the detection probability matrix for iterative reconstruction was determined. Since MADPET-II is a full ring scanner, its capability to provide sufficient object space sampling with non-rotated measurements was studied. Simulated source distributions were examined in terms of sampling density, reconstructed image quality and resolution homogeneity.

With the statistical reconstruction using the Monte Carlo system matrix an almost space invariant and exceptionally high resolution of  $\Gamma = 1.0 \text{ mm} + 0.01 \cdot d$  (with a mean value of  $1.2 \text{ mm} \pm 0.2 \text{ mm}$ ) was achieved even without system rotation. Analytical reconstruction methods required system rotation in at least 20 angular steps to yield reasonable image quality. Resolution degradation was observed with the analytical reconstruction methods:  $\Gamma = 1.4 \text{ mm} + 0.04 \cdot d$  (mean:  $2.1 \text{ mm} \pm 0.5 \text{ mm}$ ). The reconstructed images of a simulated structure phantom, covering nearly the entire field-of-view, confirmed these results.

The capability to perform tomographic measurements without system rotation together with the excellent image quality obtained from non-rotated data opens up a wide field of applications for MADPET-II. Without rotation, at any time of the measurement all necessary projection samples are taken. As a result, statistical online image reconstruction is feasible. Furthermore, the measured coincidences can be processed efficiently corresponding to their time-of-arrival. This includes the real-time sorting of the data corresponding to their detection time to allow for dynamic measurements which can be used to study the variations of a tracer distribution over time.

## **Conclusion**

This work showed that a detailed study of the detection properties of high resolution PET devices with Monte Carlo methods is feasible. From these simulations, the detection probability matrices for two small animal tomographs could be determined and utilized for iterative statistical image reconstruction. With simulated and measured data, a great gain in image resolution and quality could be noted when these methods were applied. The overall reconstructed resolution, being space-invariant, was nearly the intrinsic resolution of the tomograph.

A comparison with the methods for two small animal PET devices of other groups showed, that the detection probability matrices presented in this work contained in greater detail information about the physical processes of photons within the detector system.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>viii</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>ix</b>
<b>Flussdiagrammverzeichnis</b>	<b>xi</b>
<b>Begriffe und Abkürzungen</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Positronen-Emissions-Tomographie (PET) . . . . .	1
1.2 Medizinische Forschung an kleinen Tieren mit der PET . . . . .	3
1.3 Kleintier-Positronen-Emissions-Tomographen . . . . .	3
1.4 Das MADPET Projekt . . . . .	4
1.5 Motivation und Struktur dieser Arbeit . . . . .	4
<b>2 Prinzip und Methoden der PET</b>	<b>7</b>
2.1 Radioaktive Nuklide und Radiopharmaka . . . . .	8
2.2 Aufbau eines PET-Detektors . . . . .	10
2.3 Wechselwirkungen von Gammaquanten mit Materie . . . . .	11
2.4 Messung von Gammaquantenpaaren . . . . .	15
2.4.1 Koinzidenzmessung . . . . .	15
2.4.2 Koinzidente Antwortfunktion eines Detektorpaares . . . . .	19
2.5 Aufbau eines Positronen-Emissions-Tomographen . . . . .	22
2.6 Koordinaten und räumliche Bezeichnungen . . . . .	23
2.7 Monte Carlo Methoden . . . . .	23
2.8 Zusammenfassung von Kapitel 2 . . . . .	24
<b>3 Tomographische Rekonstruktion</b>	<b>27</b>
3.1 Analytische tomographische Rekonstruktion . . . . .	28
3.1.1 Radontransformation . . . . .	28
3.1.2 Inversion der Radontransformation . . . . .	28
3.1.3 Abtastbedingungen bei diskreten Abtastintervallen . . . . .	30
3.1.4 Gefilterte Rückprojektion . . . . .	32
3.1.5 Gefaltete Rückprojektion . . . . .	33
3.1.6 Geometrische Umformung zu Parallelprojektionen . . . . .	34
3.2 Algebraische und statistische tomographische Bildrekonstruktion . . . . .	35
3.2.1 Algebraische Beschreibung des Rekonstruktionsproblems . . . . .	35

3.2.2	Statistisches Modell und Schätzfunktion . . . . .	37
3.2.3	Regulierung . . . . .	39
3.2.4	Modifikationsentscheidung . . . . .	40
3.2.5	Modifikationsdurchführung . . . . .	41
3.2.6	Algebraische und statistische Rekonstruktionsalgorithmen . . . . .	44
3.3	Vergleich der analytischen und statistischen Rekonstruktion . . . . .	50
3.4	Besonderheiten bei der hochauflösenden PET . . . . .	53
3.5	Zusammenfassung von Kapitel 3 . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Sektortomograph MADPET</b>	<b>57</b>
4.1	Aufbau des Tomographen . . . . .	58
4.1.1	Detektoren des MADPET . . . . .	58
4.1.2	Analoge Detektorelektronik . . . . .	58
4.1.3	Koinzidenzelektronik . . . . .	61
4.2	Koordinaten und Bezeichnungen . . . . .	62
4.3	Messung mittels einer parallelen virtuellen Maschine . . . . .	64
4.3.1	Genereller Aufbau des Messsystems . . . . .	64
4.3.2	PVM-gestützte Messung . . . . .	65
4.4	Vorbereitung der gemessenen Daten für die Bildrekonstruktion . . . . .	71
4.4.1	Vorverarbeitung . . . . .	73
4.4.2	Umsortierung zu List-Mode Histogrammen . . . . .	75
4.5	Monte Carlo Simulationen . . . . .	76
4.5.1	Allgemeine Beschreibung der Simulationen . . . . .	76
4.5.2	Simulation eines Einzelkristalls . . . . .	79
4.5.3	Monte Carlo Simulation des MADPET . . . . .	79
4.5.4	Berechnung der koinzidenten Antwortfunktionen . . . . .	81
4.5.5	Berechnung tomographischer Projektionsdaten . . . . .	84
4.5.6	Berechnung der Gewichtematrix . . . . .	85
4.6	Bestimmung von Korrekturdaten . . . . .	90
4.6.1	Bestimmung der koinzidenten Sensitivitäten . . . . .	90
4.6.2	Bestimmung der zufälligen Koinzidenzen . . . . .	91
4.7	Tomographische Bildrekonstruktion . . . . .	92
4.7.1	Umformung zu Sinogrammen . . . . .	92
4.7.2	Analytische Bildrekonstruktion . . . . .	95
4.7.3	Statistische Bildrekonstruktion . . . . .	96
4.8	Rekonstruierte Daten des MADPET . . . . .	96
4.8.1	Bestimmung der rekonstruierten Ortsauflösung . . . . .	98
4.8.2	Bestimmung der Bildqualität . . . . .	100
4.9	Zusammenfassung von Kapitel 4 . . . . .	104
<b>5</b>	<b>In-vivo Messungen mit MADPET</b>	<b>105</b>
5.1	Datennahme, Rekonstruktion und Darstellung . . . . .	105
5.1.1	Messbedingungen der in-vivo Tiermessungen . . . . .	105
5.1.2	Rekonstruktion der in-vivo Daten . . . . .	107
5.1.3	Darstellung der rekonstruierten Volumina als Projektionen . . . . .	107
5.2	Stoffwechselbestimmung am Herz einer Ratte . . . . .	107
5.2.1	Hintergrund . . . . .	107

5.2.2	Messparameter . . . . .	109
5.2.3	Resultate . . . . .	110
5.3	Stoffwechselbestimmung im Oberkörper einer Maus . . . . .	110
5.3.1	Hintergrund . . . . .	110
5.3.2	Messung . . . . .	110
5.3.3	Resultate . . . . .	115
5.4	Bestimmung der Skelettstruktur einer Maus . . . . .	115
5.4.1	Hintergrund . . . . .	115
5.4.2	Messung . . . . .	115
5.4.3	Resultate . . . . .	115
5.5	Zusammenfassung von Kapitel 5 . . . . .	116
<b>6</b>	<b>Ringtomograph MADPET-II</b>	<b>119</b>
6.1	Aufbau des Tomographen . . . . .	121
6.1.1	Detektoren . . . . .	121
6.1.2	Analoge Detektorelektronik . . . . .	124
6.1.3	Digitale Elektronik und Rechnersystem . . . . .	124
6.2	Koordinaten und Bezeichnungen . . . . .	125
6.3	Vorbereitung der gemessenen Daten für die Bildrekonstruktion . . . . .	127
6.3.1	Vorverarbeitung . . . . .	127
6.3.2	Umsortierung zu 2D List-Mode Histogrammen . . . . .	127
6.4	Monte Carlo Simulationen . . . . .	127
6.4.1	Allgemeine Beschreibung der Simulationen . . . . .	127
6.4.2	Monte Carlo Simulation des MADPET-II . . . . .	129
6.4.3	Berechnung der koinzidenten Antwortfunktionen . . . . .	129
6.4.4	Berechnung tomographischer Projektionsdaten . . . . .	131
6.4.5	Berechnung der Gewichtematrix . . . . .	131
6.5	Tomographische Bildrekonstruktion . . . . .	133
6.5.1	Umformung zu Sinogrammen . . . . .	133
6.5.2	Analytische Bildrekonstruktion . . . . .	135
6.5.3	Statistische Bildrekonstruktion . . . . .	135
6.6	Rekonstruierte Daten des MADPET-II . . . . .	137
6.6.1	Bestimmung der rekonstruierten Ortsauflösung . . . . .	140
6.6.2	Bestimmung der Bildqualität . . . . .	141
6.7	Zusammenfassung von Kapitel 6 . . . . .	144
<b>7</b>	<b>Vergleich mit den Methoden für andere Kleintier-Tomographen</b>	<b>145</b>
7.1	MicroPET . . . . .	145
7.2	Sherbrooke-Animal-PET . . . . .	147
7.3	Vergleich mit MADPET und MADPET-II . . . . .	150
<b>8</b>	<b>Diskussion</b>	<b>153</b>
<b>A</b>	<b>Bezeichnungen und Größenordnungen</b>	<b>159</b>
A.1	Generelle Nomenklatur in mathematischen Ausdrücken . . . . .	159
A.2	Bezeichnungen und Größenordnungen in Kapitel 3 . . . . .	161
A.3	Bezeichnungen und Größenordnungen in Kapitel 4 . . . . .	162

A.4	Bezeichnungen und Größenordnungen in Kapitel 6 . . . . .	163
A.5	Namen der in den Kapiteln 4 bis 6 rekonstruierten Bilder . . . . .	163
<b>B</b>	<b>Simulierte Daten</b>	<b>165</b>
B.1	Simulierte Datensätze für den MADPET . . . . .	166
B.2	Simulierte Datensätze für den MADPET-II . . . . .	166
B.3	Gewichtsmatrizen von MADPET und MADPET-II . . . . .	167
<b>C</b>	<b>Rechendauer der Methoden</b>	<b>169</b>
C.1	Rechendauer der einzelnen MADPET-Methoden . . . . .	170
C.2	Rechendauer der einzelnen MADPET-II-Methoden . . . . .	171
	<b>Index</b>	<b>173</b>
	<b>Literatur</b>	<b>178</b>
	<b>Danksagung</b>	<b>191</b>

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Einige tomographische Geräte für die medizinische Diagnostik . . . . .	2
2.1	Beispiele für die onkologischen Diagnostik mit der PET: gesunder Patient . .	9
2.2	Beispiele für die onkologischen Diagnostik mit der PET: Patienten mit Tumoren	9
2.3	Wechselwirkungsquerschnitte für Photoeffekt sowie Compton- und Rayleigh-Streuung . . . . .	12
2.4	Grafische Darstellungen der Klein-Nishina Gleichung . . . . .	12
2.5	Spektrum für 511-keV-Gammaquanten, aufgenommen mit einem LSO-APD Einzeldetektor . . . . .	14
2.6	Messung und Verlust von Koinzidenzen . . . . .	16
2.7	Koinzidente Antwortfunktionen einiger Detektorpaare . . . . .	20
2.8	Geometrische Randbedingungen und Bezeichnungen in der 2D- und 3D-Positronen-Emissions-Tomographie . . . . .	21
3.1	Radontransformation . . . . .	29
3.2	Diskrete Abtastmuster im Frequenzraum . . . . .	29
3.3	Sinogrammbeispiel . . . . .	34
3.4	Zweidimensionales algebraisches Rekonstruktionsproblem . . . . .	36
3.5	Rekonstruierte Bilder aus künstlichen Projektionsdaten: Beispiel anhand von zwei tomographischen Projektionen . . . . .	51
3.6	Rekonstruierte Bilder aus künstlichen Projektionsdaten: Beispiel anhand von vier tomographischen Projektionen . . . . .	51
3.7	Rekonstruierte Bilder aus künstlichen Projektionsdaten: Mittleres Rauschen und dessen Standardabweichung bei zwei und vier Projektionen . . . . .	51
3.8	Rekonstruierte Bilder aus künstlichen, poissonverteilten, Projektionsdaten: Beispiel anhand von zwei tomographischen Projektionen . . . . .	52
3.9	Rekonstruierte Bilder aus künstlichen, poissonverteilten, Projektionsdaten: Beispiel anhand von vier tomographischen Projektionen . . . . .	52
3.10	Rekonstruierte Bilder aus künstlichen, poissonverteilten, Projektionsdaten: Mittleres Rauschen und dessen Standardabweichung bei zwei und vier Projektionen	52
3.11	Rekonstruktionsproblem bei der hochauflösenden PET . . . . .	54
4.1	Grundlegende Wege des MADPET-Datenstroms . . . . .	59
4.2	APD Einzeldioden, angeordnet in einer 2x8 Matrix (Hamamatsu, Japan) . .	60
4.3	LSO Kristalle (CTI Inc., USA) zur Montage auf einer Reihe der APD Matrix	60
4.4	Zerlegtes Detektormodul des MADPET . . . . .	60
4.5	Anordnung der Detektormodule auf der rotierbaren Scheibe des MADPET .	60

4.6	Blockdiagramm der Koinzidenzelektronik des MADPET . . . . .	63
4.7	Indizierung der Kanalnummern, festes Raum- und rotierendes Tomographen-Koordinatensystem . . . . .	63
4.8	Schematischer Aufbau des MADPET-Messsystems . . . . .	66
4.9	Steuerung und Überwachung der MADPET-Messung . . . . .	66
4.10	Flussdiagramm der PVM-gestützten Synchronisation zweier Prozesse . . . . .	68
4.11	Flussdiagramm der PVM-gestützten Messprogramme des MADPET . . . . .	69
4.12	Ausleserate ohne und mit PVM-Unterstützung der Messung . . . . .	72
4.13	Verarbeitung der List-Mode Daten anhand der spektralen Energieverteilungen	73
4.14	Aufbau des MADPET Sektortomographen für die Monte Carlo Simulationen	77
4.15	Behandlung der simulierten Wechselwirkungen eines Gammaquants mit einem Kristall . . . . .	78
4.16	Wechselwirkungsquerschnitte für Gammaquanten mit LSO und simuliertes Spektrum eines LSO-Einzelkristalls für 511 keV Gammaquanten . . . . .	80
4.17	Monte Carlo Simulation der homogen verteilten Positronenquelle in einer Kreisscheibe: Vertizes der emittierten Quantenpaare . . . . .	80
4.18	Monte Carlo Simulation der homogen verteilten Positronenquelle in einer Kreisscheibe: Vertizes der nachgewiesenen Quantenpaare . . . . .	80
4.19	Am MADPET untersuchte Modelle der Antwortfunktionen . . . . .	82
4.20	Berechnung der koinzidenten Antwortfunktion für ein Detektorpaar . . . . .	82
4.21	Ausgewählte Antwortfunktionen (CAF und TRI) des MADPET . . . . .	82
4.22	Extraktion von tomographischen Datensätzen aus der Monte Carlo Simulation des MADPET . . . . .	86
4.23	Berechnung der Gewichtematrix für die iterative Rekonstruktion aus der Monte Carlo Simulation der homogenen Quellenverteilung . . . . .	86
4.24	Aufbau für die Messung und Simulation der koinzidenten Sensitivitäten . . .	89
4.25	Monte Carlo Simulation der homogenen Flächenquelle: Verteilung der Vertizes der emittierten Quantenpaare . . . . .	89
4.26	Monte Carlo Simulation der homogenen Flächenquelle: Vertizes der nachgewiesenen Quantenpaare . . . . .	89
4.27	Einsortierung einer Koinzidenz in das Parallelsinogramm . . . . .	93
4.28	Rekonstruierte Ortsauflösung der simulierten Linienquellen . . . . .	99
4.29	Rekonstruierte Ortsauflösung der gemessenen Linienquellen . . . . .	99
4.30	Mittlere rekonstruierte Ortsauflösung der simulierten Linienquellen . . . . .	101
4.31	Mittlere rekonstruierte Ortsauflösung der gemessenen Linienquellen . . . . .	101
4.32	Aufbau des Strukturphantoms . . . . .	102
4.33	Rekonstruierte Bilder des simulierten Strukturphantoms . . . . .	102
4.34	Rekonstruierte Bilder des gemessenen Strukturphantoms . . . . .	102
5.1	Schema der Schnittebenen durch den Herzmuskel . . . . .	108
5.2	Größenvergleich der Herzen eines Menschen und einer Ratte . . . . .	109
5.3	Projiziertes Volumen des Stoffwechsels in der Rattenbrust: <i>Olm</i> . . . . .	111
5.4	Projiziertes Volumen des Stoffwechsels in der Rattenbrust: <i>Plm</i> . . . . .	111
5.5	Projiziertes Volumen des Stoffwechsels in der Rattenbrust: <i>Rtri</i> . . . . .	111
5.6	Projiziertes Volumen des Stoffwechsels in der Rattenbrust: <i>Rcaf</i> . . . . .	111
5.7	Projiziertes Volumen des Stoffwechsels in der Rattenbrust: <i>Rvrec</i> . . . . .	111
5.8	Reangulierte [ <sup>18</sup> F]-FDG-Anreicherung im Herzmuskel der Ratte: <i>Olm</i> . . . . .	112

5.9	Reangulierte [ <sup>18</sup> F]-FDG-Anreicherung im Herzmuskel der Ratte: <i>Plm</i> . . . . .	112
5.10	Reangulierte [ <sup>18</sup> F]-FDG-Anreicherung im Herzmuskel der Ratte: <i>Rtri</i> . . . . .	113
5.11	Reangulierte [ <sup>18</sup> F]-FDG-Anreicherung im Herzmuskel der Ratte: <i>Rcaf</i> . . . . .	113
5.12	Reangulierte [ <sup>18</sup> F]-FDG-Anreicherung im Herzmuskel der Ratte: <i>Rvrec</i> . . . . .	113
5.13	Projiziertes Volumen des Stoffwechsels in der Mäusebrust: <i>Olm</i> . . . . .	114
5.14	Projiziertes Volumen des Stoffwechsels in der Mäusebrust: <i>Plm</i> . . . . .	114
5.15	Projiziertes Volumen des Stoffwechsels in der Mäusebrust: <i>Rtri</i> . . . . .	114
5.16	Projiziertes Volumen des Stoffwechsels in der Mäusebrust: <i>Rcaf</i> . . . . .	114
5.17	Projiziertes Volumen des Stoffwechsels in der Mäusebrust: <i>Rvrec</i> . . . . .	114
5.18	Projiziertes Volumen des Mäuseskeletts: <i>Olm</i> . . . . .	117
5.19	Projiziertes Volumen des Mäuseskeletts: <i>Plm</i> . . . . .	117
5.20	Projiziertes Volumen des Mäuseskeletts: <i>Rtri</i> . . . . .	118
5.21	Projiziertes Volumen des Mäuseskeletts: <i>Rcaf</i> . . . . .	118
5.22	Projiziertes Volumen des Mäuseskeletts: <i>Rvrec</i> . . . . .	118
6.1	Grundlegende Wege des MADPET-II-Datenstroms . . . . .	120
6.2	APD-Matrix und Schematischer Aufbau eines Detektorkopfes des MADPET-II. . . . .	122
6.3	Vollständiges Doppellagen-Detektormodul des MADPET-II. . . . .	122
6.4	Aufbau des MADPET-II. . . . .	123
6.5	Schematischer Entwurf des MADPET-II Messsystems. . . . .	123
6.6	Koordinaten und Vergabe der Kristallnummern des MADPET-II . . . . .	126
6.7	Positionierung aller 1152 LSO-Kristalle für die Monte Carlo Simulation des MADPET-II . . . . .	128
6.8	Monte Carlo Simulation der homogen verteilten Positronenquelle in einer Kreisscheibe für den MADPET-II: Vertizes der emittierten Quantenpaare . . . . .	128
6.9	Monte Carlo Simulation der homogen verteilten Positronenquelle in einer Kreisscheibe für den MADPET-II: Vertizes der nachgewiesenen Quantenpaare . . . . .	128
6.10	Berechnung der koinzidenten Antwortfunktion des MADPET-II . . . . .	130
6.11	Ausgewählte Antwortfunktionen (CAF und TRI) des MADPET-II . . . . .	130
6.12	Extraktion von tomographischen Datensätzen aus der Monte Carlo Simulation des MADPET-II . . . . .	132
6.13	Berechnung der Gewichtematrix aus der Monte Carlo Simulation des MADPET-II	134
6.14	Ausnutzung der Rotationssymmetrie des Detektorsystems bei der Berechnung der Gewichtematrix . . . . .	134
6.15	Abtastmuster im Sinogramm des MADPET-II (ohne Rotation) . . . . .	136
6.16	Abtastmuster im Sinogramm des MADPET-II (10 Winkelschritte) . . . . .	136
6.17	Abtastmuster im Sinogramm des MADPET-II (20 Winkelschritte) . . . . .	136
6.18	Rekonstruierte Ortsauflösung des MADPET-II (ohne Rotation) . . . . .	138
6.19	Rekonstruierte Ortsauflösung des MADPET-II (10 Winkelschritte) . . . . .	138
6.20	Rekonstruierte Ortsauflösung des MADPET-II (20 Winkelschritte) . . . . .	138
6.21	Mittlere Ortsauflösung des MADPET-II (ohne Rotation) . . . . .	139
6.22	Mittlere Ortsauflösung des MADPET-II (10 Winkelschritte) . . . . .	139
6.23	Mittlere Ortsauflösung des MADPET-II (20 Winkelschritte) . . . . .	139
6.24	Geometrischer Aufbau des simulierten Strukturphantoms für den MADPET-II	142
6.25	Statistische Rekonstruktion des Strukturphantoms für MADPET-II (ohne Rotation) . . . . .	142

6.26	Analytische Rekonstruktion des Strukturphantoms für MADPET-II (ohne Rotation) . . . . .	143
6.27	Analytische Rekonstruktion des Strukturphantoms für MADPET-II (10 Winkelschritte) . . . . .	143
6.28	Analytische Rekonstruktion des Strukturphantoms für MADPET-II (20 Winkelschritte) . . . . .	143
7.1	Parametrisierung und Verwendung der Antwortfunktionen für den Sherbrooke-Animal-PET . . . . .	148
7.2	Abschätzung der Stärke der Parallaxeneffekte . . . . .	152

# Tabellenverzeichnis

2.1	Eigenschaften der wichtigsten radioaktiven Nuklide in der PET . . . . .	8
2.2	Eigenschaften der wichtigsten Szintillationskristalle in der PET . . . . .	10
4.1	Einige charakteristische Zeitparameter des Messsystems . . . . .	65
4.2	Analyse der MADPET-Antwortfunktionen . . . . .	83
4.3	Durchmesser der für den MADPET untersuchten Verteilungen, in Relation zum Systemdurchmesser . . . . .	97
4.4	Lineare Anpassung der rekonstruierten Ortsauflösung . . . . .	99
4.5	Mittlere rekonstruierte Ortsauflösung . . . . .	101
5.1	Parameter der in-vivo-Messungen am MADPET. . . . .	106
6.1	Analyse der MADPET-II-Antwortfunktionen . . . . .	129
6.2	Durchmesser der für MADPET-II untersuchten Verteilungen, in Relation zum Systemdurchmesser . . . . .	137
6.3	Lineare Anpassung der rekonstruierten Ortsauflösung des MADPET-II . . . .	140
6.4	Mittelwerte der rekonstruierten Ortsauflösung des MADPET-II . . . . .	140
7.1	Rekonstruktionsmethoden anderer Kleintier-PET-Geräte . . . . .	146
7.2	Abschätzung der Stärke der Parallaxeneffekte . . . . .	152
A.1	Richtlinien für die Darstellung mathematischer Größen . . . . .	160
A.2	Generelle Nomenklatur in mathematischen Ausdrücken . . . . .	160
A.3	Im Kapitel 3 verwendete Bezeichnungen und ihre Größenordnungen . . . . .	161
A.4	Im Kapitel 3 verwendete Bezeichnungen: Ausnahmen . . . . .	161
A.5	Im Kapitel 4 verwendete Bezeichnungen und ihre Größenordnungen . . . . .	162
A.6	Im Kapitel 6 verwendete Bezeichnungen und ihre Größenordnungen . . . . .	163
A.7	Namen der in den Kapiteln 4 bis 6 rekonstruierten Bilder . . . . .	163
B.1	Simulierte Datensätze für MADPET . . . . .	166
B.2	Simulierte Datensätze für MADPET-II . . . . .	166
B.3	Gewichtematrizen von MADPET und MADPET-II . . . . .	167
C.1	Rechendauer der im Kapitel 4 vorgestellten Methoden . . . . .	170
C.2	Rechendauer der im Kapitel 6 vorgestellten Methoden . . . . .	171



# Flussdiagrammverzeichnis

3.1	Iterative bildweise Bildmodifikation. . . . .	41
3.2	Iterative punktweise Bildmodifikation. . . . .	42
3.3	Iterative projektionsweise Bildmodifikation. . . . .	43
3.4	Funktionsweise der PWLS-ICD(+SOR) Rekonstruktion. . . . .	47
3.5	Funktionsweise der PWLS-PCG Rekonstruktion für quadratische Straffunktionen. . . . .	48
4.1	Sequenz für das Auslesen einer nachgewiesenen Koinzidenz . . . . .	67
4.2	PVM-Messablauf auf dem Master-Rechner . . . . .	70
4.3	PVM-Messablauf auf dem Slave-Rechner: Teil 1 . . . . .	71
4.4	PVM-Messablauf auf dem Slave-Rechner: Teil 2 (Ausleseschleife) . . . . .	72
4.5	Umsortierung der gemessenen Daten in das List-Mode-Histogramm. . . . .	75
4.6	Berechnung der tomographischen Projektionsdaten aus den Monte Carlo Simulationen . . . . .	85
4.7	Berechnung der Gewichtematrix aus den Monte Carlo Simulationen . . . . .	90
4.8	Umformung des List-Mode Histogramms zum Sinogramm . . . . .	95



# Begriffe und Abkürzungen

**ADC** ..... (engl.) *analog-to-digital converter*  
Ein elektronisches Element zur Umwandlung von Spannungshöhen in digitale Zahlenwerte.

**Algebraische Rekonstruktion** ..... (engl.) *algebraic reconstruction*  
Die algebraischen Rekonstruktionsmethoden basieren auf der Beschreibung des Messprozesses als lineares Gleichungssystem. Sie beinhalten eine Nachweiswahrscheinlichkeit für jede mögliche Pixel-zu-Proxel Kombination.

**Antwortfunktion** ..... (engl.) *coincidence response function*  
Die koinzidente Antwortfunktion eines Detektorpaares beschreibt dessen ortsabhängige räumliche Sensitivität bezüglich eines isotropen Quantenflusses. Verschiedene Antwortfunktionen wurden in dieser Arbeit zur Einsortierung (engl. *rebinning*) der gemessenen oder simulierten Koinzidenzen in die Sinogrammmatrix verwendet, um das unterschiedliche Ansprechverhalten der einzelnen Detektorpaare in der analytischen Rekonstruktion zu berücksichtigen.

**APD** ..... (engl.) *avalanche photodiode*  
Lawinen-Photodiode. Ein Halbleiter-Lichtsensor, der einfallende Photonen in Ladungsimpulse umwandelt. Die erzeugten, sehr schwachen Ladungsimpulse werden innerhalb der Lawinenzzone zu messbaren Größen verstärkt.

**Auflösung** ..... (engl.) *resolution*  
Die Unterscheidbarkeit zweier Signale. In dieser Arbeit wird als Auflösung die Halbwertsbreite (FWHM) der diese Signale charakterisierenden Verteilung angegeben. Auch gebräuchlich, aber hier nicht verwendet, ist die Betrachtung des Signals als Gaußverteilung und die Angabe der Auflösung mit dem Parameter  $\sigma$  ( $\text{FWHM} = 2,35 \cdot \sigma$ ) der Gaußverteilung.

**Bildgebung** ..... (engl.) *imaging*  
Diese leicht missverständliche Umschreibung hat sich als Oberbegriff für Abbildungsmethoden etabliert. Die „Bildgebung“ kann als ein Werkzeug verstanden werden, das dem Benutzer ein Abbild der zu untersuchenden Eigenschaft zur Verfügung stellt. Im Englischen wird hierfür das Wort „*imaging*“ gebraucht.

**CAF** ..... (engl.) *coincidence aperture function*  
Diese realistische koinzidente Antwortfunktion wurde aus Monte Carlo Simulationen ermittelt. Sie berücksichtigte die Wechselwirkungswahrscheinlichkeiten von Gammaquanten mit den Kristallen.

**CBP** ..... (engl.) *convolution backprojection*  
Ähnlich wie die gefilterte Rückprojektion. Die gefaltete Rückprojektion vollzieht die analytische Bildrekonstruktion. Durch die Wahl von Frequenzfiltern (meist Tiefpassfilter) kann der Rauschanteil unterdrückt und das resultierende Bild geglättet werden. Das Sinogramm wird

hierfür im Ortsraum mit dem Filter gefaltet und anschließend in die Bildmatrix rückprojiziert.

**Datenliste** ..... (engl.) *list-mode data*  
 Eine Liste der gemessenen Daten. Im Gegensatz zu herkömmlichen Methoden der Datenerfassung - die auf der Histogrammierung oder Interpolation der gemessenen Daten in Matrizen fester Größe beruhen - wird hierbei jede gemessene Koinzidenz als Datenstruktur gespeichert. Somit lassen sich detaillierte Informationen (z.B. der Nachweiszeitpunkt oder die Energie-deposition jedes Gammaquants in jedem Kristall) für jede Koinzidenz erfassen und für die weitere Analyse und Verarbeitung zur Verfügung stellen.

**Detektion** ..... (engl.) *detection*  
 Gleichbedeutend mit dem Nachweis von z.B. Gammaquanten in einem Kristall bzw. Detektor.

**Ereignis** ..... (engl.) *event*  
 Obwohl dieser Ausdruck in dieser Arbeit nicht verwendet wurde, ist er hier der Vollständigkeit halber angegeben. „Ereignis“ ist die in der nuklearmedizinischen Bildgebung übliche Bezeichnung für eine gemessene Koinzidenz (PET) bzw. ein gemessenes einzelnes Gammaquant (SPECT).

**FBP** ..... (engl.) *filtered backprojection*  
 Die gefilterte Rückprojektion vollzieht die analytische Bildrekonstruktion. Durch die Wahl von Frequenzfiltern (meist Tiefpassfilter) kann der Rauschanteil unterdrückt und das resultierende Bild geglättet werden. Das Sinogramm wird hierfür im Frequenzraum mit dem Filter multipliziert und anschließend in die Bildmatrix rückprojiziert.

**FWHM** ..... (engl.) *full-width half-maximum*  
 Halbwertsbreite. Die Breite, bei der eine Verteilung auf die Hälfte ihres Maximalwertes gefallen ist. In dieser Arbeit werden alle Auflösungen als FWHM, und nicht als  $\sigma$  der Gauß-Verteilung, angegeben.

**FWTM** ..... (engl.) *full-width tenth-maximum*  
 Zehntelwertsbreite. Die Breite, bei der eine Verteilung auf ein Zehntel ihres Maximalwertes gefallen ist.

**Gewichtematrix** ..... (engl.) *weights*  
 Siehe Systemmatrix.

**Koinzidenz** ..... (engl.) *coincidence*  
 Ein innerhalb des Koinzidenzzeitfensters in unterschiedlichen Detektorelementen gemessenes Gammaquantenpaar. Die beiden Gammaquanten werden dann einer gemeinsamen Positron-Elektron-Vernichtung zugeordnet.

**LOR** ..... (engl.) *line-of-response*  
 Die Verbindungslinie zweier in Koinzidenz messender Detektorelemente. In dieser Arbeit wurden hierfür die Schwerpunkte der beiden Kristalle verbunden. Eine alternative Bestimmung ist das Verbinden der Mittelpunkte der Kristallfrontflächen.

**MLEM** ..... (engl.) *maximum likelihood expectation maximization*  
 Iterative statistische Rekonstruktionsmethode. Hierbei wird die (engl. *likelihood* Schätzfunktion (als Maß für das Übereinstimmen des rekonstruierten Bildes mit den gemessenen Daten) durch iteratives Verbessern des Bildes maximiert. Der MLEM-Algorithmus basiert auf der Annahme, dass die gemessenen Daten poissonverteilt sind.

**Ortsfrequenz** .....  
 Die Ortsfrequenz ist die Größe einer durch Fouriertransformation vom Ortsraum (Einheit: Länge) in den Ortsfrequenzraum (Einheit: 1 über Länge) transformierten Eigenschaft.

**Olm** .....  
 Rekonstruierte Bilder für MADPET und MADPET-II, die mit dem OSEM Algorithmus unter Verwendung der Monte Carlo Gewichtematrix erstellt wurden. Als Messdatensatz wurde hierfür das unverarbeitete List-Mode Histogramm, anstatt der geometrisch modifizierten Daten im Sinogramm, verwendet. Die Rekonstruktion der *Olm*-Bilder ist in den Abschnitten 4.7.3 auf Seite 96 bzw. 6.5.3 auf Seite 135 beschrieben.

**OSEM** ..... (engl.) *ordered subsets expectation maximization*  
 Iterative statistische Rekonstruktionsmethode, abgeleitet aus der MLEM Methode. Zur Beschleunigung der Konvergenz werden die gemessenen Daten in Untergruppen (engl. *subsets*) aufgeteilt und das Bild nach der Bearbeitung jeder Untergruppe modifiziert.

**Parallaxeneffekt** .....  
 Verbreiterung und Verzerrung der koinzidenten Antwortfunktionen von Detektorpaaren, deren Kristalle schräg zueinander positioniert sind. Im Gegensatz zu optimal zueinander ausgerichteten Kristallen - die eine schmale und symmetrische Antwortfunktion und somit eine hohe intrinsische Ortsauflösung aufweisen - ist die mit diesen meist asymmetrischen Antwortfunktionen gemessene Ortsauflösung wesentlich verschlechtert. Da am Rande des Tomographenvolumens (bei Ringtomographen) der Beitrag von zueinander schräg positionierten Kristallen steigt, verschlechtert sich die Ortsauflösung eines solchen Tomographen stetig von der Bildmitte zum Bildrand. Es können jedoch geeignete Methoden - wie in dieser Arbeit - entwickelt werden, um den Parallaxeneffekt zu korrigieren.

**PET** ..... (engl.) *positron emission tomography*  
 Funktionelle medizinische Bildgebungsmethode. Durch die Verwendung von Radiopharmaka, die mit Positronen emittierenden Nukliden markiert wurden, können im Gegensatz zu der Röntgen-Computertomographie und der herkömmlichen Kernspintomographie hierbei Funktionen des Organismus untersucht werden.

**Pixel** ..... (engl.) *picture element*  
 Bildelement. Ein - in der Regel quadratischer - zweidimensionaler Flächenbereich des zu rekonstruierenden Schichtbildes.

**Plm** .....  
 Rekonstruierte Bilder für MADPET und MADPET-II, die mit dem PWLS Algorithmus unter Verwendung der Monte Carlo Gewichtematrix erstellt wurden. Als Messdatensatz wurde hierfür das unverarbeitete List-Mode Histogramm, anstatt der geometrisch modifizierten Da-

ten im Sinogramm, verwendet. Die Rekonstruktion der *Plm*-Bilder ist in den Abschnitten 4.7.3 auf Seite 96 bzw. 6.5.3 auf Seite 135 beschrieben.

**PMT** ..... (engl.) *photomultiplier tube*  
Elektronenvervielfacher. Bei diesem Lichtsensor schlägt ein einfallendes Photon Elektronen aus der Photokathode. Diese werden zwischen Dynoden beschleunigt und schlagen aus diesen weitere Elektronen frei. Dadurch wird ein anfangs schwacher Ladungsimpuls in einen messbaren Bereich verstärkt.

**Projektion** ..... (engl.) *projection*  
Siehe Strahlsumme.

**Proxel** ..... (engl.) *projection element*  
Element des Projektionsdatensatzes. Ursprünglich bezeichnete Proxel ein Element der Sinogrammmatrix. Bei der Verwendung von Datenlisten ohne Umformung zum Sinogramm kann es aber auch (wie bei der MADPET und MADPET-II Datenverarbeitung) ein Detektorpaar darstellen.

**PVM** ..... (engl.) *parallel virtual machine*  
Parallele Virtuelle Maschine. Eine Programmierumgebung, mit der einzelne Prozessoren in einem Rechnernetzwerk zu einem virtuellen Parallelrechner zum Zwecke der Lastverteilung zusammengefasst werden können.

**PWLS** ..... (engl.) *penalized weighted least squares*  
Iterative statistische Rekonstruktionsmethode. Hierbei wird die (engl.) *least-squares* Schätzfunktion (Funktion der quadratischen Abweichungen, als Maß für das Übereinstimmen des rekonstruierten Bildes mit den gemessenen Daten) durch iteratives Verbessern des Bildes minimiert. Der PWLS-Algorithmus basiert auf der Annahme, dass die gemessenen Daten - aufgrund der Subtraktion von (poissonverteilten) zufälligen Koinzidenzen von der (poissonverteilten) Menge aller Koinzidenzen - gaußverteilt sind.

**RANDOMS** ..... (engl.) *random coincidences*  
Die Menge der zufälligen Koinzidenzen. Beide nachgewiesenen Gammaquanten stammen aus unterschiedlichen Positron-Elektron-Vernichtungen. Das Resultat ist eine Fehlinterpretation des Emissionsortes.

**Rcaf** .....  
Rekonstruierte Bilder für MADPET und MADPET-II, die mit dem FBP Algorithmus (gefilterte Rückprojektion) erstellt wurden. Hierfür wurden vor der Rekonstruktion die List-Mode Histogramme unter Verwendung der CAF-Antwortfunktion in Sinogramme umgeformt, um die Berücksichtigung der besonderen Nachweiseigenschaften der Tomographen für koinzidente Gammaquantenpaare in der analytischen Rekonstruktion zu ermöglichen. Die Rekonstruktion der *Rcaf*-Bilder ist in den Abschnitten 4.7.2 auf Seite 95 bzw. 6.5.2 auf Seite 135 beschrieben.

**REC** ..... (engl.) *rectangular response function*  
Eine vereinfachte, rechteckförmige koinzidente Antwortfunktion. Die Breite der Antwortfunktion für ein Detektorpaar wurde gleich der Breite der entsprechenden CAF gesetzt.

**Rückprojektion** ..... (engl.) *backprojection*  
Das Berechnen eines Bildes durch Überlagern der Projektionsdaten im Bildraum.

***Rtri*** .....  
Rekonstruierte Bilder für MADPET und MADPET-II, die mit dem FBP Algorithmus (gefilterte Rückprojektion) erstellt wurden. Hierfür wurden vor der Rekonstruktion die List-Mode Histogramme unter Verwendung der TRI-Antwortfunktion in Sinogramme umgeformt. Es erfolgte somit keine Berücksichtigung der besonderen Nachweiseigenschaften der Tomographen für koinzidente Gammaquantenpaare. Die Rekonstruktion der *Rtri*-Bilder ist in den Abschnitten 4.7.2 auf Seite 95 bzw. 6.5.2 auf Seite 135 beschrieben.

***Rvrec*** .....  
Rekonstruierte Bilder für MADPET, die mit dem FBP Algorithmus (gefilterte Rückprojektion) erstellt wurden. Hierfür wurden vor der Rekonstruktion die List-Mode Histogramme unter Verwendung der REC-Antwortfunktion in Sinogramme umgeformt. Es erfolgte hierbei eine geringfügige Berücksichtigung der besonderen Nachweiseigenschaften des Tomographen für koinzidente Gammaquantenpaare. Die Rekonstruktion der *Rvrec*-Bilder ist in den Abschnitten 4.7.2 auf Seite 95 beschrieben.

**SD** ..... (engl.) *standard deviation*  
Die Standardabweichung oder Streuung einer Verteilung. Sie wird aus der Quadratwurzel des zweiten zentralen Moments einer Verteilung, der Varianz, berechnet und im Allgemeinen mit dem Formelsymbol  $\sigma$  angegeben.

**Sinogramm** ..... (engl.) *sinogram*  
Eine Matrix, deren Zeilen alle (zueinander parallelen) Strahlsummen zu einem Blickwinkel enthalten. Deshalb wird das Sinogramm auch Parallelsinogramm genannt. Jeder Matrixspalte ist ein radialer Abstand zum Koordinatenursprung eindeutig zugeordnet.

**SPECT** ..... (engl.) *single photon emission computed tomography*  
Nuklearmedizinische Methode für die nicht-invasive funktionelle in-vivo Bildgebung. Zur radioaktiven Markierung werden Nuklide verwendet, die beim Zerfall einzelne Gammaquanten emittieren. Dies macht die Verwendung von vor den Detektoren positionierten Kollimatoren für die Bestimmung der Gammaeinfallrichtung notwendig.

**Statistische Rekonstruktion** ..... (engl.) *statistical reconstruction*  
Die statistischen Rekonstruktionsmethoden sind eine Weiterentwicklung der algebraischen Methoden. Sie basieren auf der Beschreibung der Messung als einen statistischen Prozess. In dem resultierenden linearen Gleichungssystem sind wiederum Nachweiswahrscheinlichkeiten für alle möglichen Pixel-zu-Proxel Kombinationen enthalten. Die beste Lösung dieses Systems wird durch iteratives Verbessern anhand einer Schätzfunktion gesucht, die ein Maß für die Übereinstimmung zwischen gemessenen Daten und rekonstruiertem Bild liefern.

**Strahlsumme** ..... (engl.) *projection ray sum*  
Die Summe in einem Strahlengang über die zu messende Eigenschaft. In der PET enthält sie die entlang einer LOR beobachteten, vom Objekt in Richtung des Detektorpaares abgestrahl-

ten, Gammaquantenpaare.

**Systemmatrix** ..... (engl.) *system matrix*  
Abbildungsmatrix des linearen Gleichungssystems bei algebraischen und statistischen Rekonstruktionsmethoden. Sie wird auch oft mit Gewichtematrix (engl. *reconstruction weights*) oder Wahrscheinlichkeitsmatrix (engl. *probability matrix*) bezeichnet. Es sei  $I$  die Zahl der Messelemente und  $J$  die Zahl der Elemente der Bildmatrix. Ein Element  $a(i, j)$  der  $I \times J$  Systemmatrix **A** enthält die Wahrscheinlichkeit, dass ein im Bildelement  $j$  erfolgter Positronenzerfall in dem Messelement  $i$  nachgewiesen wird. Das Messelement  $i$  kann hierbei ein Detektorpaar bei der Datenlisten-basierten oder ein Sinogrammelement bei der Sinogramm-basierten Bildrekonstruktion sein. Im Allgemeinen wird vereinfachend der Ort des Positronenzerfalls als Ort der Gammaemission angenommen.

**TOF** ..... (engl.) *time-of-flight*  
Die Flugzeit der Gammaquanten vom Ort ihrer Emission bis zum Erreichen des Detektors (bzw. bis zu ihrer ersten Wechselwirkung mit einem Detektor). Mit sehr schnellen Detektoren und einer geeigneten Elektronik können die Laufzeitunterschiede der beiden zu einer Koinzidenz beitragenden Gammaquanten erfasst und für eine genauere Bestimmung des Emissionsortes genutzt werden.

**TOR** ..... (engl.) *tube-of-response*  
Die Verbindungsröhre, die durch zwei in Koinzidenz messenden Detektorelementen aufgespannt wird. Sie wird durch das Verbinden der Eckpunkte der beiden beteiligten Kristalle ermittelt und stellt das sensitive Abbildungsvolumen im Objektraum eines Detektorpaares dar.

**TOTALS** ..... (engl.) *total coincidences*  
Die Menge aller gemessenen Koinzidenzen, also die Summe aus TRUES und RANDOMS.

**TRI** ..... (engl.) *triangular response function*  
TRI ist eine vereinfachte, dreieckförmige koinzidente Antwortfunktion, die für alle Detektorpaare identisch angenommen wurde. Ihre Halbwertsbreite betrug 1,85 mm für MADPET und 1 mm für MADPET-II, also jeweils die Hälfte der Kristallbreite.

**TRUES** ..... (engl.) *true coincidences*  
Die Menge der wahren Koinzidenzen. Beide nachgewiesenen Gammaquanten stammen hierbei aus einer gemeinsamen Positron-Elektron Vernichtung.

**Umsortierung der Projektionsdaten** ..... (engl.) *rebinning*  
Für die Einsortierung einer Koinzidenz in die Sinogrammmatrix wird die genaue Lage der Projektionslinie (LOR) ermittelt. Durch Vertriebsverfahren (Interpolation oder die Verwendung von Antwortfunktionen) kann die Einsortierung der in reellen Größen parametrisierten Projektionslinie (Abstand vom Koordinatenursprung und Projektionswinkel) auf mehrere äquidistante Matrixelemente verbessert werden.

**Untergruppen** ..... (engl.) *subsets*  
Für die OSEM-Rekonstruktion benötigte Untergruppe der gemessenen Daten. Sie wird meist

durch die Unterteilung der Projektionsdaten bezüglich der Projektionswinkel bestimmt (z.B. Gruppe1:  $[0^\circ, 90^\circ)$ , Gruppe2:  $[90^\circ, 180^\circ)$ , ..).

**Vorwärtsprojektion** ..... (engl.) *forwardprojection*  
Das Berechnen eines Projektionsdatensatzes aus einem Bild. Der Projektionsdatensatz kann sowohl ein Sinogramm als auch z.B. ein List-Mode Histogramm sein.

**Voxel** ..... (engl.) *volume element*  
Volumenelement. Ein - in der Regel kubischer - dreidimensionaler Bereich des zu rekonstruierenden Objektvolumens.



# Kapitel 1

## Einleitung

Untersuchungen der Struktur und Funktion des lebenden Organismus ist ein wesentlicher Bestandteil diagnostischer medizinischer Verfahren. Ein wachsendes Gewicht erhalten hierbei bildgebende Methoden, die eine medizinische Diagnostik ohne operativen Eingriff (nicht-invasiv) ermöglichen. Zu den nicht-invasiven bildgebenden Methoden zählen unter anderem die Ultraschall- und die Röntgenuntersuchung. Mit fortschreitender technischer Entwicklung werden inzwischen vermehrt tomographische Methoden zur Untersuchung des Objekts verwendet. Die tomographische Abbildung beinhaltet die Bestimmung von Projektionsaufnahmen des zu untersuchenden Objekts aus mehreren Blickrichtungen und die anschließende Rekonstruktion der beobachteten physikalischen Größe aus diesen Projektionsdaten. Zu den in der Medizin angewendeten tomographischen bildgebenden Methoden zählen die Röntgen-Computer-Tomographie (engl. *x-ray computed tomography*, kurz CT), die Kernspintomographie (engl. *magnetic resonance imaging*, kurz MRI), die Einzelphotonen-Emissions-Computer-Tomographie (engl. *single photon emission computed tomography*, kurz SPECT) und die Positronen-Emissions-Tomographie (engl. *positron emission tomography*, kurz PET). Diese können bezüglich ihrer Abbildungseigenschaft unterschieden werden: während CT und MRI primär zur Bestimmung der Struktur des Objekts dienen, werden die Emissions-Tomographien zur Bestimmung von biologischen Funktionen angewendet. Abbildung 1.1 zeigt schematisch die konstruktiven Unterschiede zwischen den CT, SPECT und PET Geräten.

In diesem Kapitel werden die grundlegenden Aspekte der Positronen-Emissions-Tomographie dargelegt. Es werden die Gründe für die PET an kleinen Tieren wie Mäusen und Ratten und die damit zusammenhängenden Anforderungen an ein tomographisches System aufgezeigt. Abschließend folgt eine Beschreibung der Motivation für diese Arbeit und eine Zusammenfassung ihres Aufbaus.

### 1.1 Positronen-Emissions-Tomographie (PET)

Für die funktionelle Bildgebung mittels der PET werden Substanzen gesucht, die sich gemäß einer biologischen Funktion im lebenden Organismus verteilen. Ein Vorteil der PET gegenüber anderen nuklearmedizinischen Verfahren ist, dass radioaktive, Positronen emittierende, Isotope von in organischen Verbindungen vorkommenden Nukliden existieren. Indem ein Atomkern innerhalb des Molekülverbundes durch sein radioaktives Isotop ersetzt wird, können diese Substanzen radioaktiv markiert werden, ohne ihre biokinetischen Eigenschaften zu verändern. Die resultierenden radioaktiv markierten Substanzen werden in kleinsten Mengen

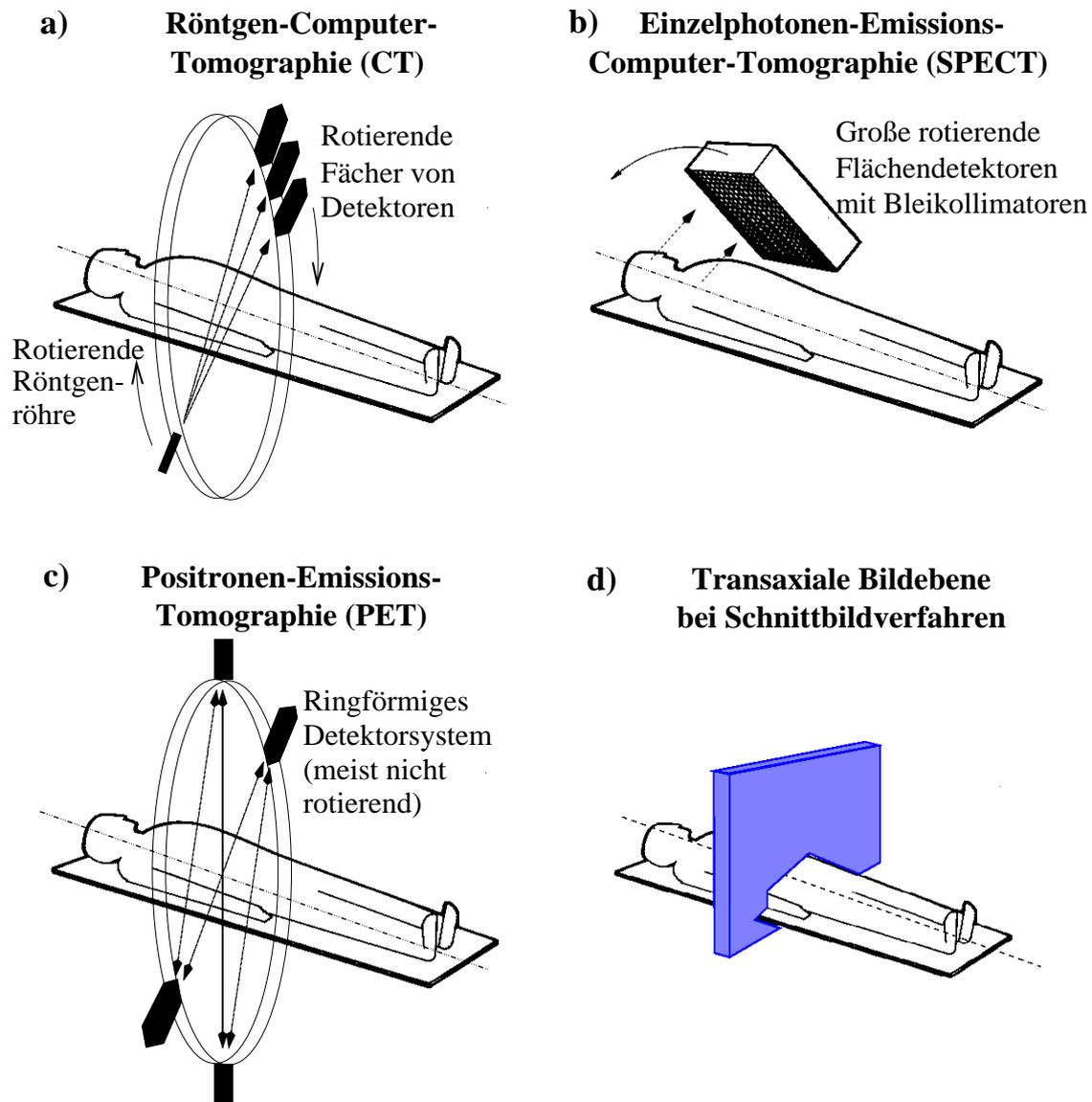


Abbildung 1.1: Einige tomographische Geräte für die medizinische Diagnostik

Zu Abbildung 1.1: Bei der CT (Bild a) befindet sich die Strahlenquelle außerhalb des Objektes. Es wird die Absorption des Quantenflusses durch das Objekt gemessen und die Dichteverteilung in Schnittbildern dargestellt. Bei SPECT (Bild b) und PET (Bild c) werden Gammaquanten (einzeln oder in Paaren) beim Zerfall des injizierten Radiopharmakons emittiert. Nach Verlassen des Objekts werden diese außerhalb nachgewiesen und zur Bildgebung von biologischen Funktionen des Organismus genutzt. Die Quelle und die Detektoren der CT-Geräte sowie der Flächendetektor von SPECT-Geräten rotieren um das Objekt. PET-Geräte bestehen meist aus raumfesten Detektorringen. Alle drei Methoden gehören zur Gruppe der Schnittbildverfahren (Bild d), die senkrecht zur Symmetrieachse des Geräts liegende (transaxiale) Ebenen abbilden.

( $\approx$  Pikomol) als so genannte Radiopharmaka (engl. *radiopharmaceuticals*, auch engl. *tracer*) dem Organismus injiziert. Die Bildgebung in der nuklearmedizinischen Diagnostik geschieht durch den Nachweis der bei der Elektron-Positron-Vernichtung gleichzeitig abgestrahlten Gammaquanten. Die durch diese Messung (Akquisition) aufgenommenen Daten stellen jedoch noch nicht unmittelbar die Verteilung der Emissionsorte im beobachteten Volumen dar. Erst durch die mathematische Operation der Rekonstruktion [61] werden aus diesen Daten überlagerungsfreie Schnittbilder in senkrechter Richtung zur Symmetrieachse des Tomographen (transaxiale Schnittbilder, siehe Abbildung 1.1) erstellt. Areale mit einer hohen Konzentration der rekonstruierten Emissionsorte dokumentieren eine hohe Tracerkonzentration und somit ein hohes Funktionspotential der zu untersuchenden biologischen Eigenschaft. Einsatzgebiete der PET sind unter anderem die Tumordiagnostik [150] zur Lokalisierung und Charakterisierung von Tumoren und ihren Metastasen, die kardiologische Diagnostik zur Untersuchung von Durchblutungs- und Vitalitätsstörungen am Herzen [134] oder die Untersuchung von Anomalien im Gehirn, wie z.B. der Alzheimer Krankheit. Die örtliche Auflösung im Zentrum von PET-Geräten liegt je nach Bauart zwischen 4 mm bei hochauflösenden und 5-8 mm bei herkömmlichen klinischen Tomographen.

## 1.2 Medizinische Forschung an kleinen Tieren mit der PET

Das diagnostische Potential der Positronen-Emissions-Tomographie wird durch die Funktionsweise der Radiopharmaka bestimmt. Durch die zunehmende Nachfrage nach Indikatoren für die Bildgebung noch nicht untersuchter biologischer Funktionen werden in Zusammenarbeit von Radiochemie, Biologie und Medizin neue Radiopharmaka entwickelt. Kleine Tiere wie Mäuse und Ratten - aber auch z.B. Schweine, Hunde und Affen - bieten die Möglichkeit, diese Radiopharmaka an einem, dem menschlichen Organismus ähnlichen, Lebewesen zu erproben und zu verbessern. Ferner können am Tiermodell die Einflüsse therapeutischer Maßnahmen auf den Stoffwechsel studiert werden. Die genaueste Methode zur Bestimmung von Aktivitätsverteilungen in Tieren ist die Autoradiographie. Nach Injektion des Tracers wird das Tier getötet, eingefroren und anschließend in dünne Scheiben ( $\approx \mu m$ ) zerschnitten. Durch Auflegen dieser Scheiben auf Photoplatten und deren Entwicklung kann die Verteilung der Tracer im Gewebe untersucht werden. Kleintier-Positronen-Emissions-Tomographen [23, 59, 76, 148], bei denen besonderer Wert auf eine hohe Ortsauflösung und eine hohe Sensitivität gelegt werden [55, 90], erlauben hingegen erstmals neue Untersuchungsmethoden an lebenden Tieren. Hierzu zählt z.B. die dynamische Akquisition, bei der mehrere PET-Messungen in Folge zur Abklärung des zeitlichen Verhaltens der zu untersuchenden Eigenschaft durchgeführt werden. Die Kleintier-PET bietet weiterhin die Möglichkeit, neue Verfahren zur Tumorthherapie zu entwickeln und an einem lebenden Organismus zu testen.

## 1.3 Kleintier-Positronen-Emissions-Tomographen

Kleintier-PET-Geräte weisen im Allgemeinen gegenüber klinischen Tomographen eine erhöhte Sensitivität für den Nachweis auch kleinster Gammaquantenflüsse auf, da die zu messenden Aktivitäten geringer und die zu untersuchenden Volumina wesentlich kleiner sind [55, 90]. Aufgrund der geringen Größe der zu untersuchenden Strukturen wird der Forderung nach einer hohen Ortsauflösung durch das Verwenden kleiner Detektoren nachgekommen. Zum Erreichen einer hohen Sensitivität werden die Detektoren in geringerem Abstand um das Objekt

positioniert (Durchmesser der Tomographen: 7-30 cm), als das bei klinischen PET-Geräten der Fall ist (Durchmesser: 50-100 cm). Die Entwicklung dieser miniaturisierten Detektoren und die Konstruktion eines Kleintier-PET Gerätes stellt eine große Herausforderung dar, nicht zuletzt da aufgrund der gewünschten hohen Ortsauflösung eine große Zahl von kleinen Detektoren zur Erhöhung der tomographischen Abtastung gefordert ist.

## 1.4 Das MADPET Projekt

Die Zielsetzung dieses Gemeinschaftsprojektes zwischen der Technischen Universität München und dem Max-Planck-Institut für Physik, München, war die Entwicklung eines hochsensitiven und hochauflösenden Kleintier-Positronen-Emissions-Tomographen. Erste Erfolge konnten anhand einer Machbarkeitsstudie durch Aufbau des hochauflösenden Kleintier-Sektortomographen MADPET (*Munich Avalanche Diode PET*, siehe Kapitel 4) - teilweise durch Verwendung bereits vorhandener Bauteile und somit reduziertem Kostenaufwand - erzielt werden [112, 155]. Die Konsequenz aus diesem Erfolg war die Entwicklung und der Bau des Vollring-Kleintiertomographen MADPET-II (siehe Kapitel 6) mit zwei coaxialen Detektorlagen. Die primäre Herausforderung hierbei war das Entwickeln eines pixelierten und kompakten Detektors zusammen mit der entsprechenden analogen Ausleseelektronik. Der Aufbau eines funktionstüchtigen Tomographen erfordert weiterhin die Entwicklung der digitalen Ausleseelektronik, des mechanischen Aufbaus des Tomographen und der speziell angepassten Mess- und Rekonstruktionsprogramme.

## 1.5 Motivation und Struktur dieser Arbeit

In dieser Arbeit wird gezeigt, dass zur optimalen Ausnützung der elektronischen und konstruktiven Qualitäten eines hochauflösenden Kleintiertomographen spezielle Datenverarbeitungstechniken gefordert sind. Aufgrund der geringen Systemdurchmesser von MADPET und MADPET-II musste annähernd der gesamte Bereich zwischen den Detektoren für die Abbildung kleinster Strukturen zur Verfügung stehen. Herkömmliche Rekonstruktionsverfahren weisen jedoch wegen der mangelhaften Charakterisierung und Berücksichtigung der Wechselwirkungen von Gammaquanten mit dem Detektorsystem eine starke Verschlechterung der rekonstruierten Ortsauflösung mit zunehmendem Radialabstand auf. Ziel dieser Arbeit war somit die Entwicklung von Rekonstruktionsverfahren, die die besonderen physikalischen Bedingungen bei der Messung mit MADPET und MADPET-II berücksichtigen, um eine gleichmäßige Ortsauflösung in einem großen Bildbereich zu ermöglichen. In den folgenden Kapiteln 2 und 3 wird gezeigt, dass die mit dieser Forderung einhergehende Problematik besondere Maßnahmen bei der Durchführung der Messung und bei der Datenverarbeitung, im Besonderen bei der Bildrekonstruktion, erfordert. Teile der in dieser Arbeit untersuchten Methoden und die damit erzielten Resultate wurden zur kritischen Prüfung durch Kollegen auf internationalen Kongressen präsentiert bzw. in gedruckter Form veröffentlicht [11, 13, 15, 155].

Kapitel 2 gibt einen Überblick über die Grundlagen der Positronen-Emissions-Tomographie. Hier werden der prinzipielle Aufbau der Detektoren, die Begriffe des paarweisen Nachweises von Gammaquanten und der damit einhergehenden physikalischen Prozesse dargelegt. Weiterhin wird kurz die Nutzung und Bedeutung von Monte Carlo Simulationen in der PET kommentiert. Abgeschlossen wird dieses Kapitel mit einer Zusammenfassung der generellen Besonderheiten der Kleintier-PET.

Kapitel 3 erläutert die Problematik der tomographischen Bildrekonstruktion und beschreibt die möglichen Lösungsansätze. Hier werden die theoretischen Grundlagen für die in dieser Arbeit verwendeten Rekonstruktionsalgorithmen dargelegt, zusammen mit einem Vergleich dieser Methoden anhand einer einfachen mathematischen Problemstellung. Nach Angabe der Besonderheiten der tomographischen Bildrekonstruktion bei hochauflösenden Kleintier-Tomographen werden die bei der tomographische Bildrekonstruktion wesentlichen Randbedingungen resümiert.

In Kapitel 4 erfolgt die detaillierte Beschreibung der für MADPET angestellten Untersuchungen und der dafür entwickelten Mess- und Verarbeitungsmethoden. Sie umfassen die Strukturierung des Messaufbaus und der Messprogramme für die Gewährleistung einer definierten Messsituation, die für den MADPET angefertigten Monte Carlo Simulationen und die darauf basierten Entwicklungen für die tomographische Bildrekonstruktion. Am Ende dieses Kapitels werden mit Monte Carlo Methoden simulierte und mit MADPET gemessene tomographische Phantomdaten präsentiert. Diese wurden mit herkömmlichen und den hier entwickelten Rekonstruktionsmethoden ausgewertet und bezüglich Ortsauflösung und Bildqualität verglichen.

Einige der mit MADPET durchgeführten in-vivo Untersuchungen an Kleintieren werden in Kapitel 5 vorgestellt. Die dabei aufgenommenen Daten wurden wiederum mit herkömmlichen und den speziell für MADPET entwickelten Methoden rekonstruiert und auf Detailtreue und Lesbarkeit geprüft.

Kapitel 6 beschreibt den Aufbau des MADPET-II und die dafür aus den bereits für MADPET entwickelten Methoden abgeleiteten Datenverarbeitungstechniken. Es beschreibt weiterhin die für MADPET-II durchgeführten Monte Carlo Simulationen und die Analyse der rekonstruierten Bilder von simulierten Verteilungen in Hinsicht auf die daraus resultierende Ortsauflösung und Bildqualität.

In Kapitel 7 wird ein Vergleich der in dieser Arbeit entwickelten Methoden mit den Rekonstruktionsverfahren für zwei Kleintier-PET-Geräte anderer Arbeitsgruppen, MicroPET [23] und Sherbrooke-Animal-PET [76], durchgeführt. Insbesondere wird hierbei auf die Gesichtsfelddurchmesser und die darin erreichten Ortsauflösungen - unter Angabe der verwendeten Rekonstruktionsalgorithmen - eingegangen.

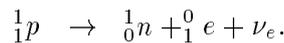
Eine abschließende Diskussion der in dieser Arbeit entwickelten Methoden und der damit erlangten Resultate wird in Kapitel 8 angestellt. Im Besonderen werden an dieser Stelle mögliche weiterführende Projekte beschrieben.



## Kapitel 2

# Prinzip und Methoden der PET

Die Positronen-Emissions-Tomographie beruht auf der Nutzung von Nukliden mit Protonenüberschuss bzw. Neutronendefizit. Diese emittieren bei ihrem  $\beta^+$ -Zerfall [88, 116] durch Umwandlung eines Protons  ${}^1_1p$  in ein Neutron  ${}^1_0n$  ein Positron  ${}^0_1e$  (auch  $e^+$  oder  $\beta^+$ ) und ein Elektron-Neutrino  $\nu_e$ ,



Das bei seiner Freisetzung noch hochenergetische Positron wird bei seiner Diffusion durch den Organismus durch Wechselwirkungen mit der Umgebung auf thermische Energie abgebremst, bis es mit einem Elektron einen dem Wasserstoffatom ähnlichen gebundenen Zustand, das Positronium [116], eingeht. Dieser Zustand hat eine sehr kurze Lebensdauer von ca.  $10^{-10}$  s. Bei der anschließenden Zerstrahlung (Vernichtung, engl. *annihilation*) werden die Massen von Teilchen und Antiteilchen in Energie umgewandelt und es entstehen zwei Gammaquanten mit der Energie von je 511 keV. Die aus Impulserhaltungsgründen um  $180^\circ$  zueinander (kollinear) emittierten Gammaquanten eines Paares können den Organismus mit großer Wahrscheinlichkeit verlassen und außerhalb davon nachgewiesen werden. Die Emission von drei oder mehr Gammaquanten bei der Positron-Elektron-Vernichtung ist in biologischem Gewebe verschwindend gering ( $\ll 1\%$ ) und erfordert in der Positronen-Emissions-Tomographie keine gesonderte Behandlung. In seltenen Fällen geschieht die Vernichtungsreaktion auch mit einem höherenergetischen Positron (noch im Abbremsbereich) oder einem (höherenergetischen) inneren Schalenelektron. Aufgrund Energie- und Impulserhaltung erfahren die abgestrahlten Gammaquanten dann laterale Impulsanteile, was zu einer Abweichung von der Kollinearität führt. Die Standardabweichung (engl. *standard deviation*, kurz SD) dieser Winkelverteilung mit dem Mittelwert von  $180^\circ$  beträgt jedoch nur ca.  $0,5^\circ$  [80, 87, 145].

Die Ortsauflösung im Zentrum von PET-Geräten liegt, je nach deren Bauweise, bei ungefähr 4-8 mm. Da in der PET nicht der Nuklidzerfall, sondern die bei der  $e^+e^-$ -Vernichtung emittierten Gammaquanten gemessen werden, verursachen sowohl die Positronenreichweite (siehe Tabelle 2.1) als auch die mögliche Winkelabweichung der beiden Quanten (siehe Abbildung 2.6) eine fehlerbehaftete Erfassung des Zerfallortes. Die aus der Positronenreichweite resultierende Verschlechterung der Ortsauflösung (0,1 mm für  ${}^{18}\text{F}$  und bis zu 0,5 mm bei  ${}^{15}\text{O}$  [80]) wird jedoch erst bei besonders hochauflösenden Tomographen dominant. Der Einfluss der Winkelabweichung wiederum wird durch große Systemdurchmesser verstärkt, ist also z.B. in der Kleintier-PET aufgrund der geringeren Detektorabstände unterdrückt. Levin et al. [80] fanden eine Auflösungsver schlechterung aufgrund der Nichtkollinearität von 1,8 mm bei 80 cm Systemdurchmesser und von nur 0,2 mm bei Tomographen mit 10 cm Durchmesser.

	$^{11}\text{C}$	$^{13}\text{N}$	$^{15}\text{O}$	$^{18}\text{F}$
Erzeugung	$^{14}\text{N}(\text{p},\alpha)^{11}\text{C}$	$^{12}\text{C}(\text{d},\text{n})^{13}\text{N}$	$^{14}\text{N}(\text{d},\text{n})^{15}\text{O}$	$^{18}\text{O}(\text{p},\text{n})^{18}\text{F}$
Zerfall	$^{11}\text{C}(\text{p},\text{n})^{11}\text{B}$	$^{13}\text{N}(\text{p},\text{n})^{13}\text{C}$	$^{15}\text{O}(\text{p},\text{n})^{15}\text{N}$	$^{18}\text{F}(\text{p},\text{n})^{18}\text{O}$
Halbwertszeit [s]	1224,0	598,2	122,2	6582,0
Energie (max.) [keV]	960,0	1198,5	1732,0	633,2
Energie (mittl.) [keV]	326	432	696	202
Reichweite (max.) [mm]	5,0	5,4	8,2	2,4
Reichweite (mittl.) [mm]	0,3	1,4	1,5	0,2
Radiopharmaka (Beispiele)	$^{11}\text{C}$ -Methionin	$^{13}\text{N}$ - $\text{NH}_3$	$^{15}\text{O}$ - $\text{H}_2\text{O}$	$^{18}\text{F}$ -NaF, $^{18}\text{F}$ -FDG
Abzubildende biologische Eigenschaft	Aminosäure-Stoffwechsel	Blutfluss	Zerebraler Blutfluss	Mineralbedarf der Knochen, Glukose-Stoffwechsel

Tabelle 2.1: Eigenschaften der wichtigsten radioaktiven Nuklide in der PET  
 Zu Tabelle 2.1: Mit Reichweiten werden die linearen Reichweiten der Positronen (Positronenreichweite) in Gewebe bezeichnet. Die mittlere Reichweite setzt eine Grenze für die erreichbare Ortsauflösung beim Einsatz des entsprechenden Nuklids.

## 2.1 Radioaktive Nuklide und Radiopharmaka

Für die funktionelle Bildgebung mittels PET werden Substanzen mit bekannten biologischen Eigenschaften radioaktiv markiert. Indem ein in dem Molekülverbund vorhandenes Atom durch sein  $\beta^+$ -aktives Isotop mit identischer Kernladungszahl  $Z$  ersetzt wird, erfolgt somit keine Veränderung der chemischen und biologischen (biokinetischen) Eigenschaften des Moleküls. Die in der PET am häufigsten verwendeten Nuklide sind in Tabelle 2.1 [87, 145] zusammen mit einigen ihrer wichtigsten Eigenschaften und Anwendungsgebieten zusammengestellt. Besonders auffällig sind hierbei die kurzen Halbwertszeiten zwischen zwei Stunden und zwei Minuten. Diese ermöglichen die Injektion ausreichend radioaktiver Radiopharmaka bei gleichzeitiger Minimierung der Strahlenbelastung für den Patienten. Die Herstellung der  $\beta^+$ -aktiven Nuklide erfolgt mit einem Zyklotron. Daraus resultieren unter anderem die hohen Kosten einer PET-Untersuchung. Entweder muss eine nuklearmedizinische Klinik unter großem finanziellem Aufwand ein Zyklotron betreiben oder die - aufgrund der kurzen Halbwertszeiten in hoher Aktivität hergestellten - Nuklide bzw. Radiopharmaka von einem externen Anbieter erwerben. Die relativ lange Halbwertszeit des  $^{18}\text{F}$  ermöglicht den Bezug der  $^{18}\text{F}$ -markierten Substanzen von externen Anbietern.

Durch Syntheseverfahren unter Verwendung der in dem Zyklotron gewonnenen Nuklide werden die Radiopharmaka hergestellt. Die am häufigsten verwendete Substanz für die radioaktive Markierung ist die 2-Fluor-2-Deoxyglukose (FDG), ein Glukoseanalogon. Die Glukose wird aus dem Blutplasma von Glukose-Transporter-Proteinen (GLUT) durch die Zellmembran in das Zellinnere befördert. Innerhalb der Zelle erfolgt die Phosphorylierung der Glukose und der Abbau des Folgeprodukts unter Energiegewinn. Das  $^{18}\text{F}$ -FDG jedoch wird im Gegensatz zur Glukose im Zellinneren nicht weiter verarbeitet, es erfolgt eine Anreicherung der FDG. Die in der Zelle eingelagerte  $^{18}\text{F}$ -FDG-Konzentration ist somit ein Maß für den

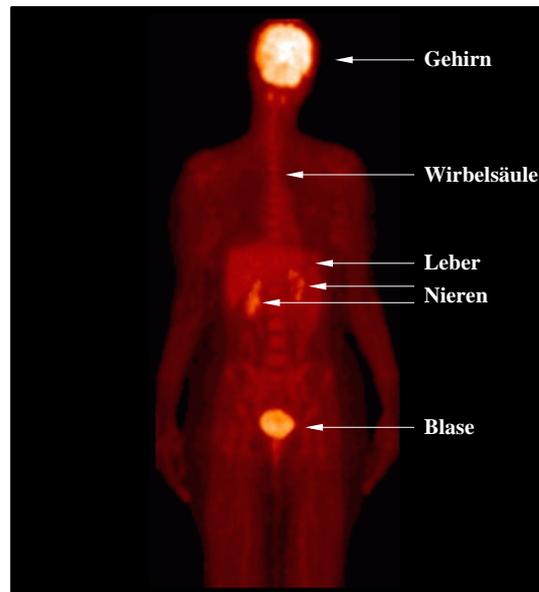
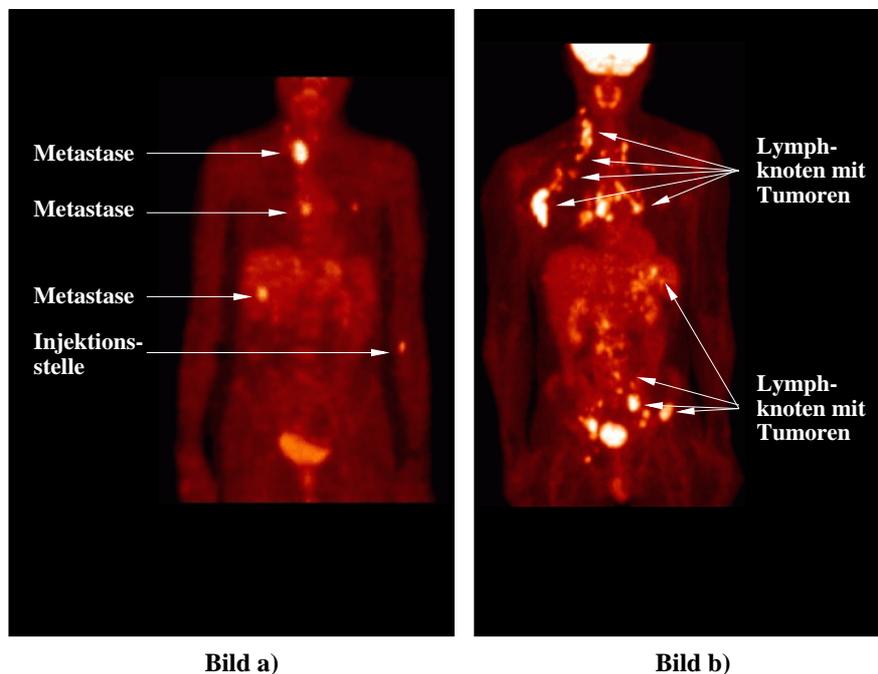


Abbildung 2.1: Beispiele für die onkologische Diagnostik mit der PET: gesunder Patient  
 Zu Abbildung 2.1: Ganzkörper-PET-Aufnahmen der FDG-Anreicherung in einem gesunden Menschen



**Bild a)**

**Bild b)**

Abbildung 2.2: Beispiele für die onkologische Diagnostik mit der PET: Patienten mit Tumoren

Zu Abbildung 2.2: Teilkörper-PET-Aufnahmen der FDG-Anreicherung. Bild a) Patient mit Metastasen eines Kolon-Karzinoms; Bild b) Patient mit Metastasen eines Lymphoms.

Eigenschaft	NaJ	BGO	LSO
Strukturformel	NaJ(Tl)	Bi <sub>4</sub> (GeO <sub>4</sub> ) <sub>3</sub>	Lu <sub>2</sub> (SiO <sub>4</sub> )O:Ce
Szintillationsabklingzeit auf ein e-tel der maximalen Lichtintensität [ns]	230	300	40
Wellenlänge der maximalen Emissionsintensität [nm]	410	480	420
Relative Lichtausbeute (zu NaJ(Tl)) [%]	100	20	75
Effektive Kernladungszahl	51	75	66
Dichte [g/cm <sup>3</sup> ]	3,67	7,13	7,4
Schwächungslänge für 511-keV-Gammaquanten [mm]	25,6	11,2	11,4
Brechungsindex	1,85	2,15	1,82

Tabelle 2.2: Eigenschaften der wichtigsten Szintillationskristalle in der PET

Glukosebedarf der Zelle, also für deren Stoffwechselaktivität.

Ein Anwendungsgebiet der FDG ist die Tumordiagnostik. Tumore haben gegenüber normalem Gewebe einen erhöhten Stoffwechsel, können also anhand ihrer gesteigerten FDG-Anreicherung mittels der PET sichtbar gemacht werden. Jedoch weisen auch andere, nicht bösartige, Prozesse wie z.B. Entzündungen eine verstärkte FDG-Aufnahme auf, was zu Falschinterpretationen führen kann. Es sind somit Radiopharmaka wünschenswert, die sich nur in Tumorgewebe anreichern. Wie im vorigen Kapitel angesprochen, wird die Entwicklung solcher Substanzen durch medizinische, biologische und radiochemische Institute ständig vorangetrieben. Für deren Erprobung wird zunehmend die PET an Kleintieren mit speziellen hochauflösenden und hochsensitiven Tomographen eingesetzt. Ein weiteres, mit <sup>18</sup>F markiertes Radiopharmakon, das [<sup>18</sup>F]-NaF, lagert sich hingegen vor allem an jenen Stellen des Knochengewebes an, die aufgrund erhöhten Wachstums eine verstärkte Mineralaufnahme benötigen wie z.B. Knochentumore. Die Bestimmung des Blutflusses, also der Blutkonzentration in Blutgefäßen, ist ein weiteres diagnostisches Gebiet in der PET. Eine Anwendung der Blutflussbestimmung ist die [<sup>13</sup>N]-NH<sub>3</sub>-PET am Herzen, mit der die Blutversorgung des Herzmuskels ermittelt werden kann und Engpässe in den Zubringergefäßen anhand von Unterdurchblutungen des Muskels aufgezeigt werden können. Die PET-Untersuchung des zerebralen Blutflusses (im Gehirn) erfolgt mit dem Radiopharmakon [<sup>15</sup>O]-H<sub>2</sub>O.

Die Abbildungen 2.1 und 2.2 zeigen drei unterschiedliche [<sup>18</sup>F]-FDG-PET-Aufnahmen aus der onkologischen Diagnostik, durchgeführt mit dem Tomographen ECAT-EXACT (Siemens/CTI Inc.) [151]. In Abbildung 2.1 ist die [<sup>18</sup>F]-FDG-Anreicherung - hauptsächlich im Gehirn, aber auch in der Leber und der Blase - bei einem gesunden Menschen dargestellt. Bild a in Abbildung 2.2 zeigt das PET Bild eines Patienten mit Metastasen eines Kolonkarzinoms in der Schilddrüse, dem Mediastinum und der Leber. Bei der rechts dargestellten Aufnahme (Bild b) wurde eine hochgradige Lymphom-Metastasierung festgestellt.

## 2.2 Aufbau eines PET-Detektors

Die in der PET verwendeten Detektoren bestehen meist aus Szintillationskristallen, die für 511-keV-Gammaquanten einen hohen Wechselwirkungsquerschnitt aufweisen (siehe Abschnitt

2.3), sowie einem daran angekoppeltem Lichtsensor. Tabelle 2.2 fasst die wesentlichen Eigenschaften von drei bei der PET hauptsächlich eingesetzten Kristallen, Thallium dotiertes Natriumiodid (kurz NaI) [131], Wismuthgermanat (kurz BGO) [1, 151] und Cerium dotiertes Lutetium-Oxyorthosilikat (kurz LSO) [91, 110, 111], zusammen. Derzeit wird LSO wegen seiner kurzen Abklingzeit (erlaubt hohe Nachweisraten), der relativ hohen Lichtausbeute (resultiert in einer guten Energieauflösung) und seiner kurzen Schwächungslänge (erlaubt kurze Kristalle bei gleichzeitig hoher Sensitivität) für den Bau von Tomographen bevorzugt. Als Lichtsensor werden Photoelektronenvervielfacher (engl. *photomultiplier tube*, kurz PMT) [79], neuerdings aber auch Photodioden zur Umformung des Szintillationslichts in elektrische Signale eingesetzt. Durch ihre hohe Miniaturisierbarkeit erfahren in Machbarkeitsstudien und in experimentellen Positronen-Emissions-Tomographen derzeit die Photodioden erhöhte Aufmerksamkeit. Es ist zu erwarten, dass diese im Falle einer Produktion in großen Stückzahlen erheblich kostengünstiger sein werden als die aufwändig herzustellenden PMTs. Halbleiterdioden mit eigener Verstärkung wie z.B. die Lawinen-Photodiode (engl. *avalanche photodiode*, kurz APD) werden in diesem Zusammenhang zur Zeit favorisiert. Entscheidend bei der Wahl des Lichtsensors sind unter anderem ein hohes Signal-zu-Rausch Verhältnis, eine kurze Signallabfallzeit zur Gewährleistung hoher Nachweisraten, eine hoher Grad an Miniaturisierbarkeit zum Aufbau kleiner Systeme bestehend aus vielen Einzeldetektoren und ein niedriger Preis. Zur Verarbeitung der vom Lichtsensor gelieferten - meist sehr niedrigen - Ladungsimpulse werden eine analoge Verstärkungs- und Pulsformungselektronik sowie Elemente zur Digitalisierung der gemessenen Daten benötigt.

## 2.3 Wechselwirkungen von Gammaquanten mit Materie

Entlang ihrer Flugbahn können Gammaquanten mit Materie wechselwirken. Die Wahrscheinlichkeiten für diese Prozesse werden durch den Wechselwirkungsquerschnitt  $\sigma$  ausgedrückt:

$$\sigma = \frac{\text{Anzahl der je Zeiteinheit stattfindenden Wechselwirkungen}}{\text{Anzahl der je Zeiteinheit und Fläche senkrecht auftreffenden Teilchen}} . \quad (2.1)$$

Dieser kann in Wechselwirkungsquerschnitte für die einzelnen Prozesse faktorisiert werden. Für Gammaquanten werden die Wechselwirkungsquerschnitte  $\sigma_P$  für Photoeffekt und  $\sigma_C$  für Compton-Streuung an freien Elektronen hauptsächlich durch die Dichteverteilung der freien Elektronen und durch die Energie der Gammaquanten bestimmt. Es lassen sich folgende Abhängigkeiten von der ursprünglichen Energie  $E = h\nu$  eines Gammaquants und der Kernladungszahl  $Z$  der beteiligten Materie formulieren [131]:

$$\sigma_P \sim \frac{Z^5}{E^{-7/2}} , \text{ und} \quad (2.2)$$

$$\sigma_C \sim \frac{Z}{E} . \quad (2.3)$$

Abbildung 2.3 zeigt  $\sigma_P$  und  $\sigma_C$  für Wasser (Bild a) und für den Szintillationskristall LSO (Bild b). In Übereinstimmung mit obigen Proportionalitätsbeziehungen ist aus Bild a ersichtlich, dass der dominante Prozess für 511-keV-Gammaquanten in wasseräquivalentem organischen Gewebe die Compton-Streuung ist. Sowohl der Photoeffekt als auch die Rayleigh-Streuung weisen bei 511 keV eine erheblich reduzierte Wahrscheinlichkeit auf. Bei dem exemplarisch verwendeten LSO-Szintillationskristall (Bild b) ist aufgrund der höheren Kernladungszahl der

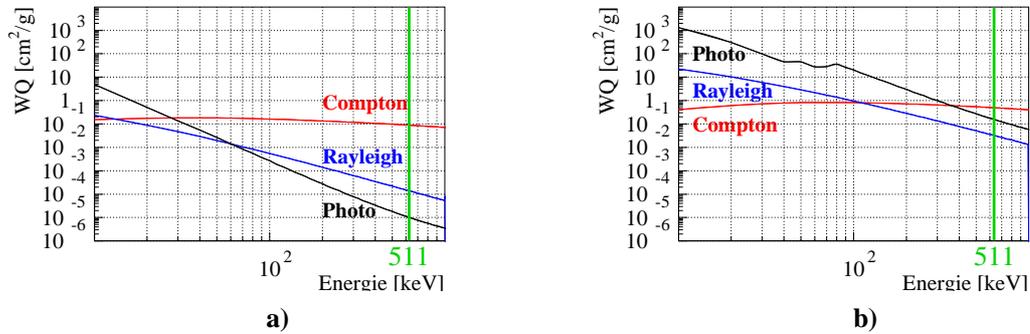


Abbildung 2.3: Wechselwirkungsquerschnitte für Photoeffekt sowie Compton- und Rayleigh-Streuung

Zu Abbildung 2.3: Die für die PET relevante Gammaenergie  $E = 511$  keV ist zur besseren Lesbarkeit grün markiert. Bild a) Wechselwirkungsquerschnitte für Wasser, als Maß für organisches Gewebe. Bild b) Wechselwirkungsquerschnitte für den Szintillationskristall LSO.

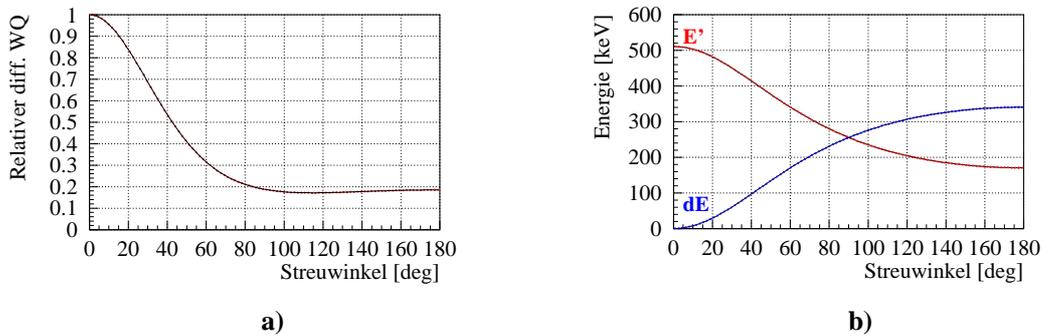


Abbildung 2.4: Grafische Darstellungen der Klein-Nishina Gleichung  
Zu Abbildung 2.4: Die für die PET relevante Gammaenergie  $E = 511$  keV wurde hierbei in die entsprechenden Gleichungen eingesetzt ( $\gamma = 1$ ). Bild a) Relativer differentieller Wechselwirkungsquerschnitt für Compton-Streuung (Gleichung 2.4 ohne Konstanten). Bild b) Restenergie  $E'$  eines 511-keV-Gammaquants nach Compton-Streuung (gemäß Gleichung 2.6) bzw. dessen Energieverlust  $dE = 511 \text{ keV} - E'$ .

Unterschied der Wahrscheinlichkeiten für Photoeffekt und Compton-Streuung reduziert. Für den Gammatransport und den Gammanachweis in der PET bedeutet dies:

- In organischem Gewebe überwiegt die Compton-Streuung.
- In guten Szintillationskristallen teilt sich die Zahl der Wechselwirkungen zu ähnlichen Teilen auf Compton-Streuung und Photoeffekt auf. Kristalle, die aus Atomen mit hoher Kernladungszahl  $Z$  bestehen, werden zur Steigerung der Wahrscheinlichkeit für einen Photoeffekt favorisiert.
- Sowohl für organisches Gewebe als auch für die Szintillationskristalle mit hoher Kernladungszahl ist die Wahrscheinlichkeit für Rayleigh-Streuung im Vergleich zu den genannten dominanten Prozessen verschwindend gering.

Während beim Photoeffekt die Gammaquanten unter vollständiger Energieabgabe absorbiert werden und somit anhand dieser Energiedeposition leichter zu identifizieren sind, erfordern die mittels Compton-Streuung wechselwirkenden Gammaquanten aufgrund der nur teilweise abgegebenen Energie eine besondere Behandlung. Der differentielle Wechselwirkungsquerschnitt für Compton-Streuung von Gammaquanten in das Raumwinkelement  $d\Omega$  lautet nach Klein und Nishina [29, 66, 67, 79]:

$$\frac{d\sigma_C}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2} \frac{1}{[1 + \gamma(1 - \cos\theta)]^2} \left( 1 + \cos^2\theta + \frac{\gamma^2(1 - \cos\theta)^2}{1 + \gamma(1 + \cos\theta)} \right), \text{ mit} \quad (2.4)$$

$$\gamma = \frac{E}{m_e c^2}.$$

Abbildung 2.4(a) zeigt diese relative Compton-Streuwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit vom Streuwinkel  $\theta$ , angegeben für 511-keV-Gammaquanten ( $\gamma = 1$ ). Auffällig ist hierbei, dass sich die Wahrscheinlichkeit über einen großen Streuwinkelbereich von ungefähr  $110^\circ$  bis  $180^\circ$  nur geringfügig ändert [29]. Betrachtet man die Streuung eines Gammaquants der ursprünglichen Energie  $E = h\nu$  bzw.  $E = 511$  keV an einem freien Elektron als elastischen Stoßprozess, so lässt sich die Restenergie  $E'$  des Gammaquants nach Compton-Streuung um den Winkel  $\theta$  mit

$$E'(E, \theta) = E \cdot \left[ 1 + \frac{E}{m_e c^2} (1 - \cos\theta) \right]^{-1}, \text{ bzw.} \quad (2.5)$$

$$E'(511 \text{ keV}, \theta) = 511 \text{ keV} \cdot [2 - \cos\theta]^{-1} \quad (2.6)$$

ermitteln. Gleichung 2.6 ist in Abbildung 2.4(b) grafisch dargestellt. Hierbei ist  $dE = E - E'$  die von dem Gammaquant bei der Streuung abgegebene Energie.

Abbildung 2.5 zeigt ein typisches Energiespektrum für 511-keV-Gammaquanten, aufgenommen mit einem sehr rauscharmen LSO-APD Einzeldetektor [111] ähnlich den im Kapitel 6 für MADPET-II beschriebenen. Rechts ist der (engl.) *photopeak* zu sehen, gebildet durch die im Kristall mit einem Photoeffekt absorbierten Gammaquanten. Bei 341 keV liegt die Compton-Kante, definiert durch die maximale Energieabgabe eines Gammaquants bei einer Compton-Streuung. Diese lässt sich aus Gleichung 2.6 durch Einsetzen des maximalen Streuwinkels  $\theta = 180^\circ$  ermitteln. In das Tal zwischen Compton-Kante und Photopeak fallen jene Gammaquanten, die vor ihrem Nachweis eine Kleinwinkelstreuung unter geringer Energieabgabe außerhalb des Kristalls erfuhren. Innerhalb des Compton-Kontinuums kann eine Häufung bei

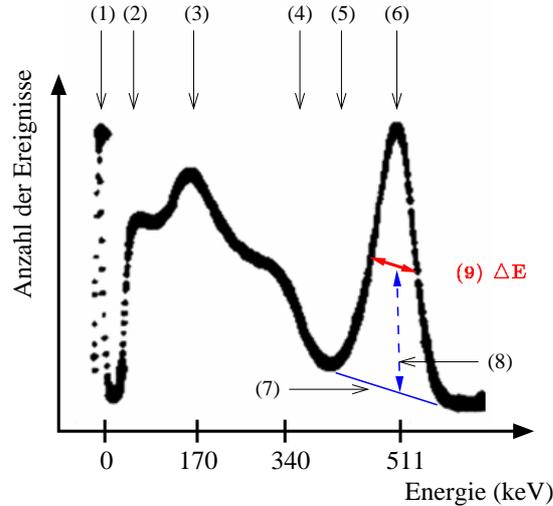


Abbildung 2.5: Spektrum für 511-keV-Gammaquanten, aufgenommen mit einem LSO-APD Einzeldetektor

Zu Abbildung 2.5: Entnommen aus [111], mit freundlicher Genehmigung des Autors.

1) Pedestal der Elektronik. Liegen niedrige (oder keine) Impulse vor, liefert die Elektronik den Pedestalwert, er hat keine physikalische Bedeutung im Sinne der Gammadetektion; 2) Untere Energieschwelle bei dieser Messung. 3) Rückstreupeak; 4) Compton-Kante; 5) Tal; 6) Photopeak; 7) Abgeschätzter linearer Streuuntergrund; 8) Hälfte der Peakhöhe; 9)  $\Delta E$  ist die Breite des Photopeaks bei der Hälfte seines Maximums. Aus dem hier vorliegenden Spektrum wurde die Energieauflösung des Detektors  $\Delta E/E$  bei  $E = 511$  keV mit ungefähr 12% ermittelt [111].

ungefähr 170 keV beobachtet werden. Dieser so genannte Rückstreupeak (engl. *backscatter peak*) [67] wird durch jene Gammaquanten gebildet, die vor ihrem Nachweis eine Compton-Streuung mit großem Streuwinkel an anderer Stelle vollzogen haben. Die Häufung im Spektrum tritt auf, da für 511-keV-Gammaquanten ab  $\theta \gtrsim 110^\circ$  die Änderung des Energieverlusts  $dE$  bzw. der Restenergie  $E'$  gering ist (siehe Abbildung 2.4(b)). So beträgt z.B. für den Streuwinkelbereich von  $150^\circ$ - $180^\circ$ , in dem wie bereits anhand Abbildung 2.4(a) gezeigt wurde alle Winkel ähnlich wahrscheinlich sind, die Restenergie  $E'$  der gestreuten Gammaquanten im Mittel  $173 \pm 2,5$  keV. Die Ausdehnung der beobachteten Häufung wird zudem durch die Energieauflösung des Detektors beeinflusst.

Die Energieauflösung eines Detektors wird für eine Energie  $E$ , also die Position des entsprechenden Photopeaks, mit

$$\text{Energieauflösung} = \frac{\Delta E}{E} \quad (2.7)$$

berechnet [79]. Hierbei ist  $\Delta E$  wie in Abbildung 2.5 dargestellt die Breite des Photopeaks bei seiner halben Höhe (engl. *full-width half-maximum*, kurz FWHM). Im Allgemeinen wird vorher der Streuuntergrund, näherungsweise als linear betrachtet, vom Photopeak subtrahiert.

Es kann keine klare Aussage über die Historie der unterhalb der Compton-Kante nachgewiesenen Gammaquanten getroffen werden, da deren Streuung entweder innerhalb oder außerhalb des Kristalls erfolgt sein kann. Um den daraus resultierenden Fehler einzugrenzen,

wird eine untere Energieschwelle gesetzt. Wechselwirkungen die eine Energiedeposition kleiner als die Schwellenenergie bewirken, werden nicht registriert und somit von einer weiteren Verarbeitung ausgeschlossen. Die Höhe dieser Schwelle ist von Gerät zu Gerät unterschiedlich. Hohe Schwellen mindern den Anteil der gestreuten Gammaquanten aber auch die Sensitivität des Tomographen. In der PET wird, als Kompromiss zwischen Sensitivität und Streuuntergrund, oft die untere Energieschwelle bei der Compton-Kante gesetzt. Soll der Nachweis von höher-energetischen Gammaquanten ( $E > 511$  keV) unterdrückt werden, so wird eine zusätzliche obere Energieschwelle für die maximal zulässige Energiedeposition gesetzt. Die Breite des resultierenden, meist auf dem Photopeak zentrierten, Energiefensters entspricht mindestens der Energieauflösung der verwendeten Detektoren (z.B. von 350-650 keV [1, 18, 151]).

## 2.4 Messung von Gammaquantenpaaren

### 2.4.1 Koinzidenzmessung

Die Unterscheidung, ob zwei in unterschiedlichen Detektoren jeweils innerhalb des Energiefensters erfasste Gammaquanten einer gemeinsamen Positron-Elektron-Vernichtung zuzuordnen sind, wird über deren zeitliches Eintreffen im Detektorsystem vollzogen. Hierbei wird die gleichzeitige (koinzidente) Entstehung der Gammaquanten ausgenutzt. Durch die Vernachlässigung der Laufzeitunterschiede in einem herkömmlichen Positronen-Emissions-Tomographen spricht man deshalb von dem gleichzeitigen (koinzidenten) Nachweis der Gammaquanten oder kurz von der Messung einer Koinzidenz. Die unterschiedlichen Laufzeiten (engl. *time-of-flight*, kurz TOF) beider Gammaquanten bis zum Zeitpunkt ihrer Wechselwirkungen mit dem Detektorsystem könnten prinzipiell zu einer genaueren Bestimmung des Emissionsortes verwendet werden [20]. Für eine örtliche Unterscheidung von zwei Emissionsorten im Abstand  $d$  ergibt sich hierfür ein Laufzeitunterschied von  $\Delta t = d \cdot 2 \cdot n/c$ . Um eine TOF-Ortsauflösung von 1,5 cm (in Luft) zu erreichen, ist somit die geforderte Zeitaufklärung ungefähr 0,1 ns. Derzeitige in der PET gebräuchliche Detektorsysteme erreichen jedoch nur eine wesentlich schlechtere Zeitaufklärung im Bereich von einigen Nanosekunden. Speziell für eine hohe Zeitaufklärung entwickelte Detektoren erlauben eine Verbesserung der Weglängenbestimmung bis zu einigen Zentimetern [81, 89, 154]. Diese Detektortypen erfordern jedoch aufwändigere analoge und digitale Elektronikkonzepte und würden somit die Kosten eines Tomographen erheblich erhöhen.

Abbildung 2.6 zeigt Messbedingungen zu sieben verschiedenen Positron-Elektron-Vernichtungen, dargestellt durch die rund umrandeten Zahlen 1 bis 4, 5a mit 5b und 6. Die Reichweite der Positronen wird hierbei nicht berücksichtigt, da eine Korrektur für die Positronenreichweite nur in seltenen Fällen innerhalb der Bildrekonstruktion durchgeführt wird [44]. Die meisten Verarbeitungsmethoden in der Positronen-Emissions-Tomographie vernachlässigen diesen Effekt aufgrund der geringen mittleren Positronenreichweite in organischem Gewebe (siehe Tabelle 2.1). Der Vernichtungsort wird dann als Näherung für den Ort des Positronenzerfalls betrachtet. Die geometrischen Größenverhältnisse sind in dieser Abbildung nicht maßstabsgetreu wiedergegeben. Bei allen Fällen ist vorausgesetzt, dass die Energiedepositionen der beteiligten Gammaquanten in den entsprechenden Kristallen innerhalb des verwendeten Energiefensters lagen.

- 1) *Wahre Koinzidenz* (engl. *true coincidence*, kurz TRUES):

Die Positron-Elektron-Vernichtung (1) wird unter den gewünschten Bedingungen nach-

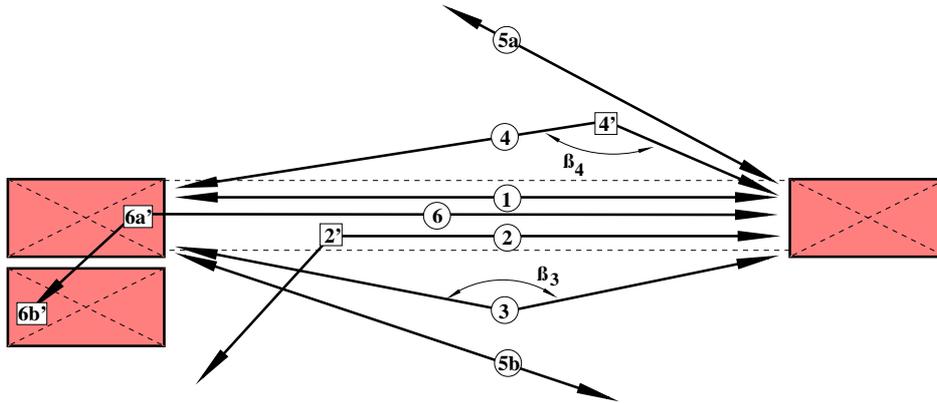


Abbildung 2.6: Messung und Verlust von Koinzidenzen

Zu Abbildung 2.6: Rund umrahmte Zahlen stellen die Orte von Positron-Elektron-Vernichtungen dar. Quadratisch umrahmte Zahlen bedeuten die Wechselwirkung eines Gammaquants mit dem Objekt. 1) Korrekt gemessene Koinzidenz; 2) Verloren gegangene, nicht gemessene Koinzidenz; 3) Falsch gemessene Koinzidenz (Winkelabweichung). 4) Falsch gemessene Koinzidenz (Streuung im Objekt); 5a+5b) Zufällige Koinzidenz; 6) Koinzidenz mit Streuung im Detektorsystem und Energiedeposition in mehr als zwei Kristallen.

gewiesen. Die bei der Zerstrahlung frei werdenden Gammaquants werden kollinear emittiert und in zwei gegenüber liegenden Detektoren nachgewiesen. Der Emissionsort liegt innerhalb der geometrisch sensitiven Fläche beider Detektoren (gestrichelter Bereich).

## 2) Verlorene Koinzidenz:

Die Positron-Elektron-Vernichtung (2) geht aufgrund der Wechselwirkung (2') eines Quants mit dem Objekt verloren. Die Wechselwirkung (2') wird in Gewebe hauptsächlich durch Compton-Streuung dominiert. Die Wahrscheinlichkeiten für kohärente Streuung und Photoeffekt sind im Falle von 511 keV Gammaquants in dem vorwiegend aus Wasser bestehenden Gewebe gering. Abbildung 2.3(a) zeigt die Verteilung der relevanten Wirkungsquerschnitte abhängig von der Energie der Gammaquants. Der hier beschriebene Effekt, dass Koinzidenzen aufgrund von Wechselwirkungen der Gammaquants mit dem Objekt verloren gehen, wird mit Schwächung bezeichnet. Diese Namensgebung kommt von dem Effekt der Schwächung eines Quantenflusses  $I_0$  durch ein Objekt aufgrund der Verteilung der Schwächungskoeffizienten  $\mu(\vec{l})$  entlang des Weges  $\vec{l}$  innerhalb des Objekts:

$$I = I_0 \cdot e^{(-\int \mu(\vec{l}) d\vec{l})}. \quad (2.8)$$

Durch das Messen dieser Koeffizienten, z.B. anhand einer externen Quelle oder einer CT-Aufnahme, können diese zur Korrektur der entlang eines Weges  $\vec{l}$  gemessenen Zahl  $N$  von Koinzidenzen verwendet werden,

$$N^{korr} = N \cdot e^{(+\int \mu(\vec{l}) d\vec{l})}, \quad (2.9)$$

um die Zahl  $N^{korr}$  der ohne Schwächung messbaren Koinzidenzen abzuschätzen. Dieser Vorgang wird in der Emissions-Tomographie Schwächungskorrektur genannt [25, 45, 94].

Ohne Schwächungskorrektur zeigen tiefer im Objekt liegende Areale, in Abhängigkeit von der Objektgröße und -beschaffenheit, aufgrund der langen Wege durch das schwächende Medium eine reduzierte Signalintensität.

- 3) *Wahre Koinzidenz mit falscher Ortszuordnung aufgrund von Nichtkollinearität:*  
Die Abweichung von der Kollinearität ermöglicht den Nachweis in einem Detektorpaar, dessen sensitive Fläche nicht den Emissionsort der Gammaquanten enthält. Beide Gammaquanten werden einer gemeinsamen Vernichtung, jedoch einem falschen Emissionsort, zugeordnet. Die Folge ist eine verschlechterte Ortsauflösung im rekonstruierten Bild. Bei Kleintiertomographen ist dieser Effekt aufgrund des geringen Systemdurchmessers relativ gering [80] und bedarf in der Regel keiner gesonderten Behandlung.
- 4) *Wahre Koinzidenz mit falscher Ortszuordnung aufgrund von Wechselwirkungen:*  
Eines der beiden Gammaquanten erfährt eine Ablenkung aufgrund von meist inkohärenter Streuung. Wie im Fall (3) gezeigt, führt dies zu einer falschen Interpretation des Emissionsortes und somit einer Verschlechterung der rekonstruierten Ortsauflösung. Wie bereits angesprochen, ist die dominierende Wechselwirkung von 511 keV Gammaquanten mit organischem Gewebe die Compton-Streuung. Durch Analyse der Energien der nachgewiesenen Gammaquanten kann der Effekt der Streuung im Objekt behandelt werden. Es werden in der Regel zwei Gruppen von Methoden unterschieden. Einerseits kann durch Setzen einer hohen unteren Energieschwelle ein Großteil der gestreuten Gammaquanten aus dem Messdatensatz eliminiert werden. Hierbei gehen jedoch gemessene Daten verloren, insbesondere jene Gammaquanten, die nicht im Objekt sondern im Detektorsystem eine Streuung erfuhren. Andererseits wurden Korrekturverfahren entwickelt [107, 149], die durch die Analyse der Wechselwirkungsenergien unter Berücksichtigung der Beschaffenheit des Objekts einen Teil der gestreuten Quanten ihrem korrekten Entstehungsort zuordnen oder einen Streuanteil durch zum Teil iterative rechnerische Verfahren ermitteln und diesen von den gemessenen Daten subtrahieren. Eine vielversprechende Methode von de Jong et al. [27] verwendet eine speziell dafür entwickelte Monte Carlo Simulation innerhalb der iterativen tomographischen Bildrekonstruktion, um die in SPECT Daten enthaltenen gestreuten Gammaquanten aus dem rekonstruierten Bild zu eliminieren.
- 5) *Zufällige Koinzidenz* (engl. *random coincidence*, *accidental coincidence*, kurz: RAN-DOMS):  
Zwei unterschiedliche Vernichtungen (5a und 5b) resultieren in dem quasi-gleichzeitigen Nachweis von jeweils einem Quant aus jeder der beiden Vernichtungen innerhalb des Koinzidenz-Zeitfensters. Die Zahl der einzeln auf das Detektorsystem treffenden Gammaquanten (engl. *singles*) kann sehr groß sein. Es seien im Folgenden  $N_a^S$  und  $N_b^S$  die Summen der in den Detektoren  $a$  und  $b$  erfassten Einzelphotonen und  $A$  die Aktivität im Gesichtsfeld der Detektoren. Dann gilt für die Einzelzählraten dieser Detektoren:

$$\frac{\partial}{\partial t} N_a^S \sim \frac{\partial}{\partial t} N_b^S \sim A. \quad (2.10)$$

Die Rate der zufälligen Koinzidenzen ist abhängig von der Breite des Koinzidenzfensters. Diese wird in der Regel relativ zu der zeitlichen Auflösung  $\tau$  des Detektorsystems angegeben. Um möglichst alle wahren Koinzidenzen zu registrieren, ergibt sich eine Breite des Koinzidenzfensters von  $2 \cdot \tau$ . Für jedes nachgewiesene Gammaquant wird

ein elektronischer Impuls der Länge  $\tau$  gestartet und an die Koinzidenzelektronik weitergegeben. Überlappen zwei dieser Impulse - in dem resultierenden Koinzidenzfenster der Breite  $2 \cdot \tau$  - so werden die dazugehörigen Gammaquanten als eine Koinzidenz betrachtet. Die Zählrate der zufälligen Koinzidenzen in einem Detektorpaar (a,b) kann anhand der Beziehung 2.10 durch

$$\frac{\partial}{\partial t} N_{a,b}^R \sim 2 \cdot \tau \cdot \frac{\partial}{\partial t} N_a^S \cdot \frac{\partial}{\partial t} N_b^S \sim 2 \cdot \tau \cdot A^2 \quad (2.11)$$

beschrieben werden [50, 108]. Dies bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit für den Nachweis einer zufälligen Koinzidenz quadratisch mit der in der Nähe des Detektorsystems befindlichen Aktivität  $A$  und linear mit der Breite des Koinzidenzfensters steigt. Im Gegensatz dazu hängt die Nachweisrate der im Fall (1) beschriebenen wahren Koinzidenzen linear von der im Gesichtsfeld befindlichen Aktivität  $A$  ab. Zur Vermeidung von hohen Kontaminationen der gemessenen Daten durch zufällige Koinzidenzen wird bei der Entwicklung von PET-Geräten ein großes Augenmerk auf eine gute Zeitauflösung des Detektorsystems und die Reduktion der auf die Detektoren treffenden Zahl von Einzelphotonen - z.B. durch Abschirmungen - gelegt. Bei der Durchführung von Messungen kann die Rate der zufälligen Koinzidenzen durch Reduktion der applizierten Aktivität gesenkt werden. Zufällige Koinzidenzen verursachen einen erhöhten Rauschuntergrund im rekonstruierten Bild und verschlechtern die Ortsauflösung und Bildqualität.

- 6) *Wahre Koinzidenz mit Streuung im Detektorsystem* (engl. *inter-crystal scatter*):  
 Eines der beiden Gammaquanten aus der Positron-Elektron-Vernichtung (6) vollzieht Wechselwirkungen mit mehreren Detektoren (hier Streuung 6a' und anschließender Photoeffekt 6b' im Nachbarkristall). Die Nutzung dieser Daten erfordert eine besondere Behandlung. Einerseits muss das Messsystem deren Erfassung und Weiterverarbeitung unterstützen, indem es die Registrierung mehrerer Wechselwirkungen erlaubt. Hierbei sind für jeden beteiligten Kristall dessen Nummer und die darin deponierte Energie zu erfassen. Diese Unterstützung schließt auch eine niedrige untere Energieschwelle (Schwelle  $\ll 511 - 341 = 170$  keV) mit ein, da sonst mindestens eine der beiden Wechselwirkungen unterhalb dieser Schwelle fallen kann und somit nicht registriert wird. Weiterhin muss zu einer fehlerfreien Nutzung dieser Koinzidenz die so genannte primäre LOR (engl. *primary LOR*) gefunden werden [24, 123, 126, 137]. Dafür ist das Ermitteln der zuerst erfolgten Wechselwirkung (hier 6a') bzw. des dabei beteiligten Kristalls gefordert. Sind mehr als drei Detektoren beteiligt (z.B. zwei Wechselwirkungen auf jeder Seite oder drei Wechselwirkungen auf einer Seite, jeweils in unterschiedlichen Detektoren), so wird dieses Ermitteln weiter erschwert.

Ein wichtiger Begriff in diesem Zusammenhang ist die Menge aller gemessenen Koinzidenzen (engl. *total coincidences*, kurz: TOTALS). Sie besteht aus wahren und zufälligen Koinzidenzen und stellt die tatsächlich in einem Detektorpaar erfasste Messgröße dar. In vielen klinischen Tomographen wird jedoch zeitgleich zum Zählen aller Koinzidenzen eine parallele Messung zur Bestimmung der zufälligen Koinzidenzen durchgeführt. Dies geschieht wiederum über den Vergleich des von jedem nachgewiesenen Gammaquant gestarteten Impulses der Länge  $\tau$ , jedoch wird einer der Impulse zeitlich verzögert (z.B. um 128 ns). Überlappt ein verzögerter Impuls mit einem unverzögerten Impuls, so können die beiden Gammaquanten unmöglich aus einer gemeinsamen Positron-Elektron-Vernichtung stammen. Aufgrund der identischen Breite

des normalen und des verzögerten Zeitfensters ist die durch diese Zeitverzögerung gemessene Rate gleichzusetzen mit der Rate der im unverzögerten Koinzidenzmodus gemessenen zufälligen Koinzidenzen. In bisherigen technischen Realisierungen der Behandlung der zufälligen Koinzidenzen werden gemäß Gleichung 2.12 diese nach Messung von den gemessenen Koinzidenzen abgezogen und nur die abgeschätzte Zahl der wahren Koinzidenzen als Datensatz gespeichert:

$$\underbrace{\begin{array}{c} \text{Alle gemessenen} \\ \text{Koinzidenzen} \\ \text{(TOTALS)} \end{array}}_{\text{Messung im}} - \underbrace{\begin{array}{c} \text{Zufällige} \\ \text{Koinzidenzen} \\ \text{(RANDOMS)} \end{array}}_{\text{Messung im zeitlich}} = \underbrace{\begin{array}{c} \text{Wahre} \\ \text{Koinzidenzen} \\ \text{(TRUES)} \end{array}}_{\text{Speicherung}} \quad (2.12)$$

Koinzidenzfenster                      versetzten Fenstern

### 2.4.2 Koinzidente Antwortfunktion eines Detektorpaares

Die räumliche Sensitivität eines Detektorpaares bezüglich isotrop emittierter Gammaquantenpaare innerhalb seines Gesichtsfeldes wird charakterisiert durch seine koinzidente Antwortfunktion (engl. *coincidence aperture function*, CAF) [63, 77, 83, 133]. Abbildung 2.7 zeigt qualitativ die Antwortfunktionen von drei Detektorpaaren unter verschiedenen Messbedingungen. Bei deren experimenteller Bestimmung wird eine Punkt- oder Linienquelle entlang der eingezeichneten horizontalen Linie bewegt und in Abhängigkeit vom Ort der Quelle die Zahl der gemessenen Koinzidenzen notiert. Durch Auftragen dieser Anzahl über dem Ort der Quelle erhält man die angedeuteten Sensitivitätsprofile. Im Folgendem seien die Positronenreichweite und die Abweichung der Flugbahnen der Gammaquanten von 180° vernachlässigt. Der Entstehungsort der Gammaquanten wird somit auch als Entstehungsort des Positrons angenommen.

#### a) *Optimal ausgerichtete Kristalle:*

Dieser Fall zeigt ein Detektorpaar, das entlang der langen Kristall-Symmetrieachsen ausgerichtet ist. Das ermittelte Sensitivitätsprofil kann durch ein symmetrisches Dreieck angenähert werden. Die Halbwertsbreite dieses Dreieckprofils entspricht der halben Kantenlänge der Kristalle. Sie wird auch als intrinsische Auflösung des Tomographen bezeichnet und gibt die untere Grenze der erreichbaren rekonstruierten Ortsauflösung eines Systems an. Eine empirische Abschätzung der intrinsischen Auflösung zweier optimal ausgerichteter Kristalle ist in [95, 96] mit

$$\Gamma = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + (0,0022 \cdot D)^2 + R^2 + b^2} \quad (2.13)$$

vorgelegt. In obiger Gleichung ist  $d$  die Kantenlänge der Kristallstirnfläche,  $D$  der Abstand der Stirnflächen beider Kristalle und  $R$  die Reichweite der Positronen. Die Größe  $b$  erhält entweder den Wert 0 bei einer eins-zu-eins Kopplung von Kristall und Photosensor oder den von den Autoren empirisch ermittelten Wert von 2,2 mm im Falle einer Blockdetektor-Auslese. Durch Multiplikation von  $\Gamma$  mit 1,25 wird gleichzeitig eine Abschätzung für die mit analytischen Rekonstruktionsmethoden erreichbare Ortsauflösung im Zentrum des rekonstruierten Bildes angegeben.

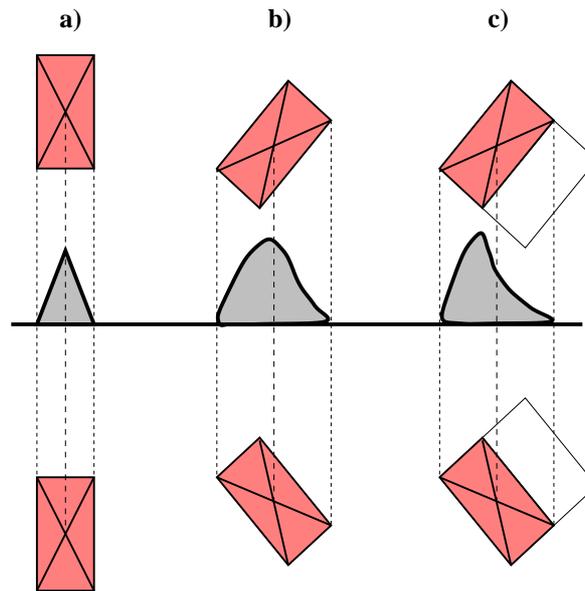


Abbildung 2.7: Koinzidente Antwortfunktionen einiger Detektorpaare

Zu Abbildung 2.7: Qualitative Darstellung der koinzidenten Antwortfunktionen von unterschiedlichen Detektorpaaren mit a) optimal zueinander ausgerichteten Kristallen, b) schräg zueinander positionierten Kristallen und c) schräg zueinander positionierten Kristalle mit teilweiser Abschirmung durch ihre Nachbarkristalle. Die äußeren gestrichelten Linien umranden die Gesichtsfelder der einzelnen Kristallpaare.

b) *Schräg ausgerichtete Kristalle (der Parallaxeneffekt):*

Im Falle von schräg zueinander stehenden Kristallen verformt und verbreitert sich das Profil, die Auflösung dieser Paare ist also erheblich verschlechtert [77]. Dieser Effekt wird auch der Parallaxeneffekt genannt und tritt im Randbereich des Detektorvolumens auf.

c) *Schräg ausgerichtete Kristalle und Abschirmung durch Nachbarn:*

Der im Fall b) geschilderte Effekt wird noch verstärkt, falls die Kristalle durch unmittelbare Nachbarn abgeschirmt werden. Es tritt eine zusätzliche Deformierung der Antwortfunktion des Kristallpaares auf. Tatsächlich findet bei der gewünschten engen Detektorpackung bei schräg zueinander ausgerichteten Kristallpaaren immer eine Abschirmung durch benachbarte Kristallvolumina auf, sie wird jedoch nur in seltenen Fällen ausreichend in der Datenverarbeitung berücksichtigt bzw. korrigiert.

Anhand obiger Abbildung und Fallbeschreibung kann eine Abschätzung für die Ortsauflösung von Ringtomographen gegeben werden. Das Zentrum des Tomographengesichtsfeldes, also das Zentrum der Bildmatrix, wird von Kristallen des Falls a) abgetastet. Hier kann also eine Ortsauflösung von ca. der Hälfte der Kristallbreite erreicht werden. Mit zunehmendem Abstand vom Zentrum des Gesichtsfeldes bzw. der Bildmatrix erfolgt eine Abtastung gemäß dem Fall c). Ohne aufwändige Korrekturmaßnahmen hat dies zur Folge, dass sich die Ortsauflösung von der Bildmatrixmitte zum Matrixrand hin stetig verschlechtert.

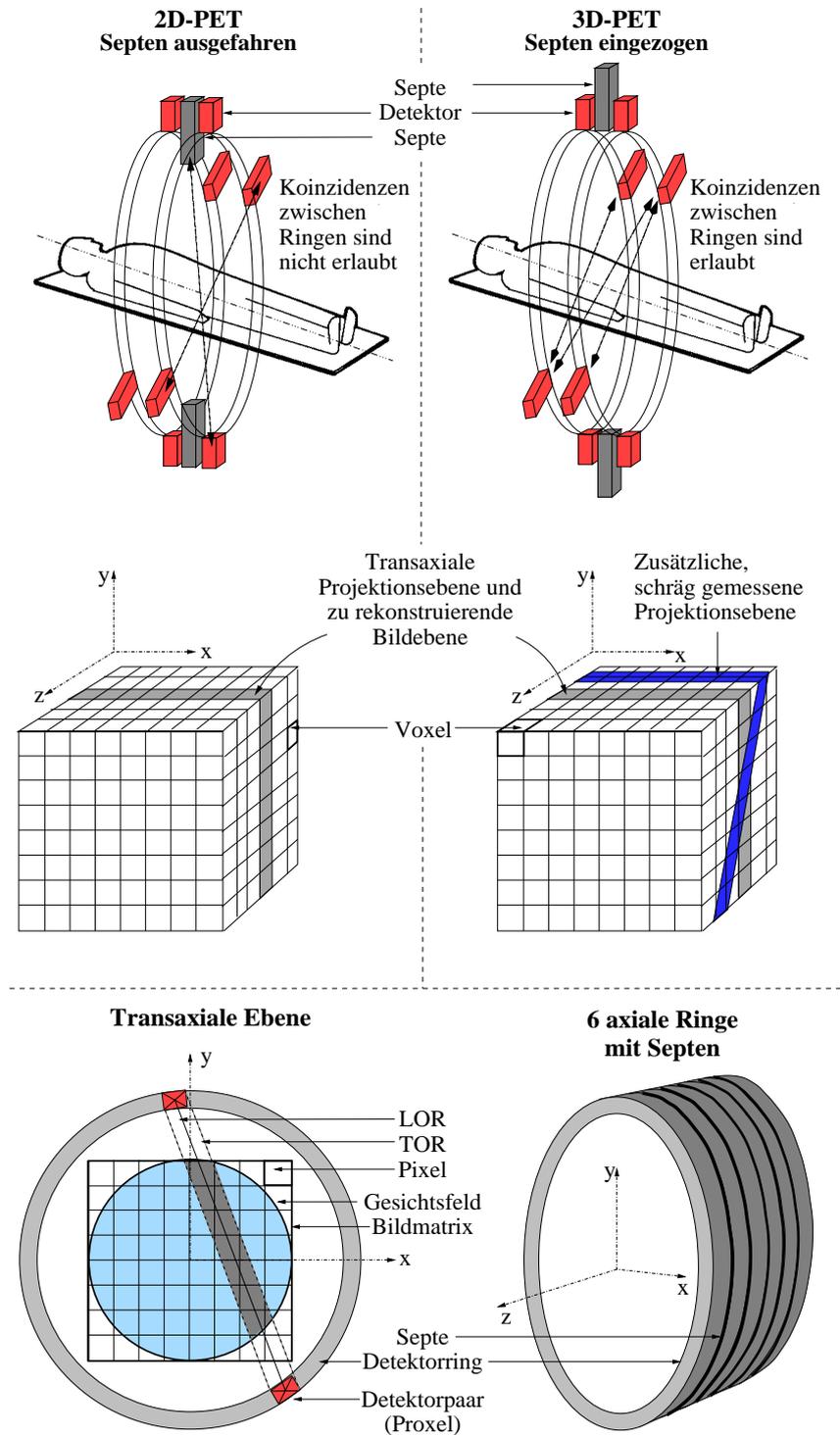


Abbildung 2.8: Geometrische Randbedingungen und Bezeichnungen in der 2D- und 3D-Positronen-Emissions-Tomographie

Zu Abbildung 2.8: Für die 3D-PET ist in der mittleren Abbildung (rechts) exemplarisch eine schräge Projektionsebene eingezeichnet. Beim 3D-Messmodus werden schräge Ebenen zwischen allen Ringen oder einer eingeschränkten Zahl von Ringen zugelassen.

## 2.5 Aufbau eines Positronen-Emissions-Tomographen

Um die emittierten Gammaquantenpaare tomographisch - also aus mehreren Blickrichtungen - zu erfassen, werden Positronen-Emissions-Tomographen in der Regel aus Detektorringen aufgebaut (siehe Abbildung 1.1 auf Seite 2 und Abbildung 2.8). Hierbei messen alle oder eine eingeschränkte Zahl der Detektorpaare Strahlsummen über die vom Objekt abgestrahlten Gammaquantenpaare. Treten Lücken in der Detektorstruktur auf, oder werden ganze Sektoren bei der Anordnung der Detektoren ausgelassen, so wird meist die Rotation des Tomographen für die Messung einer ausreichenden Zahl von Blickrichtungen notwendig. Positronen-Emissions-Tomographen werden jedoch bevorzugt für eine rotationsfreie - und damit einfachere und schnellere - Messung ausgelegt.

Das Prinzip der koinzidenten Messung der Gammaquanten eines Paares wird bei der PET in zwei Klassen unterschieden. Die zweidimensionale Messung (2D-PET, [87]) beinhaltet das koinzidente Nachweisen der beiden Quanten in jeweils nur einer tomographischen Schicht. Bei Ringtomographen entspricht dies dem ausschließlichen Akzeptieren von gemessenen Koinzidenzen innerhalb eines Detektorringes. In diesem 2D-Messmodus werden zusätzlich Bleiabschirmungen (Septen) zwischen die einzelnen Detektorringe gefahren, um schräg einfallende Gammaquanten zu absorbieren. Dies reduziert den Anteil von gestreuten und zufälligen Koinzidenzen erheblich. Werden die Septen zurückgezogen und auch Koinzidenzen zwischen Detektoren aus unterschiedlichen Ringen (3D-PET, [87]) erlaubt, erhöht sich die Sensitivität des Tomographen, jedoch auch die bereits angesprochene Nachweisrate der zufälligen Koinzidenzen und der Anteil der vor dem Nachweis gestreuten Gammaquanten. Unter klinischen Messbedingungen am Patienten beträgt der Anteil von gestreuten Gammaquanten z.B. 15% im 2D- und 35% im 3D-Modus. Die 2D- und 3D-Messung sind in Abbildung 2.8 durch ausgefahrene Septen (oben links) und eingezogene Septen (oben rechts) skizziert. Die Auswirkung des Messmodus auf die Abtastung des Objektvolumens ist in Abbildung 2.8 (Mitte) skizziert. Bei der 2D-PET (Mitte links) dient die Messung innerhalb eines Detektorringes zur Bestimmung der Aktivitätsverteilung in nur einer abgetasteten axialen Schicht des Objektvolumens. Die erhöhte Sensitivität der 3D-PET ist anhand der das Objektvolumen schräg schneidenden Projektionsebene (Mitte rechts) ersichtlich. Die mit dem 3D-Messmodus einhergehende Sensitivitätssteigerung kann entweder zur Verbesserung des Signal-zu-Rausch-Verhältnisses oder zur Reduktion der geforderten Messzeit und somit zum Verringern der körperlichen Belastung des Patienten genutzt werden. Es ist jedoch zu beachten, dass die korrekte Nutzung und Verarbeitung von 3D-PET Daten erheblich aufwändiger ist als bei der 2D-PET. In klinischen Untersuchungen wird aufgrund der zuverlässig arbeitenden 2D-Verarbeitungsmethoden deshalb häufig auf die 2D-Messung und 2D-Datenverarbeitung zurückgegriffen.

Durch Anordnung der Detektoren in Ringen um das Gesichtsfeld wird eine hohe Anzahl von miteinander in Koinzidenz messenden Detektorpaaren erreicht. Eine hohe und möglichst homogene Abtastdichte [46] ermöglicht die Bildrekonstruktion in guter Qualität bei gleichzeitig hoher Ortsauflösung. Bei niedriger oder inhomogener Abtastdichte sind besondere Maßnahmen für die Verarbeitung der tomographisch gemessenen Daten gefordert. Die Studie und Realisierung solcher Maßnahmen ist Bestandteil dieser Arbeit und wird in den Kapiteln 4 und 6 diskutiert.

## 2.6 Koordinaten und räumliche Bezeichnungen

Abbildung 2.8 (unten) zeigt schematisch die geometrischen Randbedingungen eines Positronen-Emissions-Tomographen. Die kartesischen Koordinaten werden als transaxiale ( $x$  und  $y$ ) und axiale Koordinate ( $z$ , entlang der Symmetrieachse eines Ringtomographen) bezeichnet. Die Verbindung von zwei in Koinzidenz messenden Detektorelementen wird Antwortlinie (engl. *line-of-response*, LOR) genannt. Als Referenzpunkte für diese Verbindungslinie werden entweder die Mittelpunkte der Detektorstirnflächen oder - wie in dieser Arbeit - die Schwerpunkte der Kristallvolumina verwendet. Die von einem Detektorpaar erfasste Objektfläche oder das erfasste Objektvolumen - je nach dem, ob die axiale Ausdehnung der Detektoren berücksichtigt wird - heißt Antwortröhre (engl. *tube-of-response*, TOR). Sie entsteht durch Verbinden der Eckpunkte beider Kristalle und kann in zwei und drei Dimensionen verwendet werden. Das transaxiale Gesichtsfeld - der kreisförmige Bereich im Zentrum des Tomographen (siehe Abbildung 2.8, unten links) - wird mittels eines symmetrischen Rasters in gleichgroße, in der Regel quadratische Bildelemente (engl. *picture element*, Pixel) aufgeteilt. Wird auch die axiale Ausdehnung des Gesichtsfeldes berücksichtigt, so werden die entsprechenden quaderförmigen Volumenelemente (engl. *volume element*) Voxel genannt. Die Elemente des Messdatensatzes werden in Anlehnung an diese Namensgebung mit Proxel (engl. *projection element*) bezeichnet.

## 2.7 Monte Carlo Methoden

Der Ausdruck Monte Carlo Methode ist eine allgemeine Bezeichnung für stochastische Berechnungsmethoden. Sie basieren auf der Verwendung von Zufallszahlen in Kombination mit Wahrscheinlichkeitsfunktionen (engl. *probability density function*, kurz PDF), um stochastische Problemstellungen - diese reichen von der Untersuchung des Straßenverkehrs bis zu kernphysikalischen Problemen - zu studieren. Generell könnte mit Monte Carlo Methode jede Methoden bezeichnet werden, die ein Problem durch die Verwendung von Zufallszahlen im erlaubten Parameterraum studiert. Im Gegensatz hierzu würde ein konventioneller mathematischer Ansatz das Problem mit Hilfe eines mathematischen Modells beschreiben, daraus z.B. eine Reihe von Differenzialgleichungen erstellen und anschließend dieses lineare Gleichungssystem lösen.

In der Physik erlaubt die Verwendung der Monte Carlo Methode [56, 140] die Untersuchung von Problemstellungen, die durch analytische Berechnung nicht möglich wäre. So kann z.B. die Wechselwirkung von zwei Atomen rechnerisch gelöst werden, im Falle einer größeren Zahl (z.B.  $\approx 10^{25}/m^3$  bei einem idealen Gas unter Normalbedingungen) von miteinander wechselwirkenden Teilchen ist dies nahezu undenkbar. Durch die Beschreibung des Problems anhand von Wechselwirkungswahrscheinlichkeiten und dem Würfeln (mittels Zufallszahlen-Generatoren) der Flugrichtungen und Weglängen der Teilchen und deren Wechselwirkungen kann diese Problemstellung jedoch detailliert untersucht werden.

Durch den Zufallszahlengenerator werden in erster Linie gleichverteilte Zufallszahlen erstellt. Die Verbindung dieser Verteilung mit einer das zu untersuchende System beschreibenden Wahrscheinlichkeitsfunktion (PDF, z.B. der Wechselwirkungswahrscheinlichkeit) erzeugt somit ein gewichtetes Würfeln. Das Resultat repräsentiert dann die zu untersuchende, nicht gleichverteilte, Ereigniswahrscheinlichkeit.

Der wesentliche Bestandteil einer Monte Carlo Simulation ist die Erstellung und Ver-

wendung der Zufallszahlen. Diese werden als so genannte Pseudo-Zufallszahlen (engl. *pseudo random number*) durch numerische Algorithmen in Abhängigkeit eines Startwertes (Saat, engl. *seed*) generiert [57, 78]. Hierbei handelt es sich um Folgen endlicher Länge von voneinander unabhängigen Zahlen. Jedoch wird jeder Aufruf des Algorithmus wieder die selbe Sequenz erzeugen. Es muss also darauf geachtet werden, dass ein Element dieser Folge nicht mehrmals verwendet wird, der Index für das zu verwendete Element also nach jedem Zugriff erhöht wird. Bei Monte Carlo Simulationen von sehr großen Anzahlen zufälliger Ereignisse ist also die genaue Kenntnis des zuletzt verwendeten Sequenzelementes nötig. Meist werden solche großen Simulationen durch das hintereinander Ausführen einzelner, kleinerer Durchgänge durchgeführt. Für jeden neuen Simulations-Durchgang (engl. *run*) wird hierbei an der zuletzt verwendeten Position in der Zahlenfolge gestartet, um eine Wiederholung zu vermeiden.

Die Simulation physikalischer Prozesse mit Monte Carlo Methoden bietet gegenüber Messungen den Vorteil, dass nicht-messbare Informationen während des Programmablaufs analysiert bzw. für eine spätere Analyse gespeichert werden können. So kann z.B. mit einer Messung die Zahl der Gammaquanten ermittelt werden, die mit einem Kristall mindestens eine Wechselwirkung erfahren haben. Dies geschieht durch das Messen der dabei deponierten Energie. Monte Carlo Simulationen ermöglichen jedoch die genaue Identifizierung der Art jeder einzelnen Wechselwirkung (z.B. Compton-Streuung, Absorption, etc.), den exakten Wechselwirkungsort innerhalb des Kristalls und die dabei deponierte Energie. Eine weitere nützliche Eigenschaft von Monte Carlo Simulationen ist, dass einzelne Prozesse zugelassen oder verboten werden können. Beispiele hierfür wären das Verbot der Streuung im Objekt (siehe Punkt 4 auf Seite 17) oder das Ab- bzw. Anschalten der Abschirmung eines Kristalls durch seine Nachbarkristalle (siehe Punkte 2 auf Seite 19 und 3 auf Seite 20). Dadurch lassen sich die Eigenschaften eines Messsystems detailliert untersuchen und charakterisieren. Monte Carlo Simulationen werden im medizinischen Umfeld vermehrt verwendet, um die Planung von Tomographen zu unterstützen [4, 86, 128, 146]. Weiterhin können sie genutzt werden, um für eine bestehende Messung Korrekturen zu ermitteln wie z.B. die Untersuchung der im Patienten gestreuten Gammaquanten [27].

## 2.8 Zusammenfassung von Kapitel 2

In diesem Kapitel wurden die Grundlagen der PET, soweit für diese Arbeit relevant, beschrieben. Das Prinzip der PET kann kurz folgendermaßen zusammengefasst werden: Zur Abbildung biologischer Funktionen eines lebenden Organismus werden diesem radioaktiv markierte Substanzen, die Radiopharmaka (engl. *tracer*), injiziert. Die dabei verwendeten radioaktiven Nuklide emittieren beim Zerfall Positronen, welche nach einer kurzen Wegstrecke im Organismus mit einem Elektron vernichten. Die abgestrahlten Gammaquanten eines Paares werden mit geeigneten Detektoren aufgefangen und elektronisch weiterverarbeitet. Entscheidender Faktor für die Qualität der daraus resultierenden Bilder ist die Kenntnis über die Historie einer gemessenen Koinzidenz bzw. der dazu gehörenden zwei Gammaquanten. Es ist von entscheidender Bedeutung, ob eine zufällige oder wahre Koinzidenz nachgewiesen wurde und ob eines oder beide Gammaquanten auf ihrem Weg unerkannte Wechselwirkungen vollzogen haben. Die Wechselwirkungsprozesse der Gammaquanten mit dem Detektorsystem werden mit koinzidenten Antwortfunktionen charakterisiert. Die Bestimmung dieser Antwortfunktionen kann anhand von Monte Carlo Simulationen des Detektorsystems erfolgen. Der Anteil an zufälligen Koinzidenzen wird im Allgemeinen durch eine gesonderte Messung bestimmt. Im

Objekt gestreute Gammaquanten sind jedoch nicht so einfach zu ermitteln und werden oft anhand ihrer im Detektorsystem deponierten Energie identifiziert und anschließend aus dem Messdatensatz eliminiert. Um den damit einhergehenden Sensitivitätsverlust zu vermeiden, können im Objekt gestreute Gammaquanten mit aufwändigen und meist fehlerbehafteten Methoden einem geschätzten wahren Entstehungsort zugeordnet werden.

Eine hohe Sensitivität des Tomographen bezüglich der vom Objekt abgestrahlten Gammaquantenflüsse ist anzustreben, um möglichst geringe Messzeiten zu erlauben. Da Patienten zur Vermeidung von Bewegungsartefakten während der Messung völlig ruhig liegen müssen, reduzieren kurze Messzeiten deren körperliche Belastung erheblich. Eine hohe Sensitivität wird durch nah am Objekt positionierte Detektoren und eine große Anzahl von axialen Ringen zur Gewährleistung eines großen Raumwinkels erreicht. Durch Erhöhen der Ringanzahl vergrößert sich auch die Zahl der in Koinzidenz messenden Detektorpaare, besonders wenn der 3D-Messmodus angewendet wird. Jedoch stellt die Nutzung von 3D-Messdaten für die tomographische Bildrekonstruktion besonders hohe Anforderungen.

Die Verarbeitung der tomographisch gemessenen Daten beschränkt sich bei klinischen Geräten, aber auch bei vielen hochauflösenden Kleintier-Tomographen meist auf ein Gesichtsfeld, das nur bis zu 60% des Detektorabstands umfasst. Die Gründe für diese Reduktion des zu rekonstruierenden Gesichtsfeldes liegen hauptsächlich in der Verbreiterung der Antwortfunktionen von schräg zueinander ausgerichteten Kristallen (siehe Abbildung 2.7) und deren mangelhafter Berücksichtigung in der Bildrekonstruktion. Die Konstellation (c) in Abbildung 2.7 tritt mit zunehmendem Abstand vom Zentrum des Gesichtsfeldes auf und resultiert in einer Ortsauflösung, die sich im rekonstruierten Bild von der Mitte zum Rand hin kontinuierlich verschlechtert [51, 109]. Das Problem der Rekonstruktion eines vergrößerten Gesichtsfeldes, wie es für hochauflösende und hochsensitive Kleintiertomographen gefordert ist, wird in Abschnitt 3.4 auf Seite 53 erneut angesprochen. Der in dieser Arbeit entwickelte Lösungsansatz zur Rekonstruktion eines großen Gesichtsfeldes ( $> 90\%$ ) bei homogener und hoher Ortsauflösung wird in den Kapiteln 4 und 6 dargelegt und in Kapitel 7 mit anderen Methoden verglichen.



## Kapitel 3

# Tomographische Rekonstruktion

In diesem Kapitel werden die grundlegenden Methoden zur tomographischen Bildrekonstruktion beschrieben und deren Wirkungsweise anhand einfacher Beispiele dargelegt. Besonderes Augenmerk wird hierbei auf jene Algorithmen gelegt, die für die MADPET- und MADPET-II-Rekonstruktion angewendet bzw. verbessert wurden (siehe Kapitel 4 bis 7). In Hinsicht auf zukünftige Projekte, wie die 3D-Rekonstruktion für MADPET-II (siehe Kapitel 8), erfolgt an dieser Stelle eine genauere Erklärung und Zusammenfassung der gebräuchlichsten tomographischen Rekonstruktionsmethoden. Dies kann bei der späteren Entscheidung, welcher Algorithmus für die 3D-Rekonstruktion bei MADPET-II am besten geeignet ist, hilfreich sein.

Die Methoden zur Rekonstruktion tomographisch gemessener Daten können in zwei Hauptgruppen unterteilt werden. Analytische Rekonstruktionsmethoden [129] zeichnen sich durch eine einfache und anschauliche Behandlung der gemessenen Daten aus. Sie ermöglichen die Rekonstruktion tomographischer Bilder mit geringem Rechenaufwand. Algebraische Rekonstruktionsmethoden verknüpfen jedes zu rekonstruierende Bildelement mit jedem Element des Messdatensatzes für eine, im Vergleich zu der analytischen Methode verbesserte, numerische Lösung des Rekonstruktionsproblems. Eine Weiterentwicklung der algebraischen Methoden sind die statistischen Rekonstruktionsalgorithmen [73]. Hierbei wird der Prozess der Messung anhand eines statistischen Modells in die Rekonstruktion integriert [115]. Das daraus resultierende lineare Gleichungssystem wird anschließend durch Algorithmen der linearen Algebra unter den Vorgaben des statistischen Modells gelöst. Sie ermöglichen das Berücksichtigen von Systemeigenschaften in der Bildrekonstruktion und resultieren in der Regel in Ergebnissen, die näher an der Wahrheit liegen [139].

Am Ende dieses Kapitels wird kurz auf die Besonderheiten der Bildrekonstruktion bei hochauflösenden Kleintiertomographen eingegangen. Die daraus resultierenden Modifikationen der Rekonstruktionsmethoden für MADPET und MADPET-II waren Thema dieser Arbeit.

**Anmerkung 1** Eine Zusammenfassung der in diesem Kapitel in mathematischen Ausdrücken verwendeten Bezeichnungen ist im Anhang A auf den Seiten 159 bis 161 zu finden.

### 3.1 Analytische tomographische Rekonstruktion

#### 3.1.1 Radontransformation

Der deutsche Physiker J. Radon entwickelte bereits 1917 eine allgemeine analytische mathematische Beschreibung der zweidimensionalen Messung tomographischer Daten [121, 6]. Die nach ihm benannte Radontransformation  $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$  beschreibt wie in Abbildung 3.1 gezeigt die Messung des Linienintegrals  $m(r, \phi)$  im Abstand  $r$  vom Ursprung und im Winkel  $\phi$  über die physikalische Eigenschaft  $f(x, y)$ :

$$\begin{aligned} m(r, \phi) &= [\mathcal{T}_{\mathcal{R}}\{f(x, y)\}](r, \phi) \\ &= \int_{-r_{max}}^{r_{max}} f(r \cos \phi - u \sin \phi, r \sin \phi + u \cos \phi) du. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Die Eigenschaft  $f(x, y)$  stellt in der PET die Verteilung der Emissionsorte der Gammaquantenpaare dar. Der maximale radiale Abstand  $r_{max}$  definiert den Radius des vom Rekonstruktionsalgorithmus zu behandelnden Gesichtsfeldes. Er ist in der Regel durch die Ausmaße des Detektorsystems bzw. durch künstliche Einschränkungen bestimmt. Die Menge aller gemessenen Linienintegrale für alle Abstände  $r$  im Gesichtsfeld,

$$m(\phi) = \{m(\phi) \in m(r, \phi) ; r \in [-r_{max}, r_{max}]\}, \quad (3.2)$$

wird tomographische Projektion im Winkel  $\phi$  genannt. Eine Ausweitung der Radontransformation für die 3D-Rekonstruktionsproblematik wird in dieser Arbeit nicht behandelt [70, 71].

#### 3.1.2 Inversion der Radontransformation

Die mathematische Inversion der Radontransformation [6, 72], also der Gleichung 3.1, dient zur analytischen Rekonstruktion der zu untersuchenden Verteilung  $f$  aus den gemessenen Projektionen  $m$ . Hierzu betrachte man die in einer Dimension Fouriertransformierte von  $m$  (Transformation in Polarkoordinaten bezüglich des Radius  $r \rightarrow \omega_r$ ),

$$\begin{aligned} M(\omega_r, \phi) &= \int_{-\infty}^{\infty} m(r, \phi) e^{-i\omega_r r} dr \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i\omega_r(x \cos \phi + y \sin \phi)} dx dy, \end{aligned} \quad (3.3)$$

und die in zwei Dimensionen Fouriertransformierte von  $f$  (Transformation bezüglich der kartesischen Koordinaten  $x \rightarrow \omega_x, y \rightarrow \omega_y$ ),

$$\begin{aligned} F(\omega_x, \omega_y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i(\omega_x x + \omega_y y)} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i\omega_r(x \cos \phi + y \sin \phi)} dx dy. \end{aligned} \quad (3.4)$$

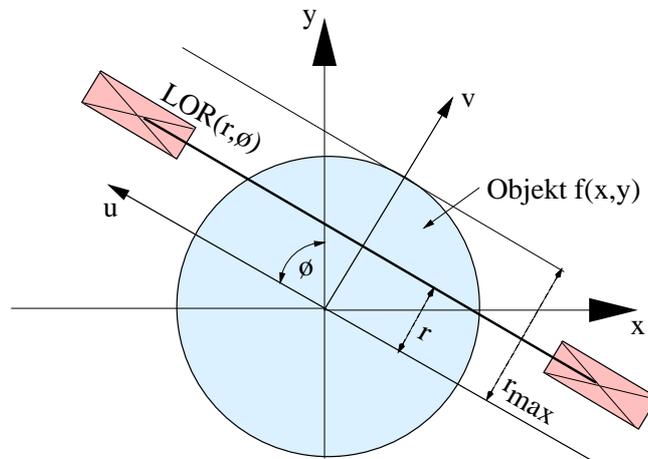


Abbildung 3.1: Radontransformation

Zu Abbildung 3.1: Messung der Projektion  $m(r, \phi) = \int_{\vec{l}} f d\vec{l}$  entlang der Antwortlinie  $\vec{l} = LOR(r, \phi)$ . Meist wird die hier dargestellte einfache Form - die Berechnung des Linienintegrals entlang der LOR - in der Rekonstruktion verwendet. Aufwändigere Methoden berechnen Flächenintegrale über die Tube-of-Response.

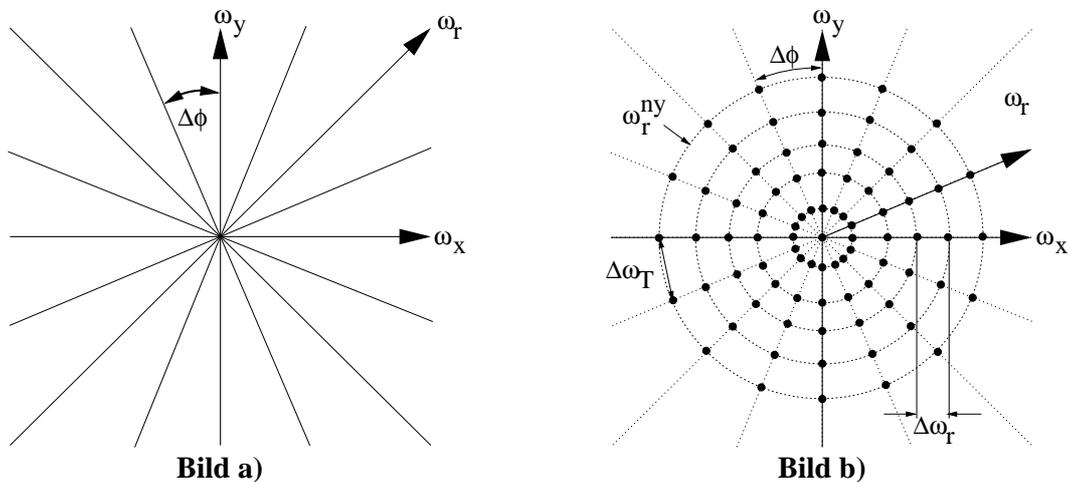


Abbildung 3.2: Diskrete Abtastmuster im Frequenzraum

Zu Abbildung 3.2: **Bild a)** Abtastmuster bei kontinuierlicher radialer Koordinate  $r$  und diskreter Winkelkoordinate  $\Delta\phi$ . Die radialen Strahlen stellen die Abtastbereiche zu diskreten Winkeln dar. **Bild b)** Abtastmuster bei diskreter radialer ( $\Delta r$ ) und angularer Koordinate ( $\Delta\phi$ ). Die diskrete Abtastung in  $r$  führt zu kreisförmigen Abtastbereichen. Die Schnittpunkte der Strahlen mit den Kreisen (hier als Punkte verdeutlicht) repräsentieren die Abtaststellen bei diskreter radialer und angularer Abtastung.

Die Übereinstimmung beider Transformierten für einen Winkel  $\phi$ ,

$$M(\omega_r, \phi) \Leftrightarrow F(\omega_x, \omega_y) \Big|_{\omega_x = \omega_r \cos \phi, \omega_y = \omega_r \sin \phi}, \quad (3.5)$$

unter Berücksichtigung der Koordinatentransformation wird auch (engl.) *single slice theorem* oder (engl.) *central slice theorem* genannt [6]. Die tomographische Bildrekonstruktion des Bildes  $f(x, y)$  erfolgt durch Rücktransformation der Gleichung 3.4 unter Berücksichtigung von Gleichung 3.5:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \mathcal{F}_{2D}^{-1}\{F(\omega_x, \omega_y)\} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty F(\omega_r, \phi) e^{i\omega_r(x \cos \phi + y \sin \phi)} \cdot |\mathcal{J}| d\omega_r d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \mathcal{F}_{1D}^{-1}\{M(\omega_r, \phi) \cdot |\omega_r|\} d\phi. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Aufgrund der Koordinatentransformation von kartesischen Koordinaten zu Polarkoordinaten innerhalb des Integrals muss die Jakobideterminante  $|\mathcal{J}|$  eingesetzt werden. Sie reduziert sich im Rekonstruktionsproblem auf den Betrag der radialen Ortsfrequenz  $|\omega_r|$  und entspricht einer so genannten Rampe (engl. *ramp*) im Frequenzraum. Gleichung 3.6 stellt die exakte analytische Rekonstruktion im Falle von kontinuierlich beschriebenen Koordinaten ( $x, y, r, \phi \in \mathbb{R}$ ) dar. Dies entspricht jedoch nicht den tatsächlichen Bedingungen bei der tomographischen Bildrekonstruktion, da unendlich fein abgetastete Daten nicht realisierbar sind. Vielmehr werden alle Daten in Vektoren endlicher Länge mit diskreten Elementen endlicher Abtastbreite behandelt, da z.B. das Detektorsystem - Teils aufgrund des Aufbaus z.B. in diskreten Einzeldetektoren, teils aufgrund der Digitalisierung und somit Verteilung auf endlich fein abgetastete Vektoren - nur Daten in diskret abgetasteten Intervallen zur Verfügung stellt.

### 3.1.3 Abtastbedingungen bei diskreten Abtastintervallen

Die eben gezeigten Gleichungen beschreiben das analytische Rekonstruktionsproblem bei unendlich feiner Abtastung aller Koordinaten. Die Koordinaten  $x, y, r$  und  $\phi$  werden unter realen Mess- und Rekonstruktionsbedingungen in meist äquidistanten Schritten  $\Delta x, \Delta y, \Delta r$  und  $\Delta \phi$  erfasst. Nach diskreter Fouriertransformation [117, 93] wird diese Abtastung durch die, oft mit Ortsfrequenz bezeichnete, räumliche Abtastfrequenz  $\omega_q$  für eine Größe  $q$  repräsentiert:

$$\omega_q = \frac{1}{\Delta q}. \quad (3.7)$$

Funktionen können durch äquidistante Abtastung jedoch nur bis zu einer Grenzfrequenz hinreichend abgetastet werden. Der Wert dieser, Nyquistfrequenz [103, 104] genannten, Grenzfrequenz ist die Hälfte der durch das Abtastintervall  $\Delta q$  vorgegebenen maximalen Abtastfrequenz  $\omega_q$ :

$$\omega_q^{ny} = \frac{1}{2\Delta q}. \quad (3.8)$$

Sie besagt, dass z.B. in einem Bild mit Pixelgrößen  $\Delta x = \Delta y = 1$  mm nur Strukturen bis minimal  $2 \cdot \Delta x = 2$  mm Größe bzw. Ortsfrequenzen bis  $\omega_r^{ny} = 1/(2\Delta x) = 0.5$  mm<sup>-1</sup> von einander unterschieden werden können. Abbildung 3.2 zeigt zwei tomographische Abtastmuster im Frequenzraum bei teilweise oder vollständig diskretisierten Abtastgrößen. Das linke Schema stellt das Abtastmuster im Frequenzraum dar, wenn in diskreten Winkelabständen  $\Delta\phi$ , jedoch mit unendlich feiner Abtastung in der radialen Abstandskoordinate  $r$ , tomographische Daten genommen werden. Daten, deren Frequenzanteile außerhalb der Linien liegen, können nicht erfasst werden. Auf der rechten Seite ist die reale Messsituation skizziert. Sowohl der Winkel  $\phi$  als auch der radiale Abstand  $r$  werden in diskreten, äquidistanten Schritten  $\Delta\phi$  und  $\Delta r$  abgetastet. Das resultierende Abtastmuster im Frequenzraum zeigt eine verringerte Abtastdichte bei hohen Frequenzen, die durch die entsprechenden Nyquistfrequenzen  $\omega_r = \omega_r^{ny}$  und  $\omega_\phi = \omega_\phi^{ny}$  begrenzt werden. In tomographischen Systemen ist die radiale Intervallgröße  $\Delta r$  meist durch den technischen Aufbau vorgegeben. Um dieses Intervall im Sinne der Nyquistfrequenz auch abbilden zu können, muss eine Mindestanzahl  $N_{a,min}$  von tomographischen Projektionen über 180°, also Aufnahmen aus äquidistant verteilten Winkelschritten  $\Delta\phi$ , vorliegen [54].  $N_{a,min}$  lässt sich wie folgt bestimmen. Der Durchmesser  $D$  des Gesichtsfeldes ist nach Abbildung 3.1:

$$D = 2 \cdot r_{max}. \quad (3.9)$$

Für das radiale ( $\Delta\omega_r$ ), tangentielle ( $\Delta\omega_t$ ) und angulare ( $\Delta\phi$ ) Abtastintervall gilt:

$$\Delta\omega_r = \frac{1}{D}, \quad (3.10)$$

$$\Delta\omega_t = 2 \cdot \omega_r \cdot \cos \frac{\Delta\phi}{2}, \quad (3.11)$$

$$\Delta\phi = \frac{\pi}{N_{a,min}}. \quad (3.12)$$

Um die mit  $\Delta r$  erreichbare Auflösung zu gewährleisten, müssen die Abstände der Abtastpunkte im Frequenzraum in radialer und tangentialer Richtung identisch sein:

$$\Delta\omega_r = \Delta\omega_T. \quad (3.13)$$

Zusätzlich lässt sich für die maximale Ortsfrequenz  $\omega_r = \omega_r^{ny}$  folgende Beziehung für die geforderte maximale Abtastfrequenz  $\Delta\omega_T$  in tangentialer Richtung ableiten (siehe Abbildung 3.2, rechts):

$$\begin{aligned} \Delta\omega_T &= \Delta\omega_t \Big|_{\omega_r = \omega_r^{ny}} \\ &= 2 \cdot \omega_r^{ny} \cdot \cos \frac{\Delta\phi}{2}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Im Falle kleiner Winkelschritte ( $\cos(\Delta\phi/2) \approx \Delta\phi/2$ ) lässt sich nun durch Kombination der Gleichungen 3.10, 3.13 und 3.14 die Beziehung

$$\begin{aligned} \frac{1}{D} &\approx 2 \cdot \omega_r^{ny} \cdot \frac{1}{2} \Delta\phi \\ &\approx \omega_r^{ny} \cdot \frac{\pi}{N_{a,min}} \end{aligned} \quad (3.15)$$

aufstellen und die geforderte Abschätzung für die nötige Zahl an Winkelschritten durchführen:

$$N_{a,min} \approx \frac{\pi \cdot D}{2\Delta r}. \quad (3.16)$$

Wird die Bedingung aus Gleichung 3.16 nicht erfüllt, so treten Artefakte im rekonstruierten Bild auf. Im Falle einer unzureichenden Zahl von Winkelschritten kann dies in Form von radialen Streifen (ausgehend vom Zentrum der Bildmatrix) beobachtet werden.

### 3.1.4 Gefilterte Rückprojektion

Die gefilterte Rückprojektion (engl. *filtered backprojection*, kurz FBP) stellt die eigentliche analytische Rekonstruktion dar [6, 48, 72]. Sie beinhaltet eine Ergänzung zur Inversion der Radontransformation. Diese Ergänzung anhand eines Frequenzfilters kann sowohl auf dem a-priori-Wissen über Eigenschaften des Rekonstruktionsproblems als auch auf Bedingungen, die an das zu rekonstruierende Bild gestellt werden, basieren. Die generelle Vorgehensweise hierbei beinhaltet die Multiplikation der Rampe in Gleichung 3.6 mit einer Wichtungsfunktion im Frequenzraum. Das Resultat ist der Frequenzfilter,

$$\underbrace{H(\omega_r, \omega_r^c, [\text{Parameter}])}_{\text{Filter}} = \underbrace{|\omega_r|}_{\text{Rampe}} \cdot \underbrace{W(\omega_r, \omega_r^c, [\text{Parameter}])}_{\text{Wichtungsfunktion}}, \quad (3.17)$$

der für die gefilterte Rückprojektion nach Umformung von Gleichung 3.6 wie folgt zur Anwendung kommt:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \mathcal{F}_{1D}^{-1}\{M(\omega_r, \phi) \cdot H(\omega_r, \omega_r^c, [\text{Parameter}])\} d\phi. \quad (3.18)$$

Dabei werden die zu berücksichtigenden Ortsfrequenzen auf einen sinnvollen Bereich unterhalb der Nyquistfrequenz mittels der Abschneidefrequenz  $\omega_r^c \leq \omega_r^{ny}$  (engl. *cutoff frequency*, kurz *cutoff*) eingeschränkt. Die verwendeten Frequenzfilter sind somit Tiefpassfilter. Die hauptsächliche Motivation für die Verwendung zusätzlicher Filter-Wichtungsfunktionen ist die Elimination der in den gemessenen Daten enthaltenen - oft sehr hohen - Rauschanteile. Bilder, die mit der einfachen Rückprojektion wegen eines hohen Rauschanteils nicht interpretierbar sind, lassen sich durch einen stärkeren Tiefpassfilter in visuell ansprechender und klinisch befundbarer Form darstellen. Es ist bei Tiefpassfiltern jedoch immer der Verlust an rekonstruierter Ortsauflösung zu berücksichtigen. Hierbei häufig angewendete Wichtungsfunktionen sind vor allem die Ramp-Fensterfunktion und die Butterworth-Wichtungsfunktion [48].

- **Die Ramp-Fensterfunktion:** Eine einfache Fensterfunktion

$$W_R(\omega_r, \omega_r^c) = \begin{cases} 1 & ; \omega_r \leq \omega_r^c \\ 0 & ; \omega_r > \omega_r^c \end{cases} \quad (3.19)$$

dient zur Einschränkung der zu berücksichtigenden Ortsfrequenzen. Alle Daten, die mit einer Ortsfrequenz oberhalb der Abschneidefrequenz im fouriertransformierten Messdatensatz enthalten sind, werden durch diese Wichtung eliminiert. Meist wird mit der

Ramp-Rekonstruktion die gefilterte Rückprojektion mittels Rampenfilter bezeichnet, wenn die Abschneidefrequenz gleich der Nyquistfrequenz gesetzt wird:

$$\omega_r^c = \omega_r^{ny}. \quad (3.20)$$

Dies bewirkt, dass alle abtastbaren aber keine nicht-abtastbaren Ortsfrequenzen in der Rekonstruktion berücksichtigt werden. Der vollständige Rampenfilter für den Einsatz in Gleichung 3.18 mit einer beliebigen Abschneidefrequenz  $\omega_r^c$  lautet:

$$\begin{aligned} H_R(\omega_r, \omega_r^c) &= |\omega_r| \cdot W_R(\omega_r, \omega_r^c) \\ &= \begin{cases} |\omega_r| & ; |\omega_r| \leq \omega_r^c \\ 0 & ; |\omega_r| > \omega_r^c \end{cases}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

- **Die Butterworth-Wichtungsfunktion:** Durch eine aufwändigere Wichtung der im Messdatensatz enthaltenen Ortsfrequenzen kann ein - vor allem visuell ansprechenderer - Kompromiss zwischen Auflösung und Rauschen erreicht und somit die Bildqualität für den Betrachter erheblich verbessert werden. Die Butterworth-Wichtungsfunktion [48],

$$W_B(\omega_r, \omega_r^c, \text{Ordnung}) = \left[ 1 + \left( \frac{\omega_r}{\omega_r^c} \right)^{(2 \cdot \text{Ordnung})} \right]^{-1}, \quad (3.22)$$

verursacht eine Glättung des Bildes, wobei der Abfall der Wichtungsfunktion zu hohen Frequenzen im Gegensatz zur Rampenfensterfunktion fließend verläuft. Die Steigung der Wichtungsfunktion wird hierbei durch den Parameter Ordnung gesteuert. Der vollständige Butterworth-Filter für den Einsatz in Gleichung 3.18 lautet:

$$H_B(\omega_r, \omega_r^c, \text{Ordnung}) = |\omega_r| \cdot W_B(\omega_r, \omega_r^c, \text{Ordnung}) \quad (3.23)$$

$$= |\omega_r| \cdot \left[ 1 + \left( \frac{\omega_r}{\omega_r^c} \right)^{(2 \cdot \text{Ordnung})} \right]^{-1}. \quad (3.24)$$

Durch die Verwendung des Rampenfilters mit der Abschneidefrequenz gleich der Nyquistfrequenz werden die analytisch beschriebenen Abbildungseigenschaften des Rekonstruktionsproblems vollständig ausgenutzt, da keine Glättung des Bildes durch ein Abschneiden messbarer Ortsfrequenzanteile erfolgt. Die Ramp-Rekonstruktion erfordert jedoch eine hohe Zahl von gemessenen Koinzidenzen bei der PET bzw. Einzelphotonen bei der SPECT, um die damit erreichbare hohe Auflösung fehlerfrei abzubilden. Ist dies nicht der Fall, so resultiert der Rampenfilter in überbetonten Kanten im Bild. Diese können derart dominant sein, dass das rekonstruierte Bild nicht interpretierbar ist. In diesen Fällen wird meist ein glättender Filter (wie z.B. der Butterworth-Filter) verwendet, um ein visuell ansprechendes und interpretierbares Bild mit jedoch reduzierter Ortsauflösung zu erhalten.

### 3.1.5 Gefaltete Rückprojektion

Die gefaltete Rückprojektion (engl. *convolution backprojection*, kurz CBP) beinhaltet lediglich eine Umformung der Gleichung 3.18:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \mathcal{F}_{1D}^{-1}\{M(\omega_r, \phi)\} \otimes \mathcal{F}_{1D}^{-1}\{H(\omega_r, \omega_r^c, [\text{Parameter}])\} d\phi \quad (3.25)$$

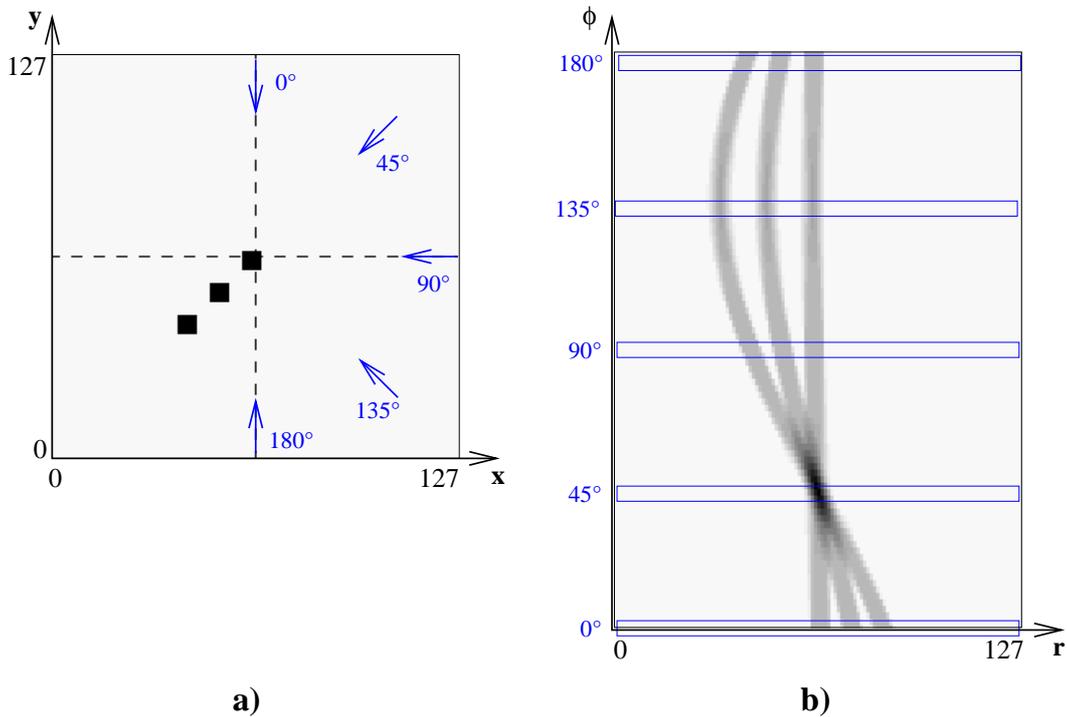


Abbildung 3.3: Sinogrammbeispiel

Zu Abbildung 3.3: **Bild a)** Drei quadratische Areale (jeweils  $5 \times 5$  Pixel Ausdehnung) in einer Bildmatrix aus  $128 \times 128$  Elementen. Es sind fünf Blickrichtungen auf das Objekt durch Pfeile gekennzeichnet. **Bild b)** Sinogramm der Verteilung aus Bild a mit 128 transversen Elementen (Spalten) und 90 Projektionswinkeln (Zeilen) über  $180^\circ$ . Die fünf markierten Zeilen stellen die Projektionen des Objekts in den links gekennzeichneten Richtungen dar.

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi m(\omega_r, \phi) \otimes \mathcal{F}_{1D}^{-1}\{H(\omega_r, \omega_r^c, [\text{Parameter}])\} d\phi.$$

Kommt sie bei der Rekonstruktion zur Anwendung, so müssen die gemessenen Projektionsdaten  $m$  nicht erst in den Fourierraum transformiert werden. Die Filteroperation erfolgt hierbei durch eine Faltung im Ortsraum.

### 3.1.6 Geometrische Umformung zu Parallelprojektionen

Aufgrund der Behandlung der Menge der zueinander parallelen Projektionsdaten im Blickwinkel  $\phi$  (siehe Gleichung 3.5) spricht man auch von Parallelprojektionen. Liegen die gemessenen Daten nicht in dieser Parallelgeometrie vor, so muss eine Umsortierung der Projektionsdaten (engl. *rebinning*) erfolgen. Dies ist z.B. bei ringförmigen Positronen-Emissions-Tomographen, jedoch nicht bei SPECT-Tomographen mit großflächigen Detektorplatten und Parallelloch-Kollimatoren, der Fall. Die Umformung der Daten zum Parallelprojektionsdatensatz erfordert im einfachsten Fall nur eine Umsortierung. Bei komplizierteren Geometrien und Positionen der Detektoren wird bei der Umformung auch eine geometrische Interpretation der gemessenen Daten - z.B. eine Interpolation in  $r$  oder  $\phi$  bzw. beiden - nötig. Das Standard-Datenformat für einen in Parallelgeometrie vorliegenden Datensatz ist die Sinogramm-Matrix oder kurz

das Sinogramm. Eine Zeile des Sinogramms enthält alle Projektionen zu einem Blickwinkelintervall  $[\phi, \phi + \Delta\phi)$ , die Menge aller Zeilen komplettiert das Sinogramm bezüglich aller Blickwinkel über  $180^\circ$  bzw.  $360^\circ$ . Der Wert  $\phi + \Delta\phi$  ist hierbei ausgeschlossen, da er in der nächsten Zeile enthalten ist. Ein Sinogrammelement wird auch (engl.) *bin* genannt. Abbildung 3.3 zeigt eine Bildmatrix (links), die in 90 Winkelschritten in ein Parallelsinogramm (rechts) projiziert wurde.

## 3.2 Algebraische und statistische tomographische Bildrekonstruktion

### 3.2.1 Algebraische Beschreibung des Rekonstruktionsproblems

Die Messung der Projektionsdaten kann auch - wie in Abbildung 3.4 verdeutlicht - im algebraischen Sinne betrachtet werden. Hierfür wird der Messprozess, anstatt durch die Radontransformation, nun durch das lineare Gleichungssystem in Gleichung 3.26 beschrieben:

$$\mathbf{g} = \mathbf{A}\mathbf{f}; \text{ hierbei gilt} \quad (3.26)$$

$$\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{I \times 1}, \quad (3.27)$$

$$\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{J \times 1} \text{ und} \quad (3.28)$$

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{I \times J}. \quad (3.29)$$

Dabei ist  $\mathbf{f}$  der  $(J \times 1)$ -Vektor aller  $J$  Bildelemente und  $\mathbf{g}$  der  $(I \times 1)$ -Vektor aller  $I$  Detektorpaare. Gleichung 3.26 wird auch die Vorwärtsprojektion der Verteilung  $\mathbf{f}$  in den Projektionsdatensatz  $\mathbf{g}$  genannt. Es ist zu beachten, dass obige Gleichungen nicht zwischen zwei- und dreidimensionaler Behandlung des Rekonstruktionsproblems unterscheiden. Diese Unterscheidung beeinflusst lediglich die Zahl der Elemente im Bild- und Detektorzahlenraum, also die Größen  $J$  und  $I$ . Das Element  $(i, j)$  der Abbildungsmatrix  $\mathbf{A}$ ,

$$\begin{aligned} a(i, j) &= [\mathbf{A}]_{i,j} \\ &= P(\text{emittiert in } j \text{ und nachgewiesen in } i), \end{aligned} \quad (3.30)$$

beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gammaquantenpaar - emittiert im Bildelement  $j \in [1, J]$  nach einem Positronenzerfall - im Detektorpaar  $i \in [1, I]$  koinzident nachgewiesen wird. Die Matrix  $\mathbf{A}$  wird auch Systemmatrix (engl. *system matrix*) oder Gewichtematrix (engl. *reconstruction weights* oder kurz engl. *weights*) bezeichnet. Meist wird in  $\mathbf{A}$  vereinfacht der Emissionsort der Gammaquanten auch als der Ort der Positronenemission betrachtet und die Positronenreichweite nicht berücksichtigt. Die Modellierung der statistischen Bedingungen beim Nachweisprozess in Gleichung 3.26 - das Messen von Gammaquantenpaaren in einem Detektorpaar  $i$  ist ein Zählexperiment, also sind die Werte  $g(i)$  poissonverteilt - führte zu der Entwicklung von statistischen Rekonstruktionsalgorithmen [69]. Diese werden ab Abschnitt 3.2.2 besprochen.

Durch die Beschreibung des Messvorgangs anhand einer Wahrscheinlichkeitsmatrix erklärt sich die Überlegenheit der algebraischen Rekonstruktionsmethoden gegenüber der gefilterten Rückprojektion. Die Elemente der Matrix  $\mathbf{A}$  können in einer einfachen Form, wie in Abbildung 3.4 dargestellt, aus den Schnittflächen der TORs mit den Pixelkanten analytisch berechnet werden. Sind ausreichend Abtastpunkte vorhanden, zeigt in diesem Fall die algebraische Rekonstruktion ähnliche Resultate wie die gefilterte Rückprojektion.

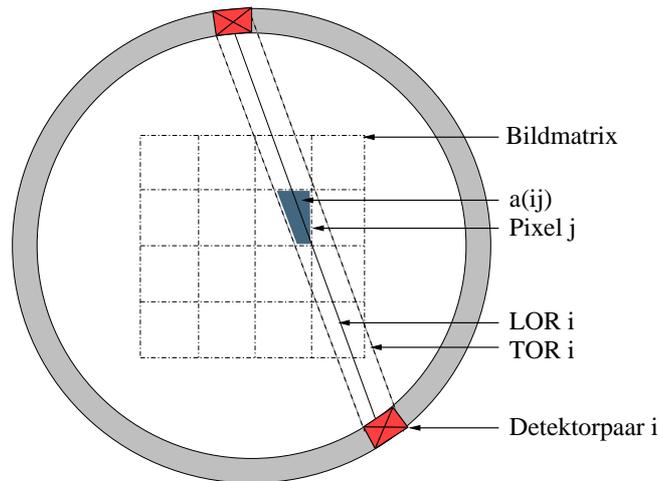


Abbildung 3.4: Zweidimensionales algebraisches Rekonstruktionsproblem

Zu Abbildung 3.4: Im Pixel  $j$  emittierte Quantenpaare werden im Detektorpaar  $i$  mit der Wahrscheinlichkeit  $a(i, j)$  nachgewiesen. Die Wahrscheinlichkeit  $a(i, j)$  wird in diesem einfachen Beispiel proportional zu der Schnittfläche der TOR  $i$  mit dem Pixel  $j$  definiert.

Es sind aber auch aufwändigere Bestimmungen der Matrixelemente (Nachweiswahrscheinlichkeiten) möglich. Die Berücksichtigung von physikalischen Prozessen, definiert durch die Wechselwirkungsquerschnitte der verwendeten Kristalle für Compton- und Photoeffekt, erlaubt eine genauere Charakterisierung der Nachweiseigenschaften des tomographischen Systems. Hierbei lässt sich auch die Abschirmung der Kristalle durch umgebendes Material - wie z.B. Nachbarkristalle, Photosensoren oder Detektorgehäuse - einbeziehen. Auch die bereits angesprochene Positronenreichweite kann im Prinzip bei der Bestimmung der Matrixelemente berücksichtigt werden. Es lassen sich auch Abweichungen des Detektorsystems von der optimalen Bauweise (z.B. unterschiedliche Energieauflösungen der Einzeldetektoren oder Fehler in deren Positionierung) in die Matrix integrieren. Selbst objektabhängige Faktoren wie die Schwächung des Quantenflusses durch den Patienten [115] und der Nachweis von eingestreuten Gammaquanten [27] sind in die Systemmatrix integrierbar. Sie müssen jedoch für jede Messung neu berechnet werden. Darum wird die Systemmatrix meist in system- und objektabhängige Anteile faktorisiert.

Die Berechnung der Gewichte unter Berücksichtigung der physikalischen Effekte geschieht in der Regel auf analytischem Wege unter vereinfachten Randbedingungen [119, 120, 136], wie z.B. unter der Annahme, dass eine Gruppe von Matrixelementen annähernd unter den selben Bedingungen berechnet werden kann [119, 120], oder dass die Flugbahnen der Gammaquanten nur in eingeschränkten Richtungen vorkommen [136]. Beispiele hierfür werden im Kapitel 7 aufgeführt und diskutiert. Die vollständige, für jedes Matrixelement individuell durchgeführte Bestimmung lässt sich nur durch aufwändige und im Allgemeinen nicht zu realisierende Messungen oder durch sehr aufwändige Monte Carlo Simulationen durchführen [147].

Die Lösung von Gleichung 3.26 stellt die große Herausforderung für die algebraische und statistische tomographische Bildrekonstruktion dar. Sind gewisse Bedingungen erfüllt, kann die exakte und eineindeutige Lösung durch Matrixinversion gefunden werden:

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}. \quad (3.31)$$

Dies führt jedoch nur dann zu der gesuchten Lösung  $\mathbf{f}$ , wenn  $\mathbf{A}$  invertierbar ist. Bedingungen für die Invertierbarkeit der Matrix  $\mathbf{A}$  sind [92, 117]:

- $\mathbf{A}$  ist quadratisch und
- $\mathbf{A}$  ist nicht singulär oder annähernd singulär. Singuläre, bzw. annähernd singuläre Matrizen können wie folgt charakterisiert werden.
  - $\mathbf{A}$  ist singulär, wenn ihre Determinante  $|\mathbf{A}| = 0$ . Die Singularität besagt, dass das lineare Gleichungssystem unterbestimmt ist. Singuläre Matrizen werden auch entartet genannt, wobei zwei Entartungen (engl. *degeneracy*) unterschieden werden.
    - a) Zeilen-Entartung (engl. *row-degeneracy*): Mindestens eine Zeile von  $\mathbf{A}$  ist eine Linearkombination der restlichen Zeilen.
    - b) Spalten-Entartung (engl. *column-degeneracy*): Mindestens eine Spalte von  $\mathbf{A}$  ist eine Linearkombination der restlichen Spalten.
  - $\mathbf{A}$  ist annähernd singulär, wenn  $|\mathbf{A}| \approx 0$ . Dieser Fall tritt ein, wenn einige Zeilen oder Spalten derart ähnlich sind, dass innerhalb der Rechengenauigkeit des Systems der Unterschied verschwindet und somit eine Entartung vorliegt.

Im Allgemeinen ist die Gewichtmatrix zur Beschreibung eines tomographischen Systems annähernd singulär. Typische PET Geräte liefern Sinogramme mit 256 transversalen Elementen in 192 Blickrichtungen ( $I = 256 \cdot 192 = 49152$ ). Besteht die damit zu rekonstruierende Bildmatrix aus  $256 \times 256$  Elementen ( $J \approx \pi \cdot 128^2 = 51471$ ), ist das System unterbesetzt.  $\mathbf{A}$  hätte für diesen zweidimensionalen Fall ungefähr  $2,5 \cdot 10^9$  Elemente. Zur Bestimmung einer Lösung für Gleichung 3.26 wird deshalb auf einen Trick zurückgegriffen. Anstatt der unbestimmbaren Lösung durch Matrixinversion wird durch iteratives Verbessern eines Startvektors  $\mathbf{f}^0$  derjenige Vektor  $\mathbf{f}^k$  gesucht, der einer Lösung möglichst nahe kommt. Die damit zusammenhängende Problematik wird in den folgenden Abschnitten diskutiert. Eine weitere Möglichkeit die Singularität des linearen Gleichungssystems aufzuheben ist die Zerlegung der Systemmatrix in nicht-singuläre Teile mit Hilfe der (engl.) *singular-value decomposition* (kurz SVD) [117][106, Abschnitt 14.4][135].

### 3.2.2 Statistisches Modell und Schätzfunktion

Die iterative Suche nach einer hinreichend guten Lösung  $\mathbf{f}^k$  von Gleichung 3.26 auf Seite 35 erfolgt in statistischen Methoden durch Betrachtungen des zugrundeliegenden statistischen Modells. Das rekonstruierte Bild  $\mathbf{f}^k$  ist die zu bestimmende Näherung für die untersuchte Verteilung  $\lambda$ . Der Messdatensatz  $\mathbf{g}$  ist wiederum die einzige bekannte Information über die Verteilung  $\lambda$ . Das Bild  $\mathbf{f}^k$  lässt sich somit als Stichprobe der Grundgesamtheit  $\lambda$  bzw. deren Repräsentation durch  $\mathbf{g}$  betrachten. Für ein statistisches Modell gibt es eine Schätzfunktion  $\Phi$ , mit der die Übereinstimmung der Stichprobe  $\mathbf{f}^k$  mit der Grundgesamtheit  $\mathbf{g}$  ermittelt werden kann [19]. Das Ermitteln der besten Lösung  $\mathbf{f}^k$  erfolgt durch das Suchen eines globalen Extremwertes der Schätzfunktion. An dieser Stelle muss darauf hingewiesen werden, dass in dieser Arbeit die in der PET gebräuchlichen Methoden und Programme zusammen mit der darin verwendeten Nomenklatur eingesetzt wurden. Das Verwenden anderer Methoden bzw. Programme, wie z.B. MINUIT (CERN, Schweiz) [58] zum Minimieren einer Multiparameter-Funktion, wäre jedoch auch möglich gewesen. Allgemein wird zum iterativen Verbessern der

Schätzfunktion eine Korrektur für das Bild  $\mathbf{f}^k$  ermittelt. Man erhält nach Bildmodifikation ein verbessertes Resultat  $\mathbf{f}^{k+1}$ :

$$\mathbf{f}^k \rightarrow \left\{ \mathbf{f}^{k+1}; \Phi^{k+1}(\mathbf{f}^{k+1}, \mathbf{g}, \mathbf{A}) \left\{ \begin{array}{l} \leq \text{ wenn } \min \\ \geq \text{ wenn } \max \end{array} \right\} \Phi^k(\mathbf{f}^k, \mathbf{g}, \mathbf{A}) \right\}. \quad (3.32)$$

Hierbei gilt der obere Pfad ( $\leq$ ) für Schätzfunktionen, die zu minimieren sind. Der untere Pfad gilt für den Fall, dass ein globales Maximum der Schätzfunktion gesucht werden soll. Um diesen Vergleich durchführen zu können, wird aus dem aktuellen Bild  $\mathbf{f}^k$  ein Projektionsdatensatz  $\tilde{\mathbf{g}}^k$  durch die Vorwärtsprojektion

$$\tilde{\mathbf{g}}^k = \mathbf{A}\mathbf{f}^k \quad (3.33)$$

erstellt. Dieser kann nun anhand der Schätzfunktion mit den gemessenen Daten  $\mathbf{g}$  auf Übereinstimmung überprüft werden.

Algorithmen zur statistischen iterativen Rekonstruktion basieren auf der genauen Beschreibung des Messprozesses. Die Messung des Quantenflusses durch ein Detektorpaar kann als Zählexperiment behandelt und die Zahl aller gemessenen Koinzidenzen - bestehend aus wahren und zufälligen Koinzidenzen - als poissonverteilte Variable betrachtet werden. Dies gilt auch für die gemessenen zufälligen Koinzidenzen  $\mathbf{n}$ , jedoch nicht für die durch Subtraktion daraus abgeschätzte Zahl der wahren Koinzidenzen:

$$\underbrace{\begin{array}{c} \text{Alle gemessenen} \\ \text{Koinzidenzen} \\ \text{(TOTALS)} \end{array}}_{\text{poissonverteilt}} - \underbrace{\begin{array}{c} \text{Zufällige} \\ \text{Koinzidenzen} \\ \text{(RANDOMS)} \end{array}}_{\text{poissonverteilt}} = \underbrace{\begin{array}{c} \text{Wahre} \\ \text{Koinzidenzen} \\ \text{(TRUES)} \end{array}}_{\text{nicht poissonverteilt}} \quad (3.34)$$

Es existieren deshalb drei Klassen von Algorithmen.

- 1) *Die Messwerte werden als ungestörte Poissonvariablen behandelt:*

Die unverarbeiteten Daten aus einem Zählexperiment haben den Mittelwert  $g(i)$  und die Varianz  $\sigma^2(i) = g(i)$ . Daraus ergibt sich die (engl.) *likelihood* Schätzfunktion  $\mathcal{L}$  bzw. deren logarithmische Version, die (engl.) *log-likelihood* Schätzfunktion  $\mathcal{L}_{\log}$ :

$$\mathbf{g} = \text{POISSON} \{ \mathbf{A}\lambda \}, \quad (3.35)$$

$$\sigma^2 = \mathbf{g}, \text{ und} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{f}^k) &= \mathcal{L}_{\log} \{ \mathbf{f}^k \} & (3.37) \\ &= \sum_{i=1}^I \left[ g(i) \cdot \log \left( \tilde{g}^k(i) \right) - \tilde{g}^k(i) \right]. \end{aligned}$$

Das Suchen einer guten Lösung des Rekonstruktionsproblems ist gleichzusetzen mit dem Maximieren der *likelihood* oder *log-likelihood* Schätzfunktion. Deshalb wird diese Klasse von Algorithmen auch (engl.) *maximum-likelihood* (kurz ML) Algorithmen genannt.

- 2) *Die Messwerte werden als gestörte Poissonvariablen behandelt:*

Mit der (engl.) *shifted-poisson* Methode wird diese Störung jedoch berücksichtigt, um

weiterhin das Poissonmodell verwenden zu können [153, 152, 94, 120]:

$$\mathbf{g} + 2 \cdot \mathbf{n} = \text{POISSON} \{ \mathbf{A}\lambda + 2 \cdot \mathbf{n} \}, \quad (3.38)$$

$$\sigma^2 = \mathbf{g} + 2 \cdot \mathbf{n}, \text{ und} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{f}^k) &= \mathcal{L}_{\log}^{\text{shifted}} \{ \mathbf{f}^k \} \\ &= \sum_{i=1}^I \left[ (g(i) + 2 \cdot n(i)) \cdot \log \left( \tilde{g}^k(i) + 2 \cdot n(i) \right) - \left( \tilde{g}^k(i) + 2 \cdot n(i) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Gleichung 3.39 zeigt, dass hierbei Mittelwert  $\mathbf{g}$  und Varianz  $\sigma^2$  nicht mehr identisch sind und somit keine Poissonverteilung vorliegt. Es hat sich für diese Klasse keine eigene Bezeichnung etabliert. Diese, die *shifted log-likelihood* Schätzfunktion maximierenden, Algorithmen werden weiterhin als *maximum-likelihood* (ML) Algorithmen bezeichnet.

3) *Die Messwerte werden als gaußverteilte Variablen betrachtet:*

J.A. Fessler [31] fand eine bessere Übereinstimmung der resultierenden wahren Koinzidenzen mit einer Gaußverteilung. Bei der (engl.) *least-squares* (kurz LS) Methode dient als Schätzfunktion die  $\chi^2$ -Funktion (Funktion der quadratischen Abweichung oder Gaußsches Fehlerintegral) [64]. Um eine Berücksichtigung der Varianzen in den gemessenen Daten zu ermöglichen, wurde daraus die *data-weighted least-squares* oder *weighted least-squares* (kurz WLS) Methode entwickelt [3, 31, 34, 35, 141]. Die ungewichtete LS Methode wird deshalb auch mit *unweighted least-squares* (kurz ULS) bezeichnet [152]:

$$\mathbf{g} = \text{Normalverteilung} \{ \mathbf{A}\lambda, \sigma^2 \}, \quad (3.41)$$

$$\sigma^2(i) = \max \{ g(i) + 2 \cdot \tilde{n}(i), \sigma_{min}^2 \}, \text{ und} \quad (3.42)$$

$$\Phi_{LS}(\mathbf{f}^k) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \left( \tilde{g}^k(i) - g(i) \right)^2 \text{ bzw.} \quad (3.43)$$

$$\Phi_{WLS}(\mathbf{f}^k) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \left[ \left( \tilde{g}^k(i) - g(i) \right)^2 \cdot \frac{1}{\sigma^2(i)} \right]. \quad (3.44)$$

Die zufälligen Koinzidenzen  $\mathbf{n}$  liegen oftmals nicht als Datensatz vor sondern werden z.B. aus den Einzelzählraten gemäß Gleichung 2.11 mit  $\tilde{\mathbf{n}}$  abgeschätzt. Für die zu verwendende Varianz wird im Allgemeinen ein Minimalwert  $\sigma_{min}^2$  gefordert.

Detaillierte Angaben zu den Schätzfunktionen und ihren Anwendungen werden insbesondere im Abschnitt 3.2.6 diskutiert. Forderungen bei der Wahl der Schätzfunktion sind u.a. Differenzierbarkeit und Monotonie. Beide spielen eine tragende Rolle bei der Entscheidung, wie das bestehende Bild in jedem Iterationsschritt zu modifizieren ist um eine bessere Lösung zu erhalten.

### 3.2.3 Regulierung

Die annähernde Singularität der meisten Rekonstruktionsprobleme resultiert in instabilen Rekonstruktionsalgorithmen. Weiterhin erfordert die Konvergenz des rekonstruierten Bildes zu der optimalen Lösung oft eine große Zahl von Iterationen. Um beide Probleme einzugrenzen, kann eine Maßnahme - die Regulierung [33, 36, 47, 74][106, Abschnitt 14.4] - eingeführt werden, die das Konvergenzverhalten der Rekonstruktionsalgorithmen beschleunigt und deren

Stabilität erhöht. Man unterscheidet deshalb regulierende und nicht regulierende statistische Algorithmen. Die Regulierung erfolgt im Allgemeinen durch eine Modifikation der Schätzfunktion,

$$\Phi(\mathbf{f}^k) \rightarrow \Phi(\mathbf{f}^k) - \beta \cdot U(\mathbf{f}^k), \quad (3.45)$$

wobei der Einfluss der Regulierungsfunktion  $U$  durch den Faktor  $\beta$  gesteuert wird. Die Regulierungsfunktion kann z.B. eine Glättung des Bildes bewirken, mit  $\beta$  lässt sich in diesem Fall die erwünschte Ortsauflösung im rekonstruierten Bild vom Benutzer einstellen. Die Regulierungsfunktion kann aber auch die Verwendung von vor der Rekonstruktion bekannten (a-priori) Informationen, wie Transmissions- oder Kernspinnmessungen, enthalten.

### 3.2.4 Modifikationsentscheidung

Hat man sich auf ein statistisches Modell - und somit auf eine Schätzfunktion - festgelegt, stellt sich nun das Problem, wie ein Bild zu verändern ist, um ein besseres Resultat zu erhalten [48, 61]. Durch das Modell ist eine Vorschrift zur Verbesserung implizit gegeben: Es muss ein globaler Extremwert der Schätzfunktion erreicht werden. Bei einigen Algorithmen, je nach dem zugrundeliegenden statistischen Modell, kann eine Stetigkeit der Schätzfunktion bewiesen werden und auf die aufwändige Suche nach der Modifikationsrichtung verzichtet werden. Ist dies jedoch nicht der Fall, oder soll eine beschleunigte Verbesserung zur Erhöhung der Konvergenzgeschwindigkeit erreicht werden, so lässt sich durch Analyse des Gradienten der Schätzfunktion eine Richtung  $\Delta_k$ ,

$$\Delta_k \sim \left\{ \begin{array}{c} - \\ + \end{array} \right\} \nabla \Phi^k, \quad (3.46)$$

für die Veränderung der Bilddaten  $\mathbf{f}^k$  berechnen. In Analogie zur Gleichung 3.32 sind wieder zwei mögliche Wege angegeben. Der obere (-) wird für zu minimierende Schätzfunktionen angewendet und wird (engl.) *steepest descent* [8, 117] genannt. Der untere Weg dient zur Maximierung der Schätzfunktion, er wird mit (engl.) *steepest ascent* bezeichnet. Der resultierende Modifikationsschritt des *expectation-maximization* (kurz EM) Algorithmus [69, 64],

$$\mathbf{f}^{k+1} = \mathbf{f}^k + \alpha_k \cdot \Delta_k, \quad (3.47)$$

kann nun ausgeführt werden, wobei die Schrittweite  $\alpha_k$  anhand der Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_k} \Phi^{k+1} = 0 \quad (3.48)$$

für jedes Bildelement  $j$  individuell zu ermitteln ist. Damit die Vorbedingung, dass ein Bildelement keinen negativen Wert erhalten darf (engl. *nonnegativity constraint*),

$$f(j) \geq 0, \quad (3.49)$$

erfüllt ist, wird folgende Maßnahme ergriffen: Würde das Element  $j$  nach Modifikation einen negativen Wert erhalten,

$$f^k(j) + \alpha_k \cdot [\Delta_k]_j < 0, \quad (3.50)$$

1)	Das aktuelle Bild $f^k$ wird vollständig für alle Strahlen $i$ in den Datensatz $\tilde{g}^k$ projiziert. Dazu werden folgende $I$ Summen über jeweils $J$ Elemente berechnet:
	$\tilde{g}^k(i) = \sum_{j=1}^J a(i, j) \cdot f^k(j) ; \forall i \in I.$
2)	Aus dem aktuellen Projektionsdatensatz $\tilde{g}^k$ wird unter Vergleich mit dem gemessenen Datensatz $g$ eine gewichtete Korrektur für jedes Bildelement berechnet:
	$c^k(j) = \sum_{i=1}^I a(j, i) \frac{g(i)}{\tilde{g}^k(i)} ; \forall j \in J.$
3)	Jedes Bildelement $j$ wird mit dem entsprechenden Korrekturwert modifiziert:
	$f^{k+1}(j) = \mathcal{O}\{c^k(j), f^k(j)\}.$
4)	Falls das Konvergenzkriterium erfüllt ist, wird hier abgebrochen. Sonst wird der Iterationsindex um eins erhöht ( $k \rightarrow k + 1$ ) und die nächste Iteration in Schritt 1 gestartet.

Ablaufkasten 3.1: Iterative bildweise Bildmodifikation.

so wird  $\alpha_k$  für dieses Element gleich Null gesetzt ( $f^{k+1}(j) = f^k(j)$ ). Dieser Vorgang wird als die (engl.) *best linesearch* Methode [64] bezeichnet.

Eine weitere, häufig verwendete Methode zur Richtungsbestimmung ist die Methode der konjugierten Gradienten (engl. *conjugate gradient*) [48, 117]. Hierbei wird  $\Delta_k$  entlang des Gradienten der Schätzfunktion, jedoch orthogonal zu der letzten Modifikationsrichtung  $\Delta_{k-1}$ , gewählt. Gegenüber der Gradientenmethode weist diese Methode eine erheblich höhere Konvergenzgeschwindigkeit auf. Die hier erwähnten Modifikationswege stellen die Bedingungen an die Schätzfunktion nach Differenzierbarkeit und Monotonie. Ist die Schätzfunktion nicht streng monoton steigend oder fallend, so kann durch den Algorithmus zwar ein lokales Maximum bzw. Minimum gefunden werden, der global beste Wert kann jedoch nicht mehr erreicht werden. In diesem Zusammenhang haben sich auf dem Gebiet der iterativen Rekonstruktion die Schlagwörter konkave bzw. konvexe Schätzfunktion etabliert [117]. Die Suche nach einem Extremwert in einer konkaven oder konvexen Schätzfunktion wird immer den globalen Extremwert finden.

### 3.2.5 Modifikationsdurchführung

Die eigentliche Veränderung des rekonstruierten Bildes innerhalb eines Iterationsschritts kann auf unterschiedlichen Wegen durchgeführt werden. Diese Wege beeinflussen das Konvergenzverhalten und die Empfindlichkeit gegenüber Rauschen erheblich. Es sei  $\mathcal{O}\{c(j), f(j)\}$  ein Korrekturoperator, der den Wert  $f(j)$  des Bildelements  $j$  anhand eines Korrekturwertes  $c(j)$  modifiziert. Die Berechnung des Korrekturwertes und die Art der Modifikationsdurchführung ist durch den verwendeten Rekonstruktionsalgorithmus definiert (statistisches Modell und Modifikationsweg). Im Folgenden werden die drei hauptsächlichen Modifikationsstrategien anhand eines einfach zu berechnenden Korrekturterms  $c(j)$  vorgestellt.

1)	Es wird ein neuer Pixelindex $j'$ definiert und mit $j' = 1$ auf das erste Element in der Bildmatrix verwiesen.
2)	Das aktuelle bzw. zuletzt modifizierte Bild $\mathbf{f}^k$ wird nur für jene Strahlen $i' \in \{I'(j') ; a(i', j') \neq 0\}$ in den Datensatz $\tilde{\mathbf{g}}^k$ projiziert, die den Pixel $j'$ schneiden, also mit $j'$ ein von Null verschiedenes Gewicht aufweisen. Es müssen folgende $I'$ Strahlsummen über jeweils alle $J$ Bildelemente berechnet werden: $\tilde{g}^k(i') = \sum_{j=1}^J a(i', j) \cdot f^k(j) ; \forall i' \in I'.$
3)	Berechnung des Korrekturwertes nur für den Pixel $j'$ : $c^k(j') = \sum_{i' \in I'} a(j', i') \frac{g(i')}{\tilde{g}^k(i')}.$
4)	Ausschließlich das Bildelement $j'$ wird modifiziert: $f^k(j') \rightarrow \mathcal{O}\{c^k(j'), f^k(j')\}.$
5)	Es wird mit $j' \rightarrow j' + 1$ in Schritt 2 fortgefahren. Es ist zu beachten, dass für alle Durchgänge $j' > 1$ ein bereits modifiziertes Bild zur Berechnung der Korrekturwerte verwendet wird, was zu einer beschleunigten Konvergenz führt.
6)	Sind alle Bildelemente abgearbeitet (also $j' = J$ ), wird mit $\mathbf{f}^{k+1} = \mathbf{f}^k$ das aktuelle Bild als Resultat dieser Iteration gesetzt. Falls das Konvergenzkriterium erfüllt ist, wird hier abgebrochen. Sonst wird der Iterationsindex um eins erhöht, $k \rightarrow k + 1$ , und die nächste Iteration in Schritt 1 gestartet.

Ablaufkasten 3.2: Iterative punktweise Bildmodifikation.

### 3.2.5.1 Bildweise Modifikation (engl. *imagewise image update*)

Es wird aus dem aktuellen Bild für jedes Bildelement eine Korrektur ermittelt. Nach gleichzeitiger Korrektur aller Pixel erhält man das Resultat dieser Iteration. Eine genauere Darlegung der bildweisen Bildmodifikation ist im Ablaufkasten 3.1 zu finden. In einer Iteration werden lediglich  $I$  Summen über jeweils  $J$  Elemente berechnet. Dazu kommen noch die  $J$  Berechnungen der Korrekturwerte und deren Anwendung auf das aktuelle Bild. Eine einzelne Iteration erfordert deshalb relativ wenig Rechenaufwand. Dieses Verfahren ist stabil gegen statistisches Rauschen, da alle verfügbaren Daten für die Korrektur verwendet werden, also Summen über eine große Zahl von Elementen gebildet werden. Es konvergiert jedoch nur langsam, da eine Momentaufnahme des Bildes zur Korrektur aller Bildelemente verwendet wird. Es muss eine hohe Zahl an Iterationen durchgeführt werden. Weiterhin ist eine Überkorrektur von Iteration zu Iteration festzustellen [61], da alle im momentanen Bild vorhandenen Fehler in die Korrektur aller Bildelemente eingehen. Vertreter dieser Methode sind die (engl.) *iterative*

1)	Es wird einer neuer Projektionsindex $i'$ definiert und mit dem Wert $i' = 1$ auf das erste Element des Projektionsdatensatzes verwiesen.
2)	Das aktuelle bzw. zuletzt modifizierte Bild wird nur in den Strahlengang $i'$ , d.h. für die Bildelemente $j' \in \{J'(i') ; a(i', j') \neq 0\}$ projiziert. Es muss nur folgende Summe über $J'$ Elemente berechnet werden: $\tilde{g}^k(i') = \sum_{j' \in J'} a(i', j') \cdot f^k(j').$
3)	Die Korrekturwerte werden nur für die Bildelemente $j' \in J'$ berechnet: $c^k(j') = a(j', i') \frac{g(i')}{\tilde{g}^k(i')} ; \forall j' \in J'(i').$
4)	Ausschließlich die Bildelemente $j' \in J'(i')$ werden modifiziert: $f^k(j') \rightarrow \mathcal{O}\{c^k(j'), f^k(j')\} ; \forall j' \in J'(i').$
5)	Nach Erhöhen des Projektionsindex ( $i' \rightarrow i' + 1$ ) wird Schritt 2 gestartet (falls $i' < I$ ). Es ist zu beachten, dass ab jetzt ein bereits modifiziertes Bild zur Berechnung der Korrekturwerte verwendet wird.
6)	Sind alle Strahlengänge abgearbeitet (also $i' = I$ ), wird das aktuelle Bild mit $\mathbf{f}^{k+1} = \mathbf{f}^k$ als Resultat dieser Iteration gesetzt. Falls das Konvergenzkriterium erfüllt ist, wird hier abgebrochen. Sonst wird Iterationsindex um eins erhöht, $k \rightarrow k + 1$ , und die nächste Iteration in Schritt 1 gestartet.

Ablaufkasten 3.3: Iterative projektionsweise Bildmodifikation.

*least-squares* (kurz ILST) [40] und der weiterhin stark verbreitete, 1982 von Shepp und Vardi [138] entwickelte, (engl.) *expectation-maximization* (kurz EM) Algorithmus.

### 3.2.5.2 Punktweise Modifikation (engl. *pixelwise image update*)

Aus dem aktuellen Bild wird eine Korrektur für ein einzelnes Bildelement berechnet. Nachdem dieser korrigiert wurde, wird aus dem veränderten Bild der Korrekturwert für das nächsten Bildelement ermittelt und dieser korrigiert. Eine einzelne Iteration ist abgeschlossen, wenn jedes Bildelement modifiziert wurde. Die punktweise Bildmodifikation [130] ist detailliert im Ablaufkasten 3.2 beschrieben. Diese Methode hat wie die oben beschriebene bildweise Modifikation ein schlechtes Konvergenzverhalten und erfordert einen hohen Rechenaufwand, da viele Vorwärtsprojektions-Schritte durchzuführen sind (Ablaufkasten 3.2, Punkt 2). Sie weist ebenfalls eine gute Stabilität gegenüber statistischen Rauschen auf. Die Überkompensation zwischen den Iterationsschritten ist gegenüber der bildweisen Modifikation reduziert [61], da für die Modifikation der Bildelemente bereits die im selben Iterationsschritt korrigierten

Bildelemente verwendet werden. Vertreter dieser Methode ist z.B. die von Gilbert 1972 vorgestellte SIRT-Methode [39] (engl. *simultaneous iterative reconstruction technique*).

### 3.2.5.3 Projektionsweise Modifikation (engl. *projectionwise image update*)

Ausgehend von einem einzelnen Element  $i'$  des gemessenen Datensatzes werden Korrekturwerte für jene Pixel  $j'$  berechnet, die von diesem Messelement beeinflusst werden, d.h. für die das Matrixelement  $a(i', j')$  von Null verschieden ist. Nach Korrektur dieser Pixel wird das modifizierte Bild für eine Korrektur ausgehend von dem nächsten Messelement verwendet. Der Ablaufkasten 3.3 fasst die Schritte bei der projektionsweisen Bildmodifikation zusammen. Die projektionsweise Bildmodifikation erfordert einen geringeren Rechenaufwand als die punktweise Bildmodifikation, da für jeden Teilschritt nur eine einzige Strahlsumme zu berechnen ist. Es tritt keine wiederholte Berechnung der bereits ermittelten Strahlsummen auf. Da eine große Zahl der Bildelemente während einer Iteration mehrfach modifiziert werden, weist diese Methode eine hohe Konvergenz, vor allem innerhalb der ersten Iterationen auf. Die projektionsweise Modifikation ist jedoch empfindlich gegen statistisches Rauschen, da jeder Korrekturwert nur aus einem einzigen Messwert berechnet wird. Vertreter dieser Methode ist die ART (engl. *algebraic reconstruction technique*) von Gordon et al. [41] sowie deren zahlreiche Variationen [2, 43, 97].

### 3.2.6 Algebraische und statistische Rekonstruktionsalgorithmen

Für die folgenden Beziehungen wird eine vereinfachende Schreibweise (siehe Anhang A auf Seite 159) für die komponentenweise Multiplikation bzw. Division zweier Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  (hier als Beispiel im  $\mathbb{R}^3$ ) anhand zweier neu einzuführender Operatoren verwendet:

$$\mathbf{a} \odot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 \\ a_2 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} a_1/b_1 \\ a_2/b_2 \\ a_3/b_3 \end{pmatrix}. \quad (3.51)$$

#### 3.2.6.1 ART: Die „Algebraic Reconstruction Technique“

Innerhalb dieses Kapitels wurden mehrere Möglichkeiten der Bildmodifikation anhand einer vereinfachten Berechnung des Korrekturwertes  $c(j)$  dargelegt. Die *algebraic reconstruction technique* (kurz ART) [41] verwendete in ihrer ursprünglichen Form dieses einfache Modell. Der Modifikationsschritt bei der multiplikativen ART,

$$f^{k+1}(j) = f^k(j) \cdot \left( a(i, j) \frac{g(i)}{[\mathbf{A}\mathbf{f}^k](i)} \right); \quad \forall i \in I, \quad (3.52)$$

vollzieht nacheinander die projektionsweise Bildmodifikation für alle Proxel  $i \in [1, I]$ . Hierbei ist

$$c^k(j) = a(i, j) \frac{g(i)}{[\mathbf{A}\mathbf{f}^k](i)} \quad (3.53)$$

der Korrekturwert, berechnet für den Proxel  $i$  und angewendet durch den multiplikativen Korrekturoperator

$$\mathcal{O}\{c^k(j), f^k(j)\} = f^k(j) \cdot c^k(j). \quad (3.54)$$

Das Gewicht  $a(i, j)$  im Korrekturterm garantiert, dass nur jene Daten verwendet werden, die für den aktuell zu modifizierenden Pixel  $j$  und den Proxel  $i$  ein von Null verschiedenes Gewicht aufweisen.

### 3.2.6.2 MLEM: Die „Maximum-Likelihood Expectation-Maximization“ Rekonstruktion

Die MLEM-Rekonstruktionsalgorithmen [69, 138] setzen poissonverteilte Messdaten  $\mathbf{g}$  voraus. Daraus wird in mehreren Iterationen  $k \in [1, K]$  das beste Bild  $\mathbf{f}^k$  bei gegebenem Messdatensatz  $\mathbf{g}$  anhand der Likelihood-Schätzfunktion ermittelt [74]:

$$\mathcal{L}\{\mathbf{f}^k\} = \prod_{i=1}^I e^{-\tilde{g}^k(i)} \cdot \frac{(\tilde{g}^k(i))^{g(i)}}{g(i)!}. \quad (3.55)$$

Hierbei wurde zur übersichtlicheren Darstellung nach Gleichung 3.33  $\tilde{\mathbf{g}}^k = \mathbf{A}\mathbf{f}^k$  eingesetzt. Zur Berechnung der Modifikationsrichtung, falls diese zur Beschleunigung der Konvergenz bestimmt werden soll, wird die Differenzierte der Schätzfunktion benötigt. Da sich die Likelihood-Schätzfunktion jedoch nur schwer differenzieren lässt, wird ihr natürlicher Logarithmus gebildet (engl. *log-likelihood*),

$$\mathcal{L}_{\log}\{\mathbf{f}^k\} = \sum_{i=1}^I g(i) \log(\tilde{g}(i) - g(i)), \quad (3.56)$$

und dieser anschließend differenziert:

$$\frac{\partial (\mathcal{L}_{\log}\{f^k(j)\})}{\partial f^k(j)} = -1 + \sum_{i=1}^I \frac{g(i) \cdot a(i, j)}{\sum_{j'=1}^J f^k(j') \cdot a(i, j')}. \quad (3.57)$$

Gleichung 3.56 stellt sich für die *shifted-poisson* Rekonstruktion unter Berücksichtigung der bereits subtrahierten zufälligen Koinzidenzen  $\mathbf{n}$  bzw. deren Varianz (siehe Gleichung 3.39) wie folgt dar [153, 74]:

$$\mathcal{L}_{\log}^{shifted}\{\mathbf{f}^k\} = \sum_{i=1}^I (g(i) + 2 \cdot n(i)) \log(\tilde{g}(i) + 2 \cdot n(i) - (g(i) + 2 \cdot n(i))). \quad (3.58)$$

Die MLEM gehört zur Gruppe der bildweise modifizierenden Algorithmen. Die Modifikationsvorschrift lautet für das Bildelement  $j$

$$f^{k+1}(j) = f^k(j) \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^I a(i, j)} \cdot \sum_{i=1}^I \frac{g(i) \cdot a(i, j)}{\sum_{j'=1}^J (a(i, j') \cdot f^k(j'))} \quad (3.59)$$

bzw. in Vektornotation für das gesamte Bild

$$\mathbf{f}^{k+1} = \mathbf{f}^k \odot \mathbf{b} \odot \left( \mathbf{A}^T \left( \frac{\mathbf{g}}{\mathbf{A}\mathbf{f}^k} \right) \right). \quad (3.60)$$

Hierbei ist der Normierungsvektor  $\mathbf{b}$  definiert durch

$$\mathbf{b} = \frac{1}{\mathbf{s}} = \frac{1}{\mathbf{A}\mathbf{1}}. \quad (3.61)$$

Prinzipiell kann gezeigt werden, dass die Schätzfunktion aus Gleichung 3.55 bzw. deren logarithmische Form (3.56) konkav ist und die Modifikationsvorschrift aus Gleichung 3.59 streng konvergent das Maximum der Schätzfunktion anstrebt. Jedoch ist der MLEM instabil bei Messdaten mit hohem Rauschanteil. Weiterhin berücksichtigt er nicht die Natur der meisten klinischen PET Daten, die aus der Menge aller Koinzidenzen abzüglich der Zahl der zufälligen Koinzidenzen bestehen. Da die resultierenden Daten wie bereits angesprochen nicht mehr poissonverteilt sind, wird oft die (engl.) *shifted-poisson* Methode verwendet.

### 3.2.6.3 OSEM: Die „Ordered-Subsets Expectation-Maximization“ Rekonstruktion

Der OSEM ist eine Weiterentwicklung des MLEM Algorithmus. Um die dem MLEM zugrundeliegende bildweise Modifikation und deren schlechte Konvergenz zu umgehen, werden die Eingabedaten  $\mathbf{g}$  in  $m \in [1, M]$  Untergruppen  $S_m$ , so genannte (engl.) *subsets*, mit den Projektionselementen  $i \in S_m$  unterteilt. Hierbei ist entscheidend, dass diese Aufteilung gleichmäßig vorgenommen wird, also die Matrix  $\mathbf{A}$  in symmetrische Submatrizen  $\mathbf{A}_m$  zerlegt werden kann. Diese Forderung wird (engl.) *subset balance* genannt [139]. In einer Untergruppenmatrix  $\mathbf{A}_m$  sind nur jene Elemente ungleich Null, die die in der Untergruppe  $m$  vorkommenden Projektionselemente  $i \in S_m$  enthalten. Die Modifikation eines Bildelements anhand der Untergruppe  $m$  lautet somit:

$$f^k(j) \rightarrow f^k(j) \cdot \frac{1}{\sum_{i \in S_m} a(i, j)} \cdot \sum_{i \in S_m} \frac{g(i) \cdot a(i, j)}{\sum_{j=1}^J (a(i, j) \cdot f^k(j))}. \quad (3.62)$$

Dies lässt sich für das gesamte Bild in Vektornotation wie folgt formulieren:

$$\mathbf{f}^k \rightarrow \mathbf{f}^k \odot \mathbf{b}_m \odot \left( \mathbf{A}_m^T \left( \frac{\mathbf{g}}{\mathbf{A} \mathbf{f}^k} \right) \right). \quad (3.63)$$

Für den subset-abhängigen Normierungsvektor  $\mathbf{b}_m$  gilt:

$$\mathbf{b}_m = \frac{\mathbf{1}}{r_m \cdot \mathbf{s}} = \frac{\mathbf{1}}{\max_j \left\{ \frac{s_m}{s} \right\} \cdot \mathbf{s}} = \frac{\mathbf{1}}{\max_j \left\{ \frac{\mathbf{A}_m \mathbf{1}}{\mathbf{A} \mathbf{1}} \right\} \cdot (\mathbf{A} \mathbf{1})}. \quad (3.64)$$

Wurde diese Modifikation für alle Untergruppen durchgeführt, ist das Resultat der aktuellen Iteration erreicht,

$$\mathbf{f}^{k+1} = \mathbf{f}^k, \quad (3.65)$$

und es kann mit der nächsten Iteration ( $k \rightarrow k + 1$ ) fortgefahren werden. Die Aufteilung in Untergruppen wird meist innerhalb der Menge aller Projektionswinkel vorgenommen. Der Messdatensatz  $\mathbf{g}$  wird in  $M$  Subsets aufgeteilt, so dass für den Projektionswinkel  $\phi_m$  der zugelassenen Elemente der Untergruppe  $m$  gilt:

$$(m - 1) \cdot \left( \frac{180^\circ}{M} \right) \leq \phi_m < m \cdot \left( \frac{180^\circ}{M} \right). \quad (3.66)$$

1)	Die Rekonstruktion wird mit $k = 0$ initialisiert durch eine gefilterte Rückprojektion des Startbildes $\mathbf{f}^0$ und dem erstmaligen Festlegen des Hilfsvektors $\mathbf{r}$ :
	$\mathbf{f}^0 = \mathcal{FBP}\{\mathbf{g}\} \quad \text{und} \quad \mathbf{r} = \mathbf{g} - \mathbf{A}\mathbf{f}^0$
2)	Es wird ein Hilfsbild $\mathbf{f}^{alt}$ mit dem zuletzt rekonstruierten Bild belegt: $\mathbf{f}^{alt} = \mathbf{f}^k$ .
3)	Für alle Bildelemente $j$ werden folgende Modifikationsschritte durchgeführt:
a)	Zur übersichtlicheren Darstellung werden folgende Hilfsgrößen definiert:
	$\begin{aligned} \mathbf{a}_j &= a(*, j) \\ \mathbf{s} &= \mathbf{a}_j^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{a}_j \\ d(j) &= s(j) + \beta \cdot \sum_{l \in N_j} w(j, l) \end{aligned}$
b)	Der modifizierte Wert des Bildelements $j$ wird anhand der PWLS-ICD-Beziehung bestimmt,
	$\mathbf{f}^{neu}(j) = \frac{1}{d(j)} \cdot \left( \mathbf{a}_j^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{r} + s(j) \cdot f^{alt}(j) + \beta \cdot R(\mathbf{f}^k) \right),$
c)	und der Pixelwert $f^k(j)$ mittels des Überrelaxationsparameters $\omega$ modifiziert. Weiterhin wird der Hilfsvektor $\mathbf{r}$ entsprechend dem veränderten Bild alterniert.
	$\begin{aligned} f^k(j) &= \max \{0, (1 - \omega) \cdot f^{alt}(j) + \omega \cdot f^{neu}(j)\} \\ \mathbf{r} &\rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{a}_j \cdot [f^{alt}(j) - f^k(j)] \end{aligned}$
d)	Es wird mit dem nächsten Bildelement ( $j \rightarrow j+1$ ) in Teilschritt 3a fortgefahren.
4)	Sind alle Bildelemente abgearbeitet, wird das aktuelle Bild mit
	$\mathbf{f}^{k+1} = \mathbf{f}^k$
	als Resultat dieser Iteration gesetzt und nach Erhöhen des Iterationsindex, $k \rightarrow k+1$ , mit der nächsten Iteration in Schritt 2 gestartet.

Ablaufkasten 3.4: Funktionsweise der PWLS-ICD(+SOR) Rekonstruktion.

### 3.2.6.4 PWLS: Die „Penalized-Weighted Least-Squares“ Rekonstruktion

Die Familie der Least-Squares-Algorithmen beruht auf der Behandlung der gemessenen Daten  $\mathbf{g}$  als gaußverteilte Messgrößen. Zu deren vollständigen Beschreibung ist das Ermitteln der Varianz jedes Elements  $g(i)$  nötig. Aufgrund fehlender weiterer Informationen wird die Varianz  $\sigma^2(i)$  eines Messelements  $g(i)$  unter Verwendung der abgeschätzten zufälligen Koinzidenzen  $\tilde{\mathbf{n}}$  und einem Minimalwert  $\sigma_{min}^2$  mit

$$\sigma^2(i) = \max \{g(i) + 2 \cdot \tilde{n}(i), \sigma_{min}^2\} \quad (3.67)$$

- 1) Die Rekonstruktion wird mit  $k = 0$  initialisiert und das Startbild  $\mathbf{f}^0$  z.B. durch eine gefilterte Rückprojektion gebildet:
- $$\mathbf{f}^0 = \mathcal{FBP}\{\mathbf{g}\}$$
- 2) Aus dem aktuellen Bild wird der Gradient der Schätzfunktion ermittelt
- $$-\nabla^T \Phi(\mathbf{f}^k) = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{g} - (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \beta \cdot \mathbf{C}^T \mathcal{D}_l\{\omega_l\} \mathbf{C}) \mathbf{f}^k$$
- und folgende Hilfsgrößen - basierend auf der Vorbedingung (engl. *precondition*)  $\mathbf{M}$  - angelegt:
- $$\begin{aligned} \mathbf{y}^k &= -\nabla^T \Phi(\mathbf{f}^k) \\ \mathbf{z}^k &= \mathbf{M} \mathbf{y}^k \\ \gamma_k &= \begin{cases} 0 & , \text{für } k = 0 \\ \frac{\langle \mathbf{y}^k - \mathbf{y}^{k-1}, \mathbf{z}^k \rangle}{\langle \mathbf{y}^{k-1}, \mathbf{z}^{k-1} \rangle} & , \text{für } k > 0 \end{cases} \end{aligned}$$
- 3) Der Richtungsvektor  $\mathbf{d}^k$  für die Modifikation wird aus dem, durch die Vorbedingung  $\mathbf{M}$  modifizierten, Gradienten der Schätzfunktion des aktuellen Bildes senkrecht zu dem zuletzt angewendeten Modifikationsvektor  $\mathbf{d}^{k-1}$  definiert:
- $$\mathbf{d}^k = \mathbf{z}^k + \gamma_k \cdot \mathbf{d}^{k-1}.$$
- 4) Die Schrittweite bei der Modifikation wird aus folgender Beziehung zur Minimierung der Schätzfunktion ermittelt
- $$\alpha_k = \arg \min_{\alpha} \{ \Phi(\mathbf{f}^k + \alpha \cdot \mathbf{d}^k) \}$$
- 5) Das Bild wird mit der gefundenen Schrittweite in Richtung des Modifikationsvektors verändert:
- $$\mathbf{f}^{k+1} = \mathbf{f}^k + \alpha_k \cdot \mathbf{d}^k$$
- 6) Nach Erhöhen des Iterationsindex,  $k \rightarrow k + 1$  wird mit der nächsten Iteration in Schritt 2 gestartet.

Ablaufkasten 3.5: Funktionsweise der PWLS-PCG Rekonstruktion für quadratische Straffunktionen.

angenähert [3, 31] und daraus die  $I \times I$  Diagonal-Varianzmatrix  $\boldsymbol{\Sigma}$  und die korrespondierende Kovarianzmatrix  $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$  gebildet:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathcal{D}_i\{\sigma^2(i)\} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \mathcal{D}_i\left\{\frac{1}{\sigma^2(i)}\right\}. \quad (3.68)$$

Mit der Kovarianzmatrix lässt sich die (engl.) *weighted least-squares* Schätzfunktion [3]

$$\Phi(\mathbf{f}^k) = (\mathbf{g} - \mathbf{A} \mathbf{f}^k)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{g} - \mathbf{A} \mathbf{f}^k)$$

aufbauen. Das Konvergenzverhalten des auf dieser Schätzfunktion basierenden Rekonstruktionsalgorithmus wird wie in Abschnitt 3.2.3 angesprochen durch Verwenden der Regulierungs-

oder Straffunktion (engl. *penalty*) [36],

$$\mathcal{R}\{\mathbf{f}\} = \sum_{l \in L} \psi_l([\mathbf{C}\mathbf{f} - \mathbf{c}]_l), \quad (3.69)$$

in einer modifizierten Schätzfunktion verbessert. In den in dieser Arbeit verwendeten Algorithmen ist  $\psi_l(t)$  [35, 34] die quadratische, zweifach differenzierbare, symmetrische und konvexe Straffunktion

$$\psi_l(t) = \frac{1}{2} \cdot \omega_l \cdot t^2, \quad (3.70)$$

wobei sich aus Gleichung 3.69 (mit  $t \equiv \mathbf{C}\mathbf{f} - \mathbf{c}$ ) mit *second-order neighbouring* ( $L = 4J$ ) die Matrix

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{G}^{(4J \times J)} \quad (3.71)$$

ergibt. Der Strafterm  $\mathcal{R}\{\mathbf{f}\}$  führt hierbei eine Glättung des Bildes  $\mathbf{f}$  über - in diesem Fall - vier Nachbarpixel durch. Die resultierende *penalized weighted least squares* (PWLS) Schätzfunktion für das rekonstruierte Bild  $\mathbf{f}^k$  bei gegebenem Messdatensatz  $\mathbf{g}$  lautet:

$$\Phi(\mathbf{f}^k) = (\mathbf{g} - \mathbf{A}\mathbf{f}^k)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{g} - \mathbf{A}\mathbf{f}^k) + \beta \cdot \mathcal{R}\{\mathbf{f}^k\}.$$

Mit dem Parameter  $\beta$  kann der Einfluss des Strafterms gesteuert werden. Ein stärkerer Einfluss verursacht eine stärkere Glättung des Bildes, reduziert also das Rauschen im Bild. Jedoch muss dabei eine verschlechterte rekonstruierte Ortsauflösung in Kauf genommen werden. In der Regel wird  $\beta$  für jedes Messprotokoll - abhängig von der Messdauer, der applizierten Aktivität und der gewünschten Ortsauflösung - unter Absprache mit den Ärzten festgelegt.

Es gibt eine Vielzahl von unterschiedlichen Implementierungen der PWLS Methode. Ablaufkasten 3.4 zeigt den Ablauf der (engl.) *iterative coordinate descent* (kurz ICD) Modifikationsmethode, bei der die Bildelemente sequentiell modifiziert werden. Aufgrund der Verwendung des Relaxationsparameters  $\omega$  wird dieser Methode der Beinamen (engl.) *successive overrelaxation* (kurz SOR) gegeben, die vollständige Bezeichnung dieser Rekonstruktion lautet PWLS-ICD(+SOR) [31]. In dieser Arbeit wurde der PWLS-Algorithmus mit einer (engl.) *preconditioned conjugate gradient* (kurz PCG) Bildmodifikation mittels der  $J \times J$  Diagonalmatrix

$$\mathbf{M}(\mathbf{f}^k) = \mathcal{D}_j \left\{ \frac{1}{[\mathbf{H}(\mathbf{f})]_j} \right\} \quad (3.72)$$

als Vorbedingung (*precondition*) angewendet, wobei die Hessematrix  $\mathbf{H}$  die Elemente der zweiten Ableitungen der Schätzfunktion,

$$\mathbf{H}(\mathbf{f}^k) = \mathbf{A}^T \Sigma^{-1} \mathbf{A} + \beta \cdot \mathbf{C}^T \mathcal{D} \left\{ \ddot{\psi}(\mathbf{f}^k) \right\} \mathbf{C}, \quad (3.73)$$

enthielt. Diese Wahl wurde wegen der guten Konvergenzeigenschaften der PWLS-PCG bei gleichzeitig reduziertem Rechenaufwand getroffen. Die Abläufe bei der PWLS-PCG Bildrekonstruktion [35] sind in Ablaufkasten 3.5 aufgeführt.

### 3.3 Vergleich der analytischen und statistischen Rekonstruktion

In diesem Abschnitt wird ein Vergleich zwischen gefilterter Rückprojektion und iterativer statistischer Rekonstruktion anhand eines einfachen mathematischen Rekonstruktionsproblems angestellt [102]. Es kamen hierfür ausschließlich Programme aus J.A. Fessler's ASPIRE-Programm-Bibliothek [32] zum Einsatz. Im Gegensatz zu den in dieser Arbeit entwickelten Methoden wurde für diese Beispiele eine Systemmatrix verwendet, die mit den ASPIRE-Bibliotheksfunktionen analytisch berechnet wurde. Sie basierte nur auf geometrischen Beziehungen zwischen Parallelsinogramm und Bildmatrix, also ohne die Berücksichtigung von Detektorpositionen und -größen oder von physikalischen Wechselwirkungen.

Für diesen Vergleich wurde eine Bildmatrix bestehend aus  $8 \times 8$  Bildelementen der Kantenlänge 1 in zwei Parallelsinogramme gemäß Gleichung 3.1 auf Seite 28 projiziert. Die Zahl der transversen Sinogrammelemente betrug in beiden Fällen 16 mit einer Breite von 0,5, also der Hälfte der Kantenlänge der Bildelemente. Für das erste Sinogramm wurden Projektionen in zwei Winkelpositionen über  $180^\circ$  - in den Blickrichtungen  $0^\circ$  (von Oben) und  $90^\circ$  (von der Seite) - generiert. Das zweite Sinogramm enthielt vier Projektionen über  $180^\circ$  (Blickrichtungen:  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  und  $135^\circ$ ).

Die Bilder a in den Abbildungen 3.5 und 3.6 zeigen das zu rekonstruierende Bild, aus dem die jeweiligen Projektionsdaten generiert wurden. In dieser Bildmatrix wurden die zwei sichtbaren Elemente mit dem Wert 1 besetzt, die Inhalte aller anderen Elemente waren 0.

Die für zwei Projektionen rekonstruierten Bilder sind in Abbildung 3.5 dargestellt. Bild b zeigt das Resultat der gefilterten Rückprojektion, die Bilder o1 bis o4 und p1 bis p4 stellen die mit OSEM (1 Subset) und PWLS (PWLS-PCG) rekonstruierten Bilder nach 1, 2, 3 und 4 Iterationen dar. Aufgrund der limitierten Zahl von Projektionen konnte keine Methode die zwei Bildelemente zweifelsfrei rekonstruieren. Jedoch zeigen die iterativen OSEM Bilder schon nach einigen Iterationen eine erheblich verbesserte Qualität. Die Rekonstruktion mit PWLS zeigte nach anfänglich guten Resultaten bei wenigen Iterationen eine zunehmende Verschlechterung mit höherer Iterationszahl. Dies ist auf die geringe Anzahl von tomographischen Projektionen und die damit zusammenhängende Unterbestimmung des linearen Gleichungssystems - 64 Bildelemente, zu rekonstruieren aus 32 Projektionselementen - zurückzuführen.

In Abbildung 3.6 sind die entsprechenden Resultate aus der Rekonstruktionen des Sinogramms mit vier Projektionen gezeigt. Auffällig bei der gefilterten Rückprojektion ist die verbesserte Trennung der zwei wahren Quellen gegenüber den dazu symmetrisch positionierten, falsch rekonstruierten Intensitätsorten. Es verbleibt jedoch ein hoher Rauschanteil im Bild. Die OSEM Bilder zeigen schon nach der zweiten Iteration (Bild o2) eine klare Identifizierung der zwei Intensitätszentren. Der PWLS-Algorithmus demonstrierte für dieses Rekonstruktionsproblem gegenüber dem OSEM eine leicht verbesserte Konvergenz, die zwei hellen Quadrate waren bereits nach der ersten Iteration ohne nennenswerten Rauschuntergrund gefunden. Der in den Bildern enthaltene Untergrund ist in Abbildung 3.7 in Relation zum Bildmaximum aufgetragen. Hierzu wurden alle Bilder auf einen Maximalwert von 1 normiert und anschließend der Mittelwert und dessen Standardabweichung für jedes Bild ermittelt. Bei dieser Berechnung wurden jedoch die zwei, die wahre Verteilung enthaltenden, Areale (siehe Bilder a) ausgenommen. Bei dieser Abbildung ist zu beachten, dass die Wertebereiche beider Graphen zur besseren Visualisierung unterschiedlich gewählt wurden. Deutlich konnte im linken Graphen der steigende Rauschanteil der PWLS-Bilder mit zunehmender Zahl von

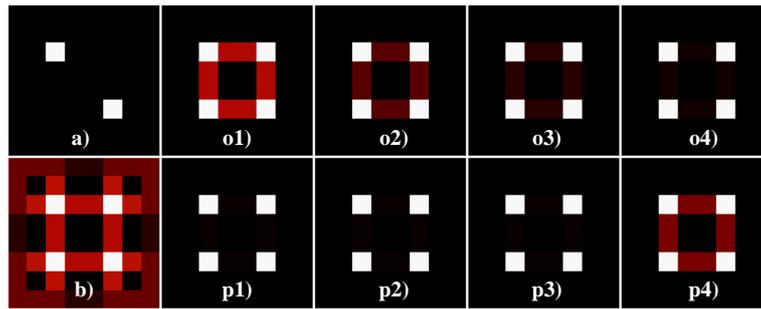


Abbildung 3.5: Rekonstruierte Bilder aus künstlichen Projektionsdaten: Beispiel anhand von zwei tomographischen Projektionen

Zu Abbildung 3.5: Alle hier dargestellten Bilder wurden auf einen Maximalwert von 1 normiert. Bild a) Originalverteilung; Bild b) Rekonstruiert mit gefilterter Rückprojektion; Bild o1-o4) OSEM Rekonstruktionen und Bild p1-p4) PWLS Rekonstruktionen, jeweils nach 1, 2, 3 und 4 Iterationen.

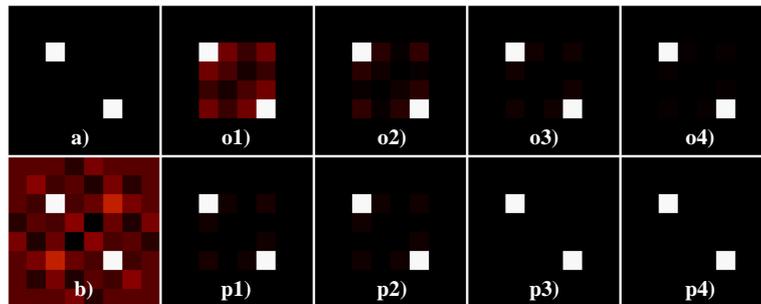


Abbildung 3.6: Rekonstruierte Bilder aus künstlichen Projektionsdaten: Beispiel anhand von vier tomographischen Projektionen

Zu Abbildung 3.6: Alle hier dargestellten Bilder wurden auf einen Maximalwert von 1 normiert. Bild a) Originalverteilung; Bild b) Rekonstruiert mit gefilterter Rückprojektion; Bild o1-o4) OSEM Rekonstruktionen und Bild p1-p4) PWLS Rekonstruktionen, jeweils nach 1, 2, 3 und 4 Iterationen.

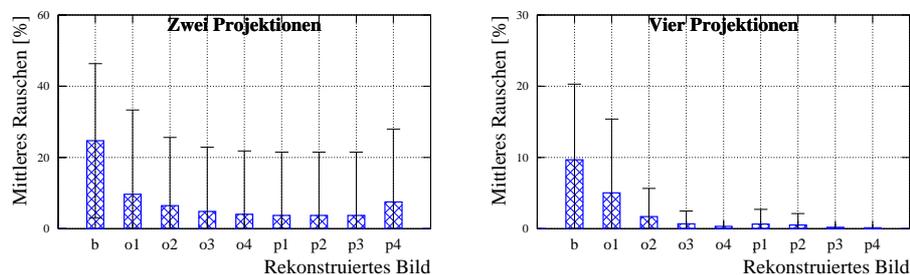


Abbildung 3.7: Rekonstruierte Bilder aus künstlichen Projektionsdaten: Mittleres Rauschen und dessen Standardabweichung bei zwei und vier Projektionen

Zu Abbildung 3.7: Dargestellt ist das mittlere Rauschen in den Bildern der Abbildungen 3.5 (links) und 3.6 (rechts), und die korrespondierenden Standardabweichungen. Für eine bessere Darstellung wurden unterschiedliche Wertebereiche verwendet!

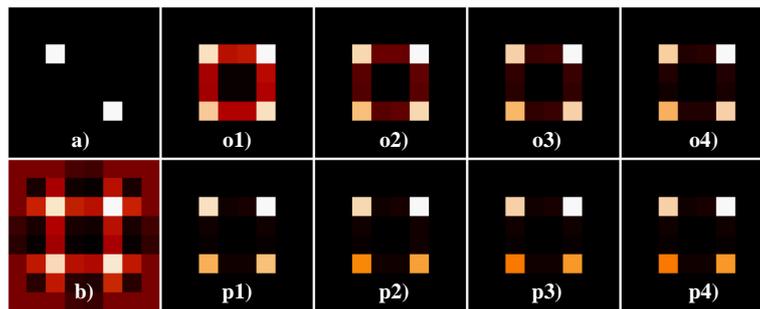


Abbildung 3.8: Rekonstruierte Bilder aus künstlichen, poissonverteilten, Projektionsdaten: Beispiel anhand von zwei tomographischen Projektionen

Zu Abbildung 3.8: Alle hier dargestellten Bilder wurden auf einen Maximalwert von 1 normiert. Bild a) Originalverteilung; Bild b) Rekonstruiert mit gefilterter Rückprojektion; Bild o1-o4) OSEM Rekonstruktionen und Bild p1-p4) PWLS Rekonstruktionen, jeweils nach 1, 2, 3 und 4 Iterationen.

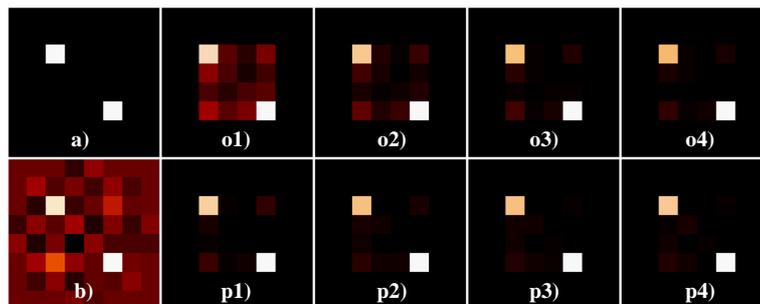


Abbildung 3.9: Rekonstruierte Bilder aus künstlichen, poissonverteilten, Projektionsdaten: Beispiel anhand von vier tomographischen Projektionen

Zu Abbildung 3.9: Alle hier dargestellten Bilder wurden auf einen Maximalwert von 1 normiert. Bild a) Originalverteilung; Bild b) Rekonstruiert mit gefilterter Rückprojektion; Bild o1-o4) OSEM Rekonstruktionen und Bild p1-p4) PWLS Rekonstruktionen, jeweils nach 1, 2, 3 und 4 Iterationen.

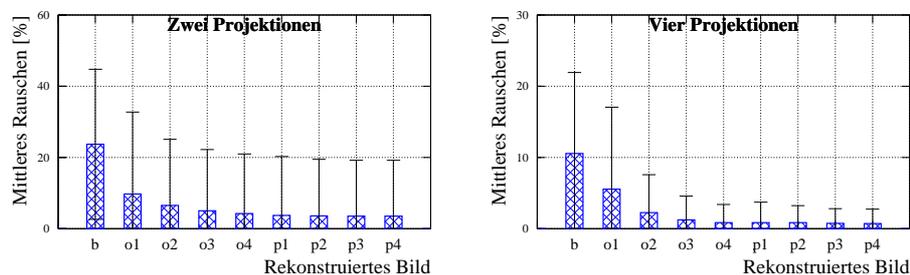


Abbildung 3.10: Rekonstruierte Bilder aus künstlichen, poissonverteilten, Projektionsdaten: Mittleres Rauschen und dessen Standardabweichung bei zwei und vier Projektionen

Zu Abbildung 3.10: Dargestellt ist das mittlere Rauschen in den Bildern der Abbildungen 3.8 (links) und 3.9 (rechts), und die korrespondierenden Standardabweichungen. Für eine bessere Darstellung wurden unterschiedliche Wertebereiche verwendet!

Iterationen beobachtet werden. Bei ausreichender Zahl von Projektionselementen (rechter Graph) war jedoch eine hervorragende Eliminierung des Untergrunds durch den PWLS schon nach der ersten Iteration festzustellen. In allen Fällen zeigte sich ein erhöhter Untergrund bei der gefilterten Rückprojektion.

Die künstlich erstellten Sinogramme entsprachen keiner realen Messbedingung. Um aus diesen realitätsnähere Daten zu erzeugen, wurden beide Sinogramme - unter Annahme eines einfachen Zähl-experiments ohne vorangegangene Korrekturen - als Poisson-Zufallsgrößen realisiert:

$$g(i) \rightarrow \text{POISSON} \{g(i)\}. \quad (3.74)$$

Die daraus rekonstruierten Bilder sind in Abbildungen 3.8 und 3.9 dargestellt, deren Untergrundanteile sind in Abbildung 3.10 zusammengefasst. Wie nicht anders zu erwarten, war die Unterbestimmtheit des Rekonstruktionsproblems für zwei tomographische Projektionen weiterhin beobachtbar. Für die Sinogramme mit vier Projektionen war der Effekt der Zufallszahlen anhand der unterschiedlichen Impulshöhen der beiden hellen Areale in Abbildung 3.9 deutlich erkennbar. Diese konnten aus den optimalen Daten noch mit gleicher Intensität rekonstruiert werden (Abbildung 3.6).

### 3.4 Besonderheiten bei der hochauflösenden PET

Eine Maßnahme zur Steigerung der Ortsauflösung eines Tomographen ist das Verkleinern der Detektorelemente und der Kantenlängen der zu rekonstruierenden Bildelemente. Diese Verkleinerungen resultieren jedoch in einem verkleinerten Raumwinkel eines Detektorpaares  $i$  bezüglich eines Bildelements  $j$ . Der Raumwinkel, also die geometrische Komponente des Gewichts  $a(i, j)$ , ist aber eine wesentliche Größe für die Sensitivität dieses Detektorpaares. Um einem Sensitivitätsverlust entgegen zu wirken, verkleinert man in der Regel den Ringdurchmesser bei hochauflösenden Tomographen. Ein erfreulicher Nebeneffekt dieser Verkleinerung ist, dass die Zahl der notwendigen Detektoren verringert werden kann und sich somit die Kosten für einen Tomographen reduzieren. Ein kleiner Ringdurchmesser verringert jedoch auch das mögliche Gesichtsfeld eines Tomographen. Um die Bildgebung des vollständigen Objekts gewährleisten zu können, muss bei einem Kleintiertomographen das Verhältnis Gesichtsfeld zu Ringdurchmesser wesentlich vergrößert werden (von ca 60% bei klinischen Tomographen auf ca 90%). Die Antwortfunktionen der dafür zu verwendenden Detektorpaare sind jedoch aufgrund des Parallaxeneffekts zunehmend verbreitert und verzerrt. Die Folge ist oft eine ortsabhängige rekonstruierte Auflösung, da die Verbreiterungen der Antwortfunktionen mit zunehmendem Abstand zum Zentrum des Gesichtsfeldes zunehmen. Um eine gleichmäßige und hohe Ortsauflösung in einem großen Gesichtsfeld zu erreichen, sind deshalb besondere Maßnahmen in der tomographischen Bildrekonstruktion gefordert.

Im Sinne der linearen Algebra können diese Effekte wie folgt zusammengefasst werden: das Verkleinern des Ringdurchmessers im Verhältnis zum Durchmesser des Gesichtsfeldes verringert die Größe  $I$ , also die Zahl der zur Verfügung stehenden Messpunkte, bei gleichbleibender Zahl  $J$  der zu rekonstruierenden Bildelemente. Das lineare Gleichungssystem enthält auf diese Weise weniger Zeilen bei gleich bleibender Zahl an Unbekannten. Die Folge ist ein unterbestimmtes und somit nicht lösbares lineares Gleichungssystem. Weiterhin wird bei Kleintiertomographen eine erhöhte Ortsauflösung gefordert. Dies ist jedoch nur durch Verkleinern der Bildelemente zu erreichen. Um ein gleichbleibend großes Gesichtsfeld zu

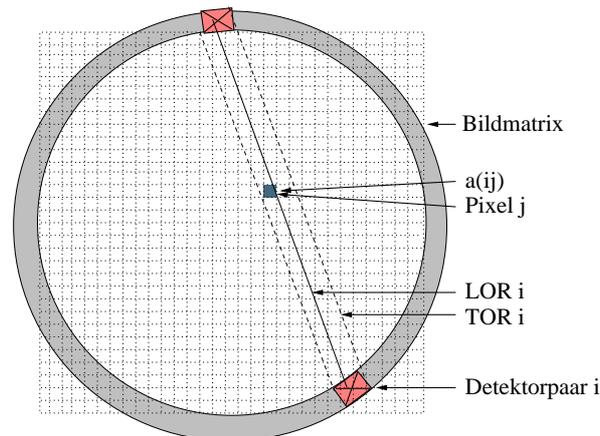


Abbildung 3.11: Rekonstruktionsproblem bei der hochauflösenden PET

Zu Abbildung 3.11: Durch eine unverhältnismäßige Verkleinerung der Pixel-Kantenlänge (zum Darstellen kleiner Strukturen) gegenüber den Ausmaßen der Detektoren können die TORs wesentlich breiter als die Pixel sein. Es entsteht eine unzureichende Abtastung der von einem Pixel bedeckten Objektfläche.

ermöglichen, erhöht sich in Folge dessen die Zahl der zu rekonstruierenden Bildelemente  $J$ . Die Entartung des linearen Gleichungssystems wird erhöht. Um weiterhin eine korrekte Rekonstruktion zu ermöglichen, sollte also die Zahl  $I$  der Messpunkte in der Rekonstruktion erhöht werden. Dies kann durch eine genauere Bestimmung der Antwortfunktion eines jeden Detektorpaares und eine Unterteilung der Größe  $I$  innerhalb der Rekonstruktionsalgorithmen in feinere Elemente erreicht werden.

Ziel dieser Arbeit war die Untersuchung und feine Abtastung der Antwortfunktionen aller Detektorpaare des MADPET und MADPET-II mittels Monte Carlo Simulationen und deren Berücksichtigung sowohl beim Rebinning mit anschließender gefilterter Rückprojektion als auch in der Systemmatrix der statistischen Bildrekonstruktion. In einem zweiten Schritt sollten die damit erreichten Verbesserungen anhand von experimentellen Daten aus Phantom- und Kleintiermessungen bestätigt werden.

### 3.5 Zusammenfassung von Kapitel 3

In diesem Kapitel wurden die Grundlagen der analytischen und statistischen Rekonstruktion dargelegt. Anhand von Beispielen konnte verdeutlicht werden, dass die statistische Rekonstruktion aufgrund ihrer sorgfältigeren Beschreibung des Rekonstruktionsproblems unter Berücksichtigung der diskreten Natur der Daten erhebliche Vorteile gegenüber der gefilterten Rückprojektion aufweist.

Die gefilterte Rückprojektion erlaubt aufgrund ihres einfachen analytischen Ansatzes keine Berücksichtigung von zusätzlichen Kenntnissen des Rekonstruktionsproblems, vielmehr werden alle Elemente des Sinogramms und des zu rekonstruierenden Bildes gleich behandelt. Diese Gleichbehandlung ist bei der statistischen Rekonstruktion durch die unterschiedlichen Elemente der Systemmatrix ausgeschlossen, jedes Messelement wird für jedes zu rekonstruierende Bildelement individuell über eine Nachweiswahrscheinlichkeit verknüpft. Es können somit in den statistischen Algorithmen alle bekannten Beziehungen zwischen Messelement und

Bildelement - z.B. die Abschirmung eines Kristalls durch seine Nachbarn, die Schwächung des Quantenflusses durch das Objekt, uvm. - berücksichtigt werden.

Die Berücksichtigung von zeitlichen Veränderungen des Messsystems ist zwar möglich, vergrößert jedoch den Aufwand erheblich. So müssten diese Veränderungen einerseits während der Messung genau erfasst und in Abschnitte ähnlichen Messverhaltens unterteilt werden. Andererseits müsste eine zeitliche Umsortierung der Messdaten bezüglich dieser quasikonstanten Messsituationen erfolgen und für jeden zeitlichen Abschnitt eine eigene Datenverarbeitung und Rekonstruktion durchgeführt werden. Diese Aufteilung würde somit den Aufwand wesentlich erhöhen und zudem die in einem zeitlichen Verarbeitungsschritt zur Verfügung stehenden Daten, also die Zahl der darin gemessenen Koinzidenzen, erheblich verringern. Um diese Probleme zu vermeiden, wird im Allgemeinen ein zeitlich unverändertes Messsystem gefordert. Ist dies gewährleistet, so können zeitliche Unterschiede in den Messdaten der sich verändernden Verteilung der Radiopharmaka zugeordnet werden. Dies erlangt besonders in dynamischen Studien Bedeutung, in denen die Kinetik der Radiopharmaka, also die zeitliche Änderung ihrer Verteilung bzw. Anreicherung untersucht wird.



## Kapitel 4

# Sektortomograph MADPET

Dieses Gemeinschaftsprojekt zwischen dem Max-Planck-Institut für Physik, München, und der Nuklearmedizinischen Klinik der Technischen Universität München hatte die Entwicklung eines neuen Detektorprinzips für Positronen-Emissions-Tomographen zum Ziel. Es beinhaltet erstmals die Verwendung von Halbleiterdetektoren zum Nachweis des von Cerium-dotierten Lutetium-Oxyorthosilikat (LSO) [91, 156] Szintillationskristallen emittierten Lichts. Im Zuge dieser Detektorentwicklung wurde ein Sektortomograph aufgebaut, anhand dessen die Tauglichkeit des angestrebten Detektorkonzepts zum Einsatz in der Positronen-Emissions-Tomographie evaluiert werden sollte. In Anlehnung an die Materialwahl wurde der 2D-Sektortomograph (engl.) *Munich Avalanche Diode Positron Emission Tomograph* oder kurz MADPET [155] genannt. Für eine detaillierte Beschreibung der Voruntersuchungen zur Wahl des Detektormaterials wird auf [132] verwiesen. Die Entwicklung der eingesetzten Detektoren und die Konstruktion des Tomographen ist in [110] beschrieben.

Ziel dieser Arbeit war das Erreichen einer hohen Bildqualität bei gleichzeitiger hoher rekonstruierter Ortsauflösung. Hierbei war zur besten Ausnützung des Tomographen einerseits eine Auflösung in der Nähe der intrinsischen Auflösung (ungefähr 2,1 mm) von zwei optimal zueinander ausgerichteten Kristallen anzustreben, andererseits sollte die rekonstruierte Auflösung innerhalb des Gesichtsfeldes unveränderlich sein. Weiterhin war vor allem zur Bildgebung von Ratten die Rekonstruktion von nahezu dem gesamten Tomographendurchmesser - anstelle der 50-60% bei herkömmlichen Methoden - verlangt. Schwerpunkt dieser Arbeit waren deshalb die Optimierung der Datenerfassung zur Gewährleistung einer zeitlich unveränderlichen Messbereitschaft (siehe Abschnitt 3.5 auf Seite 54), die Aufbereitung der Messdaten für die Rekonstruktion und die Entwicklung einer statistischen Rekonstruktionsmethode unter Berücksichtigung der systemtypischen Abbildungsfunktion [17, 49, 77, 83, 136, 143]. Eine Übersicht über die wesentlichen, in dieser Arbeit für den MADPET entwickelten Methoden ist in Abbildung 4.1 auf Seite 59 zu finden. Sie zeigt das Flussdiagramm für den Weg der MADPET-Daten von der Messung oder Simulation bis hin zum rekonstruierten Bild unter Angabe der Referenzen auf die vertiefenden Textabschnitte.

In diesem Kapitel wird unter anderem die Erzeugung tomographischer Daten aus den Monte Carlo Simulationen dargelegt. Eine vollständige Beschreibung der für die Bildrekonstruktion entwickelten Methoden liegt jedoch erst am Ende dieses Kapitels vor. Abschnitt 4.8 auf Seite 96 zeigt die Resultate der in diesem Kapitel vorgestellten Methoden, angewendet auf simulierte und gemessene Phantomdaten. Für jede Methode werden die erreichte Ortsauflösung und Bildqualität analysiert.

**Anmerkung 2** Eine Zusammenfassung der in diesem Kapitel in mathematischen Ausdrücken verwendeten Bezeichnungen ist im Anhang A auf den Seiten 159 bis 163 zu finden.

## 4.1 Aufbau des Tomographen

### 4.1.1 Detektoren des MADPET

Zur Gewährleistung einer hohen intrinsischen Ortsauflösung des Systems und der eindeutigen Bestimmung der bei einer Wechselwirkung beteiligten Detektorelemente wurde zum Aufbau der MADPET-Detektoren die Kopplung von einzelnen LSO-Kristallen [91] mit einzelnen Lawinen Photodioden realisiert [110, 132]. Der LSO-Szintillationskristall ( $\text{Lu}_2(\text{SiO}_4)\text{O}:\text{Ce}$ ) weist gegenüber dem herkömmlich in PET-Geräten verwendeten BGO ( $\text{Bi}_4(\text{GeO}_3)_4$ ) eine 5-fache Lichtausbeute und eine kürzere Szintillationsabklingzeit von nur 40 ns auf. Beim Aufbau des Detektors kamen  $2 \times 8$  Matrizen, bestehend aus 16 APD-Einzeldioden, zum Einsatz (siehe Abbildung 4.2). APD-Lichtsensormatrizen ermöglichen eine wesentlich engere Bauweise als die bisher in PET-Detektoren verwendeten Photomultiplier, was besonders für den geplanten Vollringtomographen MADPET-II (siehe Kapitel 6 auf Seite 119) von entscheidender Bedeutung war. Durch diese eins-zu-eins Kopplung einzelner  $3,7 \times 3,7 \times 12 \text{ mm}^3$  LSO Kristalle (Abbildung 4.3) an die Elemente der APD-Matrizen konnten sechs Detektormodule (Abbildung 4.4) aufgebaut und auf eine rotierbare Scheibe montiert werden. Die in Abbildung 4.5 gezeigte Anordnung der sechs Module in zwei Sektoren entlang der Kanten eines Achtecks beruhte auf der Forderung nach einer hohen Abtastdichte, ohne das Gesichtsfeld einzuschränken. Aufgrund der entstandenen Lücken im Detektorsystem war die Rotation der Scheibe während der Messung in 30 Winkelschritten über  $180^\circ$  zur Gewährleistung vollständiger tomographischer Projektionsdaten gefordert [9, 122, 124, 125]. Obwohl durch die Anordnung der LSO-APD Einzeldetektoren in  $2 \times 8$  Matrizen (siehe Abbildung 4.2) ein Tomograph mit zwei axialen Schichten möglich gewesen wäre, musste wegen fehlender Elektronikelemente auf den Betrieb der zweiten Schicht verzichtet und die Messung auf den 2D-Modus beschränkt werden.

### 4.1.2 Analoge Detektorelektronik

Bei der Wechselwirkung eines Gammaquants mit dem LSO-Szintillationskristall emittiert dieser proportional zur deponierten Energie Licht (28000 Photonen pro MeV Energiedeposition). Der für LSO charakteristische Wellenlängenbereich liegt bei ungefähr 370-520 nm mit einer maximalen Emissionsintensität bei 420 nm. Die Umformung dieser Lichtmenge durch den APD-Lichtsensordetektor resultiert in sehr niedrigen Ladungsimpulsen. Die Quanteneffizienz der verwendeten APDs liegt bei 0,75 Elektronen pro erfasstem Photon. Zur besseren Verarbeitung dieser Impulse wurden im MADPET eigens entwickelte, besonders rauscharme Vorverstärker (Max-Planck-Institut für Physik, München)[110] eingesetzt. Diese bereiten den Ladungsimpuls bezüglich seiner Form und Größe zur weiteren Analyse durch die Koinzidenzelektronik auf. Eine Energiedeposition im Kristall von 500 keV entsprach nach Vorverstärker einer Impulshöhe von ungefähr 50 mV. Um eine sinnvolle Koinzidenzschaltung zu ermöglichen, wurden die Hochspannungsversorgungen aller APD-Kanäle so eingestellt, dass der Photoeffekt von 511 keV Gammaquanten mit dem jeweiligen Kristall, nach dem Durchlaufen einer weiteren Impulsformungs- und Verstärkungsstufe (semigaußischer Filterverstärker mit 50 ns Integrationszeit, engl. *shaper*), in einer Impulshöhe von ungefähr 500 mV resultierte.

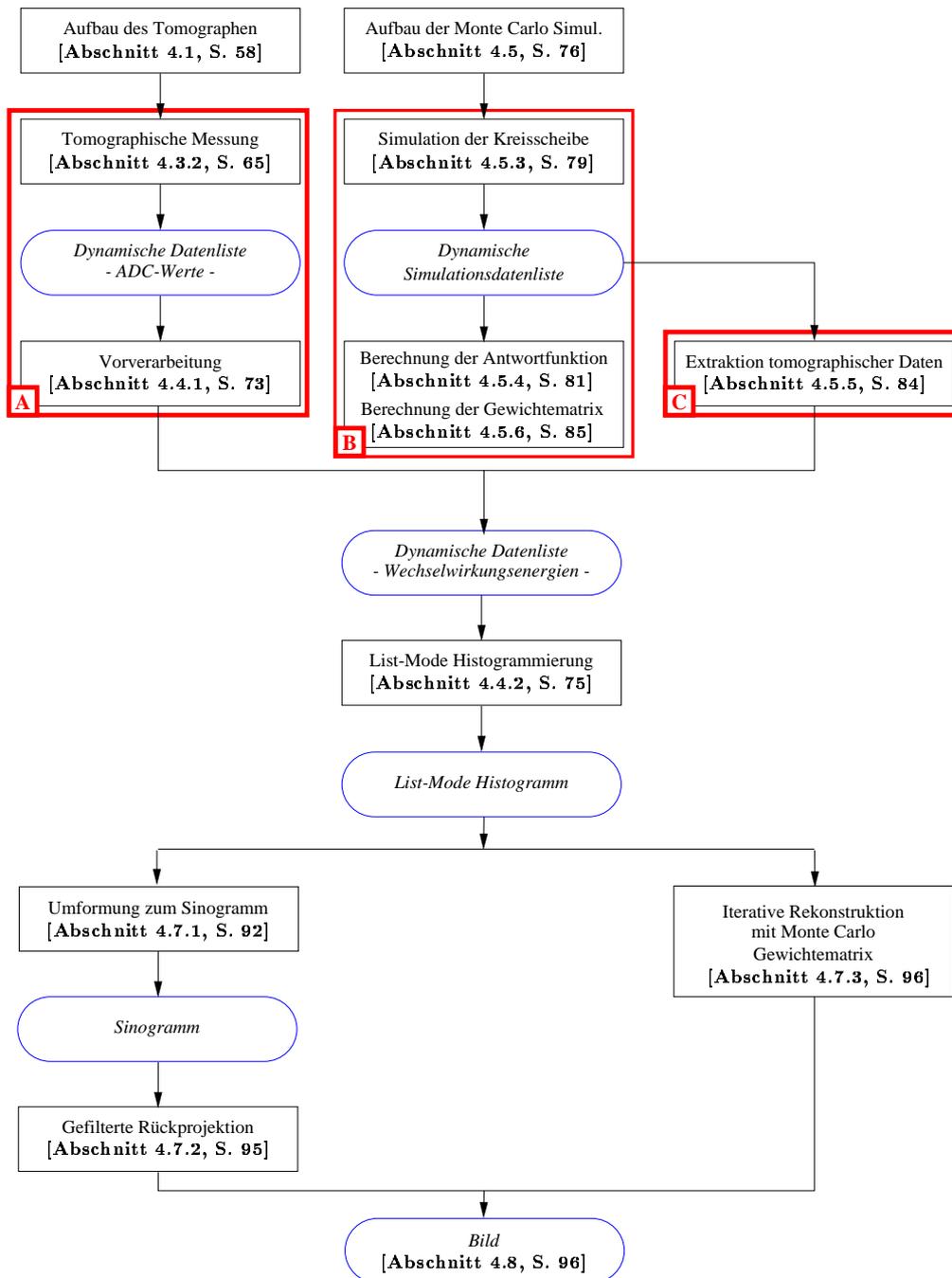


Abbildung 4.1: Grundlegende Wege des MADPET-Datenstroms

Zu Abbildung 4.1: Operationen sind durch eckige Rahmen, die daraus resultierenden Daten durch abgerundete Rahmen gekennzeichnet. Kasten A) Die Messung der tomographischen Daten erfolgte für jedes Objekt. Kasten B) Die Simulation der Kreisscheibe wurde einmalig durchgeführt, zusammen mit der Berechnung der Antwortfunktionen und der Gewichtematrix. Kasten C) Aus der Simulation wurde für jede zu untersuchende simulierte Verteilung eine koinzidente Datenliste extrahiert, ähnlich der in Kasten A beschriebenen Messung.

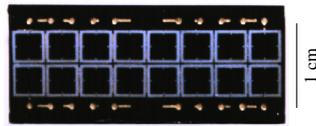


Abbildung 4.2: APD Einzeldioden, angeordnet in einer 2x8 Matrix (Hamamatsu, Japan)



Abbildung 4.3: LSO Kristalle (CTI Inc., USA) zur Montage auf einer Reihe der APD Matrix

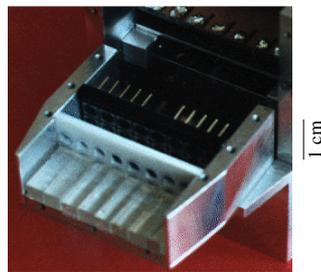


Abbildung 4.4: Zerlegtes Detektormodul des MADPET



Abbildung 4.5: Anordnung der Detektormodule auf der rotierbaren Scheibe des MADPET

### 4.1.3 Koinzidenzelektronik

Abbildung 4.5 zeigt die Aufteilung der sechs Detektormodule in zwei Blöcke mit je drei Modulen. Bei nur einer betriebenen tomographischen Schicht resultierte diese Unterteilung in 24 Einzeldetektoren je Detektorblock. Die Suche nach dem koinzidenten Eintreffen je eines Gammaquants im ersten und im zweiten Block erfolgte mittels einer logischen Koinzidenzelektronik. Abbildung 4.6 veranschaulicht diese Schaltung anhand eines Blockdiagramms.

Die Vorverstärkersignale der 24 Detektoren eines Detektorblocks wurden vor dem *shaper* abgezweigt und an mehrere Impulshöhen Diskriminatoren weitergeleitet. War mindestens eines der an einen Diskriminator angelegten Signale höher als die eingestellte Diskriminatorschwelle von ungefähr 20-35 mV (dies entsprach einer Energiedeposition von ungefähr 200-350 keV), so wurde von diesem ein logisches Signal an eine ODER-Einheit gesendet. Die Ausgänge der ODER-Funktionen beider Blöcke wurden in einer UND-Schaltung innerhalb der Breite des Koinzidenzfensters ( $2\tau = 22$  ns) auf quasi-gleichzeitiges Eintreffen geprüft.

War dies der Fall, so wurde ein GATE-Impuls an die Kanäle der Analog-zu-Digital Konverter (engl. *analog-to-digital converter*, kurz ADC) gesendet, der diese zur Digitalisierung der angelegten Spannungshöhen veranlasste. Nach vollendeter Digitalisierung setzten die ADC-Module ein (engl.) *look-at-me* (kurz LAM) Flaggensignal auf dem CAMAC-Bus. Der daran angeschlossene Rechner befand sich während der Messung im Wartezustand auf das LAM-Signal. War dieses am CAMAC-Bus gesetzt, wurde durch das Messprogramm die Auslese aller ADC-Kanäle gestartet. Anschließend erfolgte im Rechner eine Vorauslese der erfassten Impulshöhen. Es wurden nur jene Daten akzeptiert und gespeichert, die genau eine Wechselwirkung pro Block registriert hatten. Damit wurde ein konstantes Datenvolumen für jede zu speichernde Koinzidenz erreicht. Mehrfach im Detektorsystem gestreute Gammaquanten wurden damit jedoch von der Registrierung ausgeschlossen. Die im MADPET verwendeten APDs der ersten Generation wiesen einen hohen Untergrund auf. Signale, die innerhalb dieses Untergrunds lagen, wurden durch die eingangs beschriebene Diskriminatorschwelle verworfen (siehe auch Abbildung 4.13 auf Seite 73). Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gammaquant mit zwei unterschiedlichen Kristallen jeweils eine oder mehrere Wechselwirkungen erfuhr, und dabei beide resultierenden Signale oberhalb der Diskriminatorschwelle (ungefähr 200-350 keV) lagen, war damit verschwindend gering. Das Registrieren dieser im Detektorsystem gestreuten Gammaquanten wäre nur im Falle eines wesentlich geringeren Untergrunds der APDs und somit niedrigerer Diskriminatorschwellen möglich gewesen. Für jede erfasste Koinzidenz - charakterisiert durch nur zwei Detektoren mit Signalen oberhalb der Diskriminatorschwelle - wurden die Nummern  $c_a$  und  $c_b$  der beiden beteiligten Detektoren und die digitalisierten Inhalte der ADCs  $D_a$  und  $D_b$  unverarbeitet in der Form

$$\{c_a, c_b, D_a, D_b\}$$

an eine Datenliste angehängt. Aufgrund dieser unverarbeiteten Sammlung der Daten in einer dynamisch wachsenden Liste wurde dieser Messdatensatz Datenliste (engl. *list-mode data*) genannt. Das Datenvolumen für eine gemessene Koinzidenz betrug je 8 Bit für die Kanalnummern  $c_a$  und  $c_b$  sowie je 16 Bit für die Impulshöhen  $D_a$  und  $D_b$ , also insgesamt 48 Bit. Speziell für den MADPET entwickelte und angepasste Einzelheiten der Koinzidenzauslese werden im Abschnitt 4.3 dargelegt.

## 4.2 Koordinaten und Bezeichnungen

Abbildung 4.7 zeigt die speziell für den MADPET verwendeten Koordinaten und Indizes. Das dargestellte System  $(x', y')$  befindet sich um den Winkel  $\varphi = -18^\circ$  gegenüber dem raumfesten kartesischen  $(x, y)$ -Koordinatensystem im Uhrzeigersinn rotiert. Im Falle von 30 Winkelschritten über  $180^\circ$  entspricht diese Stellung der Messung im vierten Winkelschritt. Zu den Rotationswinkeln ist folgendes zu bemerken:

- Der Winkel  $\phi$  wurde entgegen der mathematischen Konvention eingeführt. Er gab den auf der rotierbaren Scheibe des Tomographen eingezeichneten Winkel an und wurde im Uhrzeigersinn als positiver Wert definiert.
- Der Winkel  $\varphi = -\phi$  stellte den mathematisch korrekten Winkel dar. Er gab die Rotation des Tomographen-Koordinatensystems  $(x', y')$  gegenüber dem raumfesten  $(x, y)$ -Koordinatensystem im Uhrzeigersinn als negativen Wert wieder.

In diesem Kapitel werden Drehungen der Koordinatensysteme im Zuge der Verarbeitung der Monte Carlo Simulationen behandelt. Die beiden zur Anwendung kommenden Drehoperationen sind:

- Die Berechnung der Koordinaten eines Punktes  $\mathbf{x}'$  im um  $\varphi$  gedrehten System aus seinen Koordinaten  $\mathbf{x}$  im raumfesten System wird durch die Drehung  $\mathcal{D}_\varphi$  vollzogen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}}_{\mathcal{D}_\varphi} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}}. \quad (4.1)$$

- Die Berechnung der Koordinaten eines Punktes  $\mathbf{x}$  im raumfesten System aus seinen Koordinaten  $\mathbf{x}'$  im um  $\varphi$  gedrehten System wird durch die Rückdrehung  $\mathcal{D}'_\varphi$  vollzogen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & \sin(-\varphi) \\ -\sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix}}_{\mathcal{D}'_\varphi} \underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}'}. \quad (4.2)$$

Die vollständige Angabe der Kanalnummern in Abbildung 4.7 umfasst

- (N1) die auf den Modulen abgedruckten Nummern der acht Kanäle der jeweiligen APD,
- (N2) deren Verschaltung mit den Kanälen der ADC-Module und
- (N3) die weitere Behandlung der Kanalnummern in einer zyklischen Indizierung durch die verarbeitenden Programme.

Die Größe  $\xi$  zur Indizierung der in Koinzidenz messenden Detektorpaare wird aus den N3-Kanalnummern eines Kanals  $a$  im unteren Block ( $c_a \in [0, 23]$ ) und eines Kanals  $b$  im oberen Block ( $c_b \in [24, 47]$ ) wie folgt definiert:

$$\xi = (c_a \cdot 24) + (c_b - 24). \quad (4.3)$$

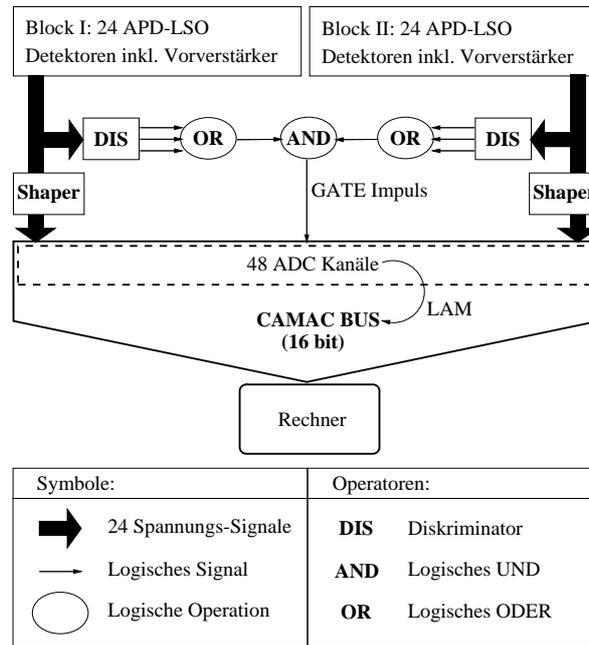


Abbildung 4.6: Blockdiagramm der Koinzidenzelektronik des MADPET

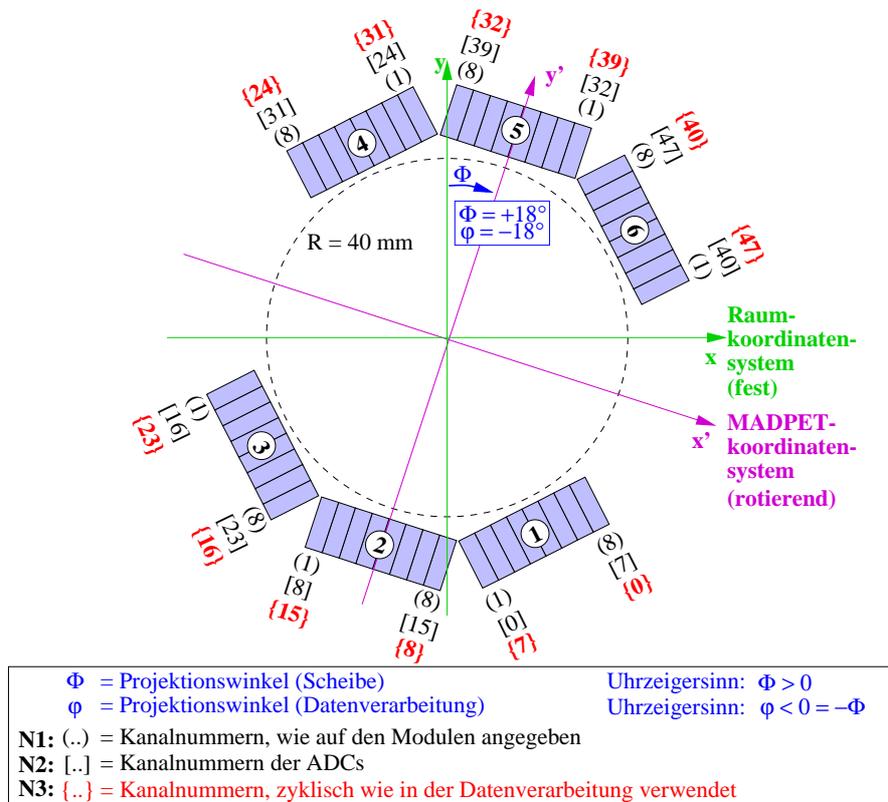


Abbildung 4.7: Indizierung der Kanalnummern, festes Raum- und rotierendes Tomographen-Koordinatensystem

Die hierfür verwendeten Nummern  $c_a$  und  $c_b$  entsprechen den in Abbildung 4.7 mit N3 angegebenen, zyklisch durchnummerierten Kanälen. Der angedeutete Kreis mit 40 mm Radius stellt den durch unsere speziellen Methoden rekonstruierbaren Bereich dar. Die generellen Konventionen bei der Namensgebung von Variablen sind in Tabelle A.2 auf Seite 160 angegeben. Eine Auflistung der in diesem Kapitel zum Einsatz kommenden Variablen ist in Tabelle A.5 auf Seite 162 angegeben. Die darin enthaltenen Bezeichnungen werden im Laufe des Kapitels genauer erläutert.

### 4.3 Messung mittels einer parallelen virtuellen Maschine

Die in Kapitel 3 vorgestellten Methoden zur Verarbeitung tomographischer Daten im Sinne der Bildrekonstruktion setzen voraus, dass entweder alle tomographischen Daten unter identischen Messbedingungen aufgenommen wurden, oder Unterschiede in den Messbedingungen bekannt und z.B. in die Systemmatrix integrierbar sind. Die genaue Bestimmung von zeitlichen Veränderungen der Eigenschaften des Messsystems und deren Berücksichtigung in der Datenverarbeitung ist jedoch nur schwer realisierbar. Diese zeitliche Variabilität betrifft hauptsächlich die Fähigkeit des Systems, die gemessenen Koinzidenzen zu digitalisieren, zu verarbeiten und zu speichern. Wie in den folgenden Abschnitten gezeigt werden soll, wird diese Variabilität sowohl durch für die Messung notwendige, als auch durch für die Messung unwesentliche Anforderungen an den Ausleserechner verursacht. Um eine korrekte Behandlung der gemessenen Daten zu gewährleisten, wurde am MADPET auf eine hohe Auslesebereitschaft mit möglichst geringer zeitlicher Veränderung Wert gelegt. Dies konnte durch den Aufbau des Messsystems als virtueller Parallelrechner (engl. *parallel virtual machine*, kurz PVM) und der damit möglichen Lastverteilung auf mehrere Prozessoren erreicht werden [10, 11]. Dieser Aufbau und dessen Wirkungsweise werden im Abschnitt 4.3.2 detailliert dargelegt.

#### 4.3.1 Genereller Aufbau des Messsystems

Die Dauer für die vollständige Registrierung einer Koinzidenz wird, da das Messsystem während dieser Zeit nicht für die Erfassung einer weiteren Koinzidenz zur Verfügung steht, Totzeit (engl. *deadtime*) des Systems genannt. Da die Zeitpunkte der Emissionen der Gammaquantenpaare und somit deren Wechselwirkungen mit den Kristallen beliebig schnell aufeinander folgen können, wäre eine verschwindend geringe Totzeit des Messsystems anzustreben. Mit der Erfüllung dieser unerreichbaren Forderung wäre das Messsystem jederzeit für die Registrierung der Wechselwirkungen bereit. Das Messsystem des MADPET bestand im Wesentlichen aus folgenden Einheiten, die jeweils auf ihre konstante Bereitschaft zur Datenaufnahme und -verarbeitung zu optimieren waren, um eine geringe Totzeit des Systems zu gewährleisten:

- LSO-APD Detektor, analoge Verstärker- und Koinzidenzelektronik,
- CAMAC-Schnittstelle zum Messrechner,
- Messrechner und Schnittstellentreiber und
- Messprogramm.

Die bei der Erfassung einer Koinzidenz anfallenden Verarbeitungszeiten dieser Einheiten sind in Tabelle 4.1 aufgeführt. Im Zuge der Detektorentwicklung innerhalb des MADPET-Projekts

Bestandteil	Zeitparameter		
LSO-APD Detektor, Vorverstärker	50	<i>ns</i>	Ladungspulsdauer
LSO-APD Detektor, Vorverstärker und Koinzidenzelektronik	3,2	<i>ns</i>	Koinzidente Zeitauflösung
ADC-Module	0,6	$\mu s$	Totzeit pro Digitalisierung
CAMAC-Schnittstelle	1,6	$\mu s$	Totzeit pro geschriebenem Byte
	4,6	$\mu s$	Totzeit pro gelesenenem Byte
Gesamt, inkl. Messprogramm	$\approx 400$	$\mu s$	Totzeit pro Koinzidenzauslese

Tabelle 4.1: Einige charakteristische Zeitparameter des Messsystems

lag bereits ein optimierter, schneller Detektor zusammen mit der entsprechenden Verstärkerelektronik vor. Die Elemente der Koinzidenzelektronik wurden aus bereits vorhandenen CAMAC und NIM Modulen zusammengestellt. Diese für die schnelle Signalverarbeitung konzipierten Geräte wiesen ausreichend geringe Tot- bzw. Erholungszeiten auf.

Das Nadelöhr des Messaufbaus stellten die Schnittstelle zwischen Rechner und CAMAC-Bussystem sowie der Rechner und die darauf laufenden Messprogramme dar. Für die Machbarkeitsstudie MADPET musste somit ein kostengünstiges, wenn möglich aus vorhandenen Elementen aufzubauendes, Rechnersystem entwickelt werden. Der am MADPET implementierte Messaufbau und die Messprogramme wurden unter der Forderung entwickelt, die durch die Totzeit auftretenden Pausen zu minimieren und eine Korrektur für die verbleibenden Pausen in die Messung zu integrieren. Weiterhin wurden zusätzliche Belastungen des Messsystems durch für die unmittelbare Messung unnötige Anforderungen ausgeschlossen.

Aufgrund seiner hohen Anpassungsmöglichkeiten wurde für alle Rechner das Betriebssystem Linux verwendet. Im Zuge dieser Arbeit wurde als erster Schritt zur Optimierung des Messrechners die Programmierung eines Linux-Treibers für die CAMAC-Schnittstellenkarte durchgeführt [84]. Er sollte nur die für den MADPET notwendigen Funktionen zur Verfügung stellen. Überflüssige Berechnungen während der Kommunikation wurden bewusst nicht in den Treiber integriert. Da die gesamte Auslese einer Koinzidenz zu optimieren war, wurden die geforderten Operationen für die Koinzidenzauslese von dem Treiber unterstützt bzw. teilweise in ihn eingebunden. Der Ablaufkasten 4.1 gibt eine Aufstellung der für die vollständige Auslese einer Koinzidenz durchzuführenden Aktionen. Durch Optimieren des Schnittstellentreibers und der Ausleseoperationen konnte die Totzeit für die Auslese einer Koinzidenz - also die Zeitdifferenz zwischen den beiden Zeitmarken - auf ungefähr  $400 \mu s$  reduziert werden (siehe Tabelle 4.1). Diese während der Messung bei jeder Koinzidenzauslese berechnete Zeitdifferenz wurde nach der Auslese zu der geforderten Dauer des aktuellen tomographischen Winkelschritts addiert (siehe nächster Abschnitt). Die Summe aller Auslesezeiten innerhalb eines Winkelschritts wurde als Rechnertotzeit registriert.

### 4.3.2 PVM-gestützte Messung

Das generelle Problem bei der rechnergestützten Auslese einer Elektronik ist die Auslastung des Messsystems. Soll eine hohe Bereitschaft des Systems für die Auslese der Koinzidenzen gewährleistet werden [60], müssen zusätzliche Anforderungen an diesen Rechner unterbunden werden. Diese Anforderungen beinhalten sowohl alle von einem Benutzer aufrufbaren Programme als auch die für eine Messung notwendigen Operationen wie die Speicherung

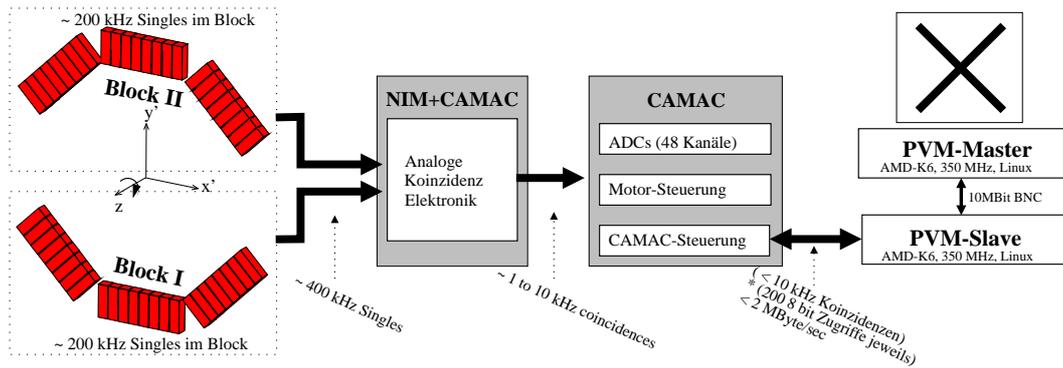


Abbildung 4.8: Schematischer Aufbau des MADPET-Messsystems

Zu Abbildung 4.8: Der PVM-Slave Rechner ist über die CAMAC-Schnittstelle mit dem Messsystem verbunden. Es ist kein Monitorssystem an diesen Rechner angeschlossen. Der PVM-Master Rechner kommuniziert über eine Netzwerkverbindung mit dem Slave und dient zur simultanen Kontrolle der Messung und Verarbeitung der gemessenen Daten.

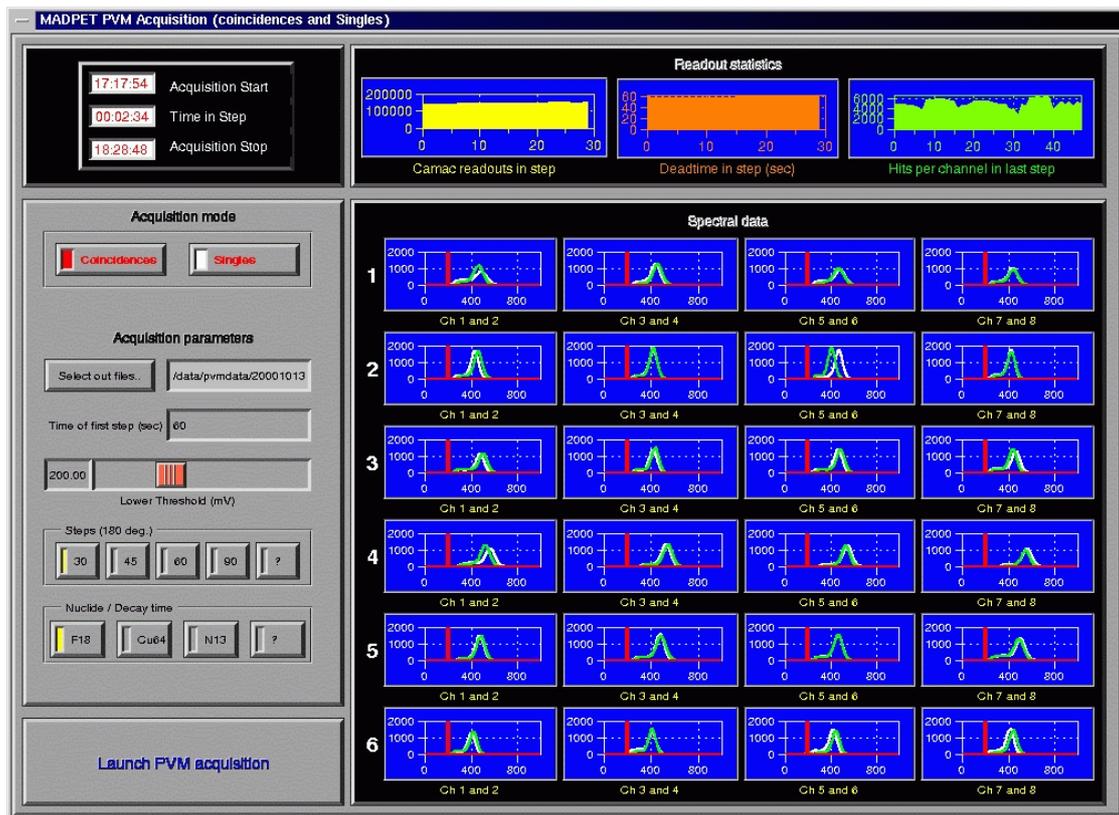


Abbildung 4.9: Steuerung und Überwachung der MADPET-Messung

Zu Abbildung 4.9: Die oberen drei Graphen stellen (v.l.n.r.) die Anzahl der CAMAC-Ausleseoperationen je Winkelschritt, die absolute Totzeit je Winkelschritt in Sekunden und die Anzahl der gemessenen Koinzidenzen pro LOR im letzten Winkelschritt dar. Im unteren Abschnitt sind die Spektren aller 48 Kanäle - jeweils zwei in einem Graphen - aufgetragen. Die Ziffern 1 bis 6 links von den Graphen geben die Nummern der Detektormodule an.

- |    |  |
|----|--|
| 1) | Abfrage der aktuellen Zeit (Zeitmarke 1)   |
| 2) | Blockieren des CAMAC-Busses, um das Vermischen der auszulesenden Impulshöhen mit während der Auslese ankommenden Werten zu verhindern                      |
| 3) | Auslese aller 48 ADC-Kanäle  |
| 4) | Löschen aller 48 ADC-Kanäle  |
| 5) | Löschen des CAMAC-LAM-Signals  |
| 6) | Abfrage der aktuellen Zeit (Zeitmarke 2)   |
| 7) | Berechnen der Zeitdifferenz zwischen den Zeitmarken 1 und 2 und Verlängern der Messzeit des aktuellen Winkelschritts um diese Differenz (Totzeitkorrektur) |
| 8) | Freigabe des CAMAC-Busses und warten auf das nächste LAM Signal  |

Ablaufkasten 4.1: Sequenz für das Auslesen einer nachgewiesenen Koinzidenz

oder die Verarbeitung und Darstellung der gemessenen Daten während der Messung. Um die Rechenleistung des Messrechners möglichst vollständig für die Auslese der MADPET Elektronik zur Verfügung zu stellen, wurde auf das Mittel der Lastverteilung in einem Rechnernetz zurückgegriffen. Dies konnte mit einer Programmbibliothek, der parallelen virtuellen Maschine [38, 100, 118, 142] (engl. *parallel virtual machine*, kurz PVM), erreicht werden. Mit diesem Werkzeug lassen sich innerhalb eines Netzwerkes Lasten auf mehrere Rechner verteilen, als wären diese in einem großen Parallelrechner zusammengefasst.

Der in dieser Arbeit entwickelte Aufbau des MADPET Messsystems basierend auf einer PVM ist in Abbildung 4.8 dargestellt. Zur Auslese der Koinzidenzelektronik und zur Steuerung des CAMAC-Busses wurde ein Rechner (PVM-Slave, AMD-K6, 350 MHz, 64 MB Arbeitsspeicher) verwendet, der keine Anforderungen durch einen Benutzer zuließ und keine weiteren Netzwerkfunktionen wie z.B. Serverdienste anbot. Die eigentliche Steuerung und Kontrolle der Messung erfolgte durch einen zweiten Rechner (PVM-Master, AMD-K6, 350 MHz, 128 MB Arbeitsspeicher), der eine normale Netzwerkpräsenz darstellte, also grafische Oberfläche, Festplatten zur Speicherung der Daten, Web-Server uvm. zur Verfügung stellte. Für beide Maschinen wurden kostengünstige Standardrechner eingesetzt. Die in Abbildung 4.9 dargestellte grafische Benutzerschnittstelle diente zur Einstellung der Messparameter wie der Anzahl der tomographischen Schritte, der Dauer des ersten tomographischen Schritts, des Dateinamens, des zu messenden radioaktiven Nuklids und der unteren Impulshörschwelle für die rechnerseitige Vorsortierung. Weiterhin wurde über diese Schnittstelle die Messung gestartet und mittels der zeitgleichen Datenvisualisierung - durch die Darstellung der Energiespektren aller 48 Einzeldetektoren - überwacht.

#### 4.3.2.1 Ablauf der PVM-gestützten Messung

Die PVM-gestützte Messung des MADPET basierte auf der Forderung, dass die Zeitpunkte aller auf dem Messrechner anfallender Lasten bekannt und steuerbar waren. Um dieses Ziel zu erreichen, wurde die Synchronisation von Kontroll- und Messprogramm angestrebt. Abbildung 4.10 verdeutlicht das, für das MADPET-Messprogramm entwickelte, PVM-basierte Prinzip der Synchronisation zweier Prozesse. Wege im Programmablauf sind hierbei durch dünne Pfeile, PVM-Übertragungen durch dicke Pfeile gekennzeichnet. Abgerundete Rahmen

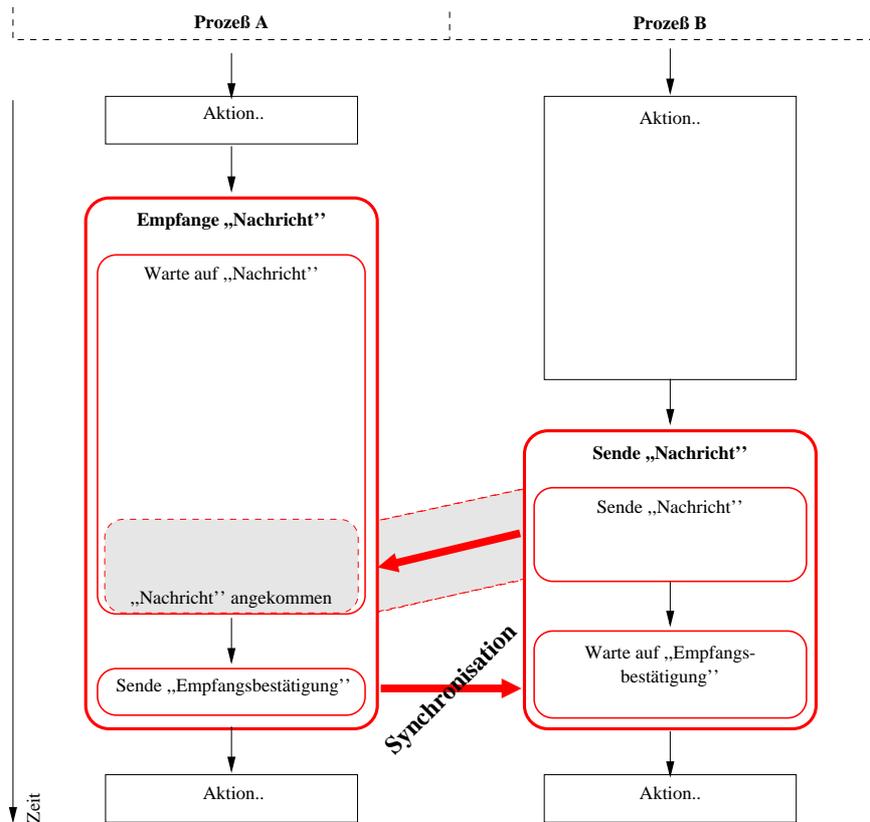


Abbildung 4.10: Flussdiagramm der PVM-gestützten Synchronisation zweier Prozesse

symbolisieren Aktionen, die sich der PVM bedienen. In diesem Flussdiagramm wurde auf die verstreichende Zeit während des Ablaufs in der vertikalen Koordinate geachtet. Ein Prozess A in der linken Spalte wartet nach der Abarbeitung einer kurzen Aktion auf den Empfang der PVM-Meldung „Nachricht“, kommend vom Prozess B. Dieser sendet nach Fertigstellung einer längeren Aktion die gewünschte Meldung. Die zu übertragende Meldung „Nachricht“ wird hierbei als ein großes Datenpaket (z.B. einige Megabyte) angenommen. Die Übertragungsdauer für diese Datenmenge ist durch den schräg nach unten verlaufenden Pfeil angedeutet. Prozess B wartet nun seinerseits auf den Erhalt der Empfangsbestätigung. Diese wird von Prozess A nach dem vollständigen Empfangen der „Nachricht“ gesendet. Hierbei ist zu beachten, dass die Empfangsbestätigung lediglich aus einigen Byte besteht und deren Übertragungszeit somit vernachlässigt werden kann. Nach dem Absenden bzw. Erhalten dieser Empfangsbestätigung fahren beide Prozesse mit ihrem jeweiligen Programmablauf synchron fort. Im weiteren Verlauf dieses Abschnitts werden die in Abbildung 4.10 als große umrandete Kästen (z.B. Warte auf Empfang von „Nachricht“ und anschließendem Sende „Empfangsbestätigung“) dargestellten Synchronisations-Kombinationen zur übersichtlicheren Darstellung als eine Einzelaktion (Empfange „Nachricht“) zusammengefasst.

Der vollständige Ablauf der PVM-gestützten tomographischen Messung am MADPET ist als Flussdiagramm in Abbildung 4.11 dargestellt. Zusätzliche, zwischen dem Master-Prozess und der grafischen Benutzerschnittstelle ausgetauschte Anweisungen und Daten sind als dicke, nicht ausgefüllte, Pfeile angegeben. Die Beschreibung des Prozesses auf dem PVM-

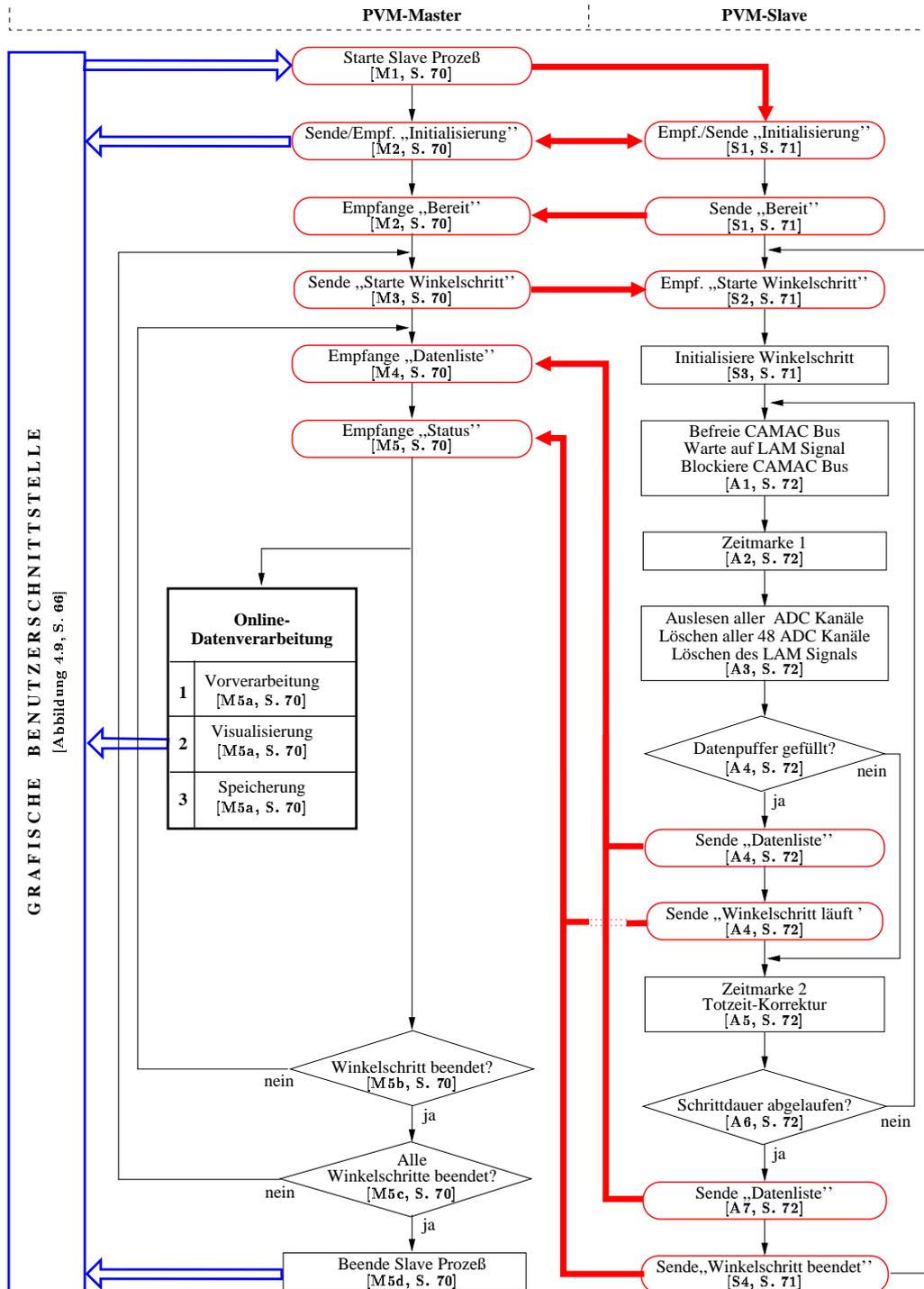


Abbildung 4.11: Flussdiagramm der PVM-gestützten Messprogramme des MADPET  
 Zu Abbildung 4.11: Vorgänge auf dem PVM-Master (links) und dem PVM-Slave (rechts). PVM-Botschaften sind durch dicke Pfeile gekennzeichnet. PVM-basierte Operationen sind in runden Kästen dargestellt. Die Kommunikation mit der grafischen Benutzeroberfläche ist durch umrahmte Pfeile verdeutlicht. Die Referenzen zu den Unterpunkten der Ablaufkästen M, S und A sowie den Abbildungen sind in eckigen Klammern angegeben.

- M1) Durch das Anwählen des Startknopfes an der grafischen Oberfläche wird das Messüberwachungsprogramm auf dem Master-Rechner aufgerufen. Dieses startet über eine PVM-Meldung das eigentliche Ausleseprogramm auf dem Slave-Rechner (siehe Ablaufkasten 4.3 auf der nächsten Seite).
- M2) Der Initialisierungsschritt dient zum Abgleich der Messparameter auf beiden Prozessen. Die vom Slave-Prozess zurückgelieferten Parameter werden zur Aktualisierung der grafischen Oberfläche und der Variablen des Master-Prozesses verwendet. Anschließend wird auf das Signal „Bereit“ des Slave-Prozesses gewartet, dass dieser zum Starten der Messung bereit ist.
- M3) Der Master-Prozess sendet das Kommando zum Starten des aktuellen Winkelschritts.
- M4) Der Master-Prozess wartet auf den Empfang der Messdaten, bis diese vom Slave-Prozess bereitgestellt werden.
- M5) Der Zustand der aktuellen Messung wird vom Slave-Prozess an den Master übertragen. Nach Erhalten werden folgende Aktionen gleichzeitig ausgeführt:
  - M5a) Die zeitgleiche Datenverarbeitung wird gestartet: Die empfangenen Daten werden bezüglich der nichtlinearen Konversionskurven der ADCs kalibriert und anschließend für jeden Kanal histogrammiert. Diese Wechselwirkungsspektren werden an die grafische Benutzeroberfläche (siehe Abbildung 4.9 auf Seite 66) übergeben. Weiterhin werden die unkalibrierten Messdaten an die Messdatei angehängt.
  - M5b) Anhand der empfangenen Statusmeldung wird ermittelt, ob sich der Slave-Rechner noch in der Messung des aktuellen Winkelschritts befindet. Ist dies der Fall, so wird wieder in den Wartezustand für den Empfang der Daten (Punkt M4) übergegangen.
  - M5c) Wurde das Ende des aktuellen Schritts übermittelt, so wird geprüft, ob ein weiterer Winkelschritt zu messen ist. In diesem Fall wird zu Punkt M3 zurückgesprungen.
  - M5d) Das Ende der Messung ist erreicht. Der Slave-Prozess wird beendet und das Starten einer neuen Messung wieder erlaubt.

Ablaufkasten 4.2: PVM-Messablauf auf dem Master-Rechner

Master ist in dem Ablaufkasten 4.2 zu finden, die Beschreibung des synchron laufenden Messprozesses auf dem PVM-Slave ist auf die Kästen 4.3 und 4.4 aufgeteilt. Aus diesen Ablaufkästen geht hervor, dass auf dem Master-Rechner die Prozessierung der gemessenen Daten durchgeführt wird, während der Slave-Rechner weitere Daten nimmt. Um den positiven Effekt zur Stabilisierung der Ausleserate durch die PVM-Unterstützung zu dokumentieren, wurden zwei Messungen unter identischen Bedingungen durchgeführt. Für beide in zehn Schritte unterteilte Messungen wurde ein homogen emittierender ( $^{18}\text{F}$ ) Wasserzylinder im Zentrum des Tomographen platziert. Durch die Wahl von  $^{18}\text{F}$  und der Verwendung eines Homogenzylinders sollte mit einem gutem Messsystem eine gleichmäßige Ausleserate erreicht werden. Die erste Messung erfolgte ohne die PVM-Unterstützung. Dazu wurden auf dem Messrechner alle notwendigen Funktionen zur Verfügung gestellt, wie z.B. Speicherung der Daten, ein grafisches Subsystem und das Starten von Programmen durch den Benutzer. Während der Messung wurden auf dem Messrechner Applikationen wie Netscape, ein Postscript-Darstellungsprogramm und die Online-Datenverarbeitung gestartet. Es konnten, wie in

- S1) Im Initialisierungsschritt führt der Slave-Rechner eine kurze Testmessung zur Überprüfung der korrekten Funktionsweise und zum Abschätzen der zu erwartenden koinzidenten Zählraten aus (Rate aller Koinzidenzen). Diese Rate, im Zusammenhang mit der gewünschten Messzeit des ersten Winkelschritts, wird zur Festlegung der Größe des Datenpuffers in den Master- und Slave-Prozessen verwendet. Weiterhin wird an dieser Stelle der Schrittmotor für die Rotation mit der gewünschten Schrittweite eingestellt. Der Slave-Prozess meldet die Vollendung der Initialisierung durch die PVM-Meldung „Bereit“.
- S2) Der Slave wartet auf die Anweisung zum Starten eines neuen Winkelschritts.
- S3) Nach Erhalt der Anweisung „Starte Winkelschritt“ veranlasst der Slave-Prozess die Initialisierung des aktuellen Winkelschritts:
- S3a) Rotation des Detektorsystems in die geforderte Winkelposition.
- S3b) Berechnen der geforderten Dauer des aktuellen Winkelschritts  $\eta$  aus der, für den radioaktiven Zerfall des verwendeten Nuklids korrigierten, Dauer des ersten Winkelschritts:
- $$t(\eta) = t(1) \cdot \exp(\ln 2 \cdot \Delta t / T_{1/2}).$$
- Hierbei ist  $t(1)$  die Dauer des ersten Schritts,  $\Delta t$  die Zeitdifferenz vom Start des ersten Winkelschritts bis zum momentanen Zeitpunkt und  $T_{1/2}$  die Halbwertszeit des zu messenden Nuklids.
- Nach dieser Initialisierung des aktuellen Winkelschritts tritt der Slave-Prozess in die eigentliche Ausleseschleife ein, beschrieben in dem Ablaufkasten 4.4 auf der nächsten Seite.
- S4) Nach Rückkehr aus der Ausleseschleife signalisiert der Slave-Prozess dem Master-Prozess, dass der Winkelschritt beendet ist und fährt mit Punkt S2 fort.

Ablaufkasten 4.3: PVM-Messablauf auf dem Slave-Rechner: Teil 1

Abbildung 4.12 im Bild a zu ersehen, Variationen der Ausleseraten beobachtet werden. Die zweite, im Anschluss gestartete Messung wurde mit der in diesem Abschnitt dargelegten PVM-Unterstützung durchgeführt. Die oben genannten Applikationen liefen nun, zusammen mit der grafischen Benutzerschnittstelle und einer zusätzlichen Rekonstruktion zuvor gemessener Daten, auf dem Master-Rechner. Die resultierende Ausleserate (Abbildung 4.12, Bild b) zeigte keine nennenswerten Variationen. Mit der Implementierung einer PVM in den Messablauf des MADPET und der Trennung von Messung und Messüberwachung, Speicherung und weiterer Verarbeitung auf zwei Rechner konnte der Zugriff auf die aktuellen als auch auf vorher gemessene Daten ermöglicht werden, ohne die Messung zu beeinflussen.

## 4.4 Vorbereitung der gemessenen Daten für die Bildrekonstruktion

Die Bildrekonstruktion der gemessenen Daten setzt einige Bedingungen an deren Beschaffenheit und Struktur. In der bei der Messung erzeugten Datenliste liegen die  $u \in [1, U]$  gemessenen Koinzidenzen als Quartet der Form

- A1) Durch öffnen des CAMAC-Busses wird den ADCs erlaubt, die von den Detektoren kommenden Spannungsimpulse zu digitalisieren. Wird eine Digitalisierung durch die gesetzte CAMAC-Flagge LAM angezeigt, wird der CAMAC-Bus wieder geschlossen und somit eine weitere Datenaufnahme verboten (siehe Abschnitt 4.3.1).
- A2) Die aktuelle Zeit, also der Zeitpunkt beim Sperren des CAMAC-Busses, wird in der ersten Zeitmarke  $\tau_1$  gespeichert.
- A3) Es erfolgt das Auslesen aller ADC-Kanäle und die Prüfung, ob nur zwei Kanäle ein Signal oberhalb der verlangten unteren Schwelle aufweisen. Ist dies der Fall, werden die Werte dieser beiden ADC-Kanäle und deren Nummern in den Datenpuffer geschrieben. Als Vorbereitung für die weitere Messung werden die Inhalte aller ADC-Kanäle und die CAMAC-Flagge LAM gelöscht.
- A4) Der Slave-Prozess prüft, ob ein Überlauf des Datenpuffers bei der nächsten Auslese ansteht. Ist dies der Fall, wird der Datenpuffer als PVM-Meldung an den Master-Prozess gesendet und auf dessen Empfangsbestätigung gewartet. Nach Empfang der Bestätigung wird dem Master-Prozess durch die Meldung „Winkelschritt läuft“ signalisiert, dass der aktuelle Winkelschritt noch nicht beendet ist. Diese Meldung wird wiederum vom Master-Prozess mit einer Bestätigung quittiert.
- A5) Nachdem die Auslese und mögliche Versendung der Daten vollendet ist, wird eine zweite Zeitmarke  $\tau_2$  genommen und die durch die aktuelle Auslese verursachte Totzeit  $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$  bestimmt. Die Dauer des aktuellen Winkelschritts  $t(\eta)$  wird um diese Zeitdifferenz verlängert:

$$t(\eta) \rightarrow t(\eta) + \Delta\tau.$$

- A6) Es wird geprüft, ob die totzeitkorrigierte Dauer des Winkelschritts abgelaufen ist. Ist dies nicht der Fall, so wird mit der Messung der Koinzidenzen, also mit Punkt A1, fortgefahren.
- A7) Ist die Dauer des Winkelschritts abgelaufen, so wird der Inhalt des Datenpuffers an den Master übertragen und zu Punkt S4 im Ablaufkasten 4.3 zurückgesprungen.

Ablaufkasten 4.4: PVM-Messablauf auf dem Slave-Rechner: Teil 2 (Ausleseschleife)

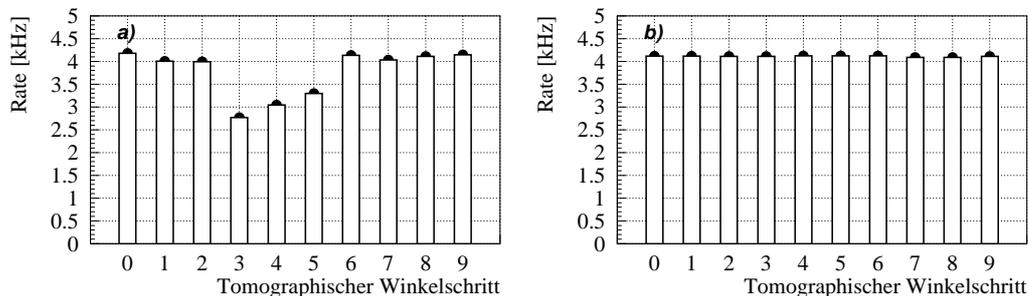


Abbildung 4.12: Ausleserate ohne und mit PVM-Unterstützung der Messung  
 Zu Abbildung 4.12: Bild a) Ohne PVM-Unterstützung weist die Ausleserate (in 1000 Ausleseoperationen pro Sekunde) erhebliche Variationen auf. Bild b) Bei der PVM-gestützten Messung sind keine Variationen in der Ausleserate erkennbar.

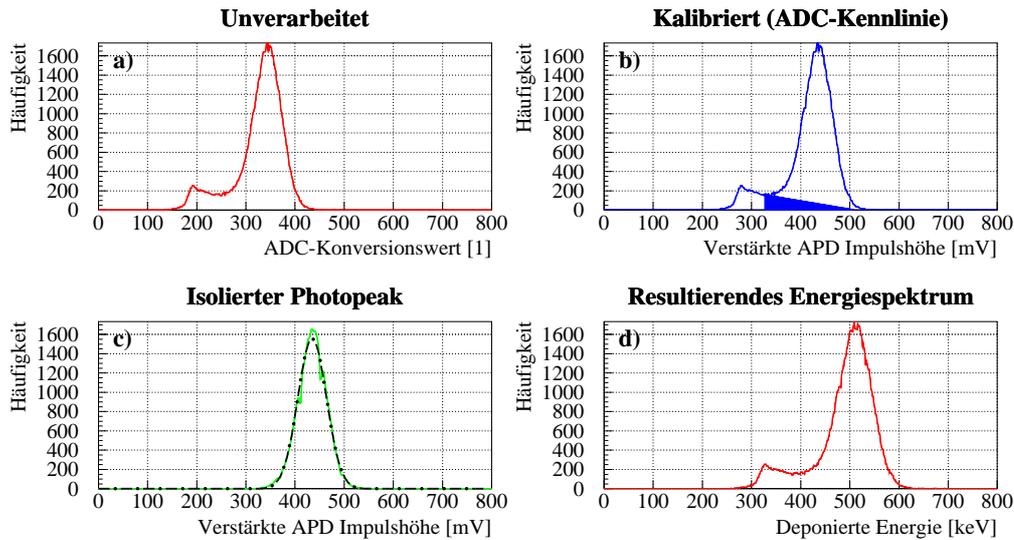


Abbildung 4.13: Verarbeitung der List-Mode Daten anhand der spektralen Energieverteilungen

Zu Abbildung 4.13: Die Verarbeitung der spektralen Daten ist exemplarisch für das Spektrum eines Kanals aus der in Abbildung 4.9 auf Seite 66 gezeigten Messung (Modul 3, APD 4, also in der N3-Zählweise Kanal  $c = c_a = 19$ ) dargestellt: Bild a) Unverarbeitetes Histogramm  $H^D(19)$  der vom ADC konvertierten Impulshöhen; Bild b) Entsprechend der ADC-Konversionskennlinie kalibriertes Histogramm  $H^U(19)$  und abgeschätzter linearer Streuuntergrund, die horizontale Achse gibt die Impulshöhen der verstärkten APD-Signale in mV an; Bild c) Histogramm von Bild b nach Subtraktion des abgeschätzten Streuuntergrunds und angepasste Gaußverteilung (gestrichelte Linie); Bild d) Die Streckung des Histogramms von Bild b gemäß der Parameter der Gaußverteilung resultiert in dem Energiespektrum  $H^E(19)$  der in diesem Detektor erfolgten Wechselwirkungen. Das Zentrum des Photopeaks liegt nun bei 511 keV.

$$\{c_a(u), c_b(u), D_a(u), D_b(u)\}$$

vor. Hierbei sind, wie in Abschnitt 4.3 beschrieben,  $c_a(u)$  und  $c_b(u)$  die Nummern der ADC-Kanäle, die beim Nachweis der Koinzidenz  $u$  beteiligt waren und  $D_a(u)$  und  $D_b(u)$  die Konversionswerte dieser ADC-Kanäle. Wie in den Abschnitten 2.2, 2.3 und 2.4.1 angesprochen, ist das Setzen von Energieschwellen, u.a. zur Unterdrückung des Streuuntergrunds, nötig. Dafür ist die Umwandlung der aus den ADC-Kanälen ausgelesenen Werte  $D_a(u)$  und  $D_b(u)$  zu in den Kristallen deponierten Energien gefordert. Diese Vorverarbeitung (engl. *preprocessing*) der Datenliste wird im nächsten Abschnitt erläutert. Abschnitt 4.4.2 beschreibt die darauf folgende Histogrammierung der vorverarbeitenden Datenliste in eine Matrix von fester Größe, dem List-Mode Histogramm, die als Eingabe für alle weiteren Methoden zur Bilderstellung verwendet wird.

#### 4.4.1 Vorverarbeitung

Abbildung 4.13 veranschaulicht die wesentlichen Schritte der Vorverarbeitung exemplarisch anhand der Daten des vierten Kanals vom dritten Detektormodul, also des Kanals  $c_a = 19$ .

Zur weiteren Analyse werden die gemessenen ADC-Werte für jeden der  $c_a \in [0, 23]$  und  $c_b \in [24, 47]$  Kanäle histogrammiert. Innerhalb dieser Histogramme  $H^D(c)$  (für  $c \in [0, 47]$ ) stellt die horizontale Achse die von den ADC-Kanälen gelieferten Werte, die vertikale Achse deren Häufigkeit dar (siehe Abbildung 4.13, Bild a). Die vorliegenden, gemessenen Koinzidenzen enthalten die aus den ADCs ausgelesenen, unkalibrierten Werte. Zur Bestimmung der Konversionskennlinie eines jeden ADC-Kanals  $c$  wurden definierte Eingangs-Spannungsimpulse  $U^{in}$  an diesen angelegt und die digitalisierten Werte  $D(c)$  mit der linearen Beziehung

$$D(c) = D_0(c) + a(c) \cdot U^{in} \quad (4.4)$$

parametrisiert. Die Kalibrierung aller  $U$  Werte  $D_a(u)$  und  $D_b(u)$  bezüglich der Konversionskennlinie des jeweiligen ADC-Kanals erfolgte nun durch Auflösen dieser Beziehung nach der Spannung  $U^{in}$ :

$$D_a^U(u) = \frac{D_a(u) - D_0(c_a)}{a(c_a)} \quad (4.5)$$

und

$$D_b^U(u) = \frac{D_b(u) - D_0(c_b)}{a(c_b)}. \quad (4.6)$$

Der resultierende, die Spannungshöhen der ankommenden Impulse (in mV) enthaltende Datensatz war nun definiert durch:

$$\{c_a(u), c_b(u), D_a^U(u), D_b^U(u)\}.$$

Die Histogrammierung dieser kalibrierten Daten lieferte das in Abbildung 4.13 (Bild b) für den Kanal 19 gezeigte Spektrum  $H^U(19)$ . Innerhalb der Histogramme  $H^U(c)$  stellt die horizontale Achse nun die Spannungshöhe der APD-Signale, die vertikale Achse weiterhin deren Häufigkeit dar.

Für die Interpretation der gemessenen Daten anhand von physikalischen Kriterien, vor allem dem Setzen von Energieschwellen, wurde im Anschluß die Umwandlung der horizontalen Achse der Histogramme  $H^U(c)$  von Spannungshöhen (in mV) zu Energien (in keV) vorbereitet. Dies geschah über die genaue Identifizierung der Position des Photopeaks für jeden Kanal. Eine erste Abschätzung dieser Position lieferte die Suche nach dem Maximum innerhalb eines jeden Histogramms, in Bild b liegt dieses bei 435 mV. Um eine gute Stabilität gegenüber Messungen mit einer geringen Anzahl von erfassten Koinzidenzen, also einem hohen Rauschanteil in den Histogrammen, zu gewährleisten, erfolgte die endgültige Bestimmung der Peakposition mittels einer Anpassung des Photopeaks an eine Gaußverteilung. Dazu musste der Photopeak isoliert werden, d.h. sowohl der Streuuntergrund innerhalb (angenähert als lineare Verteilung, siehe Bild b) als auch ausserhalb des Photopeaks wurde von dem Histogramm  $H^U(c)$  subtrahiert. Das Resultat  $\tilde{H}^U(c)$  ist in Bild c dargestellt, zusammen mit der daran angepassten Gaußverteilung. Das Zentrum dieser Gaußverteilung repräsentiert die genaue Position  $P_{511}(c)$  des Photopeaks (436 mV für den Kanal 19 in Bild c):

$$P_{511}(c) = \text{Position des Photopeaks in Histogramm } \tilde{H}^U(c). \quad (4.7)$$

Anhand einer Streckung der Histogramme, bzw. der Werte  $D^U(u)$ , konnte die Position des Photopeaks in jedem Histogramm auf einen festgesetzten Wert  $P$  verschoben werden:

$$D_a^E(u) = \frac{P}{P_{511}(c_a(u))} \cdot D_a^U(u) \quad (4.8)$$

1)	Es wird eine globale untere Energieschwelle $E_{low} = 450$ keV definiert und mit $u = 1$ auf die erste im vorverarbeiteten Messdatensatz enthaltene Koinzidenz verwiesen.
2)	Für die Koinzidenz $u$ wird folgende Prüfung durchgeführt: $D_a^E(u) \geq E_{low} \quad \text{und} \quad D_b^E(u) \geq E_{low} ?$ <p>Sind beide Bedingungen erfüllt, wird das Element <math>i(u)</math> des List-Mode-Histogramms aus dem Index des Detektorpaares <math>\xi(u)</math> und des Winkelschritts <math>\eta(u)</math> ermittelt,</p> $\xi(u) = c_a(u) \cdot 24 + c_b(u) - 24 \quad \text{und} \quad i(u) = (\eta(u) - 1) \cdot \hat{\xi} + \xi(u),$ <p>und dieses Element um eins erhöht:</p> $h(i(u)) \rightarrow h(i(u)) + 1.$
3)	Der Index für die zu bearbeitende Koinzidenz $u$ wird erhöht ( $u \rightarrow u + 1$ ) und mit Punkt 2 fortgefahren. Die Inkrementierung und der Rücksprung werden durchgeführt, bis die Verarbeitung für alle Koinzidenzen ( $u = U$ ) abgeschlossen ist.

Ablaufkasten 4.5: Umsortierung der gemessenen Daten in das List-Mode-Histogramm.

und

$$D_b^E(u) = \frac{P}{P_{511}(c_b(u))} \cdot D_b^U(u). \quad (4.9)$$

Durch die Wahl von  $P = 511$  enthielten  $D_a^E(u)$  und  $D_b^E(u)$  und somit die resultierenden Histogramme  $H^E(c)$  die Wechselwirkungsenergien in keV (siehe Histogramm  $H^E(19)$  in Bild d). Im Anschluss wurden die Kanalnummern entsprechend Abschnitt 4.2 in die, für die Bildverarbeitung geforderte, zyklische N3-Reihenfolge umgewandelt.

Das Resultat der in diesem Abschnitt vorgestellten Vorverarbeitung war ein Listendatensatz, in dem alle enthaltenen Koinzidenzen nun in der Form

$$\{c_a, c_b, D_a^E, D_b^E\}$$

vorlagen, also die im Kristall deponierten Energien (in keV) repräsentierten, wobei die enthaltenen Kanalnummern die für die Bildrekonstruktion geforderte, zyklische Indizierung aufwiesen.

#### 4.4.2 Umsortierung zu List-Mode Histogrammen

Die Anordnung der gemessenen bzw. vorverarbeiteten Koinzidenzen in der beschriebenen Datenliste resultierte in unterschiedlich großen Dateien, die viele Leseoperationen von den weiterverarbeitenden Programmen erfordert hätten. Zur einfacheren Handhabung der Daten nach der in Abschnitt 4.4.1 beschriebenen Vorverarbeitung wurden diese deshalb in ein kompaktes Format transferiert (siehe auch Ablaufkasten 4.5). Hierzu wurde eine Matrix fester Größe, das so genannte List-Mode Histogramm, angelegt. Jede Zeile dieser Matrix enthielt ein Element für jedes der  $\hat{\xi} = 576$  Detektorpaare. Die Anzahl der Zeilen war durch die Zahl der tomographischen Winkelschritte in der Messung definiert ( $\hat{\eta} = 30$  Winkelschritte in allen

tomographischen Datensätzen des MADPET). Es stand also für jedes Detektorpaar in jedem Winkelschritt ein Matrixelement zur Verfügung. Zur Histogrammierung der Messdaten in das List-Mode-Histogramm wurde eine untere Energieschwelle bei 450 keV gesetzt. Diese für alle MADPET-Daten angewendete Schwelle erlaubte Wechselwirkungsenergien innerhalb der im Mittel ungefähr 20-24% betragenden Energieauflösung aller Einzeldetektoren bei 511 keV. Für jede gemessene Koinzidenz erfolgte die Prüfung, ob beide Gammaquanten eine Energiedeposition oberhalb dieser Schwelle verursachten. War dies der Fall, wurde das aus den beteiligten Detektoren  $c_a$  und  $c_b$  festgelegte Detektorpaarelement  $\xi$  (siehe Gleichung 4.3 auf Seite 62) in der dem Winkelschritt entsprechenden Zeile erhöht. Das List-Mode-Histogramm wurde als Eingabe für alle Methoden der MADPET-Bildrekonstruktion verwendet.

## 4.5 Monte Carlo Simulationen

Die Monte Carlo Simulationen zur Untersuchung der physikalischen Vorgänge im MADPET-Dektorsystem wurden mit dem Programmpaket „GEANT: Detector Description and Simulation Tool“ (CERN, Schweiz) [42] durchgeführt. GEANT wurde anderen Simulationsprogrammen vorgezogen [37, 101, 144], da es im Besonderen bei der Beschreibung von Volumina (z.B. der Kristalle der Tomographen) überlegen war. Ein weiterer Vorteil war, dass alle für die Simulation nötigen Berechnungen der physikalischen Wechselwirkungen in GEANT von den darin enthaltenen Funktionen durchgeführt wurden. Dies schloss z.B. die Bestimmung der Weglängen der Gammaquanten in einem Medium mit ein, in anderen Programmpaketen wie EGS [37, 101] wäre dafür die Entwicklung eigener Funktionen nötig gewesen. Zur genaueren Darlegung der Simulationstechniken und der daraus gewonnenen Erkenntnisse erfolgt einleitend eine allgemeine Beschreibung des Aufbaus der Simulationen sowie der Handhabung der simulierten Wechselwirkungen. Danach wird die generelle Tauglichkeit der Simulationsprogramme anhand eines einfachen Aufbaus gezeigt, gefolgt von der Beschreibung der Simulation zur Untersuchung der für die tomographische Datenverarbeitung essentiellen Eigenschaften des MADPET. Die weitere Nutzung der simulierten Daten zur Analyse des Tomographen und zur Generierung von Datensätzen für die verbesserte Bilderstellung wird in den letzten drei Abschnitten dieser Sektion erläutert [12, 13, 14]. Sie beinhalten die Berechnung der koinzidenten Antwortfunktionen aller Detektorpaare (Abschnitt 4.5.4), die Erstellung tomographischer Daten (Abschnitt 4.5.5) und die Berechnung der Gewichtematrix für die iterative Rekonstruktion (Abschnitt 4.5.6). An dieser Stelle sollte erneut darauf hingewiesen werden, dass Wechselwirkungen der Gammaquanten mit dem Objekt (also hauptsächlich Compton-Streuung) nicht simuliert wurden. Dies würde die erneute Durchführung der Simulation für jedes Objekt (z.B. Kleintier) erfordern und wäre mit derzeitigen Rechenleistungen nicht realisierbar. Weiterhin würde hierfür eine Zusatzinformation über die Beschaffenheit des Objekts, wie z.B. eine Dichtematrix o.ä., zwingend benötigt werden. Durch die hier durchgeführten Monte Carlo Simulationen wurde ausschließlich die Nachweiseigenschaften des Tomographen untersucht und für die Bilderstellung optimal ausgenutzt.

### 4.5.1 Allgemeine Beschreibung der Simulationen

Die stöchiometrische Formel von LSO ( $\text{Lu}_2(\text{SiO}_4)\text{O}:\text{Ce}$ ) wurde in den Simulationsprogrammen zum Aufbau einzelner Kristalle der Größe  $3,7 \times 3,7 \times 12 \text{ mm}^3$  verwendet. Anhand der Konstruktionspläne des MADPET wurden die Detektormodule, jedoch nur mit einer Schicht von Kristallen, aufgebaut und anschließend gemäß der konstruktiven Vorgaben des MADPET

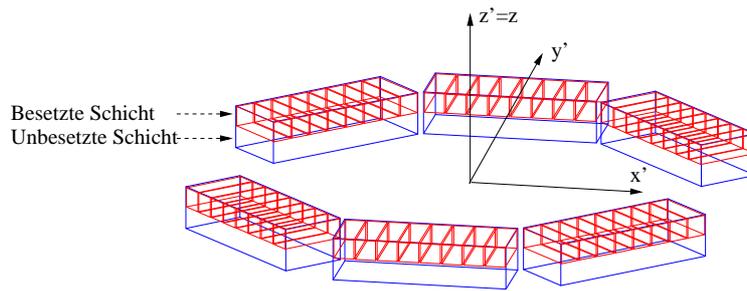


Abbildung 4.14: Aufbau des MADPET Sektortomographen für die Monte Carlo Simulationen  
 Zu Abbildung 4.14: Dargestellt sind die sechs Detektormodule, angeordnet im Tomographen-Koordinatensystem. Innerhalb jeden Moduls ist nur eine Reihe (Schicht) mit LSO-Kristallen besetzt.

im Tomographen-Koordinatensystem angeordnet (Abbildung 4.14). Um die Komplexität der Simulationen zu reduzieren, wurden keine weiteren Materialien - wie die APD, die Reflektoren und das Detektorgehäuse - in diesen Simulationsaufbau integriert. Es wurden folgende Wechselwirkungen der Gammaquanten mit den Kristallen berücksichtigt:

- Compton-Streuung,
- Rayleigh-Streuung und
- Photoeffekt.

Es erfolgten jedoch folgende Einschränkungen, um die Komplexität der Simulationen und der weiterverarbeitenden Programme sowie die resultierenden Dateigrößen zu reduzieren:

- Die Energie der emittierten Gammaquanten betrug in allen Simulationen 511 keV. Aus diesen Simulationen konnten somit nur für die Messung von 511-keV-Gammaquanten Methoden entwickelt oder Testdaten extrahiert werden.
- Die Erzeugung von Sekundärteilchen wurde zur Beschleunigung der Simulation nicht zugelassen. Der bei einer Wechselwirkung verursachte Energieverlust wurde am Ort der Wechselwirkung in dem Kristall deponiert.
- Die mögliche Nichtkollinearität der Gammaquanten eines Paares wurde wegen ihres geringen Einflusses auf die Ortsauflösung von Tomographen mit kleinem Durchmesser nicht behandelt.
- Der Aufbau der Kristalle und der Lichttransport in den Kristallen wurden für alle Detektoren identisch und ideal angenommen. Im Besonderen wurden keine Oberflächenunterschiede, Verunreinigungen oder Unregelmäßigkeiten in der Kristallgeometrie in den Simulationen berücksichtigt. Weiterhin erfolgte keine Behandlung der Energieauflösung, z.B. durch Würfeln der zu speichernden Energie anhand einer Gaußverteilung. Die bei der Simulation ermittelte Energiedeposition wurde ohne weitere Manipulation für eine spätere Verarbeitung gespeichert.
- Alle Emissionen geschahen innerhalb der  $(x', y')$ -Ebene, den Gammaquanten wurde kein Impuls in axialer ( $z$ ) Richtung gegeben.

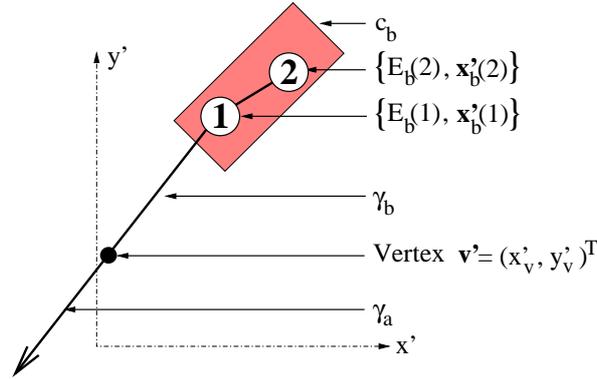


Abbildung 4.15: Behandlung der simulierten Wechselwirkungen eines Gammaquants mit einem Kristall

Zu Abbildung 4.15: Ein Quantenpaar wird im Vertex  $\mathbf{v}'$  kollinear emittiert. Das Gammaquant  $\gamma_b$  erfährt im Kristall  $c_b$  eine Compton-Streuung am Ort  $\mathbf{x}'_b(1)$  mit dem Energieverlust  $E_b(1)$  und wird anschließend am Ort  $\mathbf{x}'_b(2)$  unter Abgabe der Energie  $E_b(2)$  absorbiert.

- Obwohl GEANT auch Ablenkungen in axialer Richtung simulierte, wurden die  $z$ -Komponenten der Wechselwirkungskordinaten nicht berücksichtigt. Die Verarbeitung der Koordinaten der Wechselwirkungen geschah nur innerhalb der  $(x', y')$ -Ebene.

Es wurden sowohl Untersuchungen von gebündelten Strahlen einzelner Gammaquanten also auch von isotrop emittierten Gammaquantenpaaren (nur 2D-Emission, also Emissionsflugbahnen in der  $(x', y')$ -Ebene) durchgeführt. Zur Analyse der Simulationen wurden die Wechselwirkungsenergien zusammen mit ihrem Entstehungsort, wie in Abbildung 4.15 dargestellt, behandelt. Diese Abbildung zeigt exemplarisch ein Gammaquant  $\gamma_b$ , das im Vertex  $\mathbf{v}' = (x'_v, y'_v)^T$  emittiert wurde und innerhalb des dargestellten Kristalls  $c_b$  zwei Wechselwirkungen erfuhr (Compton-Streuung und Absorption). Das MADPET-Simulationsprogramm ermittelte bei  $N_b$  Wechselwirkungen eines Gammaquants  $\gamma_b$  mit einem Kristall  $c_b$  folgende Werte:

- **Energie:** Die Summe aller Energien  $E_b(\kappa)$ , die das Quant  $\gamma_b$  bei  $\kappa \in [1, N_b]$  Wechselwirkungen mit dem Kristall  $c_b$  abgegeben hat, wird als die gesamte im Kristall deponierte Energie  $E_b$  betrachtet:

$$E_b = \sum_{\kappa=1}^{N_b} E_b(\kappa). \quad (4.10)$$

- **Ort:** Es wird der - mit den deponierten Energien  $E_b(\kappa)$  gewichtete - Schwerpunkt  $\mathbf{x}'_b$  aller  $N_b$  Wechselwirkungen innerhalb des Kristalls  $c_b$  ermittelt und als Näherung für den Ort einer einzelnen Wechselwirkung mit Energieverlust  $E_b$  angenommen:

$$\begin{pmatrix} x'_b \\ y'_b \end{pmatrix} = \frac{1}{E_b} \sum_{\kappa=1}^{N_b} \begin{pmatrix} x'_b(\kappa) \\ y'_b(\kappa) \end{pmatrix} \cdot E_b(\kappa). \quad (4.11)$$

Im Falle zu simulierender Koinzidenzen wurde geprüft, ob auch das zweite Gammaquant ( $\gamma_a$  in Abbildung 4.15) eine Wechselwirkung mit nur einem Kristall  $c_a$  im zweiten Detektorblock vollzogen hat. War dies der Fall, wurden folgende Werte an eine dynamisch wachsende Binärdatei angehängt:

{Begrenzer,  $c_a, c_b, E_a, E_b, \mathbf{x}'_a, \mathbf{x}'_b, \mathbf{v}'$ , Begrenzer}.

Kanalnummern und Energien wurden als ganze 32 Bit Zahlen, Koordinaten als 32 Bit Fließkommazahlen geschrieben. Das resultierende Datenvolumen für eine Koinzidenz betrug somit  $(10 + 2) \cdot 32 = 384$  Bit = 48 Byte. Das zusätzliche Schreiben der zwei begrenzenden 32 Bit Werte war ein intrinsisches Problem der verwendeten Fortran Bibliotheken und leider nicht zu vermeiden.

#### 4.5.2 Simulation eines Einzelkristalls

Erster Test für die korrekte Implementierung der Monte Carlo Simulationen des MADPET war die Durchführung einer Simulation an einem einzelnen Kristall. Dazu wurde ein  $3,7 \times 3,7 \times 12$  mm<sup>3</sup> LSO-Kristall mit einem gebündelten Strahl von einzelnen Gammaquanten der Energie 511 keV beschossen. Der Strahl traf senkrecht auf das Zentrum der Stirnfläche des Kristalls. Abbildung 4.16 zeigt auf der linken Seite die Wechselwirkungsquerschnitte von Gammaquanten in LSO für Compton- und Rayleigh-Streuung sowie für den Photoeffekt. Auf der rechten Seite ist das mit der Monte Carlo Simulation erstellte Spektrum der in dem Kristall deponierten Energien in linearer Achsenskalierung angegeben.

#### 4.5.3 Monte Carlo Simulation des MADPET

Monte Carlo Simulationen des MADPET wurden ohne Rotation des Detektorsystems durchgeführt. Im Laufe dieses Kapitels wird gezeigt, dass diese Simulationen - trotz der wie in Abbildung 4.14 dargestellten raumfesten Positionen der Kristalle - jedoch ohne Einschränkungen zur Studie von tomographischen Daten und Methoden verwendet werden konnten. Wie bereits angesprochen, wurden die beiden Gammaquanten jedes Paares kollinear in 2D, also in der  $(x', y')$ -Ebene emittiert. Ablenkungen dieser Quanten in axialer Richtung wurden in der Simulation berücksichtigt, jedoch - wie in Abschnitt 4.5 beschrieben - nicht in der Binärdatei gespeichert. Die Vertizes der isotrop innerhalb der  $(x', y')$ -Ebene emittierten Gammaquantenpaare wurden mittels Zufallsgenerator innerhalb einer Kreisscheibe von 42 mm Durchmesser bestimmt. Da die zugrundeliegenden Betriebssysteme eine Limitierung der Dateigrößen beinhalteten, wurde diese Simulation in drei Sequenzen aufgeteilt. In jeder, ca. 100 Stunden dauernden, Sequenz wurden  $10^9$  Gammaquantenpaare emittiert und davon  $\approx 36 \cdot 10^6$  oberhalb der 450-keV-Energieschwelle nachgewiesen. Die Größe der drei Simulationsdateien betrug jeweils 1,6 Gigabyte (siehe Anhang C.1 auf Seite 170).

Aus dieser Simulation konnten, wie im Abschnitt 4.5.5 beschrieben wird, künstliche tomographische Messdatensätze extrahiert werden. Die einzige Ausnahme bildete die in Abschnitt 4.6.1 benötigte Simulation einer Flächenquelle zur Bestimmung der koinzidenten Sensitivitäten aller Detektorpaare. Abschnitt 4.5.6 beschreibt die Berechnung der Gewichtematrix für die iterative Rekonstruktion der simulierten und gemessenen Daten des MADPET aus dieser Simulation.

Abbildung 4.17 zeigt die Verteilung der Vertizes der emittierten Gammaquantenpaare (Bild a) in einer zweidimensionalen Darstellung im  $(x', y')$ -Koordinatensystem des Tomographen. Die Bilder b und c enthalten Projektionen des zweidimensionalen Graphen in horizontaler und vertikaler Richtung. Diese Abbildung zeigt die angestrebte gleichmäßige Verteilung der Emissionsorte der Gammaquantenpaare. In Abbildung 4.18 sind die korrespondierenden Vertizes der nachgewiesenen Quantenpaare abgebildet. Hierin ist die inhomogene physikalische

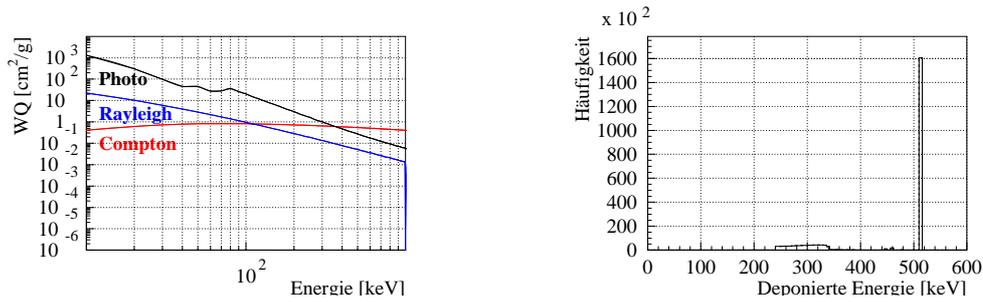


Abbildung 4.16: Wechselwirkungsquerschnitte für Gammaquanten mit LSO und simuliertes Spektrum eines LSO-Einzelkristalls für 511 keV Gammaquanten

Zu Abbildung 4.16: Bild links) Die Wechselwirkungsquerschnitte für Photoeffekt, Compton- und Rayleigh-Streuung sind doppelt logarithmisch aufgetragen. Bild rechts) Für die Darstellung des simulierten Spektrums wurden lineare Achsen verwendet.

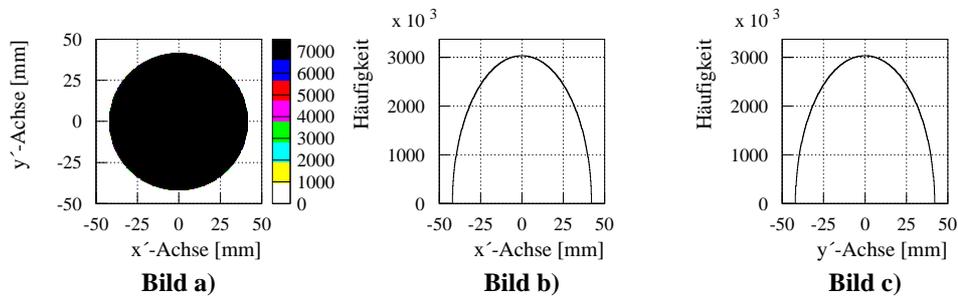


Abbildung 4.17: Monte Carlo Simulation der homogen verteilten Positronenquelle in einer Kreisscheibe: Vertizes der emittierten Quantenpaare

Zu Abbildung 4.17: Diese Darstellung dient als Test für die korrekte Funktion des Generators. Bild a) Die Verteilung der Vertizes der emittierten Gammaquantenpaare im  $(x', y')$ -Koordinatensystem des Tomographen; Bild b) Bild a projiziert entlang der  $x'$ -Achse; Bild c) Bild a projiziert entlang der  $y'$ -Achse.

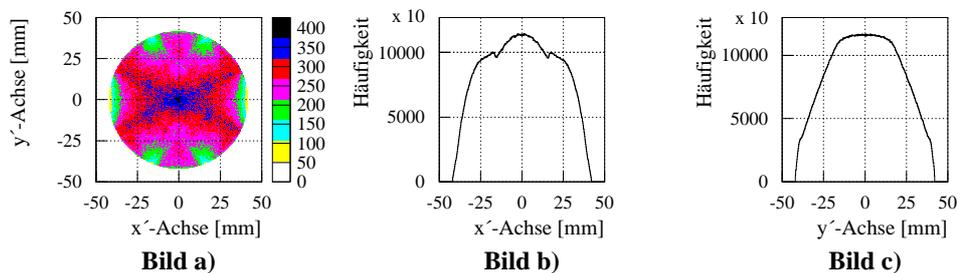


Abbildung 4.18: Monte Carlo Simulation der homogen verteilten Positronenquelle in einer Kreisscheibe: Vertizes der nachgewiesenen Quantenpaare

Zu Abbildung 4.18: Bild a) Die Verteilung der Vertizes der nachgewiesenen Gammaquantenpaare im  $(x', y')$ -Koordinatensystem des Tomographen; Bild b) Bild a projiziert entlang der  $x'$ -Achse; Bild c) Bild a projiziert entlang der  $y'$ -Achse.

Sensitivität des Tomographen anhand der Helligkeitsunterschiede im Bild a und der unregelmäßigen Kurvenverläufe in den Bildern b und c zu beobachten. Diese Inhomogenitäten waren konstruktionsbedingt, da durch die Lücken im MADPET-Detektorsystem die hier dunkler erscheinenden Raumareale schlechter abgetastet wurden.

#### 4.5.4 Berechnung der koinzidenten Antwortfunktionen

Die folgende Aufstellung gibt zusammen mit Abbildung 4.19 qualitativ die Unterschiede der untersuchten Antwortfunktionen an. Es ist zu betonen, dass die Antwortfunktionen in dem  $(x', y')$  Koordinatensystem des Tomographen berechnet wurden. Da sie für den Umsortierungsprozess zum Sinogramm unter Beachtung des Rotationswinkels  $\varphi(\eta)$  angewendet wurden, war die Behandlung der Rotation des Detektorsystems bei der Erstellung der Antwortfunktionen nicht gefordert. Weitere Erklärungen zum Verständnis der geometrischen Bedingungen für die Antwortfunktionen und deren Berechnung werden im Anschluss an diese Aufstellung dargelegt. Es wurden folgende Antwortfunktionen für jedes Detektorpaar  $\xi$  untersucht und für die Bilderstellung zur Verfügung gestellt:

- **TRI** (engl. *triangular response function*):  
Diese Antwortfunktion entsprach der koinzidenten Antwort von einem, wie in Abbildung 4.19 (links) dargestellten, optimal ausgerichteten Detektorpaar. Die Halbwertsbreite dieses symmetrischen Dreiecks betrug die Hälfte der dem Gesichtsfeld zugewandten Kristallkantenlänge.
- **CAF** (engl. *coincidence aperture function*):  
Aus den Monte Carlo Simulationen wurden realistische koinzidente Antwortfunktionen für alle Detektorpaare ermittelt. Die Berechnung der CAF ist in Abbildung 4.20 und im nächsten Absatz beschrieben.
- **REC** (engl. *rectangular response function*):  
Eine vereinfachte Antwortfunktion wurde aus den CAFs generiert. Die Breiten dieser rechteckigen Sensitivitätsprofile entsprachen den absoluten Breiten der korrespondierenden CAFs:

$$REC_{\xi}(\varrho) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } CAF_{\xi}(\varrho) > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \quad (4.12)$$

Dieses Modell wurde in die Untersuchungen mit aufgenommen, da eine unkomplizierte analytische Berechnung der Breite für jedes Detektorpaar ohne aufwändige Simulationsmethoden machbar ist.

Zur Berechnung der CAF für ein Detektorpaar aus der Monte Carlo Simulation wurden alle Koinzidenzen, die in diesem Paar nachgewiesen wurden, unter der Voraussetzung verwendet, dass ihre Vertizes innerhalb des Gesichtsfeldes lagen. Es konnten also nur jene Koinzidenzen für die CAF  $\xi$  verwendet werden, die innerhalb der Schnittfläche der TOR  $\xi$  mit dem Gesichtsfeld emittiert wurden ( $\mathbf{v}' \in FOV \cap TOR$ , siehe Abbildung 4.20, links). Es wurde eine Grundlinie für die CAF  $\xi$  durch das Lot auf die LOR  $\xi$  und den Koordinatenursprung definiert und auf einer Breite von 86 mm (Durchmesser des Tomographen) in 512 Elemente unterteilt. Jedes Element einer CAF hatte demzufolge eine Breite von  $\approx 0,17$  mm. Der rechte Teil von Abbildung 4.20 beschreibt die Berechnung der CAF für ein Detektorpaar  $\xi$ . Eine Koinzidenz, beschrieben durch die in Abschnitt 4.5.1 beschriebenen Werte  $\{c_a, c_b, E_a, E_b, \mathbf{x}'_a, \mathbf{x}'_b, \mathbf{v}'\}$ ,

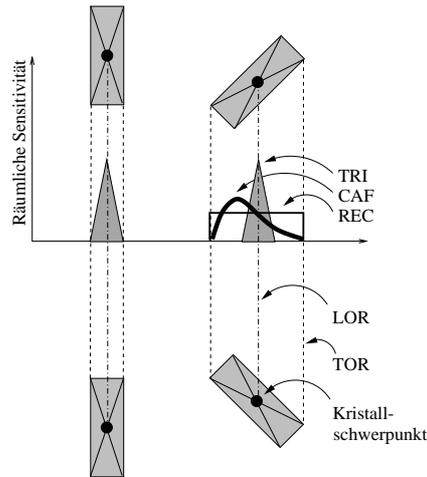


Abbildung 4.19: Am MADPET untersuchte Modelle der Antwortfunktionen

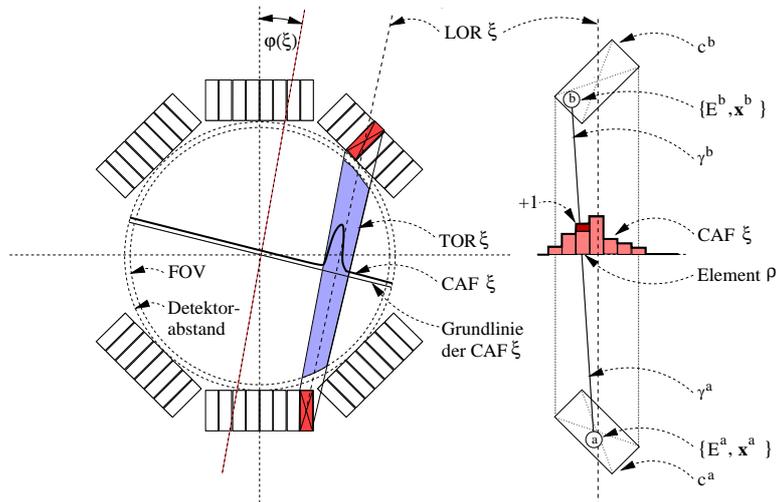


Abbildung 4.20: Berechnung der koinzidenten Antwortfunktion für ein Detektorpaar

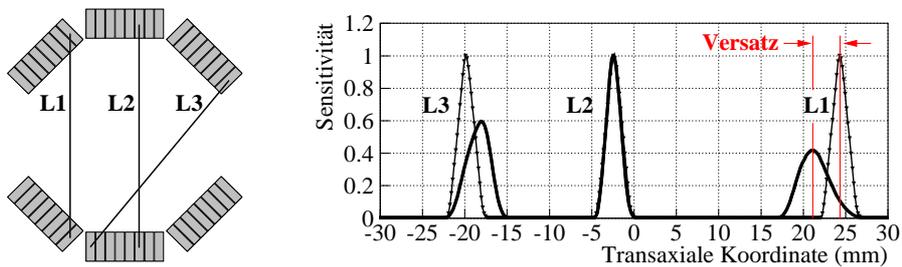


Abbildung 4.21: Ausgewählte Antwortfunktionen (CAF und TRI) des MADPET  
 Zu Abbildung 4.21: Die Antwortfunktion TRI wird durch eine dünne Linie und Marker, CAF durch eine dicke Linie ohne Marker gekennzeichnet. Deutlich erkennbar ist hier der Versatz zwischen TRI und CAF für die Paare L1 und L3. Exemplarisch ist hier der Versatz (in mm) für LOR L1 als Abstand der Maxima von TRI und CAF eingezeichnet.

	Mittelwert [mm]	SD [mm]	Maximalwert [mm]	Minimalwert [mm]
FWHM	2,8	0,8	4,5	1,85
FWTM	4,9	1,4	7,8	3,33
Versatz	1,6	1,2	4,1	0,0

Tabelle 4.2: Analyse der MADPET-Antwortfunktionen

Zu Tabelle 4.2: Breiten der aus den Monte Carlo Simulationen von MADPET berechneten Antwortfunktionen (CAF) und Versatz zwischen den CAF und TRI Antwortfunktionen. FWHM und FWTM geben hier die Halb- und Zehntelwertsbreiten der CAFs an. Versatz (siehe Abbildung 4.21, rechts) beschreibt die Positionierungsfehler bei der Verwendung der TRI Antwortfunktion in der Bilderstellung. Mittelwert und Standardabweichung (SD) wurden für die entsprechende Größe über alle 576 Antwortlinien berechnet. Mit Maximalwert ist der größte Wert für alle 576 LORs angegeben. Die zusätzlich angegebene Spalte „Minimalwert“ gilt für jene LORs, deren Kristalle optimal zueinander ausgerichtet waren. Für diese Fälle war die CAF identisch zu der schmalsten Antwortfunktion, der TRI.

wurde zur Erhöhung des Elements  $\varrho$  der CAF verwendet. Das Element  $\varrho$  war durch den Schnittpunkt der CAF-Grundlinie mit der Verbindungslinie der beiden Schwerpunkte  $\mathbf{x}'_a$  und  $\mathbf{x}'_b$  der Wechselwirkungen beider Gammaquanten mit den Kristallen  $c_a$  und  $c_b$  definiert. Durch Wiederholen dieses Vorgangs für alle, von diesem Detektorpaar erfassten, Koinzidenzen ließ sich eine realistische koinzidente Antwortfunktion des MADPET für die LOR  $\xi$  aus der Monte Carlo Simulation entwickeln.

Abbildung 4.21 zeigt auf der linken Seite die Lage von drei ausgewählten Antwortlinien L1, L2 und L3. Im rechten Bild sind die Ergebnisse der hier beschriebenen Berechnung der realistischen Systemantwort (CAF) im Vergleich zu der analytisch ermittelten Antwortfunktion (TRI) dargestellt. Die unterschiedlichen Breiten und Positionen der maximalen Sensitivität sind deutlich zu beobachten. Um die Unterschiede zwischen CAF und TRI genauer zu untersuchen, wurden für jede LOR folgende Werte ermittelt:

- (**FWHM**) die Halbwertsbreite der CAF;
- (**FWTM**) die Zehntelwertsbreite der CAF;
- (**Versatz**) der Abstand zwischen Positionen maximaler Sensitivität von CAF und TRI. Abbildung 4.21 veranschaulicht dies für die LOR  $\xi = L1$ .

In Tabelle 4.2 sind für diese drei Größen, über alle 576 Antwortlinien ermittelt, die Mittelwerte und ihre Standardabweichungen, sowie deren Maximal- und Minimalwerte angegeben. Die für alle Detektorpaare identischen Halb- und Zehntelwertsbreiten der TRI Antwortfunktion sind implizit in der Spalte „Minimalwert“ enthalten, da die TRI die schmalste Antwortfunktion des MADPET repräsentierte (siehe LOR  $\xi = L2$  in Abbildung 4.21). Die festgestellten Unterschiede, im Besonderen der große Versatz von bis zu 4,1 mm, wiesen auf eine fehlerhafte Zuordnung der gemessenen Koinzidenzen bei der Verwendung einer, bezüglich des Detektorpaares invarianten, Systemantwort wie der Funktion TRI hin. Ein genauer Vergleich der Anwendung der TRI, CAF und REC Antwortfunktionen in der Bilderstellung wird in Abschnitt 4.8 auf Seite 96 durchgeführt.

### 4.5.5 Berechnung tomographischer Projektionsdaten

Es sei noch einmal darauf hingewiesen, dass die Vertizes und Wechselwirkungskordinaten aus den Simulationen im Koordinatensystem  $(x', y')$  des Tomographen vorlagen (siehe Abbildung 4.7 auf Seite 63). Um die Verwendung dieser Daten für tomographische Berechnungen zu ermöglichen, musste eine zusätzliche Rotationsoperation angewendet werden. Abbildung 4.22 veranschaulicht die Rotation des zur Bildmatrix gehörenden, raumfesten  $(x, y)$ -Koordinatensystems gegenüber dem Tomographen-Koordinatensystem  $(x', y')$ . Darin ist ein kreisförmiges Objekt angezeigt, das als homogener Emitter anzunehmen ist. Für dieses Objekt sollte nun eine tomographische Messung aus der Simulation der großen, das Gesichtsfeld überstreichenden, Kreisscheibe generiert werden. Für einen Winkelschritt  $\eta$  waren die Koordinatensysteme um den Winkel  $\varphi(\eta)$  zueinander rotiert. Um die Anzahl der Rotationsoperationen einzuschränken, wurde für Schritt  $\eta$  das Objekt  $q$  entgegen der Rotationsrichtung, also aus dem raumfesten System  $(x, y)$  in das Tomographen-Koordinatensystem  $(x', y')$ , rotiert. Die Betrachtungen der Daten in den beiden Koordinatensystemen können wie folgt zusammengefasst werden:

- Die Vertizes der simulierten Koinzidenzen lagen im  $(x', y')$ -Koordinatensystem des Tomographen vor.
- Die Objekte, für die ein künstlicher Messdatensatz erstellt werden sollte, waren ortsfest bezüglich des raumfesten  $(x, y)$ -Koordinatensystems.
- Der zu simulierende Rotationswinkel  $\varphi(\eta)$  war negativ. Dies entspricht - wie in Abbildung 4.7 auf Seite 63 dargestellt - einer Rotation des Tomographen-Koordinatensystems  $(x', y')$  bezüglich des raumfesten  $(x, y)$ -Koordinatensystems mit dem Winkel  $\Phi(\eta) > 0$  im Uhrzeigersinn.
- Die Vergleichsoperation geschah im  $(x', y')$ -Koordinatensystem des Tomographen. Die Objekte wurden hierfür in dieses Koordinatensystem gedreht.
- Die aufgrund des Winkelschritts  $\eta$  anzuwendende Rotationsoperation berechnete die Koordinaten eines Punktes  $\mathbf{x}'$  im um  $\varphi(\eta)$  rotierten System aus seinen Koordinaten  $\mathbf{x}$  im ruhenden System.

Da hier ausschließlich kreisförmige Objekte behandelt wurden, war nur die Rotationsoperation

$$\mathbf{x}'_m(q, \eta) = \mathcal{D}_{\varphi(\eta)} \mathbf{x}_m(q) \quad (4.13)$$

des Objektmittelpunktes  $\mathbf{x}_m(q) = (x_m(q), y_m(q))^T$  durchzuführen. Anschließend wurden jene Quantenpaare für die Messung in LOR  $\xi$  akzeptiert, deren Vertex in diesem Winkelschritt innerhalb der rotierten Quelle lagen. Durch Anwendung der Quellenrotation und wiederholtes Suchen der Treffer zwischen rotierter Quelle und den Vertizes konnte auf diese Weise ein simulierter Messdatensatz für das kreisförmige Objekt erstellt werden. Der für den MADPET entwickelte Algorithmus erlaubte die Wahl einer beliebigen Anzahl  $Q$  von kreisförmigen Objekten, jeweils definiert durch:

- ihren raumfesten Mittelpunkt  $\mathbf{x}_m(q)$  mit  $q \in [1, Q]$ ,
- ihren Radius  $R(q)$  und

1)	Winkelschritt $\eta = 1$
2)	Rotieren aller $q \in [1, Q]$ Quellen bzw. Löcher, entsprechend dem mit dem Winkelschritt $\eta$ korrespondierenden Winkel $\varphi(\eta)$ , in das Tomographen-Koordinatensystem: $\mathbf{x}'_m(q, \eta) = \mathcal{D}_{\varphi(\eta)} \mathbf{x}_m(q).$
3)	Für alle $u \in [1, U]$ nachgewiesenen Koinzidenzen wird geprüft, ob ihr Vertex $(x'_v(u), y'_v(u))^T$ innerhalb der zu behandelten, rotierten, Objekte $(q, \eta)$ liegt: $[x'_v(u) - x'_m(q, \eta)]^2 + [y'_v(u) - y'_m(q, \eta)]^2 \leq R(q)^2.$ Ist diese Beziehung für mindestens eine der durch $F(q) = 1$ gekennzeichneten emittierenden Quellen erfüllt und gleichzeitig für alle durch $F(q) = 0$ gekennzeichneten Löcher nicht erfüllt, so wird die Koinzidenz $u$ akzeptiert und dem simulierten tomographischen Messdatensatz hinzugefügt. Dazu wird das beim Nachweis der Koinzidenz $u$ beteiligte Detektorpaar $\xi = c_a(u) \cdot 24 + (c_b(u) - 24)$ nach Gleichung 4.3, sowie das durch $\xi$ und den Index $\eta$ für den Winkelschritt definierte Projektionselement $i = (\eta - 1) \cdot \hat{\xi} + \xi$ ermittelt und das korrespondierende Element des List-Mode-Histogramms $\mathbf{h}$ um eins erhöht: $h(i) \rightarrow h(i) + 1.$
4)	Nach Erhöhen des Indexes für den Winkelschritt ( $\eta \rightarrow \eta + 1$ ) wird zum Punkt 2 zurückgesprungen, also die Suche für den nächsten Winkelschritt gestartet. Der Rücksprung wird solange durchgeführt, bis die Suche für die geforderte Anzahl von Winkelschritten ( $\eta = \hat{\eta}$ ) vollendet ist.

Ablaufkasten 4.6: Berechnung der tomographischen Projektionsdaten aus den Monte Carlo Simulationen

- eine Flagge  $F(q)$ , die angab, ob das Objekt emittierend ( $F(q) = 1$ ) oder nicht emittierend ( $F(q) = 0$ ) war. Durch setzen von  $F(q) = 0$  konnten auf diese Weise auch Löcher in der zu ermittelnden Verteilung realisiert werden.

Der Suchalgorithmus zum Erstellen des künstlichen Messdatensatzes aus der Simulation ist im Ablaufkasten 4.6 zusammengefasst. Die Zahl der durchzuführenden Rotationsoperationen betrug bei diesem Algorithmus  $Q \cdot \hat{\eta}$  bei insgesamt  $U \cdot Q \cdot \hat{\eta}$  notwendigen Vergleichen. Die mit diesem Algorithmus erstellten Datensätze und deren rekonstruierte Bilddaten werden im Kapitel 4.8 auf Seite 96 diskutiert.

#### 4.5.6 Berechnung der Gewichtematrix

In dieser Arbeit wurde der Ansatz untersucht, die Gewichtematrix für die iterative statistische Bildrekonstruktion vollständig aus Monte Carlo Simulationen zu berechnen. Andere Gruppen

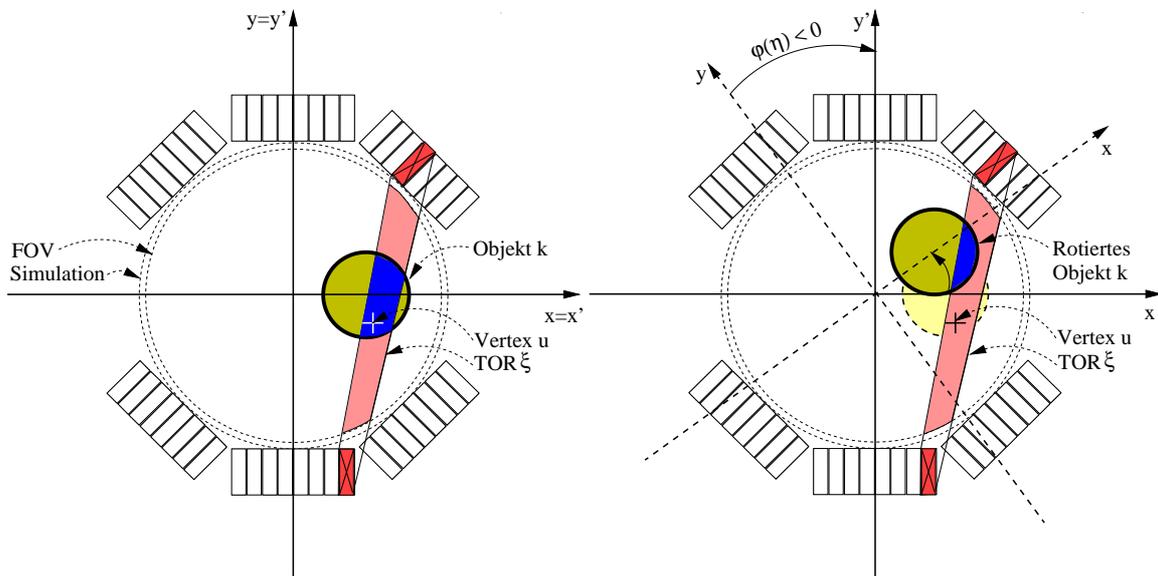


Abbildung 4.22: Extraktion von tomographischen Datensätzen aus der Monte Carlo Simulation des MADPET

Zu Abbildung 4.22: Darstellung des Extraktionsproblems für den ersten Winkelschritt (links) und den, um  $36^\circ$  rotierten, siebten Winkelschritt (rechts).

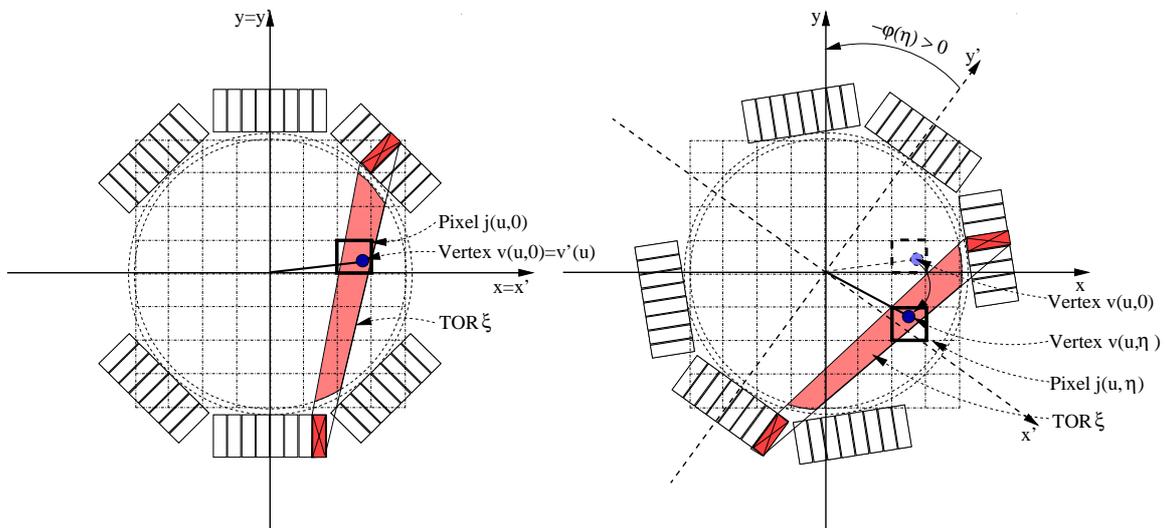


Abbildung 4.23: Berechnung der Gewichtematrix für die iterative Rekonstruktion aus der Monte Carlo Simulation der homogenen Quellenverteilung

Zu Abbildung 4.23: Darstellung des Extraktionsproblems für den ersten Winkelschritt (links) und den, um  $36^\circ$  rotierten, siebten Winkelschritt (rechts).

propagierten bisher die Berechnung der Matrix auf analytischem Wege unter Annahme einiger Vereinfachungen. Qi et al. [99, 120, 119] etablierten unter anderem für den Kleintiertomographen MicroPET [21] für die Rekonstruktion eines relativ kleinen Gesichtsfeldes (60 %) eine Gewichtematrix, die in unterschiedlich zu ermittelnde, näherungsweise bestimmte Anteile faktorisiert wurde:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{geom} \cdot \mathbf{A}_{blur} \cdot \mathbf{A}_{sens}. \quad (4.14)$$

$\mathbf{A}_{geom}$  enthielt als Näherung die Raumwinkelanteile der Bildelemente bezüglich der Frontflächen der Kristalle. Der *blur* Term berücksichtigte die physikalischen Prozesse der Gammaquanten mit den Detektoren (z.B. Streuung im Detektorsystem) auf Basis eines Sinogramms, also nicht für jedes  $(i, j)$  Element der Matrix sondern nur für jedes, aus der Umsortierung der gemessenen Koinzidenzen ermittelte, Sinogrammelement.  $\mathbf{A}_{sens}$  beinhaltete wie in dieser Arbeit die koinzidenten elektronischen Sensitivitäten der Detektorpaare. Im Gegensatz zu Qi et al. wurde jedes Element  $(i, j)$  der hier untersuchten Gewichtematrix aus der Monte Carlo Simulation ohne Einschränkungen ermittelt. Es fand keine Gruppierung von Matrixelementen unter vereinfachten gemeinsamen Eigenschaften statt. Ein Vergleich der hier entwickelten mit den von anderen Gruppen für Kleintiertomographen etablierten Methoden wird in Kapitel 7 auf Seite 145 vorgestellt.

Die Berechnung der für die iterative List-Mode-Rekonstruktion der MADPET-Daten notwendige Wahrscheinlichkeits- oder Gewichtematrix aus der Monte Carlo Simulation erfolgte auf eine, der Extraktion von Quellenverteilungen, sehr ähnliche Weise. Sie basierte auf der Tatsache, dass sich die Wahrscheinlichkeit dafür, ein im Bildelement  $j$  emittiertes Gammaquantenpaar im Projektionselement  $i$  nachzuweisen, durch Zählen der in der Simulation erfolgten Wechselwirkungen ermitteln lässt. Genauer gesagt, diese Nachweiswahrscheinlichkeit ist linear proportional zu der Zahl der in der Simulation aus  $j$  emittierten und in  $i$  nachgewiesenen Quantenpaare. Im vorigen Abschnitt wurden die Berechnungen im rotierten Koordinatensystem  $(x', y')$  des Tomographen durchgeführt. Es wurde dadurch die Rotation einer geringen Zahl  $Q$  von Objekten der Rotation einer großen Zahl  $U$  von Vertizes zur Minimierung der Rechenzeit vorgezogen. Im Gegensatz dazu wurde für die Berechnung der Gewichtematrix der Rotationsschritt auf jeden Vertex  $\mathbf{v}'(u)$  angewendet. Der Grund hierfür war in der Beschaffenheit der Objekte zu finden. Anstelle der kreisförmigen Objekte bei der Erstellung der simulierten Messdatensätze wurden nun als Objekte die quadratischen Bildelemente angenommen, was den in Punkt 3 des Ablaufkastens 4.6 auf Seite 85 beschriebenen Vergleich kompliziert hätte. Im Folgenden blieb die Bildmatrix raumfest, die Bildelemente waren somit durch einfache Einschränkungen der horizontalen und vertikalen Raumkoordinaten beschreibbar. Zusammenfassend lässt sich zur Rotationsoperation bei der Berechnung der Gewichtematrix festhalten:

- Die Vertizes lagen im rotierten  $(x', y')$ -Koordinatensystem des Tomographen vor.
- Die Bildmatrix war ortsfest bezüglich des raumfesten  $(x, y)$ -Koordinatensystems.
- Die Vergleichsoperation geschah im raumfesten  $(x, y)$ -Koordinatensystem. Die Vertizes der nachgewiesenen Gammaquantenpaare wurden hierfür in das raumfeste Koordinatensystem gemäß dem Rotationswinkel  $\varphi(\eta)$  zurückgedreht.
- Der zu simulierende Rotationswinkel  $\varphi(\eta)$  war negativ. Dies entspricht - wie in Abbildung 4.7 dargestellt - einer Rotation des Tomographen bezüglich des raumfesten Koordinatensystems mit dem Winkel  $\Phi(\eta) > 0$  im Uhrzeigersinn .

- Die anzuwendende Rotationsoperation berechnete die Koordinaten eines Punktes  $\mathbf{x}$  im ruhenden System aus seinen Koordinaten  $\mathbf{x}'$  im rotierten System durch Anwendung der Drehmatrix  $\mathcal{D}'_{\varphi(\eta)}$ .

Zur Vorbereitung der Vergleichsoperation wurde mit

$$U_1(\xi) = \{u \in U ; \xi(u) = \xi\} \quad (4.15)$$

jene Untermenge aller nachgewiesenen Quantenpaare definiert, deren Nachweis in dem Detektorpaar  $\xi$  erfolgte. Sie musste aufgrund ihrer Unabhängigkeit vom Winkelschritt nur einmal bestimmt werden. Mit  $\mathbf{F}(j)$  wurde jene Menge aller Punkte im  $(x, y)$  Koordinatensystem definiert, die innerhalb des Bildelements  $j$  lagen. Damit ließ sich eine Untermenge

$$U_2(\eta, j) = \{u \in U ; \mathbf{v}(u, \eta) \in \mathbf{F}(j)\} \quad (4.16)$$

der Menge  $U$  aller simulierten Koinzidenzen ermitteln, deren - bezüglich des Winkelschritts  $\eta$  rotierte - Vertizes im  $(x, y)$  System innerhalb der Fläche des Bildelements  $j$  lagen. Diese Untermenge musste für jeden Winkelschritt neu bestimmt werden, erforderte also insgesamt  $\hat{\eta} \cdot U$  Rotationsoperationen. Die Menge  $U_3(\xi, \eta, j)$  aller zu akzeptierender Koinzidenzen wurde anschließend aus der Schnittmenge von  $U_1$  und  $U_2$  ermittelt:

$$U_3(\xi, \eta, j) = U_1(\xi) \cap U_2(\eta, j). \quad (4.17)$$

Um die Ähnlichkeit der Indizierung von  $U_3$  mit der zu ermittelnden Wahrscheinlichkeit  $a(i, j)$  zu verdeutlichen, kann durch Einsetzen der Beziehung für die Bestimmung des Projektionselements  $i$ ,

$$i = \hat{\xi} \cdot \eta + \xi, \quad (4.18)$$

diese Untermenge als

$$U_3(\xi, \eta, j) = U_3(i, j) \quad (4.19)$$

geschrieben werden. Aufgrund der eingangs beschriebenen Proportionalität zwischen der Zahl der nachgewiesenen Gammaquantenpaare und der Wahrscheinlichkeit  $a(i, j)$ , ein im Bildelement  $j$  emittiertes Quantenpaar im Projektionselement  $i$  zu finden, ließ sich  $a(i, j)$  aus der Menge  $U_3(i, j)$  ermitteln:

$$a(i, j) \sim \sum_{u \in U_3(i, j)} 1. \quad (4.20)$$

Der hier beschriebene Vergleich, im besonderen die Problematik der Rotation, ist in Abbildung 4.23 auf Seite 86 veranschaulicht. Eine Zusammenfassung des Suchalgorithmus zum Erstellen der Gewichtematrix aus der Simulation ist in dem Ablaufkasten 4.7 auf Seite 90 zu finden. Die Zahl der im Schritt 2a durchzuführenden Rotationsoperationen betrug bei diesem Algorithmus  $U \cdot \hat{\eta}$ , bei insgesamt  $J \cdot U \cdot \hat{\eta}$  notwendigen Vergleichen im Schritt 2c.

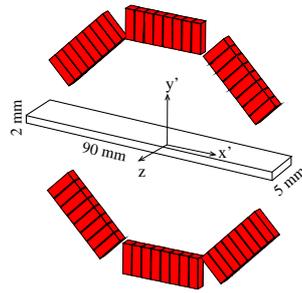


Abbildung 4.24: Aufbau für die Messung und Simulation der koinzidenten Sensitivitäten

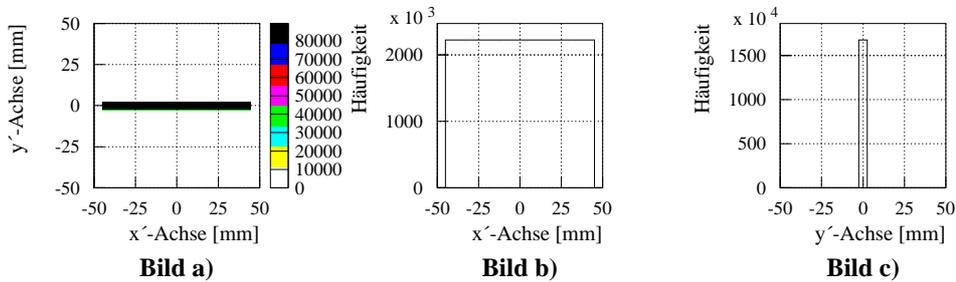


Abbildung 4.25: Monte Carlo Simulation der homogenen Flächenquelle: Verteilung der Vertizes der emittierten Quantenpaare

Zu Abbildung 4.25: Bild a) Die Verteilung der Vertizes der emittierten Gammaquantenpaare im  $(x', y')$ -Koordinatensystem des Tomographen; Bild b) Bild a projiziert entlang der  $x'$ -Achse; Bild c) Bild a projiziert entlang der  $y'$ -Achse.

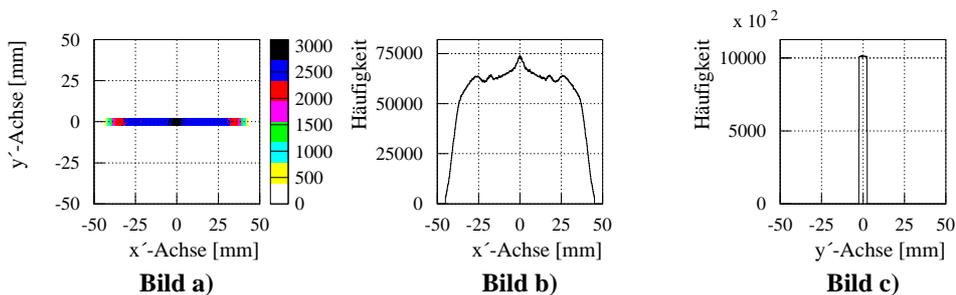


Abbildung 4.26: Monte Carlo Simulation der homogenen Flächenquelle: Vertizes der nachgewiesenen Quantenpaare

Zu Abbildung 4.26: Bild a) Die Verteilung der Vertizes der nachgewiesenen Gammaquantenpaare im  $(x', y')$ -Koordinatensystem des Tomographen; Bild b) Bild a projiziert entlang der  $x'$ -Achse; Bild c) Bild a projiziert entlang der  $y'$ -Achse.

- 1) Winkelschritt  $\eta = 1$
- 2) Für jede erfasste Koinzidenz  $u$  werden folgende Operationen ausgeführt:
  - 2a) Um den Vergleich mit den Bildelementen  $\mathbf{F}(j)$  durchführen zu können, muss der Vertex  $\mathbf{v}'(u)$  jeder Koinzidenz  $u \in [1, U]$  in das raumfeste Koordinatensystem mit  $-\varphi(\eta)$  zurückgedreht werden:
 
$$\mathbf{v}(u, \eta) = \mathcal{D}'_{\varphi(\eta)} \mathbf{v}'(u). \quad (4.21)$$
  - 2b) Der Index  $i$  für das Projektionselement wird aus dem beteiligten Detektorpaar  $\xi(u)$  und dem Winkelschritt  $\eta$  ermittelt:
 
$$i = \hat{\xi} \cdot \eta + \xi(u).$$
  - 2c) Das Bildelement  $j$ , in dem der zurückrotierte Vertex  $\mathbf{v}(u, \eta)$  liegt, wird durch den folgenden Vergleich gesucht:
 
$$j = \left\{ J ; \mathbf{v}(u, \eta) \in \mathbf{F}(j) \right\}.$$
  - 2d) Das entsprechende Gewicht  $a(i, j)$  wird erhöht:
 
$$a(i, j) \rightarrow a(i, j) + 1.$$
- 3) Nach Erhöhen des Indexes für den Winkelschritt ( $\eta \rightarrow \eta + 1$ ) wird zum Punkt 2 zurückgesprungen. Der Rücksprung wird solange durchgeführt, bis die Suche für die geforderte Anzahl von Winkelschritten ( $\eta = \hat{\eta}$ ) vollendet ist.

Ablaufkasten 4.7: Berechnung der Gewichtematrix aus den Monte Carlo Simulationen

## 4.6 Bestimmung von Korrekturdaten

### 4.6.1 Bestimmung der koinzidenten Sensitivitäten

Die Sensitivität eines Detektorpaares bezüglich paarweise koinzident einfallender Gammaquanten kann im Allgemeinen in die physikalische Sensitivität  $s_p$  und die elektronische Sensitivität  $s_e$  faktorisiert werden [52]:

$$s(\xi) = s_p(\xi) \cdot s_e(\xi). \quad (4.22)$$

Hierbei wird davon ausgegangen, dass beide Sensitivitäten invariant gegenüber der Position des Detektorsystems im Raum, also dem Winkelschritt  $\eta$ , sind. Die physikalische Sensitivität wird durch alle physikalischen Effekte wie z.B. Raumwinkel, Wechselwirkungsquerschnitt und Abschirmungen verursacht. Sie lässt sich, wie in dieser Arbeit durchgeführt, anhand von Monte Carlo Simulationen ermitteln und in der Gewichtematrix bei der statistischen Rekonstruktion verwenden. Die elektronische Sensitivität wird unter anderem durch Variationen in der zeitlichen Propagierung der Spannungsimpulse und durch unterschiedliche Weiten der Koinzidenzfenster, z.B. aufgrund unterschiedlicher zeitlicher Konstanz der einzelnen Kanäle der Koinzidenzelektronik, verursacht. Sie lässt sich in der Regel nur anhand von Messungen bestimmen. In dieser Arbeit enthielt  $s_e$  neben den elektrischen Sensitivitäten auch jene Anteile

der physikalischen Sensitivität, die von den simulierten Werten von  $s_p$  abweichen, wie z.B. den Einfluss der unterschiedlichen Energieauflösungen der Einzeldetektoren.

Da die physikalischen Sensitivitäten bereits anhand der Antwortfunktionen bzw. der Monte Carlo Gewichtematrix in der Bildverarbeitung berücksichtigt wurden, mussten nur die Elemente von  $s_e$  aus einer Messung bestimmt werden. Dies gelang durch das Messen und das Simulieren einer Flächenquelle [105], durch die sämtliche Detektorpaare mit koinzidenten Gammaquanten exponiert wurden. Damit konnten aufwändige Faktorisierungs- und Lösungsansätze [5] vermieden werden. Um auch eine Exposition der Detektoren am Rande des Gesichtsfeldes zu gewährleisten, wurde ein spezielles Flächenphantom angefertigt. Die Maße dieser kuboiden Flächenquelle betragen  $90 \times 2 \times 5 \text{ mm}^3$ . Da die Breite von 90 mm größer als der Detektorabstand des Tomographen war, konnte die Messung nur in einer Position des Detektorsystems (wie in Abbildung 4.24 dargestellt) durchgeführt werden. Die Position der Flächenquelle in der zusätzlich durchgeführten Monte Carlo Simulation ( $10^9$  emittierte Quantenpaare,  $25 \cdot 10^6$  nachgewiesene Quantenpaare oberhalb 450 keV, 1,1 Gigabyte Dateigröße) wurde entsprechend dieser Messsituation angelegt. Abbildung 4.25 zeigt die Verteilung der Vertizes der emittierten Gammaquantenpaare und deren Projektionen entlang der kartesischen Koordinatenachsen. Die Verteilung der Vertizes der korrespondierenden nachgewiesenen Quantenpaare ist in Abbildung 4.26 dargestellt. Es ist - wie in Abbildung 4.18 auf Seite 80 - die inhomogene physikalische Sensitivität des Tomographen anhand der Helligkeitsunterschiede im Bild a und der unregelmäßigen Kurvenverläufe in den Bildern b und c zu beobachten.

Die elektronischen Sensitivitäten wurden durch Bilden des Quotienten aus den Summen  $N_g(\xi)$  und  $N_s(\xi)$  der gemessenen und simulierten Koinzidenzen im Detektorpaar  $\xi$  bestimmt und auf ihren Maximalwert normiert:

$$s_e(\xi) = \frac{\frac{N_g(\xi)}{N_s(\xi)}}{\max_{\xi} \left\{ \frac{N_g(\xi)}{N_s(\xi)} \right\}}. \quad (4.23)$$

Für den besonderen Fall, dass die Summe  $N_s(\xi)$  für ein Detektorpaar  $\xi$  sehr klein war, wurde diesem vor der Berechnung von  $s_e(\xi)$  ein gemittelter Wert über die von Null verschiedenen Werte von  $N_s$  zugewiesen. Zur Anwendung in der Bilderstellung wurden in Gleichung 4.22 die physikalischen Sensitivitäten für alle Detektorpaare  $\xi$  auf 1 gesetzt ( $s_p(\xi) = 1$ ), da sie bereits in der Gewichtematrix bzw. in den Antwortfunktionen enthalten waren. In der weiteren Datenverarbeitung kam somit

$$s(\xi) = s_e(\xi) \quad (4.24)$$

für die Sensitivitätskorrektur zur Anwendung.

#### 4.6.2 Bestimmung der zufälligen Koinzidenzen

Wie bereits in den vorigen Kapiteln dargelegt (siehe Abschnitte 2.4.1 und 3.2.2), beeinflusst die Kontamination der Messdaten durch zufällige Koinzidenzen die Wirkungsweise der Rekonstruktionsmethoden. Es werden falsche Emissionsorte für diese zufälligen Koinzidenzen berechnet und somit der Untergrund im rekonstruierten Bild erhöht. MADPET ließ aufgrund seines elektronischen Schaltungsaufbaus keine vollständige Messung der zufälligen Koinzidenzen zu. Dafür wäre eine zweite analoge und digitale Koinzidenzelektronik erforderlich gewesen. Diese Forderung konnte aufgrund fehlender finanzieller Mittel nicht erfüllt werden. Die analoge

Koinzidenzelektronik des MADPET erlaubte jedoch das Zählen der zufälligen Koinzidenzen anhand der *delayed-window* Methode, summiert über alle Detektorpaare  $\xi$ . Diese Zahl wurde während der Messung von  $\mathbf{h}$  (List-Mode Histogramm aller Koinzidenzen) an einem Zähler dargestellt und von der die Messung durchführenden Person notiert. Unter der Annahme, dass die Wahrscheinlichkeit für eine zufällige Koinzidenz für alle List-Mode Elemente  $i$  gleich war (abgesehen von der Sensitivität  $\mathbf{s}$ ), wurde der Mittelwert

$$\bar{h} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I h(i) \quad (4.25)$$

über das gemessene List-Mode Histogramm gebildet. Anhand der notierten Zahl konnte für die Bildrekonstruktion das List-Mode Histogramm  $\mathbf{n}$  der zufälligen Koinzidenzen

$$n(i) = 1,3 \cdot \frac{\text{Rate der zufälligen Koinzidenzen}}{\text{Rate aller Koinzidenzen}} \cdot \bar{h} \cdot s(\xi(i)). \quad (4.26)$$

abgeschätzt und mit den unterschiedlichen Sensitivitäten  $\mathbf{s}$  zu einem realistischen Messdatensatz umgeformt werden. Der anhand von Messungen abgeschätzte Korrekturfaktor (1,3) diente zur Anpassung der an dem Zähler dargestellten an die zu erwartende Rate der zufälligen Koinzidenzen. Mit diesem Faktor wurden kleine Unterschiede in den Weiten des Koinzidenz- und des verzögerten Zeitfensters korrigiert.

## 4.7 Tomographische Bildrekonstruktion

Die Rekonstruktion der MADPET-Daten wurde mit der gefilterten Rückprojektion und mit zwei iterativen statistischen Algorithmen durchgeführt. Die besonderen Anforderungen an die Rekonstruktion für MADPET wurden in diesen Algorithmen anhand der in diesem Kapitel beschriebenen Methoden (Umformung zum Sinogramm, bzw. iterative Rekonstruktion des List-Mode-Histogramms mittels der Monte Carlo Gewichtematrix) berücksichtigt. Alle rekonstruierten Bildmatrizen enthielten  $128 \times 128$  Bildelemente mit je 1 mm Kantenlänge.

### 4.7.1 Umformung zu Sinogrammen

Die in Abschnitt 4.4 vorgestellte Vorverarbeitung der gemessenen und simulierten Daten lieferte für jeden tomographischen Datensatz ein List-Mode Histogramm. Um diese Daten für die analytische Rekonstruktion nutzbar zu machen, war die Umsortierung (engl. *rebinning*) des List-Mode Histogramms zu einem Parallel-Sinogramm erforderlich. Der Vorgang dieser Umformung ist in Abbildung 4.27 und, zusammengefasst, im Ablaufkasten 4.8 beschrieben. Entgegen herkömmlicher Einsortierungsalgorithmen, die für jede gemessene Koinzidenz lediglich ein einzelnes bzw. zwei (lineare Interpolation) oder vier (bilinare Interpolation) Sinogrammelemente modifizieren, verwendete die in dieser Arbeit entwickelte Umformungsmethode die analytischen (TRI) bzw. die aus den Monte Carlo Simulationen gewonnenen (REC, CAF) koinzidenten Antwortfunktionen der einzelnen Detektorpaare. Deren Berechnung wurde im Abschnitt 4.5.4 beschrieben. Zu den geometrischen Randbedingungen zwischen Antwortfunktionen und Sinogramm können folgende Anmerkungen zusammengefasst werden:

- Die Breite der Sinogrammzeilen war identisch mit der Breite der Antwortfunktionen. Sie betrug, aufgrund der Wahl der üblichen Matrixbreite für das Sinogramm von 128 Elementen, 128 mm.

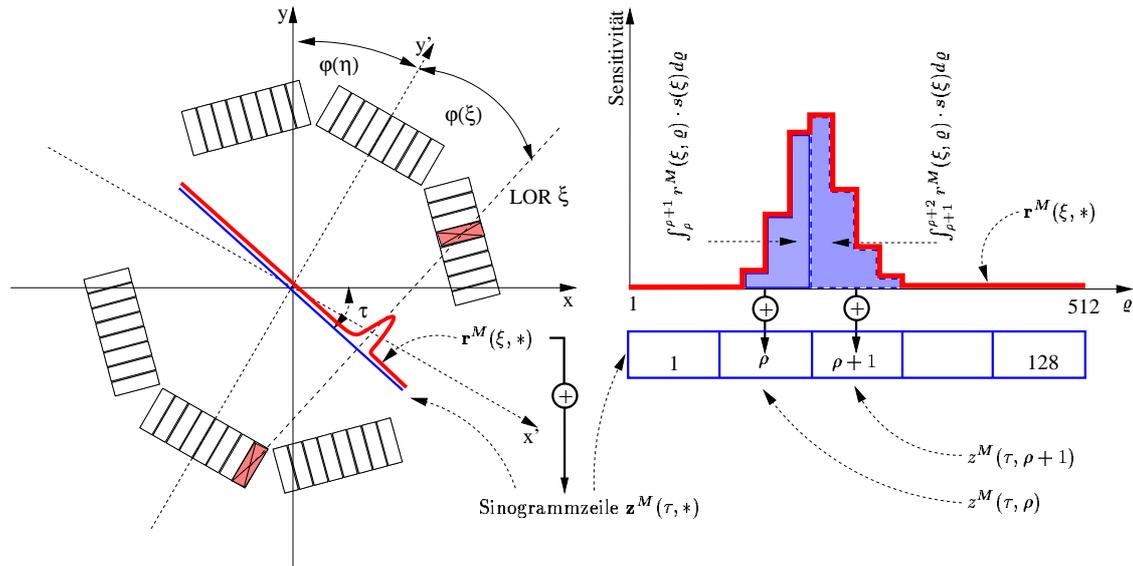


Abbildung 4.27: Einsortierung einer Koinzidenz in das Parallelsinogramm  
 Zu Abbildung 4.27: [Bild links](#)) Schematische Darstellung und geometrische Randbedingungen der Einsortierung einer in der LOR  $\xi$  nachgewiesenen Koinzidenz in das Sinogramm durch Addition der Antwortfunktion zu der entsprechenden Sinogrammzeile. [Bild rechts](#)) Für deren Nutzung im Sinogramm wird die zu dem Detektorpaar  $\xi$  gehörende Antwortfunktion  $\mathbf{r}^M(\xi, *)$  - multipliziert mit der Korrektur  $s(\xi)$  für die koinzidente Sensitivität - durch Bilden der Integrale mit der Breite der Sinogrammelemente zu der Sinogrammzeile  $\mathbf{z}(\tau, *)$  elementeweise addiert.

- Jede Sinogrammzeile wurde in  $\rho \in [1, 128]$  Elemente zu je  $\Delta\rho = 1$  mm Breite unterteilt.
- Jede Antwortfunktion wurde in  $\varrho \in [1, 512]$  Elemente zu je  $\Delta\varrho = 128 \text{ mm}/512 = 0,25$  mm unterteilt. Diese feinere Abtastung der Antwortfunktionen wurde gewählt, um in der Wahl der Breiten der Sinogrammelemente eine größere Freiheit zu gewährleisten. Bei der hier vorgestellten Breite von 1 mm je Sinogrammelement wäre eine Abtastung der Antwortfunktionen in 1-mm-Schritten jedoch ausreichend gewesen.

Zur Einsortierung der im List-Mode-Histogramm gespeicherten Koinzidenzen musste für jedes Histogrammelement  $i = (\eta - 1) \cdot \hat{\xi} + \xi$  die zugehörige Sinogrammzeile  $\tau$  aus dem Winkelschritt  $\eta$  und dem beteiligten Detektorpaar  $\xi$  ermittelt werden. Die absolute Lage einer LOR  $\xi$  im Winkelschritt  $\eta$  war durch den Rotationswinkel  $\varphi(\eta)$  und durch den Relativwinkel  $\varphi(\xi)$  zwischen dem Tomographen-Koordinatensystem  $(x', y')$  und der LOR  $\xi$  definiert (siehe Abbildung 4.27, links). Die Winkelschrittweite der Rotation des Tomographen wurde durch die Anzahl der Winkelschritte  $\hat{\eta}$  über eine vollständige 180°-Rotation definiert,

$$\Delta\varphi_\eta = \frac{180^\circ}{\hat{\eta}}, \quad (4.27)$$

und betrug bei allen MADPET-Messungen (für  $\hat{\eta} = 30$ )  $\Delta\varphi_\eta = 6^\circ$ . Der Rotationswinkel  $\varphi(\eta)$  im Winkelschritt  $\eta \in [1, \hat{\eta}]$  ließ sich somit durch

$$\varphi(\eta) = \Delta\varphi_\eta \cdot (\eta - 1) \quad (4.28)$$

ermitteln. Der Relativwinkel  $\varphi(\xi)$  musste für jede LOR  $\xi = c_a \cdot 24 + c_b - 24$  nur einmalig durch Verbinden der Mittelpunkte der beiden Kristalle  $c_a$  und  $c_b$  und Berechnen des Steigungswinkels dieser Geraden im  $(x', y')$ -Koordinatensystem bestimmt werden. Der absolute Winkel der LOR  $\xi$  im raumfesten Koordinatensystem  $(x, y)$  war somit

$$\begin{aligned}\varphi(\eta, \xi) &= \varphi(\eta) + \varphi(\xi) \\ &= \Delta\varphi_\eta \cdot (\eta - 1) + \varphi(\xi).\end{aligned}\quad (4.29)$$

Damit war der absolute Winkel für ein Histogrammelement  $i$  ermittelt. Der Schritt zur Einsortierung einer Koinzidenz  $\xi$  in das Sinogramm beinhaltete nun das Suchen nach der Sinogrammzeile, deren Projektionswinkel  $\varphi(\tau)$  dem absoluten Winkel  $\varphi(\eta, \xi)$  entsprach. Dazu wurde zuerst die Winkeldifferenz  $\Delta\varphi_\tau$  der Projektionsdaten zweier benachbarter Zeilen im Sinogramm anhand der Anzahl  $\hat{\tau}$  der Sinogrammzeilen mit

$$\Delta\varphi_\tau = \frac{180^\circ}{\hat{\tau}} \quad (4.30)$$

berechnet. Sie betrug (für  $\hat{\tau} = 90$ )  $\Delta\varphi_\tau = 2^\circ$ . Für die gesuchte Sinogrammzeile  $\tau$  musste folgende Beziehung gelten:

$$\tau \cdot \Delta\varphi_\tau \leq \varphi(\eta, \xi) < (\tau + 1) \cdot \Delta\varphi_\tau.$$

War diese Zeile  $\tau$  ermittelt, konnte die Antwortfunktion  $\mathbf{r}^M(\xi, *)$  zu der Sinogrammzeile  $\mathbf{z}^M(\tau, *)$  addiert werden. Diese Addition wurde aufgrund der eingangs genannten unterschiedlichen Abtastungen von Sinogrammzeilen und Antwortfunktionen als folgender Integrations-schritt für jedes Element  $\rho$  der Sinogrammzeile  $\tau$  ausgeführt:

$$z^M(\tau, \rho) \rightarrow z^M(\tau, \rho) + \int_{\varrho \in \rho} d\varrho r^M(\xi, \varrho) \cdot s(\xi) ; \forall \rho. \quad (4.31)$$

Hierbei wurde über die Breite des Sinogrammelements  $\rho$  die Antwortfunktion  $\mathbf{r}^M$  integriert und dieser Integralwert zu dem Sinogrammelement  $\rho$  addiert (siehe Abbildung 4.27, rechts). Der Integrationsschritt wurde eingeführt, um den Algorithmus auch für andere Abtastintervalle (z.B.  $\hat{\rho} \neq 128$ ) anwendbar zu machen. War  $\varrho$  kein ganzzahliges Vielfaches von  $\rho$ , wurde die Integration anhand linearer Interpolation zwischen benachbarten Elementen der Antwortfunktion  $\mathbf{r}^M(\xi, *)$  durchgeführt. Die vollständige Umformung eines List-Mode-Histogramms  $\mathbf{h}$  zum Parallel-Sinogramm  $\mathbf{z}^M$  wird im Folgenden mit dem Rebinningoperator  $\mathcal{R}^M$  zu der Beziehung

$$\mathbf{z}^M = \mathcal{R}^M\{\mathbf{h} - \mathbf{n}, \mathbf{s}\} \quad (4.32)$$

zusammengefasst, wobei  $M \in \{\text{TRI}, \text{REC}, \text{CAF}\}$  die dabei verwendete Antwortfunktion darstellt. Lag ein Datensatz für die zufälligen Koinzidenzen vor, so wurde dieser vor der Umsortierung vom List-Mode Histogramm aller Koinzidenzen subtrahiert.

Da die Information, welches Detektorpaar zu welchem Element des Sinogramms beigetragen hatte, nach der Umsortierung nicht mehr vorhanden war, wurde die Korrektur für die unterschiedlichen koinzidenten Sensitivitäten (siehe Abschnitt 4.6.1) der einzelnen Detektorpaare in den hier vorgestellten Umformungsalgorithmus integriert. Diese Sensitivitätskorrektur ist anhand der multiplikativen Anwendung von  $s(\xi)$  in Gleichung 4.31 ersichtlich. Bei der Umsortierung von simulierten Daten wurde  $s(\xi) = 1$  für alle Detektorpaare gesetzt. Die in den Gleichungen 4.31 bzw. 4.32 angegebene Einsortierung konnte mit jeder der drei, im Abschnitt 4.5.4 auf Seite 81 beschriebenen, Antwortfunktionen angewendet werden.

- 1) Setze  $\eta = 1$  für den ersten Winkelschritt.
- 2) Setze  $\xi = 1$  für das erste Detektorpaar der aktuellen Histogrammzeile  $\eta$ .
- 3) Das Element  $\xi$  der aktuellen Histogrammzeile  $\eta$  enthält die Zahl der gemessenen Koinzidenzen  $h(i) = h((\eta - 1) \cdot \hat{\xi} + \xi)$ . Folgende Operationen zur Einsortierung einer einzelnen gemessenen Koinzidenz in das Sinogramm werden  $h(i)$ -mal durchgeführt:
  - 3a) Es wird der Winkel der Projektionslinie  $\xi$  im Winkelschritt  $\eta$  durch
 
$$\varphi(\eta, \xi) = \varphi(\eta) + \varphi(\xi)$$
 ermittelt. Hierbei ist der Wert  $\varphi(\eta)$  anhand der Weite der Winkelschritte  $\Delta\varphi_\eta = 180^\circ/\hat{\eta}$  durch
 
$$\varphi(\eta) = \Delta\varphi_\eta \cdot \eta$$
 zu ermitteln. Der Winkel  $\varphi(\xi)$  ist relativ zum Tomographen-Koordinatensystem definiert und muss nur einmal für jede LOR  $\xi$  bestimmt werden.
  - 3b) Die Anzahl  $\hat{\tau}$  der in dem Sinogramm vorkommenden Zeilen, also die Zahl der in dem Sinogramm enthaltenen Parallelprojektionen, wird einmalig festgelegt. Wiederum ist die Winkelschrittweite zwischen zwei Sinogrammzeilen durch  $\Delta\varphi_\tau = 180^\circ/\hat{\tau}$  definiert. Es erfolgt nun die Prüfung, welche Sinogrammzeile dem Projektionswinkel  $\varphi(\eta, \xi)$  am nächsten ist. Es wird jener Wert von  $\tau$  gesucht, für den folgende Beziehung gilt:
 
$$\tau \cdot \Delta\varphi_\tau \leq \varphi(\eta, \xi) < (\tau + 1) \cdot \Delta\varphi_\tau.$$
  - 3c) Die Antwortfunktion des Detektopaars  $\xi$  wird zu der, durch den Index  $\tau$  definierten, Sinogrammzeile addiert. Hierbei findet wie in Gleichung 4.31 beschrieben eine Integration der kleinen Elemente  $\varrho$  der Antwortfunktion (mit  $\Delta\varrho = 0,25$  mm) über die Weite der jeweiligen Elemente  $\rho$  der Sinogrammzeile statt.
- 4) Nach Erhöhen des Indexes für den Winkelschritt ( $\eta \rightarrow \eta + 1$ ) wird mit der nächsten Histogrammzeile im Punkt 2 fortgefahren. Der Rücksprung wird solange durchgeführt, bis alle  $\hat{\eta}$  Histogrammzeilen bearbeitet wurden.

Ablaufkasten 4.8: Umformung des List-Mode Histogramms zum Sinogramm

### 4.7.2 Analytische Bildrekonstruktion

Die gefilterte Rückprojektion der Parallel-Sinogramme in die Bildmatrix geschah wie im Kapitel 3 beschrieben. Zur Anwendung kam hierbei der Rampenfilter mit der Abschneidefrequenz gleich der Nyquistfrequenz. War ein List-Mode Histogramm der (abgeschätzten, siehe Abschnitt 4.6.2 auf Seite 91) zufälligen Koinzidenzen vorhanden, so wurde dieses vor der Umsortierung von dem Histogramm aller gemessenen Koinzidenzen subtrahiert. Die in dieser Arbeit angewendete gefilterte Rückprojektion der Sinogrammmatrix  $\mathbf{z}^M$  kann mit folgender Gleichung zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^M &= \mathcal{FBP}\left\{\mathcal{R}^M\{\mathbf{h} - \mathbf{n}, \mathbf{s}\}\right\} \\ &= \mathcal{FBP}\left\{\mathbf{z}^M\right\}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Die damit erstellten Bilddaten werden im Kapitel 4.8 vorgestellt und untersucht. Die gefilterte Rückprojektion einer Sinogrammmatrix ( $128 \times 90$ ) in eine Bildmatrix ( $128 \times 128$ , 1 mm Kantenlänge der Bildelemente) benötigte 0,3 Sekunden.

### 4.7.3 Statistische Bildrekonstruktion

Die statistische iterative Bildrekonstruktion erfolgte mit den Rekonstruktionsalgorithmen von J.A. Fessler [32]. Der besonderen Rekonstruktionsproblematik des MADPET wurde hierbei durch die Anwendung der Monte Carlo Gewichtematrix basierend auf geometrisch unverarbeiteten List-Mode Histogrammen Rechnung getragen. Die Operatoren  $\mathcal{PLM}$  und  $\mathcal{OLM}$  führten eine Korrektur bezüglich der zufälligen Koinzidenzen und anschließend der koinzidenten Sensitivitäten aus, gefolgt von der iterativen Rekonstruktion von dem List-Mode Histogramm  $\mathbf{h}$  in die Bildmatrix  $\mathbf{f}$  unter Verwendung der Monte Carlo Gewichtematrix  $\mathbf{A}$ . Der Rekonstruktionsoperator  $\mathcal{PLM}$  führte die PWLS-PCG Rekonstruktion von J.A. Fessler [31, 32, 35, 141] (siehe Abschnitt 3.2.6.4 auf Seite 47) mit  $\beta = 20$  durch,

$$\mathbf{f}^{\mathcal{PLM}} = \mathcal{PLM}\{\mathbf{A}, \mathbf{h}, \mathbf{n}, \mathbf{s}\}, \quad (4.34)$$

wohingegen der  $\mathcal{OLM}$ -Operator eine von J.A. Fessler ebenfalls in [32] bereitgestellte Implementierung der (engl. *shifted-poisson*) OSEM-Rekonstruktion (siehe Abschnitt 3.2.6.3 auf Seite 46 und [53]) anwendete:

$$\mathbf{f}^{\mathcal{OLM}} = \mathcal{G}_{2D}^{1,8}\{\mathcal{OLM}\{\mathbf{A}, \mathbf{h}, \mathbf{n}, \mathbf{s}\}\}. \quad (4.35)$$

Die  $\mathcal{OLM}$ -Rekonstruktion wurde wie allgemein üblich mit einer überhöhten Zahl von Iterationen durchgeführt, um eine hohe Ortsauflösung im Bild für alle Daten zu gewährleisten. Bei der am MADPET implementierten  $\mathcal{OLM}$ -Rekonstruktion wurde auf den, mit einer Überiteration einhergehenden, hohen Rauschanteil und auf die unnatürlich scharfen Kanten im rekonstruierten Bild mittels einer Glättung des Bildes nach vollendeter Rekonstruktion reagiert. Für diese Glättung kam ein Gauß-Filter mit 1,8 mm Halbwertsbreite (siehe Gauß-Glättungsoperator  $\mathcal{G}$  in Gleichung 4.35) zum Einsatz. Die Halbwertsbreite dieses Filters wurde so gewählt, dass sie kleiner als die angestrebte Ortsauflösung von bestenfalls 2,2 mm (intrinsische Auflösung zweier optimal ausgerichteter LSO-APD Detektoren des MADPET, siehe [110]) war. Zur Beschleunigung der  $\mathcal{OLM}$ -Rekonstruktion wurden die Elemente des List-Mode-Histogramms in vier Untergruppen (*subsets*, siehe Abschnitt 3.2.6.3 auf Seite 46) aufgeteilt.

Für beide Algorithmen wurden somit die Glättungsparameter derart eingestellt, dass die beste Ortsauflösung bei gleichzeitig guter Bildqualität erreicht wurde. Die Rechendauer beider iterativen Rekonstruktionsalgorithmen betrug beim MADPET für eine vollständige Iteration ungefähr 0,5 Sekunden.

## 4.8 Rekonstruierte Daten des MADPET

Für die Untersuchung der Qualität eines bildgebenden Systems kommen in der Regel Eingabedaten zum Einsatz, deren Natur (z.B. Verteilung der Emissionsorte der Quantenpaare in der PET) bekannt ist und eine Extremsituation für die Bildgebung darstellt. Dieses Prinzip, das Messen von so genannten Phantomen mit bekannter Quellenverteilung, gilt sowohl für

	mm	%
Detektorabstand	86	100
Simulation	84	98
System Matrix <b>A</b>	80	93
Rekonstruiertes Gesichtsfeld	80	93
Linienquellen	76	88
Strukturphantom	64	74

Tabelle 4.3: Durchmesser der für den MADPET untersuchten Verteilungen, in Relation zum Systemdurchmesser

planare als auch für tomographische bildgebende Geräte. Hierbei werden zur Untersuchung der (rekonstruierten) Ortsauflösung punkt- oder linienförmige Objekte gemessen und anschließend auf ihre Position und Breite im resultierenden Bild untersucht. Die Bestimmung der Bildqualität erfolgt meist anhand komplexer Verteilungen und der visuellen Begutachtung der erstellten Bilder. Für die Untersuchung des MADPET-Tomographen und der vollständigen Datenverarbeitung wurden tomographische Datenlisten zu einer bekannten Verteilung in jeweils zweierlei Ausführung erstellt:

- ein simulierter Datensatz, erstellt durch die Extraktion der tomographischen Daten aus den Monte Carlo Simulationen, und
- ein gemessener Phantomdatensatz, erstellt durch die Messung einer  $^{18}\text{F}$ -Verteilung am MADPET.

Aus diesen simulierten und gemessenen tomographischen Datenlisten wurden List-Mode Histogramme erstellt und diese mit den im letzten Abschnitt vorgestellten Methoden rekonstruiert. Die analytisch rekonstruierten Daten unterschieden sich hierbei durch die, im Umformungsprozess vom List-Mode Histogramm zum Parallel-Sinogramm (siehe Abschnitte 4.5.4 und 4.7.1 und Gleichung 4.33 auf Seite 95) angewendeten, koinzidenten Antwortfunktionen  $M$ . Die drei analytisch rekonstruierten Bildtypen,  $Rtri$ ,  $Rcaf$  und  $Rvrec$ , wurden durch Anwendung

- ( **$Rtri$** ) der dreieckigen koinzidenten Antwortfunktion TRI,
- ( **$Rcaf$** ) der, aus den Monte Carlo Simulationen gewonnenen, koinzidenten Antwortfunktion CAF, bzw.
- ( **$Rvrec$** ) der, aus den Breiten der TORs abgeschätzten, rechteckigen Antwortfunktion VREC

im Umformungsprozess und anschließender gefilterter Rückprojektion erstellt. Für die gemessenen Daten kamen hierbei die Korrekturen für unterschiedliche koinzidente Sensitivitäten und für die Kontamination der Daten durch zufällige Koinzidenzen innerhalb der Umformung zum Parallel-Sinogramm zum Einsatz. Weiterhin wurden die List-Mode Histogramme mit den iterativen Algorithmen rekonstruiert. Die Systemeigenschaften des MADPET wurden, wie in Abschnitt 4.7.3 auf der vorherigen Seite beschrieben, mittels der Monte Carlo Gewichtematrix in diese Rekonstruktion eingebracht. Die Korrekturen für die unterschiedlichen koinzidenten Sensitivitäten  $s$  und den Anteil der zufälligen Koinzidenzen  $n$  erfolgten innerhalb der Rekonstruktionsalgorithmen. Die beiden iterativ rekonstruierten Bildtypen,  $Plm$  und  $Olm$ , resultierten

- (*Plm*) aus der Rekonstruktion mit dem  $\mathcal{PLM}$ -Operator (siehe Gleichung 4.34), bzw.
- (*Olm*) aus der Rekonstruktion mit dem  $\mathcal{OLM}$ -Operator (siehe Gleichung 4.35).

Die Größen des Systems, der Simulationen, des Gesichtsfeldes und der hier untersuchten Verteilungen sind in Tabelle 4.3 zusammengefasst.

#### 4.8.1 Bestimmung der rekonstruierten Ortsauflösung

Zur Bestimmung der rekonstruierten Ortsauflösung wurden einzelne, über das Gesichtsfeld verteilte, Punkt- bzw. Linienquellen mit den vorgestellten Methoden rekonstruiert. Aufgrund der Rotationssymmetrie des Rekonstruktionsproblems wurden die Positionen dieser 20 Quellen ausschließlich entlang der x-Achse vom Zentrum (0 mm) bis zum Rand (38 mm) des Gesichtsfeldes in 2-mm-Schritten variiert. Die aus den Simulationen extrahierten tomographischen Daten der kreisförmigen Objekte mit jeweils 1,0 mm Durchmesser enthielten im Mittel  $5800 \pm 800$  akzeptierte Koinzidenzen oberhalb der 450-keV-Energieschwelle. Für die Messung am MADPET wurde eine Linienquelle (0,5 mm Durchmesser) mit einer  $^{18}\text{F}$ -Lösung befüllt und in den entsprechenden Positionen gemessen. Jede Messung wurde mit 2 Sekunden für den ersten Schritt gestartet. Nach Vollendung erfolgte die Korrektur aller Messungen für den radioaktiven Zerfall des Nuklids vom Start der ersten Messung bis zum Start der jeweiligen Messung. Die mittlere Anzahl der für den radioaktiven Zerfall korrigierten und oberhalb der 450-keV-Energieschwelle akzeptierten Koinzidenzen betrug  $4660 \pm 290$ . Der Anteil an zufälligen Koinzidenzen war in allen Messungen kleiner als 1 % und erforderte somit keine Korrekturmaßnahmen. Die Korrektur für die unterschiedlichen koinzidenten Sensitivitäten der einzelnen Detektorpaare wurde mittels des Korrekturvektors  $\mathbf{s}$  bei den gemessenen Daten angewendet.

Nach der Rekonstruktion der simulierten und gemessenen tomographischen Daten erfolgte die Bestimmung der Breiten der rekonstruierten Quellen im Bild. In jedem Bild wurde ein Profil entlang der x-Achse (radial) und senkrecht zur x-Achse (tangential) durch das Maximum der rekonstruierten Verteilung, also durch das Abbild der Quelle, gelegt und an eine Gaußverteilung angepasst. Die Halbwertsbreiten dieser Gaußverteilungen dienten als Maß für die rekonstruierte Ortsauflösung in jedem Bild, also als Maß für die Ortsauflösung in Abhängigkeit von der Quellenposition. Die Abbildungen 4.28 und 4.29 zeigen die mit den simulierten bzw. gemessenen Linienquellen erreichte Ortsauflösung, resultierend aus den Methoden *Olm*, *Plm*, *Rtri*, *Rvrec* und *Rcaf*. Es konnte ein stetiger Anstieg der Ortsauflösung bei allen analytischen Rekonstruktionsmethoden mit zunehmendem Abstand zum Zentrum des Gesichtsfeldes beobachtet werden. Der Grund hierfür war in dem Parallaxeneffekt - also der Verbreiterung der koinzidenten Antwortfunktionen (siehe Abbildung 4.21 auf Seite 82, rechts) für schräg zueinander stehende Detektorpaare - begründet. Je größer der Abstand einer zu messenden Verteilung vom Zentrum des Tomographen war, umso größer war der Beitrag von schräg zueinander stehenden Detektorpaaren beim Nachweis der daraus emittierten Quantenpaare. Dieser Effekt resultiert in der an klinischen Tomographen etablierten Maßnahme, nur einen kleinen Teil des Tomographendurchmessers (50-60 %) zu rekonstruieren. Wird jedoch eine feinere Abtastung der Antwortfunktionen etabliert und diese für die statistische Rekonstruktion zur Verfügung gestellt, kann die Abhängigkeit der rekonstruierten Ortsauflösung von der Quellenposition weitgehend eliminiert werden. Dies wurde am MADPET mit der Verwendung der Monte Carlo Gewichtematrix in den iterativen List-Mode Rekonstruktionen (Datensätze *Plm* und *Olm*) realisiert.

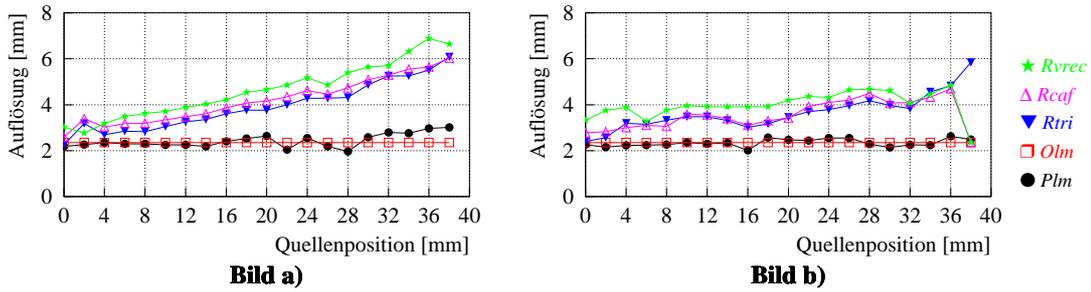


Abbildung 4.28: Rekonstruierte Ortsauflösung der simulierten Linienquellen  
 Zu Abbildung 4.28: Bild a) Die Ortsauflösung in radialer Richtung in Abhängigkeit vom Abstand zum Zentrum des Gesichtsfeldes. Bild b) Korrespondierende tangentielle Ortsauflösung.

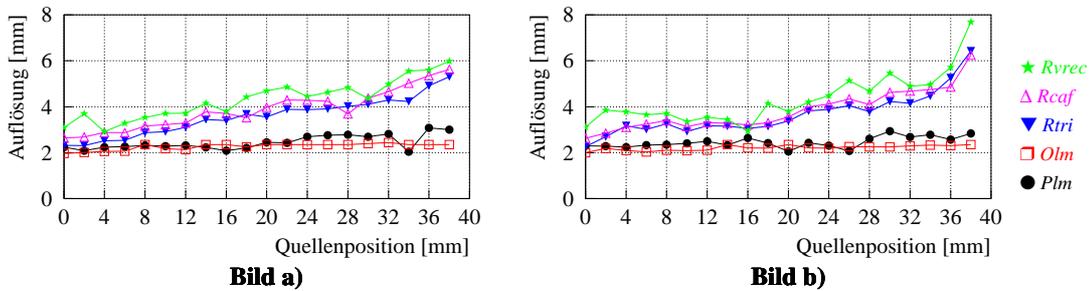


Abbildung 4.29: Rekonstruierte Ortsauflösung der gemessenen Linienquellen  
 Zu Abbildung 4.29: Bild a) Die Ortsauflösung in radialer Richtung in Abhängigkeit vom Abstand zum Zentrum des Gesichtsfeldes. Bild b) Korrespondierende tangentielle Ortsauflösung.

	Simulierte Daten				Gemessene Daten			
	Radial		Tangential		Radial		Tangential	
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
<i>Rtri</i>	2,3	0,08	2,7	0,05	2,3	0,06	2,5	0,06
<i>Rvrec</i>	2,7	0,10	3,5	0,03	3,1	0,06	3,1	0,06
<i>Rcaf</i>	2,7	0,08	2,8	0,05	2,6	0,07	2,7	0,06
<i>Plm</i>	2,2	0,01	2,2	0,01	2,1	0,02	2,2	0,01
<i>Olm</i>	2,4	0,00	2,4	0,00	2,1	0,01	2,1	0,01

Tabelle 4.4: Lineare Anpassung der rekonstruierten Ortsauflösung  
 Zu Tabelle 4.4: Lineare Anpassung an die - in den Abbildungen 4.28 und 4.29 aufgetragene - radiale und tangentielle Ortsauflösung  $\Gamma$  in Abhängigkeit von der Quellenposition  $d$  ( $\Gamma = a + b \cdot d$ ) für  $0 \leq d \leq 36$ . Die Werte von  $\Gamma$ ,  $a$  und  $d$  sind in mm angegeben.

Da die analytischen Methoden aufgrund von Abschneideeffekten am Rande des Gesichtsfeldes die im Abstand  $d = 38$  mm positionierte Quelle nicht korrekt rekonstruieren konnten, wurden folgende Berechnungen für den eingeschränkten Bereich  $0 \leq d \leq 36$  mm, also ohne Berücksichtigung der letzten Quelle, durchgeführt. Tabelle 4.4 zeigt die Resultate einer linearen Anpassung an die rekonstruierte Ortsauflösung  $\Gamma$  in Abhängigkeit vom Abstand  $d$  der Quelle zum Zentrum des Tomographen,

$$\Gamma = a + b \cdot d. \quad (4.36)$$

Der oben genannte Effekt der Abhängigkeit der analytisch rekonstruierten Ortsauflösung von der Quellenposition war anhand der Steigung  $b$  für die Daten *Rtri*, *Rvrec* und *Rcaf* zu beobachten. Beide iterativen Methoden zeigten aufgrund der Verwendung der Monte Carlo Gewichtematrix eine unwesentliche lineare Abhängigkeit. Die Abbildungen 4.30 und 4.31 sowie Tabelle 4.5 stellen die mittlere rekonstruierte Ortsauflösung  $\bar{\Gamma}$  dar. Die Standardabweichungen der Mittelwerte sind in beiden Abbildungen als Fehlerbalken aufgetragen und in der Tabelle mit SD bezeichnet.

In den hier gezeigten Tabellen und Darstellungen ist auffällig, dass die rekonstruierte Ortsauflösung für *Rtri* etwas besser war als für *Rcaf* und *Rvrec*. Dies war auf die Verwendung der schmalen, für alle Detektorpaare identischen Antwortfunktion TRI zurückzuführen. Bei *Rcaf* und *Rvrec* betrug die Halbwertsbreite der Antwortfunktionen im besten Fall - für optimal zueinander ausgerichtete Kristalle - das Ein- bzw. Zweifache der Halbwertsbreite der korrespondierenden TRI Antwortfunktion. Für alle gekippten Detektorpaare waren beide Antwortfunktionen, sowohl die REC als auch die CAF, breiter als die TRI. Somit resultierte die Verwendung der CAF bzw. der REC im Rebinning in einer schlechteren Ortsauflösung im Bild. Jedoch erfolgte hierbei, wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird, eine verbesserte Berücksichtigung der inhomogenen Abtastung des Objektvolumens durch MADPET.

Die aus den iterativen Rekonstruktionsmethoden *OLM* und *PLM* resultierenden Ortsauflösungen waren über das gesamte Gesichtsfeld nahezu konstant. Mit beiden Methoden wurde eine wesentlich verbesserte Ortsauflösung von annähernd 2,2 mm erreicht. Die gute Übereinstimmung von simulierten und gemessenen Daten zeigte, dass die aus den Monte Carlo Simulationen berechnete Gewichtematrix für die iterative Rekonstruktion gemessener Daten des MADPET geeignet war.

#### 4.8.2 Bestimmung der Bildqualität

Die Bildqualität wurde für den MADPET anhand eines Strukturphantoms visuell begutachtet. Ziel war die Rekonstruktion einer komplexen Verteilung von Emissionsorten innerhalb eines möglichst großen Teils des Gesichtsfeldes. Der Entwurf dieser Verteilung wurde zuerst mit dem Extraktionsalgorithmus getestet. Anschließend wurde diese Verteilung durch den Bau eines befüllbaren Plexiglasphantoms für die Messung am MADPET zur Verfügung gestellt. Die aus den Simulationen extrahierte Verteilung enthielt 121 Gammaquantenpaare emittierende kreisförmige Objekte, angeordnet in sechs Sektoren. Die Durchmesser der Objekte waren innerhalb eines Sektors identisch, sie variierten von 1,5 mm im ersten bis 4 mm im sechsten Sektor, abgestuft in 0,5-mm-Schritten. Der Abstand der Quellenmittelpunkte in jedem Sektor betrug jeweils das Doppelte der in diesem Sektor verwendeten Quelldurchmesser. Abbildung 4.32 (links) zeigt maßstabsgetreu die Positionen und Größen der Quellen und des Plexiglasphantoms. Die Quellen belegten 74 % des Systemdurchmessers (siehe auch Tabelle 4.3). Für den Aufbau des Plexiglasphantoms wurde ein befüllbarer Zylinder (Bild rechts)

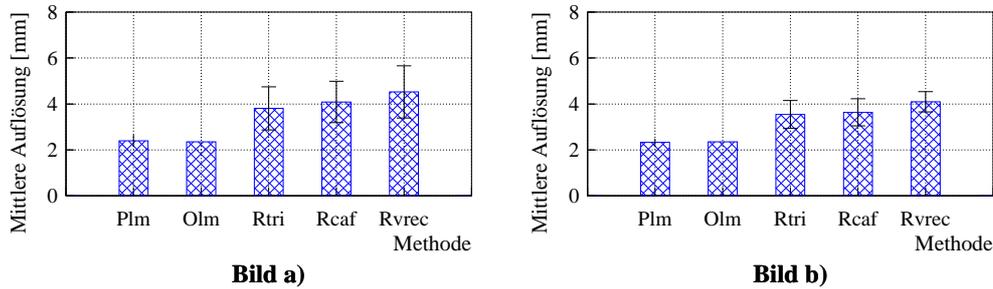


Abbildung 4.30: Mittlere rekonstruierte Ortsauflösung der simulierten Linienquellen  
 Zu Abbildung 4.30: Bild a) Die mittlere radiale Ortsauflösung. Bild b) Korrespondierende mittlere transaxiale Ortsauflösung.

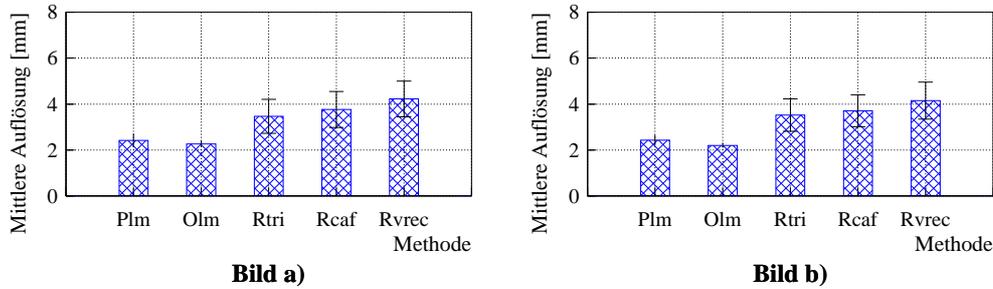


Abbildung 4.31: Mittlere rekonstruierte Ortsauflösung der gemessenen Linienquellen  
 Zu Abbildung 4.31: Bild a) Die mittlere radiale Ortsauflösung. Bild b) Korrespondierende mittlere transaxiale Ortsauflösung.

	Simulierte Daten				Gemessene Daten			
	Radial		Tangential		Radial		Tangential	
	$\bar{\Gamma}$	SD	$\bar{\Gamma}$	SD	$\bar{\Gamma}$	SD	$\bar{\Gamma}$	SD
<i>Rtri</i>	3,8	0,9	3,5	0,6	3,5	0,7	3,5	0,7
<i>Rvrec</i>	4,5	1,1	4,1	0,4	4,2	0,8	4,2	0,8
<i>Rcaf</i>	4,1	0,9	3,6	0,6	3,8	0,8	3,7	0,7
<i>Plm</i>	2,4	0,3	2,3	0,2	2,4	0,3	2,4	0,2
<i>Olm</i>	2,4	0,0	2,4	0,0	2,3	0,1	2,2	0,1

Tabelle 4.5: Mittlere rekonstruierte Ortsauflösung

Zu Tabelle 4.5: Mittlere Ortsauflösung ( $\bar{\Gamma}$ ) und korrespondierende Standardabweichung (SD) in mm der simulierten und gemessenen Linien im Bereich ( $0 \leq d \leq 36$  mm).



verwendet, in den eine Plexiglasscheibe eingebracht wurde. Die entsprechend der geforderten Quellenpositionen und -größen in die Scheibe eingebrachten Bohrungen ermöglichten das Eindringen der, in den Zylinder zu füllenden, radioaktiven Lösung in die Bildebene.

Mit dem Extraktionsalgorithmus wurde ein simulierter Messdatensatz mit  $3,8 \cdot 10^6$  akzeptierten Koinzidenzen oberhalb der 450-keV-Energieschwelle erstellt. Die Datenliste des gemessenen, mit 23 MBq  $^{18}\text{F}$ -Lösung befüllten, Plexiglasphantoms enthielt nach einer Messzeit von 200 Minuten  $3,0 \cdot 10^6$  Koinzidenzen oberhalb der Schwelle. Die Zählrate aller gemessenen Koinzidenzen betrug dabei 1800 Hz zum Beginn der Messung und 298 Hz an deren Ende. Aufgrund der großen,  $^{18}\text{F}$ -Lösung enthaltenden, Areale außerhalb der Bildebene betrug die nach Gleichung 4.26 ermittelte Zählrate der zufälligen Koinzidenzen 666 Hz beim Start und 52 Hz am Ende der Messung. Dies entsprach einer relativen Kontamination der gemessenen Daten durch zufällige Koinzidenzen von 48 % bis 27 % mit einem Mittelwert von  $45 \pm 8$  %. Wie im vorigen Kapitel und eingangs dieses Kapitels dargelegt, wurde für die Rekonstruktion der gemessenen Daten ein List-Mode Histogramm  $\mathbf{n}$  der zufälligen Koinzidenzen aus diesen Zählraten abgeschätzt (siehe Gleichung 4.26) und dieses bei der Erstellung der Bilder zusammen mit den Korrekturfaktoren  $\mathbf{s}$  für die elektronischen Sensitivitäten zur Verfügung gestellt. Abbildung 4.33 zeigt die rekonstruierten Bilder des simulierten Strukturphantoms. Um jedes Bild ist ein Kreis mit 70 mm Durchmesser eingezeichnet, der somit mindestens 3 mm Abstand zu den Mittelpunkten der äußersten Quellen hatte.

Die im Abschnitt 4.5.4, insbesondere in Abbildung 4.21 auf Seite 82 und Tabelle 4.2 auf Seite 83 beobachtete Verbreiterung der koinzidenten Antwortfunktion von schräg zueinander stehenden Detektorpaaren und die zum Rande des Gesichtsfeldes schlechter werdende Ortsauflösung konnte anhand der zunehmenden Überlagerung der rekonstruierten Quellenverteilungen bei allen analytischen Rekonstruktionsmethoden beobachtet werden (*Rcaf*, *Rvrec* und *Rtri*). Das Bild *Rtri* zeigte, wie im vorigen Abschnitt beobachtet, eine etwas bessere Ortsauflösung als die Bilder *Rcaf* und *Rvrec*. Jedoch verursachte hierbei die Verwendung der für alle Detektorpaare identischen triangularen Antwortfunktion TRI eine falsche Einsortierung der gemessenen Koinzidenzen dieser Detektorpaare in das Sinogramm und resultierte sowohl in der Auflösungsverschlechterung zum Rande des Gesichtsfeldes, als auch in der visuellen Vergrößerung des rekonstruierten Bildes *Rtri*. Diese Vergrößerung wird durch die Überschneidung der rekonstruierten Quellen mit dem eingezeichneten Kreis verdeutlicht. Die Bilder *Rcaf* und *Rvrec* zeigten - trotz der Auflösungsverschlechterung zum Rande des Gesichtsfeldes - rekonstruierte Verteilungen mit deutlich verbesserten geometrischen Eigenschaften. Alle analytisch rekonstruierten Bilder zeigen eine Intensitätsabnahme vom Zentrum zum Rand des Gesichtsfeldes. Dies ist auf den Partialvolumeneffekt (engl. *partial volume effect*) zurückzuführen. Der Partialvolumeneffekt beschreibt die Tatsache, dass die Aufteilung einer Menge von Punkten (die rekonstruierten Emissionsorte) auf wenige Pixel oder Voxel ein starkes Signal (Zahl der rekonstruierten Emissionsorte pro Pixel oder Voxel) in diesen ergibt, wohingegen die Aufteilung der selben Zahl von Punkten auf viele Pixel oder Voxel die Signalthöhe in diesen reduziert wiedergibt. In der Mitte des Gesichtsfeldes werden die rekonstruierten Quellen aufgrund der guten Auflösung in wenige Pixel mit hohem Signal rekonstruiert. Am Rande des Gesichtsfeldes jedoch verteilt sich ein Signal der selben Höhe (die simulierte Aktivitätskonzentration war in allen Quellen identisch) wegen der schlechteren Auflösung auf eine größere Zahl von Pixeln. Diese werden dadurch mit reduzierter Intensität dargestellt.

Durch die Verwendung der Monte Carlo Gewichtematrix in der iterativen Rekonstruktion der Bilder *Olm* und *Plm* konnte eine hervorragende Bildqualität ohne nennenswerte Variatio-

nen der rekonstruierten Ortsauflösung, zusammen mit einem hohen Kontrast zwischen Quellen und Hintergrund, erreicht werden. Aufgrund der gleichbleibenden Ortsauflösung wurde kein Partialvolumeneffekt beobachtet.

Die korrespondierenden rekonstruierten Bilder des gemessenen Strukturphantoms sind in Abbildung 4.34 dargestellt. Wie bei diesen gemessenen Daten wegen des hohen Anteils an zufälligen Koinzidenzen zu erwarten war, wurde in allen Bildern ein erhöhter Rauschuntergrund beobachtet. Wiederum konnte eine gleichmäßigere Darstellung der rekonstruierten Quellen in den, mit variablen Antwortfunktionen erstellten, Bildern *Rcaf* und *Rvrec* gegenüber dem Bild *Rtri* festgestellt werden. Die iterativ rekonstruierten Bilder, *Olm* und *Plm*, zeigten eine hohe rekonstruierte Ortsauflösung und korrekte Positionen der rekonstruierten Quellen. Es war jedoch besonders bei der Verwendung des PWLS-Algorithmus (Bild *Plm*) eine erhöhte Anfälligkeit gegenüber dem Rauschen in den gemessenen Daten zu beobachten. Die beste Bildqualität konnte mit der *OLM*-Rekonstruktion erreicht werden.

## 4.9 Zusammenfassung von Kapitel 4

In diesem Kapitel wurde gezeigt, wie durch eine sorgfältige, jedoch kostengünstige, Strukturierung des Messaufbaus und der über einen virtuellen Parallelrechner kommunizierenden Messprogramme eine gleichmäßige Messbereitschaft des Tomographen erreicht werden konnte. Dies war, wie im Kapitel 3 beschrieben, eine grundlegende Voraussetzung für die tomographische Bildrekonstruktion. Nachdem diese Grundforderung erfüllt war, konnten mit Hilfe von Monte Carlo Simulationen die Nachweiseigenschaften des MADPET untersucht werden. Es zeigte sich, dass besonders in dem hier vorliegenden Fall von relativ langen Kristallen, die in einem geringen Abstand um das ungewöhnlich große Gesichtsfeld positioniert waren, der Parallaxeneffekt, also die Verbreiterung und Verformung der Antwortfunktionen einzelner Detektorpaare, einen dominanten Einfluss auf die rekonstruierte Ortsauflösung und Bildgeometrie hatte. Durch die Berücksichtigung der, aus der Monte Carlo Simulation berechneten, realistischen Antwortfunktionen bei der Einsortierung der gemessenen Daten in das Parallelsinogramm und anschließender analytischer Rekonstruktion konnte zwar eine verbesserte geometrische Abbildung durchgeführt werden. Die Auflösungsverschlechterung zum Rande des Gesichtsfeldes wurde dadurch jedoch, wie erwartet, nicht korrigiert. Die in dieser Arbeit vorgestellte Methode, die Systemmatrix für die iterative statistische Rekonstruktion vollständig aus der Monte Carlo Simulation zu berechnen, war ein geeignetes Mittel für die Rekonstruktion einer gleichmäßig hohen Ortsauflösung von 2,4 mm, kombiniert mit einer hochwertigen Bildqualität. Die gute Übereinstimmung der aus simulierten und gemessenen Daten gewonnenen Resultate war weiterhin eine Bestätigung für die fehlerfreie Berechnung der Monte Carlo Gewichtematrix. Der Aufwand für die Monte Carlo Simulationen und die im Anschluss durchzuführende Berechnung der Systemmatrix war - unter Berücksichtigung der damit erzielten Resultate - gerechtfertigt, zumal die erforderlichen Berechnungen der Nachweiswahrscheinlichkeiten nur einmalig für das vorliegende Rekonstruktionsproblem durchgeführt werden mussten.

# Kapitel 5

## In-vivo Messungen mit MADPET

Im Folgenden werden die Ergebnisse einiger am MADPET durchgeführten Messungen von lebenden Tieren vorgestellt und bezüglich der im vorigen Kapitel beschriebenen Rekonstruktionsmethoden verglichen. Aus der Vielzahl von durchgeführten Kleintier-PET-Untersuchungen am MADPET wurden hierfür jeweils eine [ $^{18}\text{F}$ ]-FDG-Stoffwechseluntersuchung am Herzen einer Ratte und einer Maus, sowie eine [ $^{18}\text{F}$ ]-NaF-Skelettszintigraphie an einer Maus ausgewählt. Anhand dieser Daten sollte die Bildqualität des MADPET bei extrem kleinen, in-vivo gemessenen, Strukturen analysiert werden. Die in Tabelle 5.1 zusammengefassten Messbedingungen der hier vorgestellten Daten werden in den folgenden Abschnitten aufgegriffen und erläutert.

### 5.1 Datennahme, Rekonstruktion und Darstellung

#### 5.1.1 Messbedingungen der in-vivo Tiermessungen

Der 2D-Tomograph MADPET ließ nur die Messung einer einzigen Schicht zu. Um jedoch größere Objektvolumina mit einer axialen Ausdehnung größer der Schichtdicke des MADPET von 4 mm abbilden zu können, mussten mehrere Schichten nacheinander aufgenommen werden. Hierbei wurde nach Fertigstellung der Messung einer Schicht das Objekt bezüglich der Abbildungsebene um eine festgelegte Distanz (Schichtabstand) verschoben. In dieser Arbeit wurden Volumendatensätze durch Messung mehrerer Schichten in 2-mm-Abständen bestimmt. Dieser Abstand begründete sich auf der Tatsache, dass sich die intrinsische axiale Auflösung des Tomographen als die halbe axiale Kristalltiefe berechnete. Bei den im MADPET eingesetzten  $3,7 \times 3,7 \times 12 \text{ mm}^3$  LSO-Kristallen betrug die axiale Kristalltiefe 3,7 mm, die axiale Auflösung des Systems war somit ungefähr 2 mm [155].

Im Kapitel 3 wurde auf die Notwendigkeit hingewiesen, dass für eine korrekte Schichtbildrekonstruktion möglichst alle gemessenen Daten dieser Schicht unter identischen Bedingungen aufgenommen werden sollen. Im Kapitel 4 wurde gezeigt, wie diese Forderung am MADPET bei der Messung einer tomographischen Schicht für alle Winkelschritte gewährleistet werden konnte. Dies wurde unter anderem durch eine zerfallskorrigierte Dauer jedes einzelnen Winkelschritts, ausgehend von der Startzeit und Dauer des ersten Schritts, erreicht. Für eine korrekte Darstellung eines rekonstruierten Datenvolumens galt die gleiche Forderung: alle enthaltenen Schichten sollten unter identischen Bedingungen gemessen werden, wie das bei Tomographen mit großem axialen Gesichtsfeld der Fall ist. Da die einzelnen Schichten mit MADPET sequentiell aufgenommen werden mussten, waren jedoch die Messbedingungen

Tier		Ratte	Maus	Maus
Abzubildendes Organ bzw. Struktur		Herz	Herz	Skelett
Gewicht des Tiers	[g]	384	30	41
Positionierung		Rückenlage	Rückenlage	Rückenlage
Narkose (Zeitpunkt vor Messbeginn)	[min]	150	40	50
Radiopharmakon		[ <sup>18</sup> F]-FDG	[ <sup>18</sup> F]-FDG	[ <sup>18</sup> F]-NaF
Aktivität	[MBq]	73	25	23
Messbeginn (p.i.)	[min]	150	80	30
Aktivität bei Messbeginn <sup>(1)</sup>	[MBq]	30	16	16
Zählrate der TOTALS <sup>(2)</sup>	[Hz]	202-307	70-189	80-320
Zählrate der RANDOMS <sup>(2)</sup>	[Hz]	50-130	14-57	16-53
Kontamination durch RANDOMS <sup>(2)(3)</sup>	[%]	33-55	21-40	12-51
Anzahl der gemessenen Schichten		14	13	25
Anzahl der hier verwendeten Schichten		8	13	25
Axialer Schichtabstand	[mm]	2	2	2
Dauer des ersten Winkelschritts	[s]	3	5	1
Gesamtdauer	[min]	50	140	150

Tabelle 5.1: Parameter der in-vivo-Messungen am MADPET.

Zu Tabelle 5.1: <sup>(1)</sup> Die Aktivität bei Messbeginn bezieht sich auf die Startzeit der ersten für diese Arbeit relevanten Schicht. <sup>(2)</sup> Die Angabe der Zählraten und der relativen Anteil an zufälligen Koinzidenzen ist in der Form Minimalwert-Maximalwert dargestellt. <sup>(3)</sup> Die Werte der relativen Kontamination der gemessenen Daten (TOTALS) durch zufällige Koinzidenzen (RANDOMS) sind gemäß Gleichung 4.26 auf Seite 92 in % angegeben.

aufgrund der physiologischen Prozesse im Organismus der Tiere - z.B. Veränderungen der Traceranreicherung mit fortschreitender Zeit nach Injektion - und der Zerfall des in dem angereicherten Tracer enthaltenen Nuklids nicht zeitinvariant. Um zumindest die Veränderung der angereicherten Aktivität aufgrund des radioaktiven Zerfalls zu korrigieren, standen zwei Maßnahmen zur Auswahl: entweder konnte die Messzeit jeder nachfolgenden Schicht, entsprechend der Halbwertszeit des verwendeten Nuklids und der Zeitdifferenz zum Startzeitpunkt der ersten Schicht, verlängert werden, oder es konnten die einzelnen Schichten mit identischen Messzeiten aufgenommen und die rekonstruierten Daten nachträglich für den radioaktiven Zerfall korrigiert werden. Für die in dieser Arbeit präsentierten in-vivo-Messungen am MADPET wurde die zweite Variante gewählt, da sich auf diese Weise einfachere Messabläufe ergaben.

In der Bildgebung von Traceranreicherungen mit der PET wird im Allgemeinen nach Injektion des Tracer einige Zeit gewartet (Akkumulationszeit), bis sich das Radiopharmakon hinreichend im Organismus entsprechend seiner biologischen Funktion verteilt bzw. angereichert hat. Die für die verwendeten Radiopharmaka üblichen Akkumulationszeiten wurden bei den hier vorgestellten Tiermessungen eingehalten.

### 5.1.2 Rekonstruktion der in-vivo Daten

Die gemessenen Daten wurden gemäß der in Kapitel 4 beschriebenen Methoden ausgewertet. Die Rekonstruktion der einzelnen Schichten erfolgte wie in Abschnitt 4.7 auf Seite 92 angegebenen, resultierend in den statistisch rekonstruierten Datensätzen *Olm* und *Plm* sowie in den analytisch rekonstruierten Datensätzen *Rtri*, *Rcaf* und *Rvrec* (siehe Abschnitt 4.8 auf Seite 96). Die rekonstruierten Schichtbilder wurden mit dem Korrekturfaktor für den radioaktiven Zerfall vom Startzeitpunkt der ersten zum Start jeder weiteren gemessenen Schicht multipliziert. Anschließend wurden alle Schichten zu einem Volumendatensatz aneinander gehängt.

### 5.1.3 Darstellung der rekonstruierten Volumina als Projektionen

Da die Anzahl der rekonstruierten Bilder bei einem Volumendatensatz sehr groß sein kann, wird oft folgendes Mittel angewendet um diese Daten übersichtlich und vollständig dem Betrachter zur Verfügung zu stellen: das rekonstruierte Datenvolumen wird wieder in den Projektionsraum gemäß der Radontransformation (Gleichung 3.1 auf Seite 28) vorwärtsprojiziert. Hierbei werden jedoch keine speziellen geometrischen Bedingungen angewendet, vielmehr kommt eine anschauliche geometrische Beziehung (Parallelprojektionen) zum Einsatz, die dem Betrachter die Interpretation erleichtert. Der resultierende Satz von Parallelprojektion enthält Matrizen, deren Zeilen die radiale Koordinate  $\Delta r$  der Radontransformation zu einem Projektionswinkel  $\Delta\varphi$  verkörpern. Innerhalb einer Matrix repräsentiert jede Zeile die Projektion einer axialen Schicht. Für jeden Blickwinkel  $\Delta\varphi$  wird eine solche Projektionsmatrix erstellt. Meist werden die berechneten Projektionsmatrizen in schneller Folge hintereinander auf dem Bildschirm dargestellt. Das Resultat ist ein Film, in dem sich das Objekt vor dem Auge des Betrachters dreht, wobei sich die gemessene Tracerverteilung im Inneren des Objekts erkennen lässt. Dies beinhaltet auch die visuelle Information, in welcher Tiefe des Objekts sich die beobachteten Anreicherungen befinden. Diese Methode wird meist für die Suche nach ungewöhnlichen Verteilungen verwendet, insbesondere wenn deren Vorhandensein und Position a-priori unbekannt sind wie z.B. bei der Suche nach Tumormetastasen.

## 5.2 Stoffwechselbestimmung am Herz einer Ratte

### 5.2.1 Hintergrund

Die ständige Arbeit des Herzens und der damit verbundene hohe Sauerstoffbedarf verlangt eine hohe Durchblutung (Perfusion) des Herzmuskelgewebes (Myokard). Die für die Aufrechterhaltung des Blutkreislaufs verantwortlichen Teile des Herzens sind die zwei großen Herzkammern (Ventrikel). Die Blutversorgung des Körpers übernimmt dabei die linke große Herzkammer (linker Ventrikel), im Gegensatz zum rechten Ventrikel, der das sauerstoffarme Blut dem Lungenkreislauf zuführt. Der linksventrikuläre Muskel muss somit den größten Anteil an der Pumpleistung des gesamten Herzmuskels erbringen. Beim Menschen können aufgrund von Risikofaktoren - z.B. Bluthochdruck, hoher Cholesterinspiegel oder Rauchen - in den das Blut transportierenden Gefäßen Schädigungen entstehen. An diesen geschädigten Stellen treten vermehrt Ablagerungen von im Blut enthaltenen Substanzen, z.B. Fetten, auf, die bei weiterem Fortschreiten zu einer Verengung (Stenose) des Gefäßes führen. Eine Schädigung, Substanzablagerungen in ihr und eine daraus folgende Stenose sind in allen Blutgefäßen des Körpers möglich. Durch den erforderlichen hohen Blutfluss in den Zuliefergefäßen des Herzmuskelgewebes, vor allem des linken Ventrikels, sind Stenosen an dieser Stelle besonders

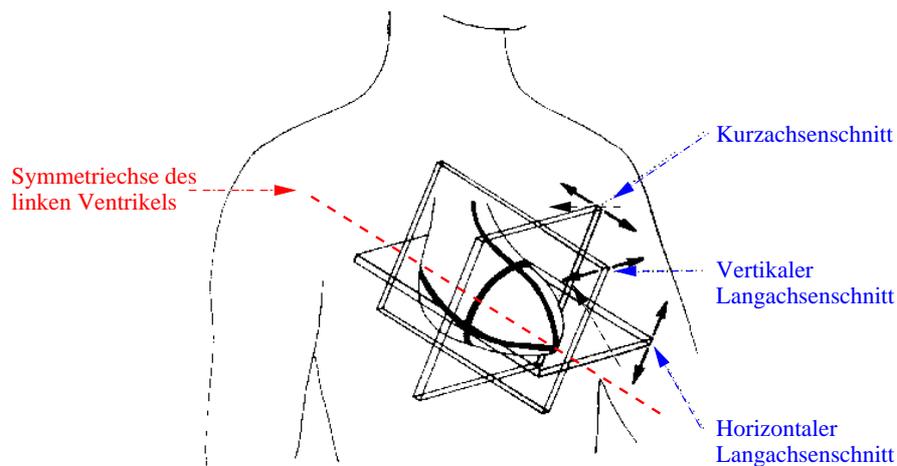


Abbildung 5.1: Schema der Schnittebenen durch den Herzmuskel

Zu Abbildung 5.1: Das rekonstruierte Volumen wird in Ebenen senkrecht zu der Symmetrieachse (Kurzachsenschnitte) und in Ebenen entlang der Symmetrieachse (horizontale und vertikale Langachsenschnitte) der linken großen Herzkammer geschnitten.

häufig und schwerwiegend (Koronare Herzkrankheit, kurz KHK). Die Verengungen reduzieren den Blutfluss in den Gefäßen, verursachen Durchblutungsstörungen (Perfusionsstörungen) des normalerweise homogen perfundierten Herzmuskelgewebes und verringern dessen Leistungsfähigkeit, bis hin zum Absterben von Arealen des Muskelgewebes.

Im Allgemeinen werden nuklearmedizinische Myokardszintigraphien (mittels PET oder SPECT [16]) nicht unter Berücksichtigung der Wandbewegungen des Herzmuskels durchgeführt. Es wird ein zeitliches Mittel über die Herzbewegung aufgenommen. Es gibt jedoch Untersuchungsmethoden, bei denen mit Hilfe eines Elektrokardiogramms (kurz EKG) die tomographische Messung mit dem Pumpzyklus des Herzens synchronisiert (getriggert, engl. *gated*) wird. Bei dieser getriggerten Untersuchungsmethode (engl. *gated acquisition*) wird der Zyklus zwischen vollständig kontrahiertem (Systole) und vollständig entspanntem Herzmuskel (Diastole) in mehrere zeitliche Intervalle (meist zwischen 8 und 12) unterteilt und die gemessenen Daten bezüglich ihrer Nachweiszeit in einzelne Datensätze sortiert. Nach Rekonstruktion der Datensätze getrennt voneinander können diese als zeitliche Folge am Bildschirm dargestellt und die Wandbewegungen des linken Ventrikels mit in die medizinische Diagnose einbezogen werden. Aufgrund der Aufteilung der gemessenen Daten ist jedoch eine erhöhte Aufnahmezeit nötig, weiterhin wird die nachfolgende Datenverarbeitung und Rekonstruktion wesentlich aufwändiger.

Durch die nuklearmedizinische PET-Untersuchung des linken Ventrikels mittels des Stoffwechseltracers  $[^{18}\text{F}]$ -FDG und des Perfusionstracers  $[^{13}\text{N}]$ - $\text{NH}_3$  kann die Vitalität des Herzgewebes überprüft werden. Hierbei wird anhand der Durchblutungsuntersuchung festgestellt, ob bzw. welche Areale des Muskels minderperfundiert sind. Anschließend wird mit der Stoffwechseluntersuchung eine Aussage über den Zustand des Muskelgewebes getroffen. Schon kleine  $[^{18}\text{F}]$ -FDG-Anreicherungen in minderperfundierten Arealen deuten auf noch lebendes Gewebe hin, dessen Funktion bei einer Steigerung der Blutzufuhr zumindest teilweise wiederhergestellt werden könnte, z.B. durch Umgehen der Störung im Blutgefäß (engl. *bypass*). Der rechte

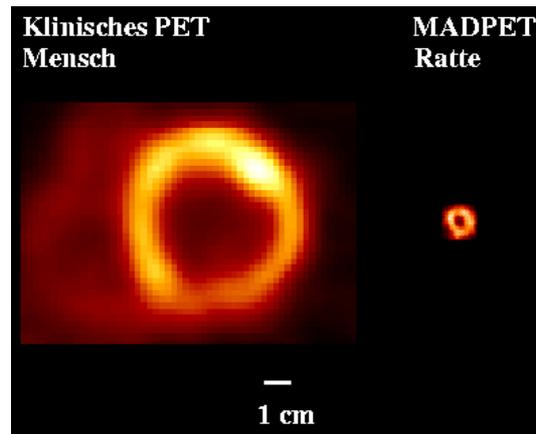


Abbildung 5.2: Größenvergleich der Herzen eines Menschen und einer Ratte  
 Zu Abbildung 5.2: Maßstabsgetreue Darstellung eines Kurzachsenschnitts aus der [ $^{18}\text{F}$ ]-FDG-PET-Untersuchung eines Menschen an einem klinischen Tomographen (links) und einer [ $^{18}\text{F}$ ]-FDG-PET-Untersuchung des Rattenherzens am MADPET (rechts).

Ventrikel ist aufgrund seiner geringen Pumpleistung und der damit einhergehenden geringeren Wanddicke, reduziertem Stoffwechsel und reduzierter Perfusion auf PET-Bildern meist nur undeutlich sichtbar. Die generelle Vorgehensweise bei der PET-Untersuchung des linken Ventrikels umfasst die PET-Messung und die anschließende Reangulierung des rekonstruierten Volumens. Bei dieser geometrischen Transformation wird die Symmetrieachse des linken Ventrikels (siehe Abbildung 5.1) im rekonstruierten Volumen bestimmt und dieses anschließend in mehreren parallelen Ebenen senkrecht bzw. entlang der Achse geschnitten. Dadurch wird eine bessere Darstellung des Herzmuskels für die medizinische Diagnostik ermöglicht.

Das Herz einer Ratte hat eine Ausdehnung von ungefähr einem Kubikzentimeter. Abbildung 5.2 demonstriert die Größenunterschiede anhand eines Kurzachsenschnitts eines menschlichen Herzens ([ $^{18}\text{F}$ ]-FDG-PET mit klinischem Tomographen Siemens ECAT EXACT) und eines Rattenherzens ([ $^{18}\text{F}$ ]-FDG-PET mit MADPET). Bei der Aufnahme des menschlichen Herzens ist der rechte Ventrikel (links neben dem linken Ventrikel) gerade noch erkennbar.

### 5.2.2 Messparameter

Da die Integration eines EKGs in den Messaufbau des MADPET nicht möglich war, wurde eine ungetriggerte [ $^{18}\text{F}$ ]-FDG-Myokardszintigraphie am MADPET an einer Ratte durchgeführt. Wegen der relativ langen Halbwertszeit des  $^{18}\text{F}$  eignete sich das [ $^{18}\text{F}$ ]-FDG besonders für die Herzuntersuchungen am MADPET, da zur vollständigen Abbildung des Myokards eine Sequenz von mehreren Schichten zu messen war.

Nach Narkotisierung erfolgte die intravenöse Injektion von 73 MBq [ $^{18}\text{F}$ ]-FDG. Anschließend wurde das Tier in Rückenlage im Tomographen positioniert. Vor der hier beschriebenen Myokardszintigraphie wurden weitere Untersuchungen durchgeführt, die erste Schicht der hier präsentierten Daten konnte somit erst 150 Minuten nach Applikation des Radiopharmakons gestartet werden. Die im Tier verbliebene Aktivität betrug zu diesem Zeitpunkt ungefähr 30 MBq. Zur vollständigen Abbildung des Myokards wurden 8 aufeinanderfolgende axiale Schichten mit jeweils 2 mm axialem Abstand, also ein insgesamt 16 mm langes Volumen,

gemessen. Die Dauer des ersten Winkelschritts jeder Schicht betrug 3 Sekunden.

### 5.2.3 Resultate

Die mit den eingangs beschriebenen Methoden erstellten Volumendatensätze *Olm*, *Plm*, *Rtri*, *Rcaf* und *Rvrec* wurden zur übersichtlicheren Darstellung in zwei Richtungen vorwärtsprojiziert. Abbildungen 5.3 bis 5.7 zeigen diese Parallelprojektionen des Rattenthorax, von oben und von der Seite betrachtet. Schon anhand dieser Bilder war die reduzierte Ortsauflösung der analytischen Rekonstruktionsmethoden offensichtlich.

Nach der Reangulierung der Volumendatensätze wurden die gefundenen [ $^{18}\text{F}$ ]-FDG-Anreicherungen im Rattenherzen als Kurz- und horizontale bzw. vertikale Langachsenschnitte für jede Methode getrennt dargestellt (siehe Abbildungen 5.8 bis 5.12). Die reangulierten Bilder der List-Mode Rekonstruktionsmethoden, *Olm* und *Plm*, zeigen eine hervorragende Ortsauflösung und Bildqualität, wohingegen die eingeschränkte Ortsauflösung der analytischen Methoden *Rtri*, *Rcaf* und *Rvrec* deutlich erkennbar ist. Auffällig ist vor allem in den statistisch rekonstruierten Bildern die eindeutige Trennung zwischen dem, aufgrund seiner hohen Traceranreicherung hell dargestellten, Herzmuskel und dem Blutvolumen (engl. *blood-pool*) im Inneren der Herzkammer. Alle reangulierten Bilder zeigen eine leichte Reduktion der rekonstruierten Aktivitätskonzentration im Bereich der Herzspitze (Apex). Dies ist auf den Partialvolumeneffekt zurückzuführen, da die Wanddicke in der Spitze des Herzens am geringsten ist und gleichzeitig die größte Krümmung aufweist. Zudem ist die Pumpbewegung an der Herzspitze am stärksten. Somit bewegt sich dieses, gegenüber den anderen Wandarealen dünnere Gewebe, ständig durch die abgetasteten Voxel. Die starke Wandbewegung führt zu der Aufteilung der in der Herzspitze beobachtbaren Aktivitätsverteilung auf eine größere Anzahl von Voxeln, als dies für die restlichen Wandareale der Fall ist. Die Konsequenz daraus ist die Darstellung dieser Region in geringerer Helligkeit, der Partialvolumeneffekt.

## 5.3 Stoffwechselbestimmung im Oberkörper einer Maus

### 5.3.1 Hintergrund

Im vorigen Abschnitt wurde gezeigt, dass das Rattenherz mit einer Größe von ungefähr einem Zentimeter mit dem MADPET detailgetreu abgebildet werden konnte. Das Herz einer Maus ist jedoch wesentlich kleiner als ein Rattenherz. Um die Grenzen der bildgebenden Möglichkeiten des MADPET an Tiermessungen aufzuzeigen, wurde eine [ $^{18}\text{F}$ ]-FDG-Untersuchung am Oberkörper einer Maus durchgeführt und auf Erkennbarkeit des Herzmuskels geprüft.

### 5.3.2 Messung

Dieser 30 Gramm schweren Maus wurden nach Verabreichen der Narkose 25 MBq [ $^{18}\text{F}$ ]-FDG intravenös injiziert. Um einen ausreichenden Überblick über die Lage der Organe und die Größenverhältnisse im Mäusethorax zu erhalten, erfolgte die MADPET-Messung eines 26 mm langen axialen Volumens der Maus vom Kopfansatz bis zur Mitte des Bauchs in insgesamt 13 Schichten in 2-mm-Abständen. Die erste Schicht wurde 80 Minuten nach Injektion des Tracers gestartet. Die Dauer des ersten Winkelschritts jeder Schicht betrug 5 Sekunden, die Zerfallskorrektur von Schicht zu Schicht wurde wiederum nicht während der Messung durchgeführt.

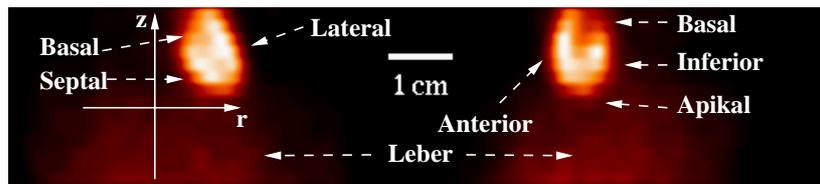


Abbildung 5.3: Projiziertes Volumen des Stoffwechsels in der Rattenbrust: *Olm*  
 Zu Abbildung 5.3: Das rekonstruierte Volumen von vorne (auf die Brust der Ratte, Bild links) und von der rechten Seite (Bild rechts) gesehen. Die horizontale Koordinate entspricht der radialen Koordinate  $r$  der Radontransformation, die vertikale Koordinate stellt die axiale Koordinate des Tomographen dar. Die Winkelkoordinate  $\varphi$  der Radontransformation wird durch die einzelnen Bilder (links:  $\varphi = 0^\circ$ , rechts:  $\varphi = 90^\circ$ ) repräsentiert. Deutlich erkennbar ist die hohe  $[^{18}\text{F}]$ -FDG-Anreicherung im linken Ventrikel. Rechts sind die Herzspitze (Apex), die Herzbasis sowie die Vorder- (anterior) und Hinterwand (inferior) des Herzens gekennzeichnet.

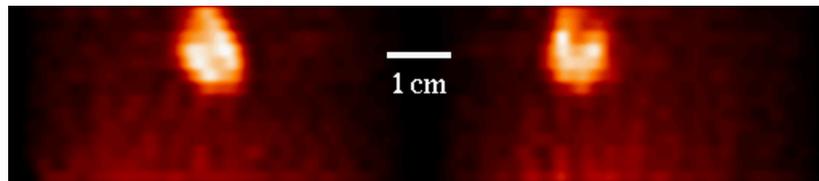


Abbildung 5.4: Projiziertes Volumen des Stoffwechsels in der Rattenbrust: *Plm*



Abbildung 5.5: Projiziertes Volumen des Stoffwechsels in der Rattenbrust: *Rtri*



Abbildung 5.6: Projiziertes Volumen des Stoffwechsels in der Rattenbrust: *Rcaf*

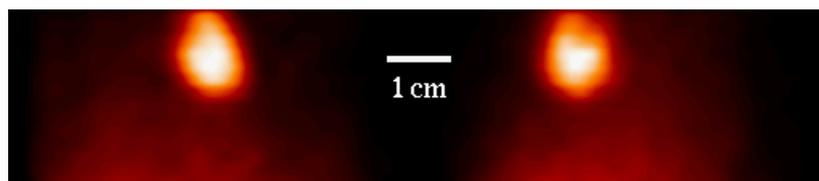


Abbildung 5.7: Projiziertes Volumen des Stoffwechsels in der Rattenbrust: *Rvrec*

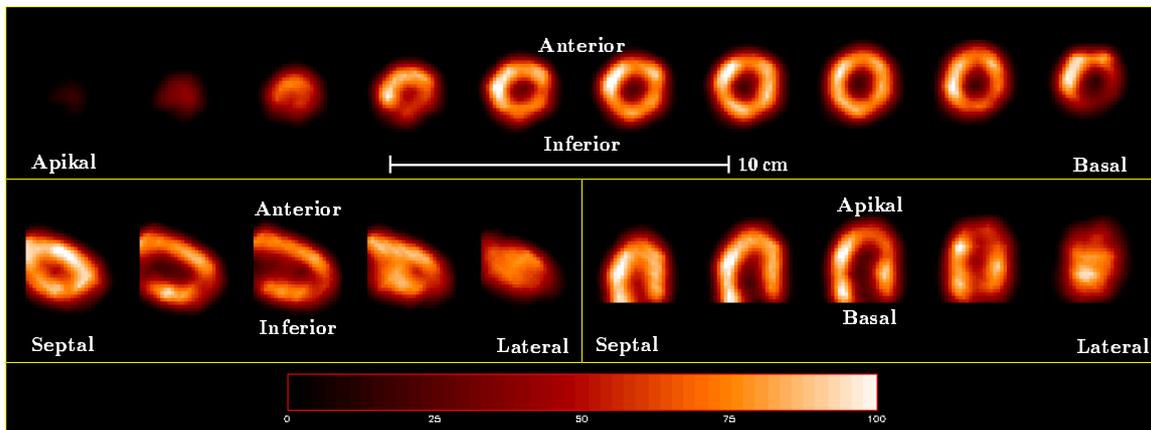


Abbildung 5.8: Reangulierte  $[^{18}\text{F}]$ -FDG-Anreicherung im Herzmuskel der Ratte: *Olm*  
 Zu Abbildung 5.8: Das reangulierte rekonstruierte Datenvolumen, geschnitten in 10 zueinander parallelen Kurz- und jeweils 5 zueinander parallelen Langachsenschnitten. Bild oben) Die Reihe der Kurzachsenschnitte (oben) wandert in äquidistanten Schnitten von der Herzspitze (links) zur Herzbasis (rechts). In jedem Kurzachsenschnitt sind die anteriore (oben), inferiore (unten), septale (links) und laterale (rechts) Herzwand dargestellt. Bild unten, links) Die vertikalen Langachsenschnitte (unten links) zeigen Schnitte von der septalen Herzwand (links) bis hin zur lateralen Herzwand (rechts). Bild unten, rechts) Die horizontalen Langachsenschnitte stellen von links nach rechts horizontale Schnittebenen durch das Herz von oben (anterior) nach unten (inferior) dar.

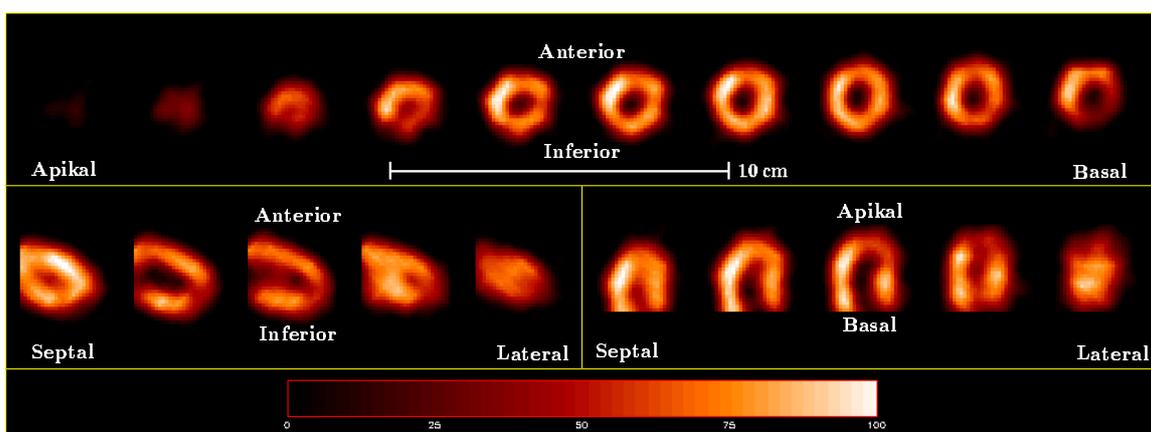
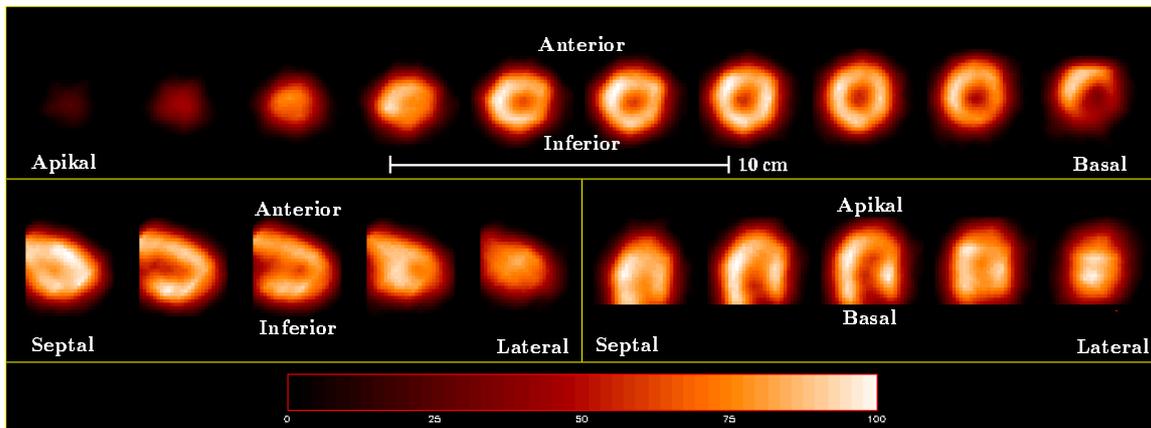
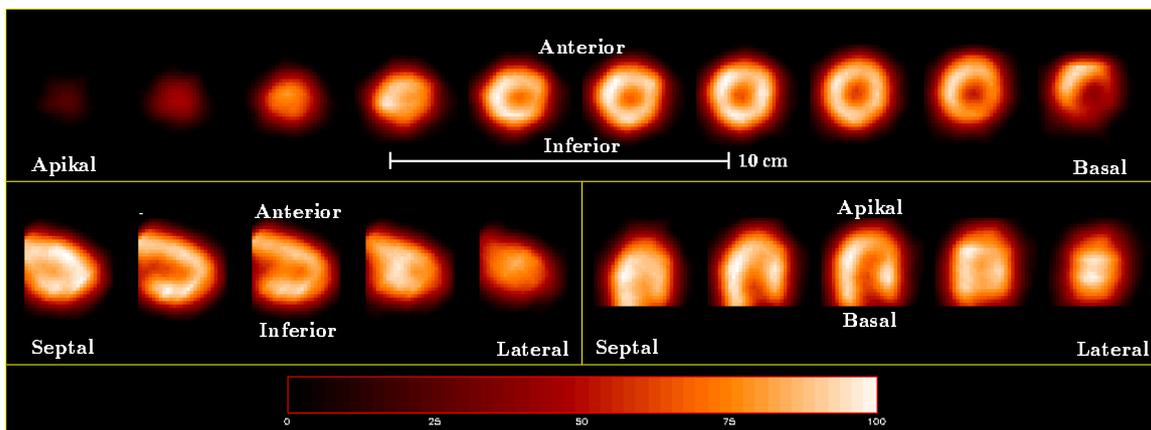
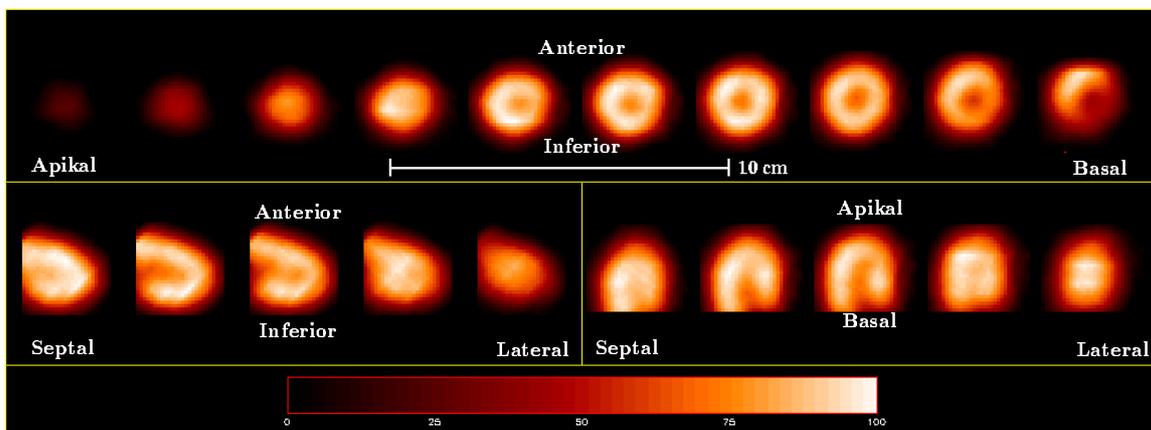


Abbildung 5.9: Reangulierte  $[^{18}\text{F}]$ -FDG-Anreicherung im Herzmuskel der Ratte: *Plm*

Abbildung 5.10: Reangulierte  $[^{18}\text{F}]$ -FDG-Anreicherung im Herzmuskel der Ratte: *Rtri*Abbildung 5.11: Reangulierte  $[^{18}\text{F}]$ -FDG-Anreicherung im Herzmuskel der Ratte: *Rcaf*Abbildung 5.12: Reangulierte  $[^{18}\text{F}]$ -FDG-Anreicherung im Herzmuskel der Ratte: *Rvrec*

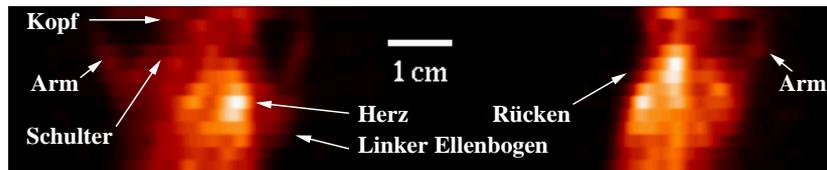


Abbildung 5.13: Projiziertes Volumen des Stoffwechsels in der Mäusebrust: *Olm*  
 Zu Abbildung 5.13: Das rekonstruierte Volumen von vorne auf die Brust (Bild links) und von der rechten Seite (Bild rechts) gesehen.

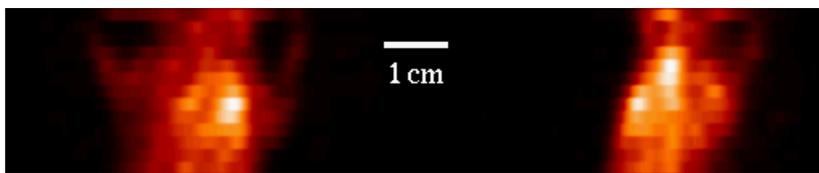


Abbildung 5.14: Projiziertes Volumen des Stoffwechsels in der Mäusebrust: *Plm*

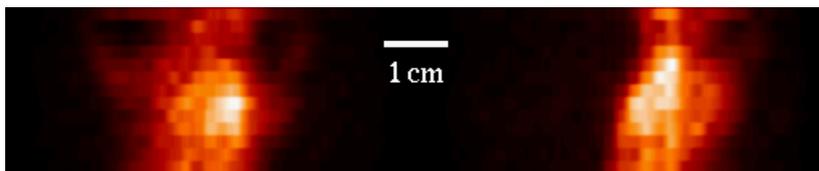


Abbildung 5.15: Projiziertes Volumen des Stoffwechsels in der Mäusebrust: *Rtri*

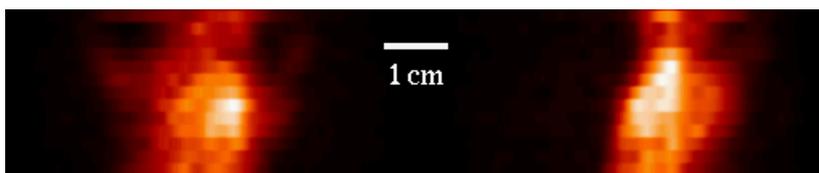


Abbildung 5.16: Projiziertes Volumen des Stoffwechsels in der Mäusebrust: *Rcaf*

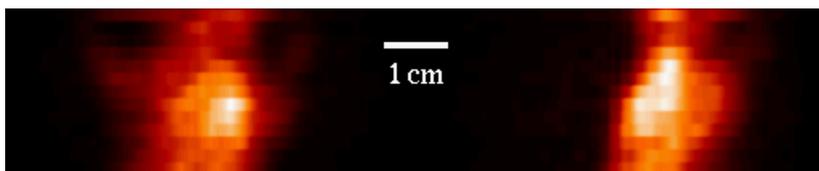


Abbildung 5.17: Projiziertes Volumen des Stoffwechsels in der Mäusebrust: *Rvrec*

### 5.3.3 Resultate

Nach der Rekonstruktion der gemessenen Schichten mit den beschriebenen Rekonstruktionsmethoden wurden die resultierenden Bilder bezüglich des radioaktiven Zerfalls des  $^{18}\text{F}$  von Schicht zu Schicht korrigiert und für jede Methode zu einem Volumendatensatz zusammengesetzt.

Abbildung 5.13 zeigt zwei Projektionen des rekonstruierten *Olm*-Volumens. Links ist die Sicht auf die Brust der Maus von vorne, rechts die Blickrichtung auf die rechte Flanke der Maus dargestellt. In beiden Bildern war zentral die hohe Anreicherung des  $^{18}\text{F}$ -FDG im Herzmuskel zu erkennen. Jedoch fehlte die genaue Abgrenzung zwischen Herzmuskel und Herzinnenraum. Die entsprechenden Projektionsbilder für *Plm*, *Rtri*, *Rcaf* und *Rvrec* sind in den Abbildungen 5.14 bis 5.17 dargestellt. Die Reangulierung der rekonstruierten Daten in Kurz- und Langachsenschnitte war aufgrund der geringen Größe des Herzmuskels und der dafür unzureichenden Auflösung des MADPET nicht möglich.

## 5.4 Bestimmung der Skelettstruktur einer Maus

### 5.4.1 Hintergrund

Für Skelettuntersuchungen und das Suchen nach Tumoren und ihren Metastasen können Ganzkörperaufnahmen nach Injektion des Tracers  $^{18}\text{F}$ -NaF gemacht werden. Eine Skelettuntersuchung an einer Maus, deren Knochendicke meist deutlich unter einem Millimeter beträgt, stellt eine besondere Herausforderung an einen Positronen-Emissions-Tomographen dar. Die hier vorgestellte  $^{18}\text{F}$ -NaF-Untersuchung eines Mäuseskeletts wurde durchgeführt, um die Stärken und Schwächen des MADPET bei in-vivo Messungen unter höchsten Anforderungen zu untersuchen.

### 5.4.2 Messung

Zur Abbildung ihrer Skelettstruktur wurde einer narkotisierten 41 Gramm schweren Maus der Tracer  $^{18}\text{F}$ -NaF injiziert (23 MBq) und diese in Rückenlage im MADPET positioniert. Nach einer Akkumulationszeit von 50 Minuten erfolgte die sequentielle Messung von 25 axialen Schichten mit jeweils 2 mm axialem Abstand. Die Dauer des ersten Winkelschritts jeder zu messenden Schicht wurde im Sinne einer minimalen Gesamtdauer auf 1 s festgelegt. Die Messung einer Schicht dauerte ungefähr 3 Minuten, die Gesamtdauer für alle 25 Schichten betrug jedoch, aufgrund einiger Verzögerungen bei der Positionierung und Handhabung der Maus, 150 Minuten.

### 5.4.3 Resultate

Die tomographische Rekonstruktion zu Schichtbildern erfolgte wie in den vorangegangenen Abschnitten, mit anschließender Korrektur für den radioaktiven Zerfall, dem Zusammen setzen zu Volumendatensätzen und nachfolgender Vorwärtsprojektion. Abbildung 5.18 zeigt die aus dem rekonstruierten *Olm*-Volumen gewonnenen Projektionen in der Sicht von oben (links dargestellt) und von der Seite (rechts dargestellt) auf die Maus. Abbildungen 5.19 bis 5.22 stellen die entsprechenden Bilder (*Plm*, *Rtri*, *Rcaf* und *Rvrec*) aus den verbleibenden Rekonstruktionsmethoden dar. Die hohe Ortsauflösung des MADPET ist in allen Bildern erkennbar. Sogar kleinste Knochenstrukturen wie die sehr dünnen Schädelknochen oder das

Brustbein konnten mit MADPET abgebildet werden. Durch die Verwendung der Monte Carlo Gewichtematrix in der iterativen statistischen Rekonstruktion (Abbildungen 5.18 und 5.19) war eine noch detailliertere Darstellung der  $^{18}\text{F}$ -NaF-Anreicherung möglich. Dies war allgemein anhand schärferer Kanten zu beobachten, z.B. bei den Kieferknochen. Durch die analytischen Methoden wurden kleine Strukturen vor allem mit zunehmendem Abstand zum Zentrum des Gesichtsfeldes aufgrund der schlechteren Auflösung unterdrückt oder unscharf, wie das z.B. bei den Pfoten zu beobachten war. Diese konnten in dem *Plm*- und besonders in dem *Olm*-Volumen eindeutig identifiziert werden.

## 5.5 Zusammenfassung von Kapitel 5

In diesem Kapitel wurden einige der am MADPET durchgeführten Kleintiermessungen vorgestellt und ausgewertet. Es konnte gezeigt werden, dass mit dem in nur einer axialen Schicht operierenden 2D-Sektortomograph selbst große Volumenmessungen machbar waren. Jedoch resultierte dies in einem erheblichem Aufwand durch das sequentielle Ausführen und das nachträgliche Kombinieren und Korrigieren der Einzelschichtdaten. Der Aufbau der MADPET-Detektoren in unvollständigen Sektoren innerhalb nur einer Schicht erschwerte somit die Aufnahme von Volumendaten für kurzlebige Nuklide wie  $^{13}\text{N}$  oder  $^{15}\text{O}$  (siehe Tabelle 2.1 auf Seite 8). Weiterhin musste aufgrund der notwendigen Rotation des MADPET auf die Durchführung dynamischer Messungen zur Bestimmung der Kinematik der Radiopharmaka - selbst innerhalb einer einzelnen Schicht - verzichtet werden.

Wie im letzten Kapitel anhand von simulierten und gemessenen Phantomdaten gezeigt wurde, ließ sich durch die Verwendung der Monte Carlo Gewichtematrix in der iterativen Rekonstruktion die Ortsauflösung und Bildqualität erheblich steigern. Obwohl die Grenzen der Ortsauflösung von MADPET bei der Abbildung eines Mäuseherzens mit weit unter einem Zentimeter Durchmesser beobachtbar waren, konnte mittels der in dieser Arbeit entwickelten iterativen Rekonstruktionsmethoden die detaillierte Abbildung des Glukosestoffwechsels in einem Rattenherzen durchgeführt werden. Selbst die funktionelle Bildgebung kleinster Strukturen, wie Mäuseknochen, wurde durch diese Rekonstruktionsmethode - und die damit einhergehende Verbesserung der Ortsauflösung und Bildqualität - mit MADPET ermöglicht.

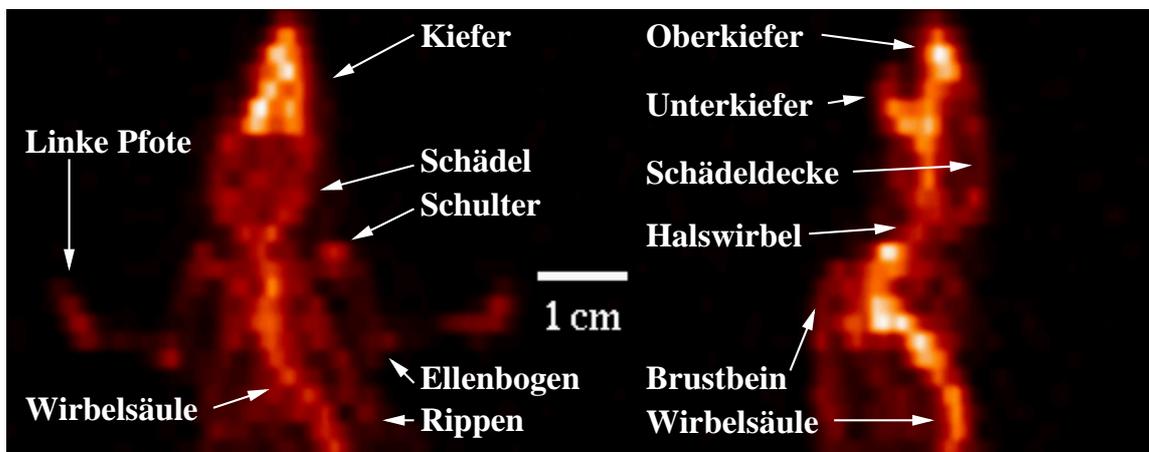


Abbildung 5.18: Projiziertes Volumen des Mäuseskeletts: *Olm*

Zu Abbildung 5.18: Bild links) Zu sehen ist ein Blick von hinten auf die Maus. Im oberen Teil des Bildes ist der Kieferknochen, kurz darunter die Schädelknochen übergehend in die Halswirbelsäule zu sehen. In der Mitte sind das linke und rechte Schultergelenk erkennbar, der Verlauf der beiden Vorderläufe von den Schultern über die leicht hervorgehobenen Ellenbogengelenke zu den Pfoten ist zu erahnen. Nach unten setzt sich die Wirbelsäule in einem Rechtsknick fort, was auf eine schräge Lage des Tieres bezüglich der Tomographenachse deutet. Links und rechts neben der Wirbelsäule deutet sich der Brustkorb an. Bild rechts) Projektion von der Seite im 90° Winkel. Im oberen Teil sind deutlich der Unter- und der Oberkiefer voneinander getrennt. Rechts darunter ist angedeutet die Schädeldecke zu sehen. In der Mitte trennen sich abwärts verlaufend das Brustbein (nach links) und die Wirbelsäule (nach rechts).

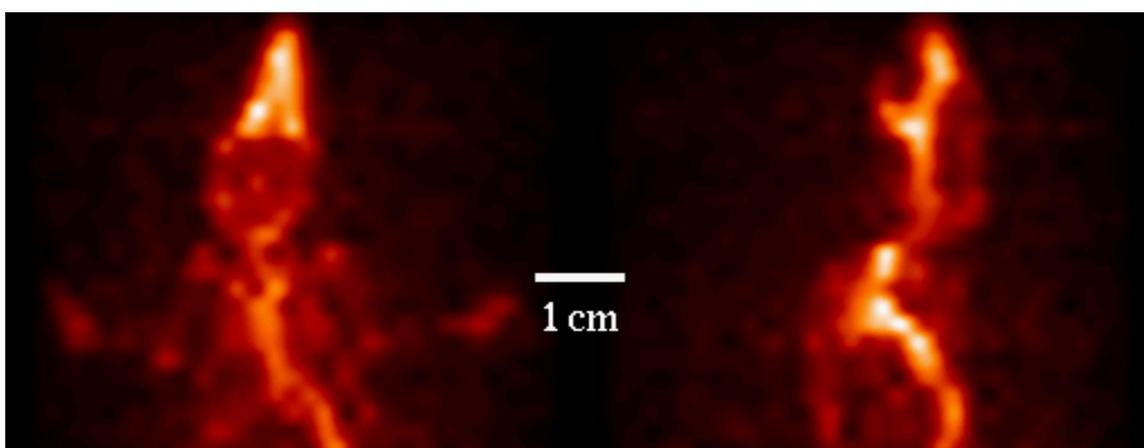


Abbildung 5.19: Projiziertes Volumen des Mäuseskeletts: *Plm*

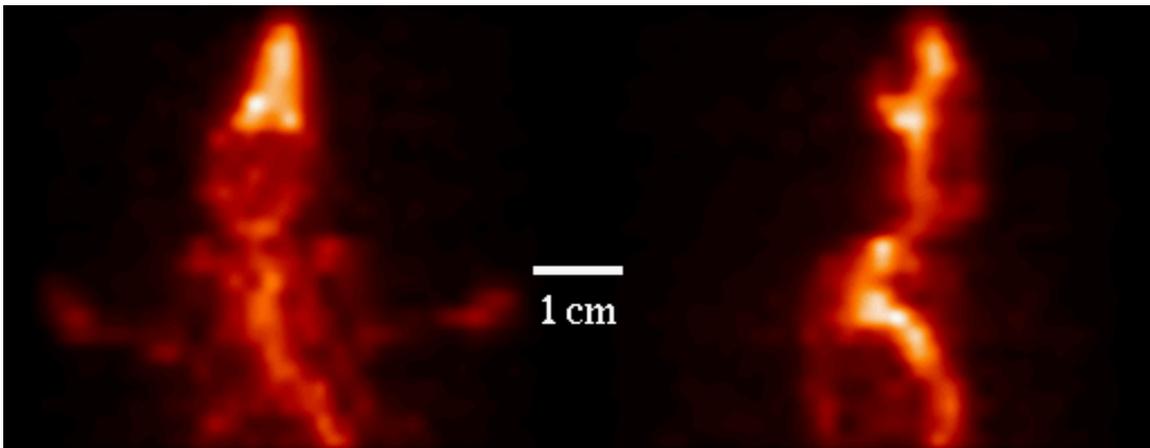


Abbildung 5.20: Projiziertes Volumen des Mäuseskeletts: *Rtri*

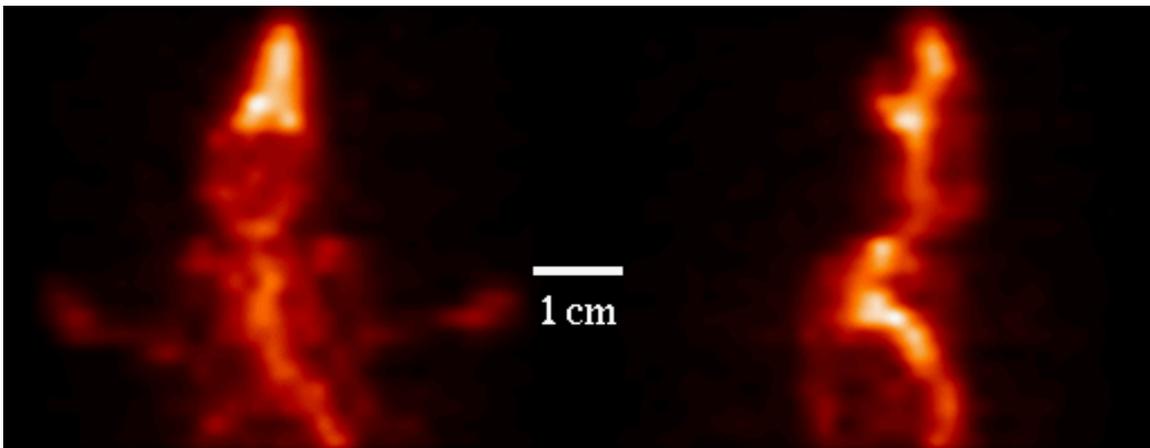


Abbildung 5.21: Projiziertes Volumen des Mäuseskeletts: *Rcaf*

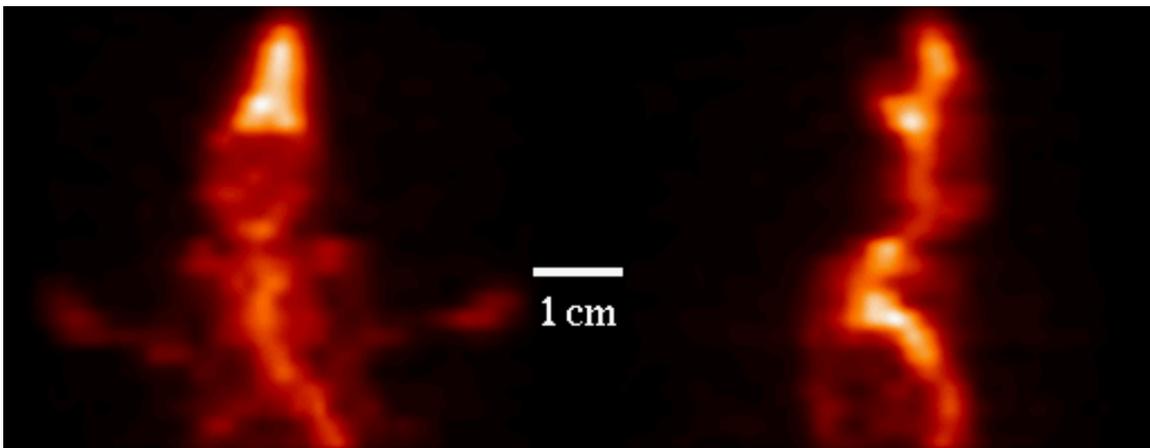


Abbildung 5.22: Projiziertes Volumen des Mäuseskeletts: *Rvrec*

# Kapitel 6

## Ringtomograph MADPET-II

Als eine Weiterführung des in Kapitel 4 beschriebenen Gemeinschaftsprojektes wurde die Planung und Entwicklung des 3D-Vollringtomographen MADPET-II angestrebt. Durch die Ringstruktur und den Aufbau von 8 Detektorringen mit reduziertem Systemdurchmesser wird dieser Tomograph eine gegenüber MADPET wesentlich gesteigerte Sensitivität aufweisen. Zum Einsatz kamen hierfür verbesserte LSO-APD Detektormatrizen mit verkleinerten Einzelkristallen. Zur Reduktion des Parallaxeneffekts und der damit verbundenen Verbesserung der Ortsauflösung wurden die Detektoren in zwei koaxiale Detektorlagen unterteilt. Um die tomographische Abtastung gegebenenfalls zu erhöhen, war die Montage des Detektorringes auf einer drehbaren Scheibe geplant.

Da MADPET-II während der Durchführung dieser Arbeit nicht vollständig aufgebaut war, konnten die in diesem Kapitel vorgestellten Untersuchungen und tomographischen Methoden nicht durch gemessene Daten unterstützt bzw. geprüft werden. Dieses Kapitel basiert daher ausschließlich auf Monte Carlo Simulationen.

Aufgrund des Aufbaus seiner Detektormodule in  $4 \times 8$  Matrizen wird MADPET-II über 8 axiale Detektorringe verfügen und somit die Messung von 3D-Volumendaten erlauben. Zur Eingrenzung der Fragestellungen wurden in dieser Arbeit jedoch nur Methoden für die Verarbeitung von 2D-Daten, also von Daten aus nur einem Detektorring, untersucht. Die Erweiterung der hier vorgestellten 2D-Methoden für die Verarbeitung von 3D-Daten soll in einem Nachfolgeprojekt erfolgen. Die Problematik der 3D-Rekonstruktion für MADPET-II und mögliche Lösungsansätze werden in Kapitel 8 diskutiert.

In dieser Arbeit wurden für MADPET-II daher Methoden untersucht, um folgende Anforderungen zu erfüllen:

- 1) *Auslesebereitschaft des Messsystems:*  
Zum Vermeiden von Datenverlusten sollte ein Messsystem entworfen werden, dass einerseits eine hohe Auslesebereitschaft gewährleistet. Andererseits sollte eine Datenverarbeitung während der Messung von diesem System unterstützt werden.
- 2) *2D-Rekonstruktionsmethoden:*
  - a) Primäres Ziel war die Untersuchung und Entwicklung von 2D-Rekonstruktionsmethoden, die eine hohe und gleichmäßige Ortsauflösung nahe der intrinsischen Auflösung der Detektoren (ungefähr 1 mm) ermöglichen. Sowohl die Auflösung als auch die Bildqualität sollten über einen großen Bereich ( $\gg 90\%$ ) des Systemdurchmessers unveränderlich sein.

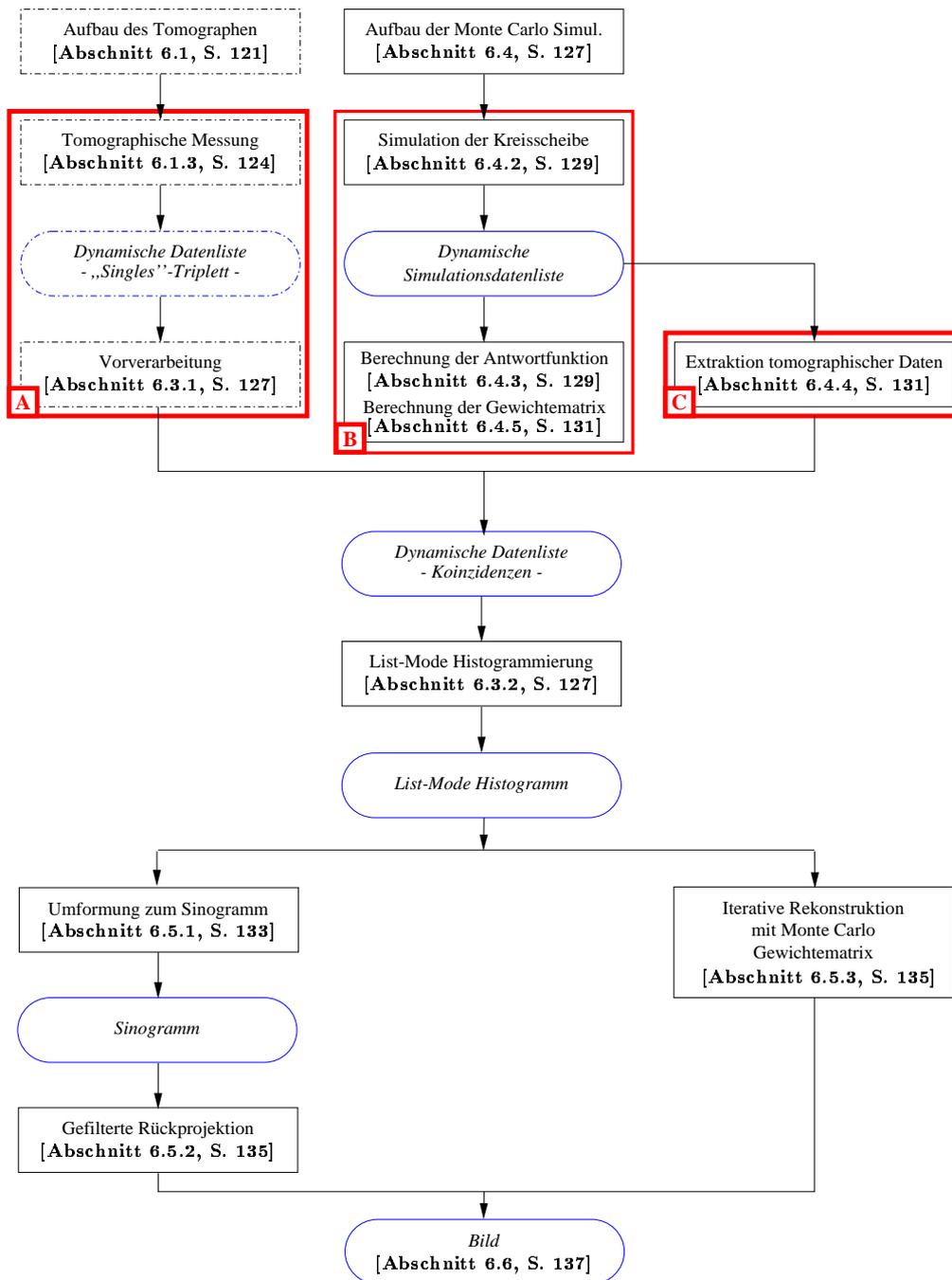


Abbildung 6.1: Grundlegende Wege des MADPET-II-Datenstroms

Zu Abbildung 6.1: Rahmen aus Punkt-Strich-Kombinationen stellen noch unvollständig aufgebaute bzw. entwickelte Komponenten dar. Operationen sind durch eckige Rahmen, die daraus resultierenden Daten durch abgerundete Rahmen gekennzeichnet. Kasten A) Die Messung der tomographischen Daten wird für jedes Objekt erfolgen. Kasten B) Die Simulation der Kreisscheibe wurde einmalig durchgeführt, zusammen mit der Berechnung der koinzidenten Antwortfunktion und der Gewichtematrix. Kasten C) Aus der Simulation wurde für jede zu untersuchende simulierte Verteilung eine Koinzidenz-Datenliste extrahiert, ähnlich der in Kasten A beschriebenen Messung.

- b) Bei Messungen mit rotierendem Detektorsystem liegen die vollständigen tomographischen Daten erst nach Vollendung des letzten Winkelschritts vor. Zudem erfordern sie einen erhöhten Messaufwand. Deshalb sollte bei der Entwicklung der 2D-Rekonstruktionsmethoden geprüft werden, ob die Rekonstruktion von nicht-rotierten Messungen unter den im Punkt 2a beschriebenen Vorgaben möglich war.
- 3) *Zeitgleiche Messung und Datenverarbeitung:*  
Für einen späteren effizienten Einsatz von MADPET-II bei der Evaluierung neuer Radiopharmaka sollte die zeitgleiche Messung und Datenverarbeitung, -visualisierung und -rekonstruktion von allen Methoden (Punkte 1 und 2) unterstützt werden.

Zu Beginn dieses Kapitels wird der Aufbau des Tomographen kurz umrissen. Eine vertiefende Beschreibung der damit verbundenen Entwicklungen ist in [111, 113, 114] zu finden. Der weitere Verlauf dieses Kapitels wurde in Anlehnung an das Kapitel 4 strukturiert. Es folgt eine Beschreibung der Monte Carlo Simulationen sowie der daraus berechneten simulierten Datenliste, der koinzidenten Antwortfunktion und der Gewichtematrix. Zuletzt werden simulierte Daten mit den vorgestellten Methoden rekonstruiert und diskutiert.

Eine Übersicht über die für MADPET-II entwickelten Methoden, insbesondere der Weg der MADPET-II-Daten von deren Simulation bzw. späteren Messung bis hin zum rekonstruierten Bild, ist in Abbildung 6.1 dargestellt.

**Anmerkung 3** Eine Zusammenfassung der in diesem Kapitel in mathematischen Ausdrücken verwendeten Bezeichnungen ist im Anhang A auf den Seiten 159 bis 163 zu finden.

## 6.1 Aufbau des Tomographen

### 6.1.1 Detektoren

Die am MADPET-II zum Einsatz kommenden Detektormodule bestanden aus APD-Matrizen, auf die einzelne LSO-Kristalle gekoppelt wurden (siehe Abbildung 6.2). Hierfür kamen weiterentwickelte APD-Matrizen zum Einsatz, bestehend aus  $4 \times 8$  quadratischen Lichtsensoren mit jeweils  $1,6 \times 1,6 \text{ mm}^2$  sensitiver Fläche (siehe Abbildung 6.2, links). Diese zeichneten sich vor allem durch eine höher Verstärkung und ein wesentlich geringes Rauschen aus, was spätere Messungen mit einer niedrigen Energieschwelle bis unter 200 keV erlaubt. Abbildung 6.3 zeigt ein vollständig aufgebautes MADPET-II-Detektormodul. Zur Vermeidung des Parallaxeneffekts unter Beibehaltung des Kristallvolumens wurde es aus zwei hintereinander angeordneten Detektorköpfen - im Folgenden als zweilagiges Detektormodul (engl. *dual-layer detector module*) bezeichnet - zusammengesetzt. Die vorderen Detektorköpfe eines jeden Zweilagigenmoduls wurden mit  $2 \times 2 \times 6 \text{ mm}^3$ , die hinteren Detektorköpfe mit  $2 \times 2 \times 8 \text{ mm}^3$  LSO-Kristallen zur Erhöhung der Sensitivität [46, 127] bestückt. Der Aufbau des Detektorsystems zu einem vollständigen Ring mit 71,1 mm Durchmesser war durch die kreisförmige Anordnung von 18 solcher Doppellagen-Module, resultierend in 1152 Einzeldetektoren, geplant. Abbildung 6.4 zeigt die um 20 Grad rotierbare Scheibe, auf die die 18 Detektormodule montiert werden sollen. Im Vordergrund ist der durch einen Rechner auf 50 Mikrometer genau steuerbare Tisch für die exakte Positionierung der Kleintiere und die darauf montierte Liege zu sehen. Um die Zahl der von Außen eingestrahelten Gammaquanten - also die davon abhängige Zahl der zufälligen Koinzidenzen - zu minimieren, wurde jeweils eine Bleiabschirmung axial vor und hinter dem geplanten Detektorsystem angebracht.

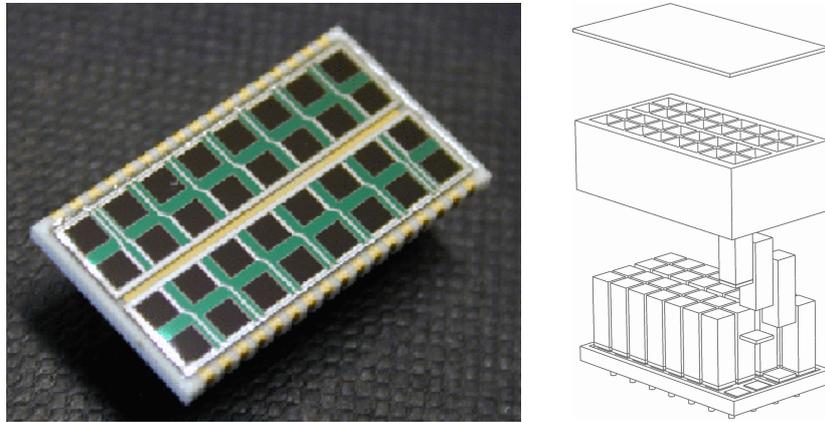


Abbildung 6.2: APD-Matrix und Schematischer Aufbau eines Detektorkopfes des MADPET-II.

Zu Abbildung 6.2: Entnommen aus [111], mit freundlicher Genehmigung des Autors.

Bild links) Matrix der  $4 \times 8$  APD-Lichtsensoren. Bild rechts) An die links abgebildete APD-Matrix werden die 32 LSO-Kristalle gekoppelt. Diese werden voneinander durch ein Reflektorgehäuse getrennt und von oben lichtdicht mit einer Reflektorplatte abgeschlossen.

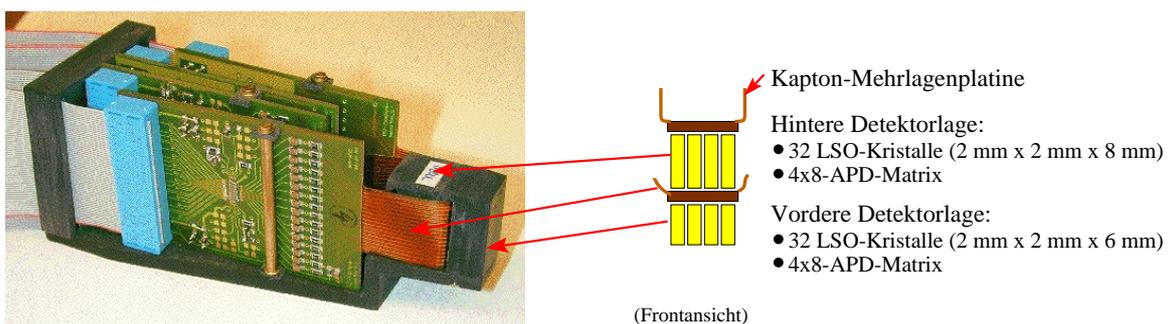


Abbildung 6.3: Vollständiges Doppellagen-Detektormodul des MADPET-II.

Zu Abbildung 6.3: Entnommen aus [111], mit freundlicher Genehmigung des Autors.

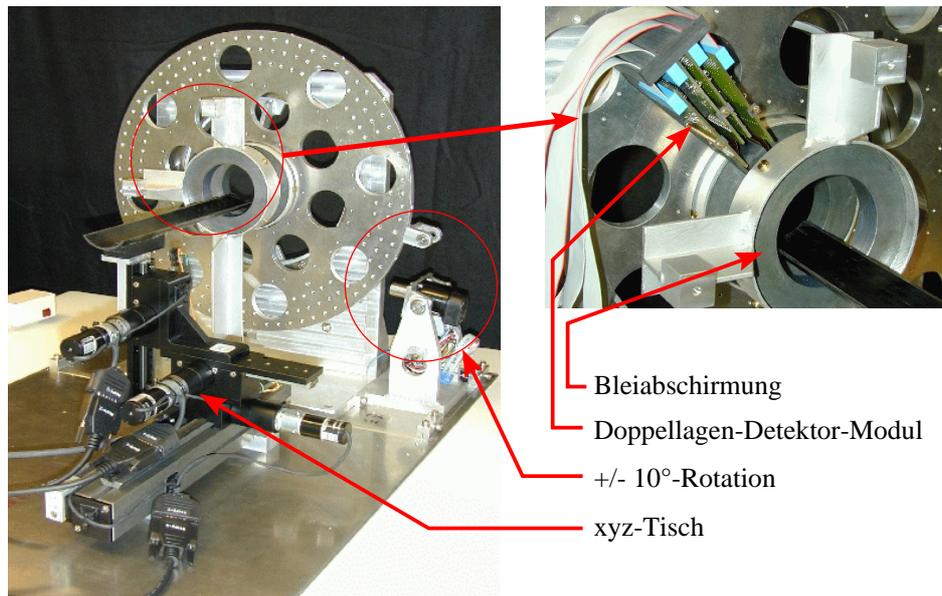


Abbildung 6.4: Aufbau des MADPET-II.

Zu Abbildung 6.4: Entnommen aus [111], mit freundlicher Genehmigung des Autors. Bild links) Im Vordergrund ist der in allen Richtungen steuerbare Tisch für die Lagerung der Kleintiere sichtbar. Die Platte im Hintergrund ist um 20 Grad rotierbar. Bild rechts) Montage eines der 18 Doppellagen-Detektormodule auf die rotierbare Scheibe zwischen die beiden Bleiabschirmungen.

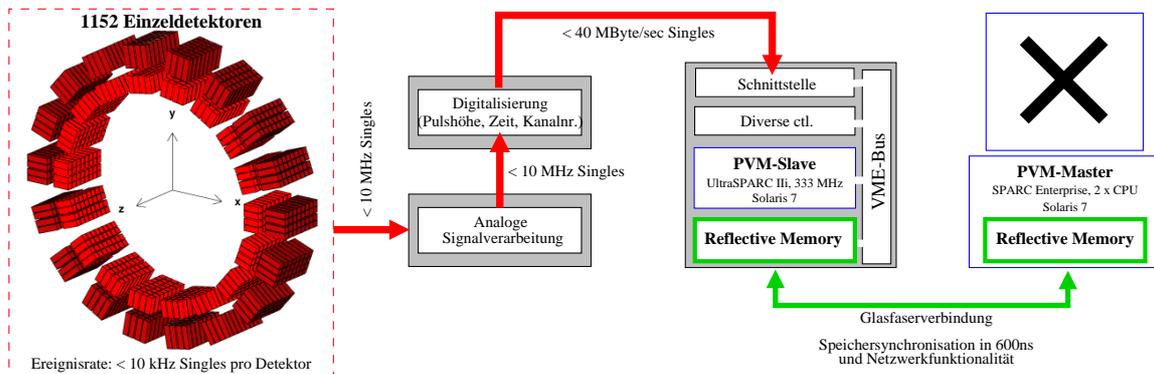


Abbildung 6.5: Schematischer Entwurf des MADPET-II Messsystems.

Zu Abbildung 6.5: Ein möglicher Aufbau des MADPET-II Messsystems ist hier aufgezeigt. Die Impulse der Einzeldetektoren werden nach analoger Vorbereitung in einer Digitalelektronik für die Rechnerauslese als Triplet {Energie, Nachweiszeit, Kanalnummer} bereitgestellt. Der PVM-Slave erfasst diese sequentiell über eine angeschlossene Schnittstelle und schreibt sie in ein *reflective memory*-Speichermodul. 600 ns später stehen diese Daten innerhalb des Speichermoduls am PVM-Master zur Verfügung. Dieser könnte daraus die Verarbeitung und Speicherung der Daten veranlassen.

### 6.1.2 Analoge Detektorelektronik

Wie im Kapitel 4 bereits angesprochen, verlangt die Verwendung eines LSO-APD Detektors eine speziell dafür entwickelte analoge Elektronik zur Impulsverstärkung und -formung. Die Entwicklung dieser Elektronik für die am MADPET-II eingesetzten Detektoren ist in [111, 113, 114] beschrieben. Die analoge Detektorelektronik wird, wie in Abbildung 6.3 zu sehen ist, an die APD-LSO Detektorköpfe mittels einer flexiblen Kapton-Mehrlagenplatine gekoppelt und in das Doppellagen-Detektormodul integriert. Hierbei dient jede der vier Platinen für die Verarbeitung der Signale von 16 einzelnen APD-Lichtsensoren. Die Verbindung zu der weiteren analogen und digitalen Elektronik des MADPET-II soll über die links am Rande sichtbaren Flachbandkabel erfolgen.

### 6.1.3 Digitale Elektronik und Rechnersystem

Die Planung der digitalen MADPET-II-Elektronik sah ein vollständig neues Konzept der Datennahme vor. Entgegen der herkömmlichen Methode, die gemessenen Koinzidenzen während der Messung durch elektronische Schaltungen zu ermitteln, wurde für den MADPET-II eine Strategie angestrebt, die ein möglichst breites Spektrum an Untersuchungen zur effizienteren Nutzung der nachgewiesenen Gammaquanten ermöglicht. Hierbei sollen die bei den Wechselwirkungen der Gammaquanten mit den Kristallen abgegebenen Energien - bzw. die daraus resultierenden Höhen  $D$  der Spannungsimpulse - für jeden Einzeldetektor erfasst und ohne Suche nach dem koinzidenten Eintreffen zweier Gammaquanten digitalisiert werden. Zudem wird der Zeitpunkt  $T$  des Nachweises mit einer Genauigkeit von unter einer Nanosekunde digitalisiert und mit der Impulshöhe und der Nummer  $c$  des Einzeldetektors in einer speziellen Bitkodierung gespeichert. Somit soll für jede Wechselwirkung eines einzelnen Gammaquants mit einem einzelnen Detektor das Triplet

$$\{c, D, T\}$$

in einer dynamischen Singles-Datenliste aufgeschrieben werden. Diese enthält dann die gemessenen einzelnen Wechselwirkungen, nicht wie allgemein in der PET üblich die gemessenen Koinzidenzen. Die Wahl des Koinzidenzfensters und die Ermittlung der Koinzidenzen soll anschließend in der Datenvorverarbeitung im Rechner erfolgen. Dieses ungewöhnliche Konzept erfordert eine hohe Ausleserate durch den Messrechner und resultiert in großen Datenlisten. Es eröffnet jedoch neue Möglichkeiten der Datenanalyse und Datennutzung [123]. Eine wichtige Möglichkeit wird die Erhöhung der Sensitivität des Tomographen durch Identifizierung jener Gammaquanten sein, die mit dem Detektorsystem mehrfach unter Energiedeposition wechselwirken [24, 123, 126, 137]. Ein Beispiel hierfür ist der Fall 6 aus Abbildung 2.6 auf Seite 16, in dem ein Gammaquant zuerst eine Compton-Streuung mit einem Kristall erfährt und anschließend in einem Nachbarkristall absorbiert wird. Mit dem herkömmlichen Prinzip der Koinzidenzspeicherung würden solche nachgewiesenen Positron-Elektron-Vernichtungen nicht gespeichert und genutzt werden.

Das Schema des geplanten MADPET-II Messsystems ist in Abbildung 6.5 skizziert. Die von den Einzeldetektoren gelieferten Impulse - maximal 10 kHz pro Einzeldetektor, resultierend in maximal 10 MHz Gesamtrate - werden digitalisiert und als Triplets über eine speziell dafür entwickelte VME-Schnittstellenkarte auf den VME-Bus gegeben. Innerhalb des VME-Systems befindet sich ein Ausleserechner, der ausschließlich zur Aufnahme dieses Datenstroms dient. Aufgrund der hervorragenden Erfahrungen mit der PVM-gestützten

Messung am MADPET wird für den MADPET-II eine ähnliche Struktur des Messsystems angestrebt. Der VME-Ausleserechner soll hierbei als PVM-Slave verwendet werden, dessen Verbindung mit dem PVM-Master über so genannte (engl.) *reflective memory* (VMIC, USA) Arbeitsspeichermodule erfolgt. Diese in beiden Rechnern vorhandenen Module erlauben eine automatische Synchronisation der Speicherinhalte beider Rechner mit hoher Bandbreite über eine Glasfaserverbindung. Gleichzeitig stellt diese Verbindung alle für eine PVM nötigen Netzwerkfunktionen zur Verfügung. Der PVM-Master wird in diesem Messsystem wiederum für die Steuerung, Verarbeitung und Speicherung der gemessenen Daten zuständig sein.

Zwei über *reflective memory* Module verbundene Rechner vollziehen ohne zusätzliche Prozessorleistung eine automatische Speichersynchronisation mit einer Verzögerung von 700 ns. Die Bandbreite dieser Verbindung erlaubt den Transfer von bis zu 68 MByte pro Sekunde. Da dieses Konzept einen ringförmigen Zusammenschluss von bis zu 256 Rechnern ermöglicht, kann eine spätere Ausweitung des MADPET-II-Rechnersystems vorgenommen werden. Jeder in diesem Netz integrierte Rechner wird, mit jeweils einer zusätzlichen Verzögerung von 700 ns, Zugriff auf die gemessenen Daten haben. Somit ist die Anbindung eines Mehrprozessor-Parallelrechners für eine, zur Messung zeitgleich ablaufende, Datenverarbeitung machbar. Im Besonderen die Suche nach Koinzidenzen in der Singles-Datenliste wird einen hohen Rechenaufwand erfordern, der von solch einem Parallelrechner während der Messung übernommen werden kann. Die Nutzung eines in das System eingebundenen Parallelrechners für die, gegebenenfalls sogar während der Messung erfolgende, Bildrekonstruktion ist wünschenswert. Letzter Punkt erlangt insbesondere bei der Anwendung von 3D-Rekonstruktionsmethoden (siehe Kapitel 8) und dem damit verbundenen Rechenaufwand und Arbeitsspeicherbedarf eine entscheidende Bedeutung.

## 6.2 Koordinaten und Bezeichnungen

Da MADPET-II ein Tomograph mit mehreren axialen Schichten und der Möglichkeit zur 3D-Messung werden soll, wurden die hier vorgestellten Methoden für die Behandlung der Daten in allen drei Dimensionen ausgelegt. Weiterhin wurde die Rotation des Tomographen während der Messung in allen Algorithmen vorgesehen. Das Tomographen- und das raumfeste Koordinatensystem unterschieden sich wiederum durch die Rotation der  $(x', y')$ -Ebene (Tomograph) gegenüber der  $(x, y)$ -Ebene (raumfest) entlang der axialen Koordinatenachse ( $z = z'$ ). In Kapitel 4 war die Beziehung der Koordinaten des raumfesten Koordinatensystems zu den Koordinaten des rotierten Tomographen-Koordinatensystems durch den Rotationswinkel  $\varphi$  bzw. durch die Drehmatrizen  $\mathcal{D}_\varphi$  und  $\mathcal{D}'_\varphi$  bestimmt. Diese wurden für die MADPET-II-Methoden auf drei Dimensionen erweitert:

$$\mathcal{D}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{D}'_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & \sin(-\varphi) & 0 \\ -\sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.1)$$

In dieser Arbeit erfolgte die tomographische Verarbeitung der ermittelten Koinzidenzen nur innerhalb einer Schicht, also in zwei Dimensionen. Ein Doppellagen-Detektorring enthielt in einer Schicht 72 Einzeldetektoren in jeder Lage, also insgesamt 144 Einzeldetektoren ( $4 \times 18 \times 2$ ). Die Indizierung der Einzeldetektoren erfolgte zyklisch, wie in Abbildung 6.6 dargestellt. Die Zahl der Detektorpaare, die innerhalb eines Doppellagen-Detektorringes eine Koinzidenz messen konnten, wurde in den in dieser Arbeit vorgestellten Datenverarbeitungsmethoden

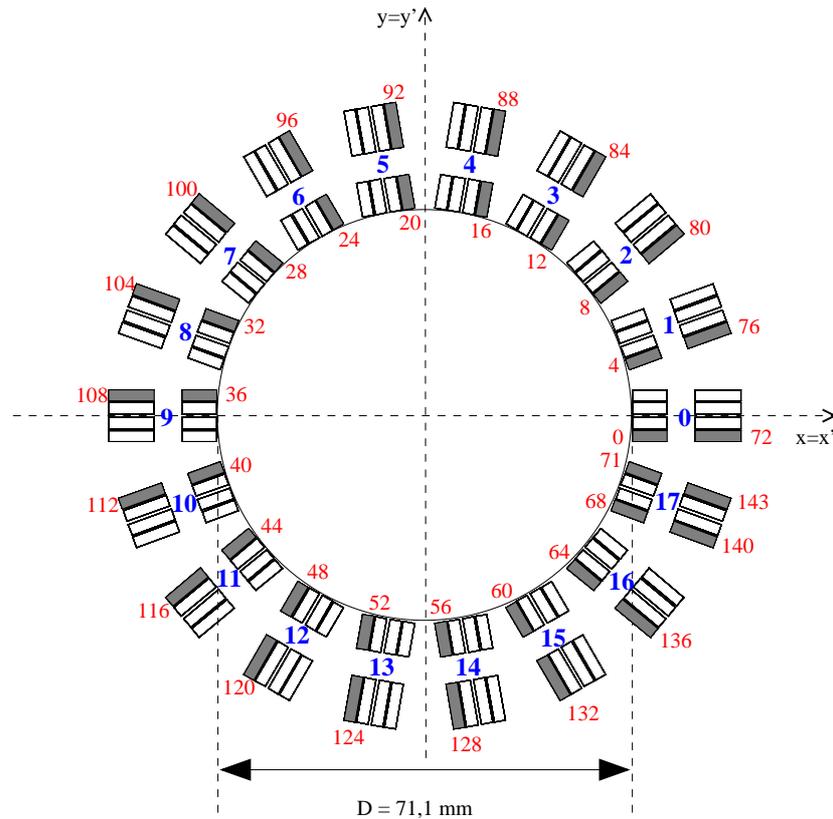


Abbildung 6.6: Koordinaten und Vergabe der Kristallnummern des MADPET-II  
 Zu Abbildung 6.6: Frontansicht auf einen Doppellagen-Ring des MADPET-II. Die  $(x, y)$ - und  $(x', y')$ -Koordinatensysteme deckten sich in der hier dargestellten Ausgangsposition des Tomographen. Die Nummern der zur besseren Identifizierung hier dunkel eingefärbten Kristalle sind in kleinen Ziffern dargestellt. Zwischen vorderer und hinterer Lage sind die Nummern der 18 Doppellagen-Detektormodule angegeben. Der Innendurchmesser des Systems betrug 71,1 mm.

nicht eingeschränkt und betrug  $144 \cdot 144 = 20736$ . Ein in Koinzidenz messendes Detektorpaar  $\xi$  wurde somit durch die Beziehung

$$\xi = c_a \cdot 144 + c_b \quad (6.2)$$

innerhalb einer Schicht ermittelt, wobei

$$c_a \in [0, 143] \quad \text{und} \quad c_b \in [0, 143] \quad (6.3)$$

galt.

## 6.3 Vorbereitung der gemessenen Daten für die Bildrekonstruktion

### 6.3.1 Vorverarbeitung

Die Vorverarbeitung der gemessenen Daten konnte im Zuge dieser Arbeit nicht untersucht werden, da noch keine Datennahme möglich war. Die Suche nach paarweise koinzident nachgewiesenen Gammaquanten wird ein entscheidendes Element dieser Vorverarbeitung sein. Sie wird in einem Nachfolgeprojekt im Anschluss an diese Arbeit untersucht. Hierbei soll besonders auf einen effizienten Suchalgorithmus Wert gelegt werden, der die Möglichkeit der parallelen Verteilung auf mehrere Rechner beinhaltet. Eine erste einfache Annäherung an diese Problematik kann jedoch ein Algorithmus sein, der durch die gemessene Datenliste mit einem Koinzidenz-Zeitfenster wandert und jene Quanten paarweise extrahiert, deren Nachweiszeitpunkte innerhalb dieses Fensters liegen. Dieses Vorgehen entspricht der Funktionsweise einer Koinzidenzelektronik. Der Algorithmus sollte weiterhin die Sortierung der gefundenen Koinzidenzen bezüglich ihrer Nachweiszeiten erlauben, um dynamische Studien (zeitliche Veränderung der Traceranreicherungen) oder bewegliche Körperfunktionen (z.B. getriggerte Herzaufnahmen zur Darstellung der Pumpbewegung des Herzmuskels) zu ermöglichen. Gleichzeitig wird die Koinzidenzsuche auch mit versetzten Zeitfenstern durchzuführen sein, um die Anzahl und Verteilung der zufälligen Koinzidenzen zu ermitteln. Weiterführende Untersuchungen können die im Detektorsystem gestreuten Quanten - also Gammaquanten die unter Energiedeposition Wechselwirkungen mit mehreren Einzeldetektoren vollzogen - identifizieren und, wie in [123, 126] untersucht, für die Rekonstruktion zur Verfügung stellen.

### 6.3.2 Umsortierung zu 2D List-Mode Histogrammen

Die Umsortierung der ermittelten Koinzidenz-Datenliste in List-Mode Histogramme erfolgte innerhalb einzelner axialer Schichten, also in 2D, wiederum unter Anwendung der 450-keV-Energieschwelle. Die Indizierung der Elemente des Histogramms  $\mathbf{h}$  im Winkelschritt  $\eta \in [1, \hat{\eta}]$  erfolgte unter Verwendung des LOR-Indexes  $\xi$  nach Gleichung 6.2 mit

$$i = (\eta - 1) \cdot 144^2 + \xi. \quad (6.4)$$

Die Dateigröße des resultierenden List-Mode Histogramms betrug 81 KByte pro Winkelschritt.

## 6.4 Monte Carlo Simulationen

### 6.4.1 Allgemeine Beschreibung der Simulationen

Die Monte Carlo Simulationen des MADPET-II wurden wie für den MADPET mit „GEANT: Detector Description and Simulation Tool“ (CERN, Schweiz) [42] durchgeführt. Die Berechnung und Handhabung der simulierten Wechselwirkungen erfolgte wie in Abschnitt 4.5.1 für die Untersuchungen des MADPET beschrieben. Für den MADPET-II wurden jedoch die axialen Komponenten der Emissions- und Wechselwirkungskordinaten mit in die Berechnungen integriert, um eine spätere Analyse in allen drei kartesischen Koordinaten zu ermöglichen. Dies resultierte wiederum in simulierten Koinzidenz-Datenlisten mit Elementen der Form

$$\{\text{Begrenzer}, c_a, c_b, E_a, E_b, \mathbf{x}'_a, \mathbf{x}'_b, \mathbf{v}', \text{Begrenzer}\}$$

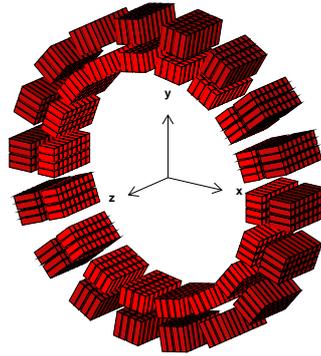


Abbildung 6.7: Positionierung aller 1152 LSO-Kristalle für die Monte Carlo Simulation des MADPET-II

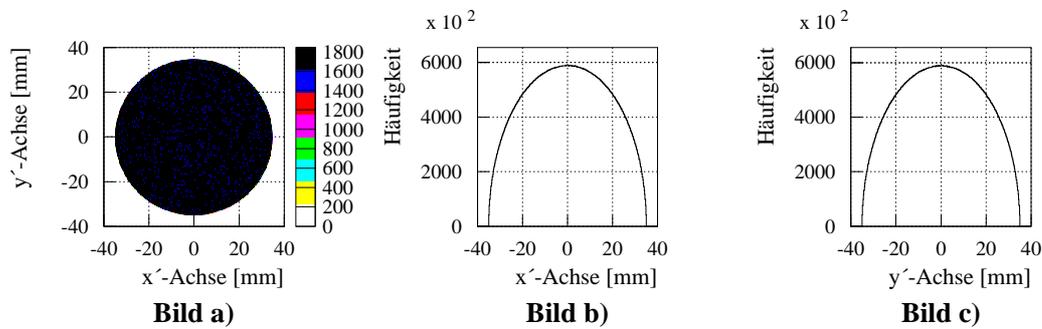


Abbildung 6.8: Monte Carlo Simulation der homogen verteilten Positronenquelle in einer Kreisscheibe für den MADPET-II: Vertices der emittierten Quantenpaare

Zu Abbildung 6.8: **Bild a)** Die Verteilung der Vertices der emittierten Gammaquantenpaare im  $(x', y')$ -Koordinatensystem des Tomographen; **Bild b)** Bild a projiziert entlang der  $x'$ -Achse; **Bild c)** Bild a projiziert entlang der  $y'$ -Achse.

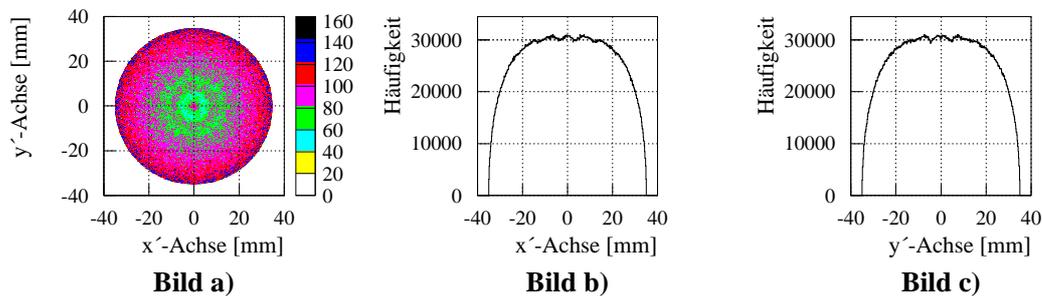


Abbildung 6.9: Monte Carlo Simulation der homogen verteilten Positronenquelle in einer Kreisscheibe für den MADPET-II: Vertices der nachgewiesenen Quantenpaare

Zu Abbildung 6.9: **Bild a)** Die Verteilung der Vertices der nachgewiesenen Gammaquantenpaare im  $(x', y')$ -Koordinatensystem des Tomographen; **Bild b)** Bild a projiziert entlang der  $x'$ -Achse; **Bild c)** Bild a projiziert entlang der  $y'$ -Achse.

	Mittelwert [mm]	Standardabweichung [mm]	Maximalwert [mm]
FWHM	1,7	0,6	3,1
FWTM	2,8	1,0	4,8
Versatz	0,2	0,2	1,1

Tabelle 6.1: Analyse der MADPET-II-Antwortfunktionen

Zu Tabelle 6.1: Breiten der aus den Monte Carlo Simulationen von MADPET-II berechneten Antwortfunktionen (CAF) und Versatz zwischen den CAF und TRI Antwortfunktionen (Bezeichnungen wie in Tabelle 4.2 auf Seite 83).

für jede nachgewiesene Koinzidenz, wobei jedoch für die enthaltenen Koordinaten galt:

$$\mathbf{x}'_a, \mathbf{x}'_b, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3. \quad (6.5)$$

#### 6.4.2 Monte Carlo Simulation des MADPET-II

Für die Monte Carlo Simulation des MADPET-II wurden, wie in Abbildung 6.7 dargestellt, alle 1152 Einzelkristalle der Größe  $2 \times 2 \times 6 \text{ mm}^3$  (vordere Lage) bzw.  $2 \times 2 \times 8 \text{ mm}^3$  (hintere Lage) gemäß der konstruktiven Vorgaben im Raum positioniert. In den Simulationen wurden auch alle, die Kristalle umgebenden, Materialien wie die Reflektor-Matrix, die APD-Matrix und das Gehäuse (siehe Abbildungen 6.2 und 6.3) berücksichtigt. Die Emission der Gammaquantenpaare geschah in einer Schicht innerhalb einer kreisförmigen Fläche mit 71,1 mm Durchmesser. Die Winkelverteilung der Gammaquanten war homogen innerhalb der  $(x', y')$ -Ebene über 360 Grad verteilt. Die Verteilung der Vertizes der emittierten Quantenpaare ist in Abbildung 6.8 zusammen mit ihren Projektionen in horizontaler und vertikaler Richtung für einen Simulationsdurchgang dargestellt. Die angestrebte gleichmäßige Verteilung ist in dieser Abbildung deutlich zu beobachten. Abbildung 6.9 zeigt die Vertizes der vom System nachgewiesenen Quantenpaare. Im Vergleich zu der entsprechenden Verteilung des MADPET (siehe Abbildung 4.18 auf Seite 80) konnte ein wesentlich gleichmäßigeres Sensitivitätsmuster festgestellt werden. Dies war vor allem in der Ringstruktur des MADPET-II begründet und ließ die Vermutung zu, dass eine Rotation des Detektorsystems für die Bildrekonstruktion nicht zwingend nötig sein würde. Von insgesamt  $0,2 \cdot 10^9$  emittierten Quantenpaaren wurden in einem Simulationsdurchgang  $9 \cdot 10^6$  Quantenpaare oberhalb von 300 keV nachgewiesen. Zur Erhöhung der Zahl der detektierten Quantenpaare wurden 46 voneinander unabhängige Durchgänge mit insgesamt  $4,5 \cdot 10^9$  nachgewiesenen Quantenpaaren durchgeführt.

#### 6.4.3 Berechnung der koinzidenten Antwortfunktionen

Aus der Monte Carlo Simulation wurden die koinzidenten Antwortfunktionen (CAF) wie in Kapitel 4 beschrieben berechnet. Hierfür wurde der maximale Gesichtsfeld Durchmesser von 70 mm in 560 Elementen, also in 0,125-mm-Schritten, abgetastet und für jedes Detektorpaar  $\xi$  ein individuelles Sensitivitätsprofil erstellt. Anhand der CAF konnte die variierende räumliche Sensitivität der einzelnen Detektorpaare untersucht werden. Da die rechteckige Antwortfunktion REC bei der MADPET-Bilderstellung wie zu erwarten keine Vorteile gegenüber der Verwendung der CAF ergab, wurde sie für MADPET-II nicht erneut untersucht. Wie für den MADPET wurde auch für MADPET-II ein Vergleich zwischen der CAF und einer

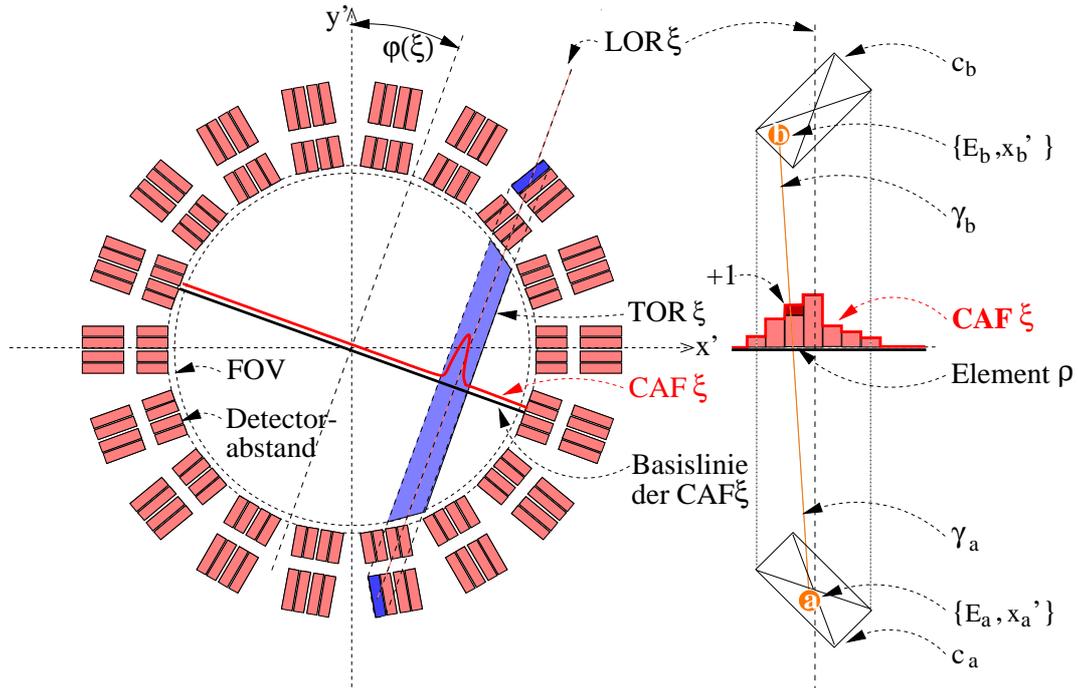


Abbildung 6.10: Berechnung der koinzidenten Antwortfunktion des MADPET-II  
 Zu Abbildung 6.10: Bild links) Für die Berechnung der CAF für ein Detektorpaar  $\xi$  wurden alle in  $\xi$  detektierten und innerhalb des Gesichtsfeldes emittierten Koinzidenzen verwendet (Schnittmenge zwischen FOV und TOR  $\xi$ ). Bild rechts) Für jede zu verwendende Koinzidenz kann aus den exakten Wechselwirkungskoodinaten a und b eine exakte LOR berechnet werden. Deren Schnittpunkt mit der Basislinie weist auf das zu inkrementierende CAF Element.

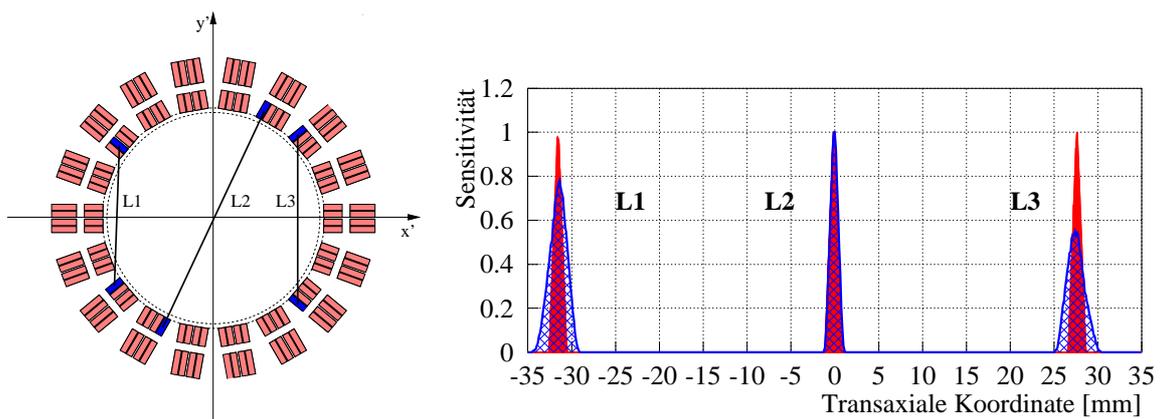


Abbildung 6.11: Ausgewählte Antwortfunktionen (CAF und TRI) des MADPET-II  
 Zu Abbildung 6.11: Die Antwortfunktion TRI ist ausgefüllt dargestellt, die CAF wird durch eine dicke Linie und schraffierte Flächen gekennzeichnet.

triangularen, für alle Detektorpaare identischen, Systemantwort (TRI) durchgeführt. Die Breite der symmetrischen Dreiecksfunktion TRI war identisch mit der Breite der Kristalle des MADPET-II, also 2 mm. Dies resultierte in einer Halbwertsbreite der TRI Antwortfunktion von 1 mm, also der theoretischen intrinsischen Auflösung von zwei optimal zueinander ausgerichteten Kristallen (siehe Abbildung 2.7 auf Seite 20).

Die Resultate der Untersuchungen der Antwortfunktionen sind in Tabelle 6.1 zusammengefasst. Aufgrund der kürzeren Kristalle in der Doppellagen-Struktur des Detektorsystems variierten die Halb- und Zehntelwertsbreiten der Antwortfunktionen weniger als dies für den Sektortomograph zu beobachten war (siehe Tabelle 4.2 auf Seite 83). Jedoch sollte mit MADPET-II eine wesentlich höhere Ortsauflösung erreicht werden. Dafür wurden, wie in den folgenden Abschnitten für die Rekonstruktion der MADPET-II Bilder beschrieben wird, für die zu rekonstruierenden Bildpunkte eine Kantenlänge von nur 0,5 mm gewählt. Im Verhältnis zu diesen kleinen Bildpunkten waren die hier beobachteten maximalen Halb- und Zehntelwertsbreiten von 3,1 mm und 4,8 mm sehr groß. Der im Vergleich zum Sektortomographen MADPET geringere Versatz zwischen maximaler Sensitivität der CAF und TRI Antwortfunktionen von  $0,2 \text{ mm} \pm 0,2 \text{ mm}$  mit einem Maximalwert von 1,4 mm war ein Hinweis auf geringe Positionierungsfehler bei der Verwendung der TRI Antwortfunktion in der Bilderstellung.

#### 6.4.4 Berechnung tomographischer Projektionsdaten

Zur Erstellung von tomographischen Datenlisten aus der Monte Carlo Simulation kam der in Abschnitt 4.5.3 auf Seite 79 für den MADPET dargelegte Algorithmus zum Einsatz. Dafür wurden die Randbedingungen des MADPET, wie die Anzahl der Einzeldetektoren und der Detektorpaare, durch die des MADPET-II ersetzt (siehe Abbildung 6.12). Der Algorithmus wurde für die Erstellung eines Messdatensatzes ohne Rotation (1 Winkelschritt) und für die Rotation in 10 und 20 Winkelschritten im Uhrzeigersinn über 20 Grad angewendet, um den Einfluss der tomographischen Abtastung auf die Rekonstruktionsalgorithmen und deren Grenzen zu untersuchen. Die Winkelschrittweite wurde für  $\hat{\eta}$  Winkelschritte mit

$$\Delta\varphi(\hat{\eta}) = \frac{20^\circ}{\hat{\eta}} \quad (6.6)$$

festgelegt. Die Winkelposition des Tomographen im Winkelschritt  $\eta \in [1, \hat{\eta}]$  berechnete sich für einen tomographischen Datensatz mit insgesamt  $\hat{\eta}$  Schritten wie folgt:

$$\varphi(\eta, \hat{\eta}) = -\Delta\varphi(\hat{\eta}) \cdot (\eta - 1). \quad (6.7)$$

#### 6.4.5 Berechnung der Gewichtematrix

Die Gewichtematrix für die statistische iterative Rekonstruktion von MADPET-II List-Mode Histogrammen konnte anhand der in Abschnitt 4.5.6 auf Seite 85 beschriebenen Methode berechnet werden. Die Besonderheiten der für MADPET-II durchgeführten Operationen werden im Folgenden beschrieben.

Die Gewichtematrix wurde aus 31 Simulationen mit einer unteren Energieschwelle bei 450 keV für eine Bildmatrix von  $140 \times 140$  quadratischen Bildpunkten ermittelt. Die Kantenlänge der Bildpunkte betrug 0,5 mm, das resultierende Gesichtsfeld wies somit einen maximalen Durchmesser von 70 mm auf. Durch die Wahl dieser Matrixdimensionen waren - bei einer

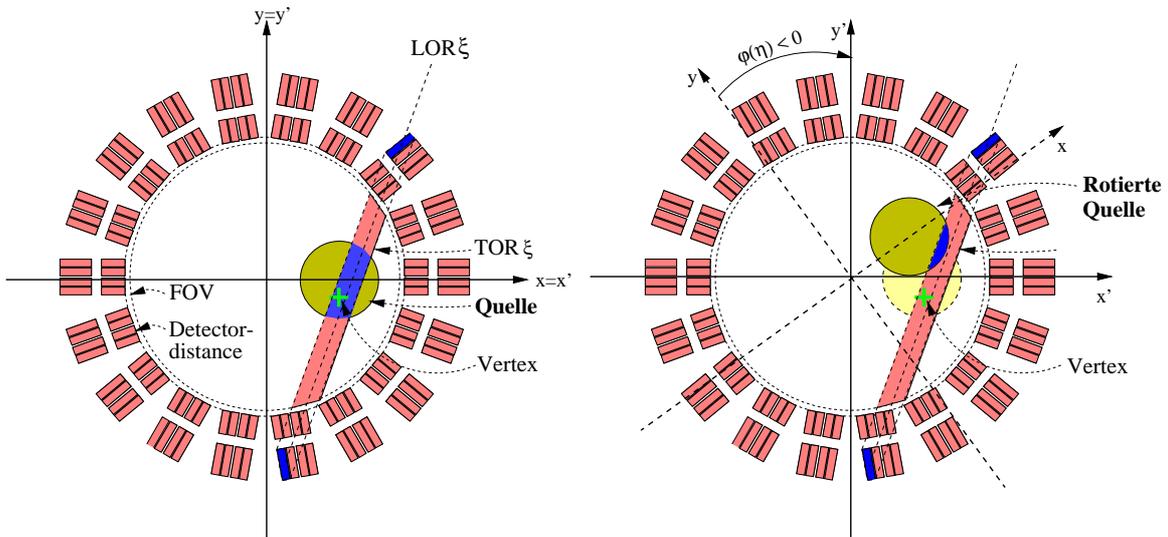


Abbildung 6.12: Extraktion von tomographischen Datensätzen aus der Monte Carlo Simulation des MADPET-II

Zu Abbildung 6.12: Darstellung des Extraktionsproblems für die Grundposition (links) und eine rotierte Position des Tomographen im Winkelschritt  $\eta$ . Um eine bessere Darstellung zu ermöglichen, wurde hier ein unrealistischer Rotationswinkel ( $|\varphi(\eta)| \gg 20^\circ$ ) gewählt.

Speichertiefe von 2 Byte pro Gewicht - ca. 750 MByte Arbeitsspeicher nötig, um die für einen Winkelschritt nötigen  $4 \cdot 10^9$  Matrixelemente zu berechnen. Um die Rechenzeiten und Dateigrößen zu limitieren, wurde die statistische Rekonstruktion für den MADPET-II nur für eine Winkelposition ( $\hat{\eta} = 1$  und somit  $i = \xi$ ), also ohne Rotation des Tomographen, untersucht. Abbildung 6.13 veranschaulicht die Berechnung des Gewichts  $a(i, j)$  durch Zählen der in  $j$  emittierten und in  $i$  detektierten Gammaquantenpaare als Maß für die entsprechende Nachweiswahrscheinlichkeit (siehe auch Abschnitt 4.5.6 auf Seite 85). Da die Zahl der in den Simulationen nachgewiesenen Koinzidenzen limitiert war, wurde eine Methode entwickelt um die Rotationssymmetrie des MADPET-II Detektorsystems zur Erhöhung der nutzbaren Koinzidenzen für die Matrixberechnung auszunutzen (siehe Abbildung 6.14). Für jedes Kristallpaar  $\xi$  gab es im MADPET-II  $n \in [1, 17]$  Kristallpaare  $\tilde{\xi}$  mit identischer räumlicher Zuordnung. Diese Eigenschaft ist in der linken Abbildung für ein Paar  $\tilde{\xi}$  verdeutlicht, dessen Kristalle wie die Kristalle im Paar  $\xi$  zueinander positioniert waren. Im Folgenden sei  $k$  entweder  $a$  oder  $b$  für die zwei, an einer LOR beteiligten, Kristalle  $c_a$  und  $c_b$  zu setzen. Mit  $m_k(\xi)$  wurde ermittelt, in welcher Detektorlage der Kanal  $c_k(\xi)$  lag:

$$m_k(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{falls } c_k(\xi) < 72 & ; \text{ Kristall lag in vorderer Lage} \\ 2 & \text{sonst} & ; \text{ Kristall lag in hinterer Lage} \end{cases} \quad (6.8)$$

Durch Erhöhen der Kanalnummer um  $n \cdot 4$  (siehe Abbildung 6.6 auf Seite 126 und Abbildung 6.14, rechts) wurde zu dem gleich situierten Kristall im  $n$ -ten Nachbarmodul gewechselt,

$$\tilde{c}_{k,n}(\tilde{\xi}_n) = (n \cdot 4 + c_k(\xi)) \bmod (m_k(\xi) \cdot 72), \quad (6.9)$$

jedoch musste noch gewährleistet werden, dass nicht zu einem Kristall in einer anderen

Detektorlage (z.B. von vorderer nach hinterer Lage) gesprungen wurde:

$$\tilde{c}_{k,n}(\tilde{\xi}_n) \rightarrow \begin{cases} \tilde{c}_{k,n}(\tilde{\xi}_n) & \text{falls } \{m_k(\xi) = 1\} \\ \tilde{c}_{k,n}(\tilde{\xi}_n) + 72 & \text{falls } \{m_k(\xi) = 2 \text{ und } \tilde{c}_{k,n}(\tilde{\xi}_n) < 72\} \end{cases} . \quad (6.10)$$

Um die in dem Detektorpaar  $\tilde{\xi}$  nachgewiesenen Quantenpaare für die Berechnung der Nachweiswahrscheinlichkeit für das Paar  $\xi$  nutzen zu können, mussten die Vertizes dieser Quantenpaare unter Verwendung des Rotationswinkels

$$\varphi_n = n \cdot 20^\circ \quad (6.11)$$

( $\varphi_n = 100^\circ$  für  $n = 5$  in Abbildung 6.14, rechts) im Uhrzeigersinn mittels der Drehmatrix  $\mathcal{D}_{-\varphi}$  zurück rotiert werden. Lag der zurückrotierte Vertex innerhalb des Pixels  $j$  (ähnlich der Vergleichsoperation in Ablaufkasten 4.7 auf Seite 90), so konnte dieses Quantenpaar - obwohl in  $\tilde{\xi}$  nachgewiesen - für die Erhöhung des Gewichts  $a(i = \xi, j)$  verwendet werden.

Die Nutzung der Rotationssymmetrie resultierte in einem 18-fachen Gewinn an nutzbaren simulierten Koinzidenzen. Die Anzahl der Elemente mit nicht-verschwindender Nachweiswahrscheinlichkeit (Nicht-Null-Elemente) betrug  $18 \cdot 10^6$  (bei insgesamt  $\approx 4 \cdot 10^9$  Elementen) mit einer mittleren Zahl von 325 Koinzidenzen pro Gewicht (Maximalwert:  $51 \cdot 10^3$  pro Gewicht). Die Größe der im komprimierten ASPIRE-Sparse-Format [32] gespeicherten (nur Nicht-Null-Elemente werden gespeichert) Gewichtematrix betrug 106 MByte.

## 6.5 Tomographische Bildrekonstruktion

Die Intention bei der Planung des MADPET-II war der Bau eines hochauflösenden und hochsensitiven PET-Geräts für die Bestimmung der Traceranreicherung in kleinsten Strukturen. Die hierbei auftretenden Besonderheiten des Rekonstruktionsproblems waren, trotz der unterschiedlichen Bauweisen, dem MADPET-Rekonstruktionsproblem ähnlich. Deshalb wurden für den MADPET-II die in Kapitel 4 für den MADPET beschriebenen Methoden verwendet. In den folgenden Abschnitten werden die Unterschiede der MADPET-II-Methoden zu den bereits für den MADPET entwickelten Methoden beschrieben. Die Möglichkeit, die im List-Mode Histogramm  $\mathbf{h}$  enthaltenen gemessenen Daten für die Kontamination durch zufällige Koinzidenzen ( $\mathbf{n}$ ) und auch für die unterschiedlichen Sensitivitäten aller Detektorpaare ( $\mathbf{s}$ ) zu korrigieren, wurde beibehalten. Da diese Arbeit jedoch ausschließlich die Rekonstruktion simulierter Daten des MADPET-II behandelte, konnten die Korrekturen für die in diesem Kapitel vorgestellten Daten durch

$$\mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{s} = \mathbf{1} \quad (6.12)$$

abgeschaltet werden. Alle verwendeten Rekonstruktionsmethoden dienten zur Rekonstruktion von Bildern mit  $140 \times 140$  Bildpunkten. Die Kantenlänge der quadratischen Pixel betrug 0,5 mm. Das rekonstruierte Gesichtsfeld war bei allen Methoden auf einen kreisförmigen Bildbereich mit 136 Pixel (68 mm) Durchmesser beschränkt.

### 6.5.1 Umformung zu Sinogrammen

Die Umformung des List-Mode Histogramms zum Parallelsinogramm erfolgte wahlweise unter Verwendung der triangularen Antwortfunktion ( $M = \text{TRI}$ ) oder der realistischen koinzidenten Antwortfunktion ( $M = \text{CAF}$ ). Die rechteckige Antwortfunktion ( $M = \text{REC}$ ) wurde

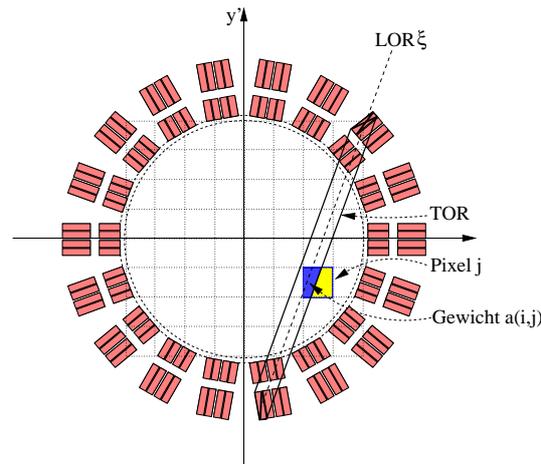


Abbildung 6.13: Berechnung der Gewichtsmatrix aus der Monte Carlo Simulation des MADPET-II

Zu Abbildung 6.13: Berechnung der Nachweiswahrscheinlichkeit  $a(i, j)$ , ein im Bildpunkt  $j$  emittiertes Quantenpaar im Projektionselement  $i$  zu messen. Die Wahrscheinlichkeit  $a(i, j)$  war proportional zu der Summe der in der Simulation in  $j$  emittierten und in  $i$  nachgewiesenen Quantenpaare. Da die statistische Rekonstruktion in dieser Arbeit ohne Rotation des Systems angewendet wurde, ergab sich hier  $i = \xi$ . Die Kantenlängen der Bildelemente sind nicht maßstabsgetreu abgebildet.

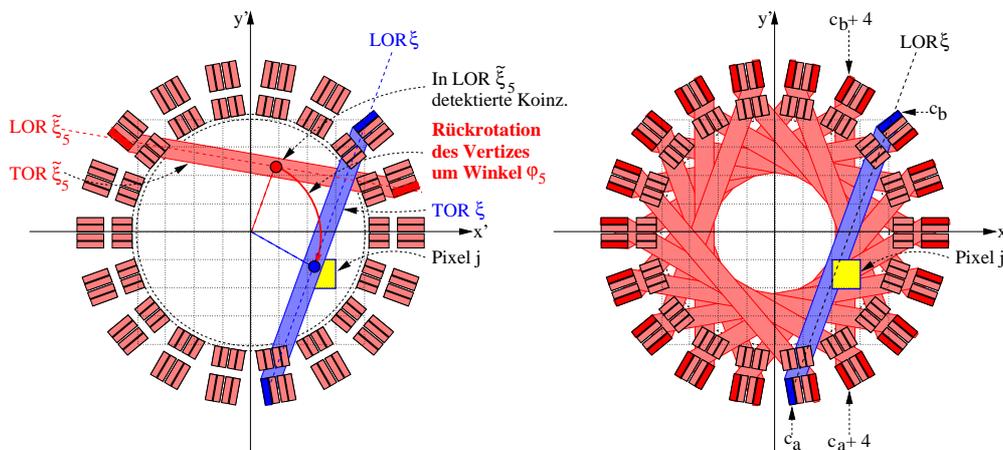


Abbildung 6.14: Ausnutzung der Rotationssymmetrie des Detektorsystems bei der Berechnung der Gewichtsmatrix

Zu Abbildung 6.14: Bild links) Für ein Kristallpaar  $\xi$  existierten 17 identisch zueinander positionierte Kristallpaare  $\tilde{\xi}$ . Eines dieser Paare ( $\tilde{\xi}_5$ ) ist hier exemplarisch eingezeichnet. Der Vertex einer in diesem Paar nachgewiesenen Koinzidenz wurde entsprechend dem Winkel zwischen beiden LORs zurück rotiert. Anschließend erfolgte die Prüfung, ob der rotierte Vertex in dem Bildpunkt  $j$  zu liegen kam. War dies der Fall, so konnte diese in dem Paar  $\tilde{\xi}$  nachgewiesene Koinzidenz zur Erhöhung des Gewichts  $a(i, j)$  für das Paar  $\xi$  verwendet werden. Bild rechts) Überlagerung der TOR  $\xi$  mit den TORs aller 17, dem Paar  $\xi$  äquivalenten, Kristallpaare. Durch Erhöhen beider Kanalnummern der LOR  $\xi$  um 4 wurde die äquivalente LOR  $\tilde{\xi}_1$  identifiziert.

für MADPET-II nicht untersucht. Die Funktionsweise des Rebinning-Algorithmus für den MADPET-II war identisch mit der in Abschnitt 4.7.1 auf Seite 92 für den MADPET beschriebenen Methode:

$$\mathbf{z}^M = \mathcal{R}^M\{\mathbf{h} - \mathbf{n}, \mathbf{s}\}. \quad (6.13)$$

Das Sinogramm enthielt 140 transaxiale Elemente mit jeweils 0,5 mm Kantenlänge. Damit die Bedingungen des Rekonstruktionsproblems erfüllt waren - also die Gesamtzahl der Sinogrammelemente die der zu rekonstruierenden Bildpunkte übertraf - wurde das Sinogramm für 1-Grad-Schritte berechnet ( $140 \cdot 180 = 25200$  Sinogrammelemente). Jede der daraus resultierenden 180 Sinogrammzeilen enthielt somit die Projektion der zu untersuchenden Verteilung in einer Winkelschrittweite von einem Grad.

Die Abhängigkeit der tomographischen Abtastung von der Anzahl der Winkelschritte in den tomographischen Daten wurden anhand der Berechnung eines Messdatensatzes aus der Simulation überprüft. Als Quelle wurde eine homogen emittierende Kreisscheibe mit 70 mm Durchmesser im Extraktionsalgorithmus verwendet. Aus dieser wurden für 1, 10 und 20 Winkelschritte simulierte Datenlisten generiert und mit TRI bzw. CAF zu Sinogrammen umsortiert. Abbildungen 6.15 bis 6.17 zeigen diese Sinogramme. Ohne Rotation des Tomographen waren große Lücken in der Sinogrammmatrix zu erkennen. Es war zu erwarten, dass ohne weitere Korrekturmaßnahmen [62, 65, 124, 125] eine analytische Rekonstruktion - aufgrund der dabei auftretenden Gleichbehandlung aller Sinogrammelemente - zu Artefakten in den rekonstruierten Bildern führen würde. Auch die Sinogramme der in 10 Winkelschritten rotierten Messdaten zeigten verbleibende Inhomogenitäten. Im Falle von 20 Winkelschritten war eine erhöhte Homogenität bei beiden im Rebinning verwendeten Systemantworten zu beobachten.

### 6.5.2 Analytische Bildrekonstruktion

Die gefilterte Rückprojektion des Sinogramm  $\mathbf{z}^M$  erfolgte wiederum unter Verwendung des Rampenfilters:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^M &= \mathcal{FBP}\left\{\mathcal{R}^M\{\mathbf{h} - \mathbf{n}, \mathbf{s}\}\right\} \\ &= \mathcal{FBP}\left\{\mathbf{z}^M\right\}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

### 6.5.3 Statistische Bildrekonstruktion

Die Algorithmen zur statistischen iterativen Bildrekonstruktion unterschieden sich nicht von den am MADPET angewendeten. Für die Rekonstruktion der MADPET-II-Daten war nur die entsprechende Gewichtematrix nötig. Weiterhin wurde die Glättung der mit dem OSEM-Algorithmus rekonstruierten Bilder in ihrer Breite den kleineren Bildpunkten und der angestrebten höheren Ortsauflösung des Systems angepasst. Die resultierenden Rekonstruktionsmethoden können wiederum wie folgt angegeben werden:

$$\mathbf{f}^{\mathcal{PLM}} = \mathcal{PLM}\left\{\mathbf{A}, \mathbf{h}, \mathbf{n}, \mathbf{s}\right\} \quad (6.15)$$

für die PWLS-Rekonstruktion, und

$$\mathbf{f}^{\mathcal{OLM}} = \mathcal{G}_{2D}^{0,5}\left\{\mathcal{OLM}\left\{\mathbf{A}, \mathbf{h}, \mathbf{n}, \mathbf{s}\right\}\right\} \quad (6.16)$$

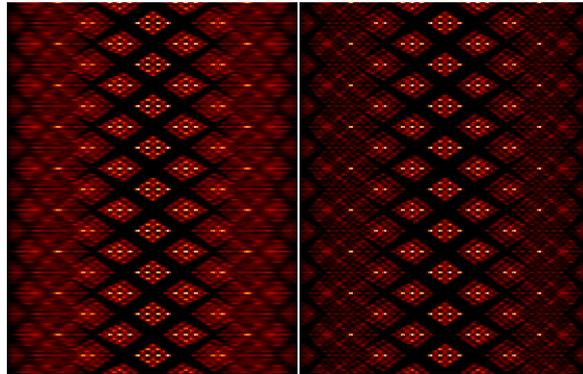


Abbildung 6.15: Abtastmuster im Sinogramm des MADPET-II (ohne Rotation)  
 Zu Abbildung 6.15: Abtastmuster im Sinogramm ohne Rotation des Tomographen.  
Bild links) Rebinning mit CAF. Bild rechts) Rebinning mit TRI.

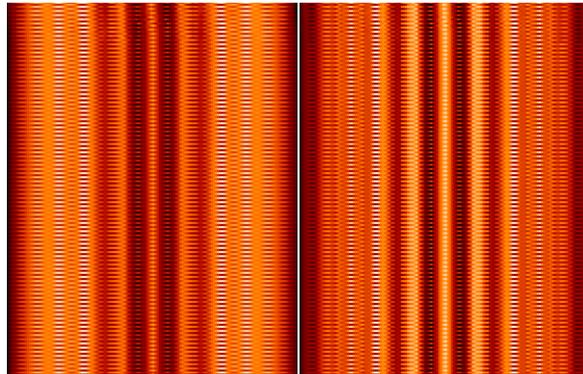


Abbildung 6.16: Abtastmuster im Sinogramm des MADPET-II (10 Winkelschritte)  
 Zu Abbildung 6.16: Abtastmuster im Sinogramm bei Rotation des Tomographen in 10  
 Winkelschritten. Bild links) Rebinning mit CAF. Bild rechts) Rebinning mit TRI.

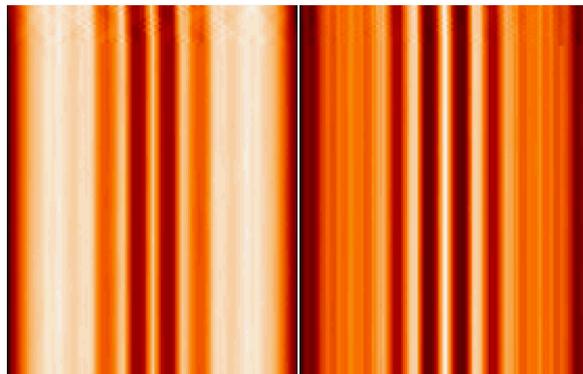


Abbildung 6.17: Abtastmuster im Sinogramm des MADPET-II (20 Winkelschritte)  
 Zu Abbildung 6.17: Abtastmuster im Sinogramm bei Rotation des Tomographen in 20  
 Winkelschritten. Bild links) Rebinning mit CAF. Bild rechts) Rebinning mit TRI.

	mm	%
Detektorabstand	71,1	100
Kreisscheibe in der Monte Carlo Simulation	71,1	100
System Matrix <b>A</b>	70	98
Statistisch rekonstruiertes Gesichtsfeld	68	96
Analytisch rekonstruiertes Gesichtsfeld	68	96
Kreisscheibe für die Untersuchung der Abtastmuster im Sinogramm	70	98
Linienquellen	66	93
Strukturphantom	66	93

Tabelle 6.2: Durchmesser der für MADPET-II untersuchten Verteilungen, in Relation zum Systemdurchmesser

für die Rekonstruktion mit dem OSEM-Algorithmus und 0,5 mm Halbwertsbreite des anschließend angewendeten Gauß-Filters. Die Aufteilung des List-Mode Histogramms in Untergruppen für eine beschleunigte OSEM-Rekonstruktion war, aufgrund der nicht untersuchten Rotation für die statistische Rekonstruktion, nicht ohne Umsortierung des List-Mode Histogramms möglich. Sie wurde in dieser Arbeit für MADPET-II nicht implementiert, der verwendete OSEM-Algorithmus mit nur einer Untergruppe bestehend aus allen verfügbaren List-Mode-Elementen reduzierte sich somit de facto auf den (engl. *shifted-poisson*-) MLEM-Algorithmus.

## 6.6 Rekonstruierte Daten des MADPET-II

Für die Untersuchung des MADPET-II-Tomographen und der vorhandenen Datenverarbeitungsmethoden wurden tomographische Koinzidenz-Datenlisten aus den Monte Carlo Simulationen extrahiert, zu List-Mode Histogrammen umgeformt und diese mit den im letzten Abschnitt vorgestellten Methoden rekonstruiert. Die untersuchten Bildtypen *Rtri*, *Rcaf*, *Plm* und *Olm* resultierten

- (***Rtri***) aus der gefilterten Rückprojektion der unter Verwendung der TRI-Antwortfunktion erstellten Parallelsinogramme (siehe Gleichung 6.14),
- (***Rcaf***) aus der gefilterten Rückprojektion der unter Verwendung der CAF-Antwortfunktion erstellten Parallelsinogramme (siehe Gleichung 6.14),
- (***Plm***) aus der statistischen iterativen Rekonstruktion mit dem  $\mathcal{PLM}$ -Operator (siehe Gleichung 6.15), und
- (***Olm***) aus der statistischen iterativen Rekonstruktion mit dem  $\mathcal{OLM}$ -Operator (siehe Gleichung 6.16).

Die Größen des Systems, der Simulationen, des Gesichtsfeldes und der in diesem Kapitel untersuchten Verteilungen sind in Tabelle 6.2 zusammengefasst.

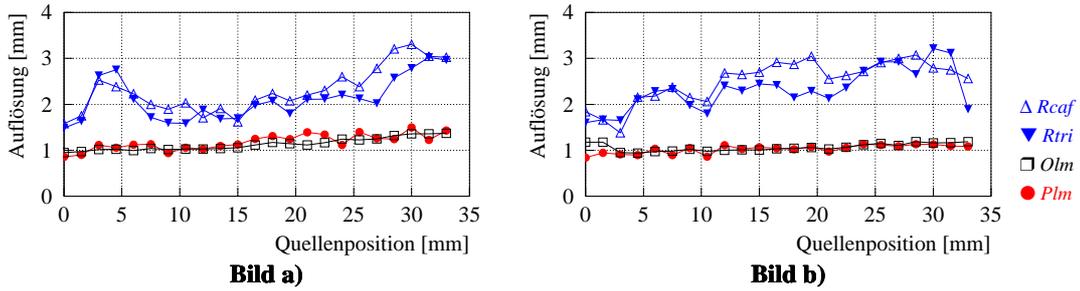


Abbildung 6.18: Rekonstruierte Ortsauflösung des MADPET-II (ohne Rotation)  
 Zu Abbildung 6.18: Alle Daten wurden ohne Rotation erstellt. Bild a) Die rekonstruierte radiale Ortsauflösung in Abhängigkeit vom Abstand zum Zentrum des Gesichtsfeldes. Bild b) Rekonstruierte tangentielle Ortsauflösung.

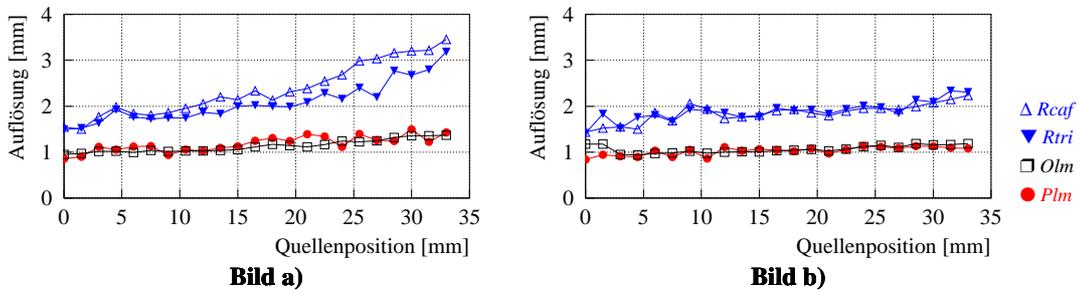


Abbildung 6.19: Rekonstruierte Ortsauflösung des MADPET-II (10 Winkelschritte)  
 Zu Abbildung 6.19: *Plm* und *Olm* wurden ohne Rotation, *Rtri* und *Rcaf* wurden mit Rotation in 10 Winkelschritten erstellt. Bild a) Die rekonstruierte radiale Ortsauflösung in Abhängigkeit vom Abstand zum Zentrum des Gesichtsfeldes. Bild b) Rekonstruierte tangentielle Ortsauflösung.

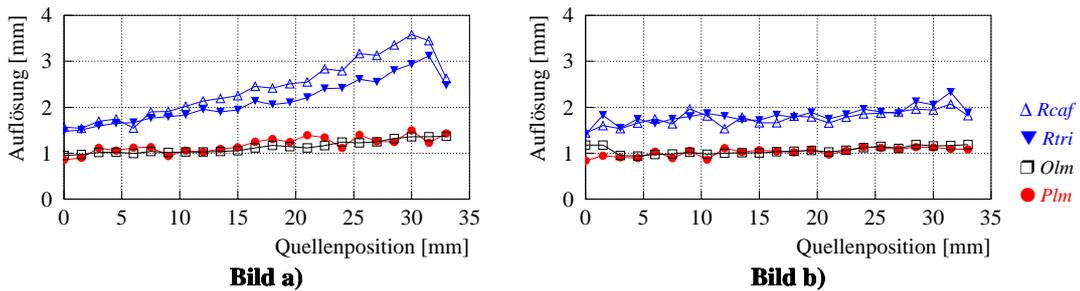


Abbildung 6.20: Rekonstruierte Ortsauflösung des MADPET-II (20 Winkelschritte)  
 Zu Abbildung 6.20: *Plm* und *Olm* wurden ohne Rotation, *Rtri* und *Rcaf* wurden mit Rotation in 20 Winkelschritten erstellt. Bild a) Die rekonstruierte radiale Ortsauflösung in Abhängigkeit vom Abstand zum Zentrum des Gesichtsfeldes. Bild b) Rekonstruierte tangentielle Ortsauflösung.

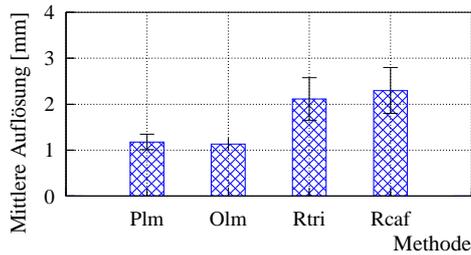
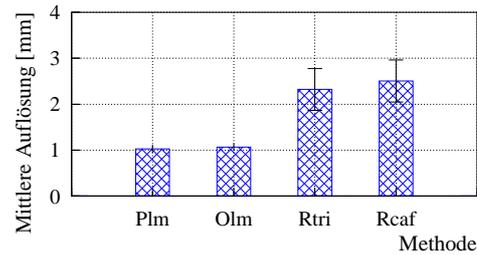
**Bild a)****Bild b)**

Abbildung 6.21: Mittlere Ortsauflösung des MADPET-II (ohne Rotation)

Zu Abbildung 6.21: Alle Daten wurden ohne Rotation des Systems erstellt. Bild a) Mittelwerte der in Abbildung 6.18 aufgetragenen rekonstruierten radialen Ortsauflösungen (links). Bild b) Mittlere tangentielle Ortsauflösungen.

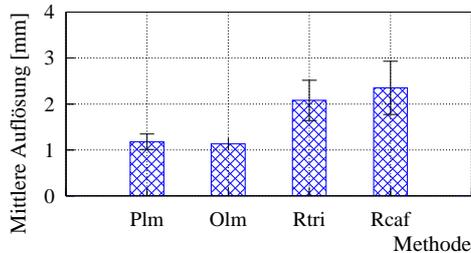
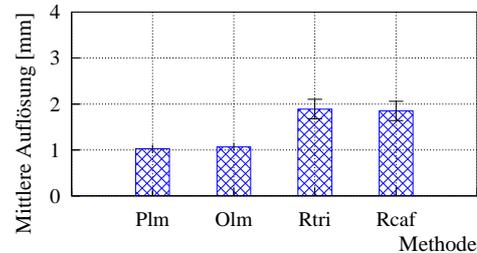
**Bild a)****Bild b)**

Abbildung 6.22: Mittlere Ortsauflösung des MADPET-II (10 Winkelschritte)

Zu Abbildung 6.22: *Plm* und *Olm* wurden ohne Rotation, *Rtri* und *Rcaf* wurden mit Rotation in 10 Winkelschritten erstellt. Bild a) Mittelwerte der in Abbildung 6.18 aufgetragenen rekonstruierten radialen Ortsauflösungen (links). Bild b) Mittlere tangentielle Ortsauflösungen.

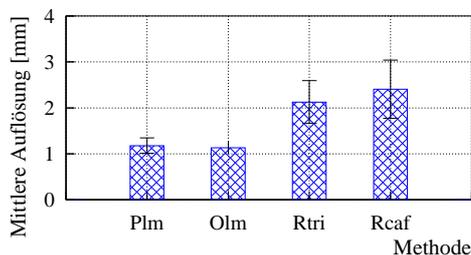
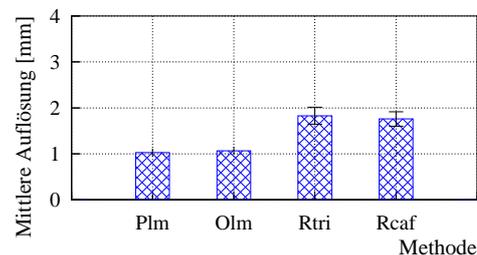
**Bild a)****Bild b)**

Abbildung 6.23: Mittlere Ortsauflösung des MADPET-II (20 Winkelschritte)

Zu Abbildung 6.23: *Plm* und *Olm* wurden ohne Rotation, *Rtri* und *Rcaf* wurden mit Rotation in 20 Winkelschritten erstellt. Bild a) Mittelwerte der in Abbildung 6.18 aufgetragenen rekonstruierten radialen Ortsauflösungen (links). Bild b) Mittlere tangentielle Ortsauflösungen.

	Winkel- schritte	Radial		Tangential		Siehe Abbildung
		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	
<i>Plm</i>	1	1,0	+0,01	0,9	+0,01	6.18, 6.19 und 6.20
<i>Olm</i>	1	0,9	+0,01	1,0	+0,00	6.18, 6.19 und 6.20
<i>Rtri</i>	1	1,7	+0,02	1,8	+0,03	6.18
<i>Rcaf</i>	1	1,7	+0,04	1,9	+0,04	6.18
<i>Rtri</i>	10	1,4	+0,04	1,6	+0,02	6.19
<i>Rcaf</i>	10	1,4	+0,06	1,6	+0,02	6.19
<i>Rtri</i>	20	1,4	+0,04	1,6	+0,01	6.20
<i>Rcaf</i>	20	1,4	+0,06	1,6	+0,01	6.20

Tabelle 6.3: Lineare Anpassung der rekonstruierten Ortsauflösung des MADPET-II  
 Zu Tabelle 6.3: Lineare Anpassung ( $\Gamma = a + b \cdot d$ ) an die - in den angegebenen Abbildungen  
 aufgetragenen - radialen und tangentialen Ortsauflösungen  $\Gamma$  in Abhängigkeit von der  
 Quellenposition  $d$  für  $0 \leq d \leq 33$ . Die Werte von  $\Gamma$ ,  $a$  und  $b$  sind in mm angegeben.

	Winkel- schritte	Radial		Tangential		Siehe Abbildung
		$\bar{r}$	SD	$\bar{r}$	SD	
<i>Plm</i>	1	1,2	0,17	1,0	0,09	6.21, 6.22 und 6.23
<i>Olm</i>	1	1,1	0,13	1,1	0,08	6.21, 6.22 und 6.23
<i>Rtri</i>	1	2,1	0,46	2,3	0,45	6.21
<i>Rcaf</i>	1	2,3	0,50	2,5	0,46	6.21
<i>Rtri</i>	10	2,1	0,44	1,9	0,21	6.22
<i>Rcaf</i>	10	2,4	0,58	1,8	0,21	6.22
<i>Rtri</i>	20	2,1	0,47	1,8	0,18	6.23
<i>Rcaf</i>	20	2,4	0,63	1,8	0,16	6.23

Tabelle 6.4: Mittelwerte der rekonstruierten Ortsauflösung des MADPET-II  
 Zu Tabelle 6.4: Mittelwerte  $\bar{r}$  und korrespondierende Standardabweichungen SD der rekon-  
 struierten Ortsauflösung, berechnet für  $0 \leq d \leq 33$  mm. Diese Tabelle gibt die Höhen der  
 Balken in den Abbildungen 6.21 bis 6.23 an.

### 6.6.1 Bestimmung der rekonstruierten Ortsauflösung

Zur Bestimmung der rekonstruierten Ortsauflösung wurden aus der Monte Carlo Simulation des MADPET-II kreisförmige Punktquellen extrahiert. Die 23 Quellen mit jeweils 1 mm Durchmesser waren in 1,5-mm-Abständen (0 bis 33 mm Abstand vom Koordinatenursprung) auf der  $x$ -Achse positioniert. Nach Erstellen der List-Mode Histogramme aus den Koinzidenz-Datenlisten unter Verwendung von 1, 10 und 20 Winkelschritten wurden diese mit den eingangs beschriebenen Methoden zu den Bildern *Olm*, *Plm* (jeweils nur für 1 Winkelschritt), *Rtri* und *Rcaf* rekonstruiert. Das Ermitteln der rekonstruierten Ortsauflösung aus diesen Bildern erfolgte wie bereits im Abschnitt 4.8.1 auf Seite 98 für den MADPET durchgeführt.

Die resultierenden radialen und tangentialen Ortsauflösungen sind in den Abbildungen 6.18 bis 6.20 über ihrem Abstand zum Koordinatenursprung aufgetragen. In allen darin

dargestellten Graphen wurden für *Plm* und *Olm* die ohne Rotation des Systems erreichten Auflösungen verwendet. Abbildung 6.18 enthält auch die analytisch rekonstruierten Werte ohne Rotation des Tomographen (1 Winkelschritt). Die Ortsabhängigkeit der analytischen Rekonstruktionsmethoden war deutlich erkennbar, es fiel weiterhin ihre unregelmäßige Zunahme auf. Die in Abbildung 6.19 für 10 Winkelschritte aufgetragenen Ortsauflösungen der analytischen Methoden wiesen eine verbesserte - da gleichmäßigere - Ortsabhängigkeit auf, deren Variationen sich im Falle von 20 Winkelschritten (Abbildung 6.20) wiederum verringerten. Beide List-Mode Rekonstruktionsmethoden, *Plm* und *Olm*, ermöglichten eine weitgehend ortsunabhängige Ortsauflösung im gesamten Gesichtsfeld, ohne das System rotieren zu müssen. Die Resultate der Anpassung der aufgetragenen Kurven an die lineare Funktion

$$\Gamma = a + b \cdot d \quad (6.17)$$

sind in Tabelle 6.3 angegeben. Die geringen Steigungswerte *b* für *Plm* und *Olm* belegen wiederum die verschwindende Ortsabhängigkeit der Auflösung durch die List-Mode Rekonstruktion mittels der Monte Carlo Gewichtematrix. Die mit den analytischen Methoden *Rtri* und *Rcaf* erreichte, gegenüber dem MADPET (siehe Tabelle 4.4 auf Seite 99) reduzierte, Ortsabhängigkeit (ca 0,05 anstatt 0,1 bei MADPET) ist auf die Doppellagen-Struktur des MADPET-II-Detektorsystems und der damit verbundenen Reduktion des Parallaxeneffekts zurückzuführen. Die Abbildungen 6.21 bis 6.23 und Tabelle 6.4 fassen die mittleren Ortsauflösungen (und deren Standardabweichungen) der vier Methoden bezüglich der Rotation des Systems zusammen.

### 6.6.2 Bestimmung der Bildqualität

Zur visuellen Untersuchung der Bildqualität des MADPET-II mit den vier verfügbaren Rekonstruktionsmethoden wurden die Koinzidenz-Datenlisten (jeweils für 1, 10 und 20 Winkelschritte) eines Strukturphantoms, dargestellt in Abbildung 6.24, extrahiert. Es enthielt insgesamt 340 in sechs Segmenten angeordnete kreisförmige Quellen mit 1,0, 1,25, 1,50, 1,75, 2,00 und 2,25 mm Durchmesser. Der Abstand der Quellen in jedem Segment betrug das Doppelte der Quellendurchmesser. In Abbildung 6.24 ist erkennbar, dass annähernd der gesamte Systemdurchmesser von den Quellen des Strukturphantoms abgedeckt wurde. Als Maß für die Größe der rekonstruierten Bilder wurde in dieser Abbildung ein Kreis mit 66 mm Durchmesser um die Verteilung eingezeichnet. Die iterative Rekonstruktion der nicht-rotierten Daten erfolgte mit *Plm* (300 Iterationen) in 150 s und mit *Olm* (600 Iterationen, eine Untergruppe) in 500 s.

Die rekonstruierten *Olm* und *Plm* Bilder (ohne Rotation) sind in Abbildung 6.25 dargestellt. Es zeigte sich wie am MADPET die hervorragende Bildqualität der List-Mode Rekonstruktionsmethoden aufgrund der verwendeten exakten Systembeschreibung in den Monte Carlo Gewichten. Mit beiden Methoden, besonders jedoch mit *Plm*, konnten die 1,25-mm-Quellen weitgehend vollständig identifiziert werden. Die Quellen mit 1,5 mm Durchmesser wurden mit *Plm* klar erkenn- und voneinander trennbar rekonstruiert. Es wurden keine nennenswerten Unterschiede in den Intensitäten der rekonstruierten Quellen beobachtet. Die analytische Rekonstruktion dieser komplexen Verteilung ohne rotierendes System resultierte jedoch in einem unkenntlichen Bild (Abbildung 6.26). Hier zeigte sich der Einfluss der bereits in Abschnitt 6.5.1 beobachteten Abtastlücken in den Sinogrammen. Durch die Verwendung von 10 Winkelschritten (Abbildung 6.27) konnten diese Artefakte zwar deutlich reduziert, jedoch nicht vollständig beseitigt werden. Erst durch eine feinere Abtastung anhand der

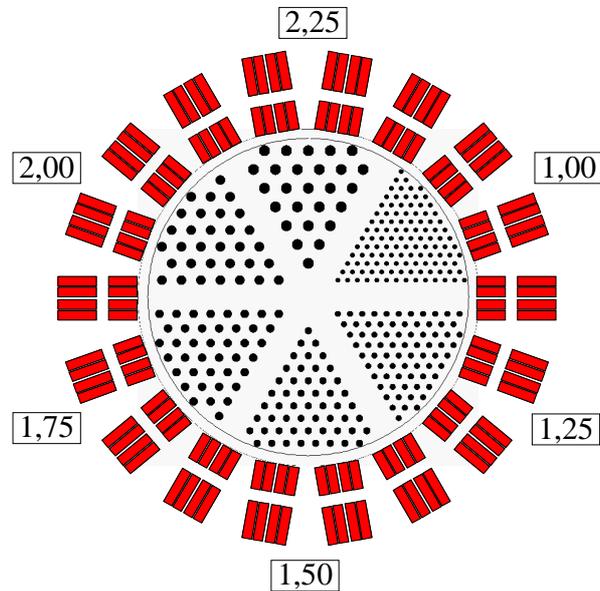


Abbildung 6.24: Geometrischer Aufbau des simulierten Strukturphantoms für den MADPET-II

Zu Abbildung 6.24: Die Durchmesser der Quellen in den sechs Segmenten sind in mm angegeben. Der eingezeichnete, die Quellenverteilung einhüllende, Kreis hat 66 mm Durchmesser und berührt die Außenränder der äußersten Quellen.

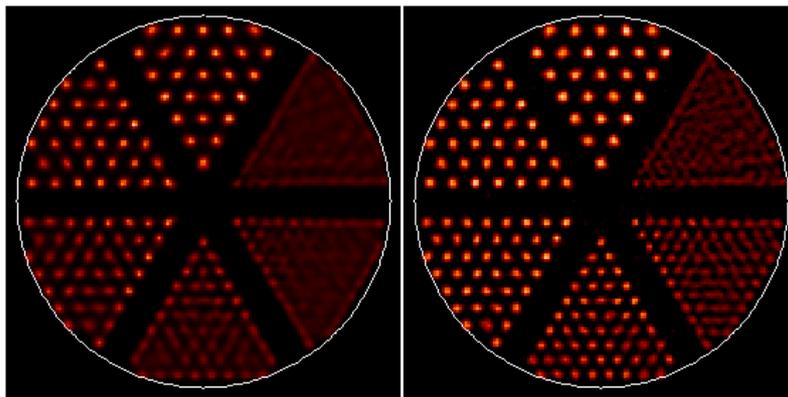


Abbildung 6.25: Statistische Rekonstruktion des Strukturphantoms für MADPET-II (ohne Rotation)

Zu Abbildung 6.25: Der eingezeichnete Kreis hat wie in Abbildung 6.24 66 mm Durchmesser und sollte gerade die Außenränder der äußersten Quellen berühren. Bild links) *Olm*; Bild rechts) *Plm*.

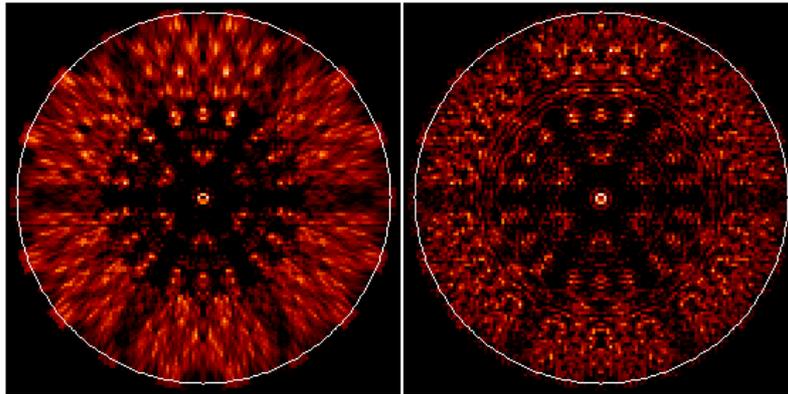


Abbildung 6.26: Analytische Rekonstruktion des Strukturphantoms für MADPET-II (ohne Rotation)

Zu Abbildung 6.26: Bild links) *Rcaf*; Bild rechts) *Rtri*.

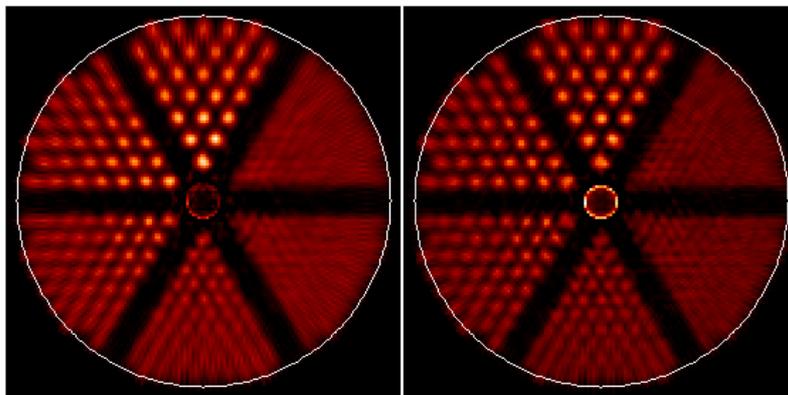


Abbildung 6.27: Analytische Rekonstruktion des Strukturphantoms für MADPET-II (10 Winkelschritte)

Zu Abbildung 6.27: Bild links) *Rcaf*; Bild rechts) *Rtri*.

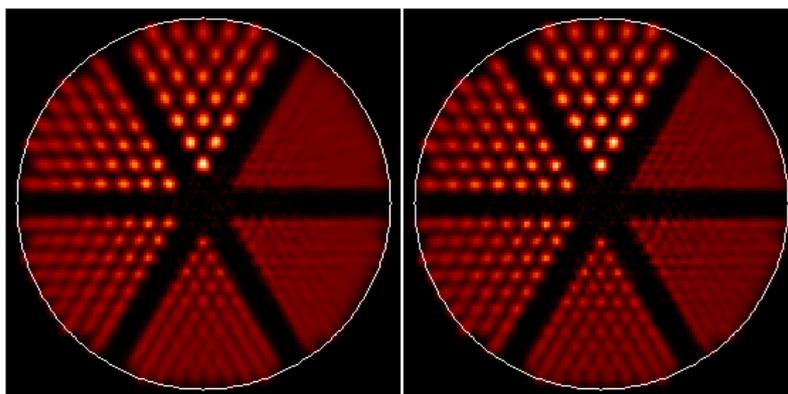


Abbildung 6.28: Analytische Rekonstruktion des Strukturphantoms für MADPET-II (20 Winkelschritte)

Zu Abbildung 6.28: Bild links) *Rcaf*; Bild rechts) *Rtri*.

Rotation des Systems in 20 Winkelschritten wurde eine ausreichende Abtastdichte erreicht. Diese erlaubte die analytische Rekonstruktion von qualitativ hochwertigen Bildern (Abbildung 6.28), ohne jedoch die im letzten Abschnitt festgestellte Ortsabhängigkeit der rekonstruierten Ortsauflösung zu beheben. Alle analytisch rekonstruierten Bilder zeigten wiederum den Einfluss der veränderlichen Ortsauflösung anhand des Partialvolumeneffekts, also der abnehmenden rekonstruierten Signalhöhe mit zunehmendem Abstand zum Zentrum.

## 6.7 Zusammenfassung von Kapitel 6

In diesem Kapitel wurde gezeigt, dass durch die Verwendung der Monte Carlo Gewichte eine erhebliche Verbesserung der 2D-Bildgebung für MADPET-II unter Berücksichtigung aller systemspezifischen Eigenschaften des Tomographen - wie z.B. der Doppellagen-Struktur des Detektorsystems - erzielt werden konnte. Insbesondere die Tatsache, dass durch diese statistische Rekonstruktion - in Übereinstimmung mit den in Abschnitt 3.3 auf Seite 50 aufgezeigten Vorteilen - keine Rotation des Systems nötig war, reduziert den Aufwand bei der späteren Messung mit MADPET-II. Dies könnte z.B. bei dynamischen Aufnahmen - also bei der Bestimmung von Änderungen der Traceranreicherung über die Zeit (Größenordnung der zeitlichen Abtastung: Sekunden bis Minuten) - einen hohen Stellenwert erlangen, da sich durch eine Rotation des Systems die Messbedingungen (jeder Winkelschritt resultiert in einem eigenen Abtastmuster) unerwünscht zeitlich verändern. Weiterhin eröffnet die Messung ohne Rotation die Möglichkeit zur Bildrekonstruktion während der Messung, da alle für die Rekonstruktion nötigen Blickwinkel zu jedem Zeitpunkt abgetastet werden. Dagegen würde die zeitgleiche Rekonstruktion für ein rotierendes System erst nach Vollendung des letzten Winkelschritts ein verzerrungsfreies und somit erkennbares Bild ergeben. Obwohl der Aufwand für die Simulation und die Berechnung der Gewichtematrix entsprechend hoch war, kann dies aufgrund der mittlerweile auch kostengünstig verfügbaren Rechenleistung nicht mehr als Nachteil für Monte Carlo basierte Methoden gewertet werden.

# Kapitel 7

## Vergleich mit den Methoden für andere Kleintier-Tomographen

In diesem Kapitel werden die Rekonstruktionsmethoden von zwei Kleintiertomographen anderer Arbeitsgruppen dargelegt. Es wird für jeden dieser Tomographen ein Vergleich mit den in dieser Arbeit entwickelten Methoden und den erzielten Resultaten angestellt. Tabelle 7.1 fasst die maßgebenden Eigenschaften der vier Kleintier-PET-Systeme und ihrer Rekonstruktionsmethoden zusammen.

### 7.1 MicroPET

Der Kleintiertomograph MicroPET (UCLA, Cal., USA) [21, 23] ist aus  $8 \times 8$  Kristallmatrizen (jeweils  $2 \times 2 \times 10 \text{ mm}^3$  Kristalle) aufgebaut. Die Detektoren sind in einem Ring mit 172 mm Durchmesser angeordnet. Qi et al. [22, 98, 99, 119, 120] etablierten für die 3D-Rekonstruktion mittels „maximum a-posteriori preconditioned conjugate gradient“ (3D-MAP-PCG) [68, 73, 139] auf Basis des (engl.) *shifted-poisson* Modells eine Gewichtematrix, die in unterschiedlich ermittelte, teils näherungsweise bestimmte, Anteile faktorisiert wurde:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{geom} \cdot \mathbf{A}_{sens} \cdot \mathbf{A}_{blur} \cdot \mathbf{A}_{positron}. \quad (7.1)$$

Die Rekonstruktion erfolgte nach der Umsortierung der gemessenen Koinzidenzen zum Sinogramm, die Zahl  $I$  der Messelemente gab somit die Zahl der Sinogrammelemente und nicht die Zahl der Detektorpaare an. Die Faktoren der Systemmatrix werden im Folgenden erläutert.

- $\mathbf{A}_{geom}$ , Dimension  $I \times J$ :  
Der geometrische Term enthielt als Näherung die Raumwinkelanteile der Voxel bezüglich der Frontflächen der Kristalle und wurde analytisch und somit rauschfrei berechnet.
- $\mathbf{A}_{blur}$ , Dimension  $I \times I$ :  
Die physikalischen Prozesse der Gammaquanten mit den Detektoren wurden hierin berücksichtigt. Dies geschah auf Basis eines Sinogramms, also nicht für jedes  $(i, j)$ -Element der Matrix sondern nur für jedes Sinogrammelement  $(i, *)$ .  $\mathbf{A}_{blur}$  beinhaltete die Streuung von Gammaquanten im Detektorsystem, jedoch nicht den Effekt der Abschirmung eines Detektors durch seine Nachbarkristalle (siehe Fall b der Abbildung 2.7 auf Seite 20) und wurde anhand von Monte Carlo Simulationen ermittelt. Diese Vorgehensweise entsprach dem Einsortieren der Antwortfunktionen aller Detektorpaare in ein

	MicroPET	Sherbrooke <sup>(1)</sup>	MADPET	MADPET-II
Algorithmus	3D-MAP-PCG	2D-MLEM	2D-PWLS-PCG	2D-PWLS-PCG
Kristallmaße [mm <sup>3</sup> ]	2 × 2 × 10	3 × 5 × 20	3,7 × 3,7 × 12	2 × 2 × 6(8)
Sinogramm	100 × 120	128 × 256	LM-Histogr.	LM-Histogr.
Bild	128 × 128	128 × 128	128 × 128	140 × 140
Bingröße [mm]	1,125	0,95	–	–
Pixelgröße [mm]	0,75	0,95	1,0	0,5
Axial. FOV [mm]	18,0	10,5	4,0	16,0
Schichten [1]	24	2	1	35
∅ System [mm]	172,0	310,0	86,0	71,1
∅ FOV [mm]	100,0	118,0	80,0	68,0
[%]	58,1	38,1	93,0	95,6
<b>A</b> [GB]	(3D) 280	(2D) 3	(2D) 1,1	(2D) 0,75
<b>A<sub>sparse</sub></b> [MB]	(3D) 60	(2D) 33	(2D) 86	(2D) 106
IA <sup>(2)</sup> [mm]	1,7	1,9	2,1	1,0
Auflösung, Zentrum [mm]	1,5	2,2	1,9	0,9
Auflösung, 80% FOV [mm]	2,8	2,2	2,0	1,1
Auflösung, 100% FOV [mm]	3,0	2,2	2,3	1,4

Tabelle 7.1: Rekonstruktionsmethoden anderer Kleintier-PET-Geräte

Zu Tabelle 7.1: Als Maß für die Güte und Homogenität der rekonstruierten Ortsauflösungen sind diese im Zentrum des Gesichtsfeldes (0 % FOV) und bei 80 sowie 100 % des Gesichtsfeldes (nicht des Systemdurchmessers) angegeben. Anmerkung <sup>(1)</sup>: Die Werte für die rekonstruierte Ortsauflösung des Sherbrooke-Animal-PET sind unter anderem aus Bildern in [136] abgeschätzt, da keine genaueren Angaben auffindbar waren. Anmerkung <sup>(2)</sup>: Mit IA ist die intrinsische Auflösung der Detektoren (optimal ausgerichtete Kristalle, z.B. im Zentrum des Detektorsystems) nach Angabe der Autoren dargestellt.

$I \times I$  Korrektursinogramm  $\mathbf{k}_{blur}$  und dessen Multiplikation mit der  $I \times I$  Einheitsmatrix, um  $\mathbf{A}_{blur}$  zu erhalten:

$$\mathbf{k}_{blur} = \mathcal{R} \{ \text{Antwortfunktionen} \}, \quad (7.2)$$

$$\mathbf{A}_{blur} = \mathbf{k}_{blur} \mathbb{1}. \quad (7.3)$$

- $\mathbf{A}_{sens}$ , Dimension  $I \times I$ :

Dieser Teil der Gewichtematrix beinhaltet wie in dieser Arbeit die gemessenen koinzidenten elektronischen Sensitivitäten der Detektorpaare, jedoch nach Umformung zum Sinogramm  $\mathbf{k}_{sens}$  und anschließender Multiplikation mit der  $I \times I$  Einheitsmatrix:

$$\mathbf{k}_{sens} = \mathcal{R} \{ \text{Detektorsensitivitäten} \}, \quad (7.4)$$

$$\mathbf{A}_{sens} = \mathbf{k}_{sens} \mathbb{1}. \quad (7.5)$$

- $\mathbf{A}_{positron}$ , Dimension  $J \times J$ :

Für eine mögliche Faltung des rekonstruierten Bildes zur Berücksichtigung der Positronenreichweite in der Bildrekonstruktion wurde diese Matrix vorgesehen. Derzeit wird diese Operation für MicroPET jedoch durch Setzen von  $\mathbf{A}_{positron} = \mathbb{1}$  abgeschaltet.

$\mathbf{A}_{blur}$  und  $\mathbf{A}_{sens}$ , aufgrund der Monte Carlo Simulation bzw. Messung mit Rauschanteilen behaftet, wurden hier über einen großen Teil der Gewichte jeweils für ein Sinogrammelement gemittelt, um den resultierenden Fehler zu reduzieren. Die Limitierung des Rauschanteils und des Gesichtsfeldes erlaubten eine effiziente Speicherung der 3D-Gewichtematrix (ca. 60 MByte), da sie dadurch eine große Anzahl von Null-Elementen enthielt.

Der Durchmesser des rekonstruierten Gesichtsfeldes betrug 58 % des Systemdurchmessers. Tabelle 7.1 zeigt die mit diesem Algorithmus erreichte Ortsauflösung. Innerhalb eines eingeschränkten Bereichs (80 % des FOV, also 47 % des Systemdurchmessers) resultierte eine homogene Auflösung, die sich jedoch mit zunehmendem Abstand zum Zentrum verschlechterte. Durch die aufwändige Faktorisierung der Systemmatrix gelang es den Autoren, die mit 2D- und 3D-FBP (Gefilterter Rückprojektion) erreichten Werte erheblich zu verbessern [22].

**Fazit 1 (MicroPET)** Aufgrund des großen Systemdurchmessers musste nur ein kleiner Bereich (58%) rekonstruiert werden. Dies reduzierte hauptsächlich den Parallaxeneffekt. Somit musste in der Rekonstruktion nur eine vergleichsweise geringe Korrektur für den Parallaxeneffekt erfolgen. Sowohl für MADPET als auch für MADPET-II mussten die Wechselwirkungen der Gammaquanten mit dem Detektorsystem aufgrund der größeren relativen Gesichtsfelddurchmesser (> 90 %) wesentlich genauer charakterisiert und in der Rekonstruktion berücksichtigt werden.

**Fazit 2 (MicroPET)** Das Rekonstruktionsproblem wurde in Abhängigkeit vom Sinogramm beschrieben. Im Gegensatz zu dem in dieser Arbeit verwendeten List-Mode Histogramm beinhaltete das Sinogramm geometrische Transformationen.

**Fazit 3 (MicroPET)** Die Information über die Wechselwirkungswahrscheinlichkeiten der Gammaquanten mit dem Detektorsystem wurde nur für jedes Sinogrammelement  $i$  anstatt wie bei MADPET und MADPET-II (siehe Abschnitte 4.5.6 und 6.4.5) für alle Elemente  $a(i, j)$  ermittelt.

**Fazit 4 (MicroPET)** Im Gegensatz zu MADPET und MADPET-II wurde für MicroPET keine Abschirmung der Detektoren durch ihre Nachbardetektoren bzw. durch andere Materialien berücksichtigt. Dies entspricht dem Fall b der Abbildung 2.7 auf Seite 20.

## 7.2 Sherbrooke-Animal-PET

Der Sherbrooke-Animal-PET (Universität de Sherbrooke, Québec, CAN) ist aus 2 axialen, symmetrischen Ringen von je 256 Kristallen ( $3 \times 5 \times 20 \text{ mm}^3$ ) aufgebaut [75, 76]. Selivanov et al. entwickelten eine iterative statistische 2D-Rekonstruktion [7, 136, 135] auf Basis des MLEM-Algorithmus, der eine angenäherte koinzidente Antwortfunktion des Detektorsystems berücksichtigte. Die Rekonstruktion erfolgte vom Sinogramm zum Bild,  $I$  stellt in diesem Abschnitt somit wie bei MicroPET die Anzahl der Sinogrammelemente dar. Die hierbei verwendete Systemmatrix wurde wie folgt faktorisiert:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{caf} \cdot \mathbf{A}_{sens}. \quad (7.6)$$

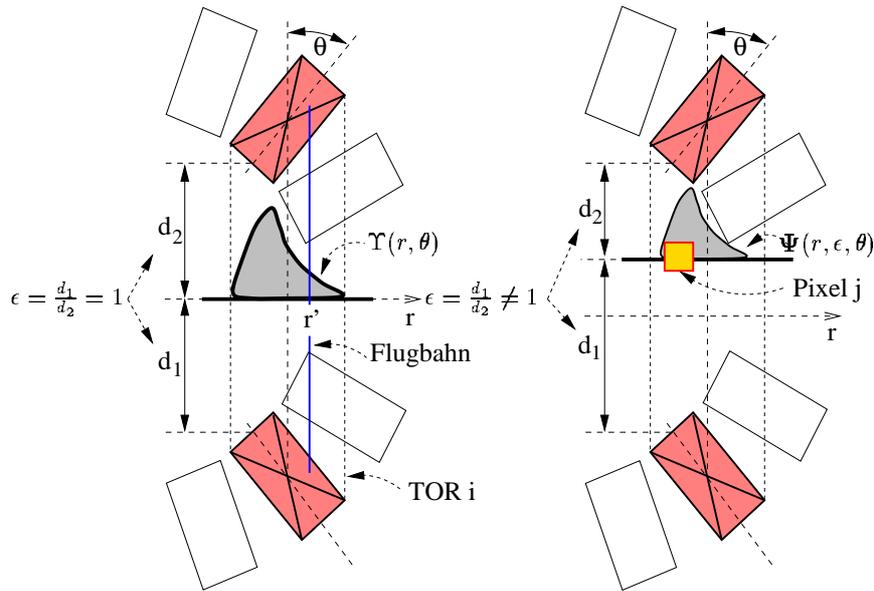


Abbildung 7.1: Parametrisierung und Verwendung der Antwortfunktionen für den Sherbrooke-Animal-PET

Zu Abbildung 7.1: Diese Darstellung ist nicht maßstabsgetreu. Bild Links) Die abstands-unabhängige Funktion  $\Upsilon(r, \theta)$  ist die exakt in der Mitte zwischen den Detektoren ( $\epsilon = 1$ ) liegende intrinsische Antwortfunktion. Sie wird für einen Neigungswinkel  $\theta = \theta(i)$  bestimmt und entlang der Koordinate  $r$  beschrieben. Bild Rechts) Für einen Bildpunkt  $j$  ergibt sich ein Intervall  $r + dr$ , in dem für das entsprechende Intervall  $\epsilon + d\epsilon$  alle abstandsabhängigen Antwortfunktionen  $\Psi(r, \epsilon, \theta)$  bestimmt und anschließend zur Berechnung des Gewichts  $a_{caf}(i, j)$  integriert werden müssen.  $\Psi(r, \epsilon, \theta)$  ist hier für ein  $\epsilon \neq 1$  dargestellt.

- $\mathbf{A}_{caf}$ , Dimension  $I \times J$  nach Integration:  
Die koinzidente Antwortfunktion  $\Psi$  wurde parameterisiert und analytisch in Abhängigkeit vom Ort  $(r, \epsilon)$  (radiale Koordinate  $r$ , relativer Abstand  $\epsilon = d_1/d_2$ , siehe Abbildung 7.1) und der LOR beschrieben. Ihre Berechnung erfolgte aus analytischen Betrachtungen der Wechselwirkungen der Gammaquanten mit dem Detektorsystem. Die Elemente des systemspezifischen Terms  $\mathbf{A}_{caf}$  wurden aus der Antwortfunktion  $\Psi$  durch deren Integration

$$a_{caf}(i, j) = \iint_{(r, \epsilon) \in j} \Psi(r, \epsilon, \theta(i)) dr d\epsilon \quad (7.7)$$

über die Fläche des Bildpunktes  $j$  für das entsprechende Sinogrammelement  $i$  berechnet.

- $\mathbf{A}_{sens}$ , Dimension  $I \times I$ :  
Eine Diagonalmatrix, deren Elemente die koinzidenten elektronischen Sensitivitäten der einzelnen Detektorpaare, abgebildet auf das Sinogramm, enthielten:

$$\mathbf{k}_{sens} = \mathcal{R} \{ \text{Detektorsensitivitäten} \}, \quad (7.8)$$

$$\mathbf{A}_{sens} = \mathbf{k}_{sens} \mathbb{1}. \quad (7.9)$$

Nach der Rekonstruktion wurde ein Glättung mit einem Gauß-Filter (2,2 mm FWHM) durchgeführt. Die Bestimmung der ortsabhängigen koinzidenten Antwortfunktionen erfolgte durch

analytisches Verfolgen einer eingeschränkten Menge von Flugbahnen der Gammaquanten. Hierfür wurden nur jene Flugbahnen verfolgt, die parallel zu der Verbindungslinie beider Detektoren, also der LOR, verliefen. Zur Berechnung eines Elements der Antwortfunktion wurde entlang dieser Wege anhand der Schwächungsfaktoren (Summe der Wechselwirkungsquerschnitte für Comptonstreuung und Photoeffekt) die Nachweiswahrscheinlichkeit für ein Detektorpaar berechnet. Hierbei wurde die Abschirmung eines Kristalls durch alle von der Trajektorie geschnittenen Materialien  $w$  (dies beinhaltet auch die Berücksichtigung der Nachbarkristalle) mit berücksichtigt:

$$p = \left(1 - e^{-\mu \cdot l}\right) \cdot e^{-\sum_w \mu_w \cdot l_w}. \quad (7.10)$$

Hierbei war  $l_w = l_w(x, \theta)$  die von  $x$  und  $\theta$  abhängige Weglänge der Trajektorie durch das Material  $w$  mit Schwächungskoeffizient  $\mu_w$ . Die Größen  $l = l(x, \theta)$  und  $\mu$  beschrieben den Weg durch den Kristall, für den die Berechnung erfolgte. Indem obige Gleichung für alle  $(x, \theta)$  berechnet wurde, konnte sie zu  $p = p(x, \theta)$  umgeformt und daraus die intrinsische Antwortfunktion  $\Upsilon$  ermittelt werden:

$$\Upsilon(x, \theta) = v \cdot p(x, \theta). \quad (7.11)$$

Der Faktor  $v$  entsprach einer Skalierung und repräsentierte die Wahrscheinlichkeit, dass die entsprechenden Wechselwirkungen eine ausreichend hohe Energie oberhalb der Energieschwelle in den Kristallen deponierten. Die vollständige Antwortfunktion  $\Psi$  wurde wie folgt parameterisiert [77]:

$$\Psi(r, \epsilon, \theta(i)) = \kappa(\epsilon, \theta) \cdot \int_{r' \in TOR_i} \Upsilon(r, \theta(i)) \Upsilon((r - r') \cdot \epsilon + r, \theta(i)) dr'. \quad (7.12)$$

Es war  $\epsilon = d_1/d_2$  der relative Abstand des in dem zu rekonstruierenden Pixel  $j$  liegenden Punktes zwischen den beiden Detektoren,  $\theta(i)$  war der Neigungswinkel der Detektoren zueinander (Winkel der Symmetrie-Längachsen der Kristalle mit der LOR  $i$ ). Die Funktion  $\Upsilon$  für ein Detektorpaar entsprach der, exakt in ihrer Mitte beobachtbaren, Antwortfunktion für  $\epsilon = 1$  (siehe Abbildung 7.1, links). Die Aufgliederung in abstandsabhängige und abstandsunabhängige Funktionsteile konnte aufgrund der in Abbildung 7.1 angedeuteten, symmetrischen Anordnung der Einzeldetektoren zu einem Ring (da im Gegensatz zu MicroPET, MADPET und MADPET-II keine Kristallmatrizen verwendet wurden) durchgeführt werden. In dieser speziellen geometrischen Anordnung konnte ein Detektorpaar, zu dem Sinogrammelement  $i$  gehörend, durch den Neigungswinkel  $\theta(i)$  in Hinsicht auf seinen abstandsunabhängigen Anteil der Antwortfunktion eindeutig beschrieben werden. Die Funktion  $\kappa$  war eine, vom Neigungswinkel und relativen Abstand abhängige, Normierungsfunktion.

Selivanov et al. konnten mit ihrer analytischen Berechnung der ortsabhängigen koinzidenten Antwortfunktion und deren Verwendung zur Berechnung der Gewichtematrix eine effiziente statistische Rekonstruktion für Sherbrooke-Animal-PET entwickeln. Es ist zu Bemerkem, dass hierbei keine aufwändigen Monte Carlo Simulationen nötig waren. Weiterhin ließen sich die Nicht-Null-Elemente der Matrix, aufgrund des Fehlens von Rauschanteilen durch die analytische Berechnung, in einer kleinen Datei (33 MByte) speichern. Die rekonstruierten Bilder eines Strukturphantoms in [136] legten den Schluss nahe, dass Selivanov et al. mit ihrer Methode eine homogene Ortsauflösung im gesamten Gesichtsfeld erreichten und diese möglicherweise etwas besser als die in Tabelle 7.1 abgeschätzte war.

**Fazit 5 (Sherbrooke-Animal-PET)** Aufgrund des großen Systemdurchmessers musste nur ein kleiner Bereich (38%, > 90 % bei MADPET und MADPET-II) rekonstruiert werden.

**Fazit 6 (Sherbrooke-Animal-PET)** Das Rekonstruktionsproblem wurde in Abhängigkeit vom Sinogramm beschrieben. Im Gegensatz zu dem in dieser Arbeit verwendeten List-Mode Histogramm beinhaltet das Sinogramm geometrische Transformationen.

**Fazit 7 (Sherbrooke-Animal-PET)** Die abstandsunabhängige Antwortfunktion  $\Upsilon$  wurde unter ähnlichen geometrischen Bedingungen ( $\epsilon = 1$ ) wie die für MADPET und MADPET-II erstellten Antwortfunktionen  $M^{CAF}$  berechnet. Sie basierte jedoch auf folgenden wesentlichen Einschränkungen: a) Einerseits wurden die Gammaflugbahnen analytisch verfolgt. b) Andererseits wurde dieser Vorgang nur für parallele, anstatt für alle isotropen, Trajektorien durchgeführt.

**Fazit 8 (Sherbrooke-Animal-PET)** Die Abschirmung der Detektoren durch ihre Nachbardetektoren bzw. andere Materialien wurde anhand von analytischen Berechnungen, jedoch nur für eine eingeschränkte Menge der Flugbahnen, berücksichtigt.

### 7.3 Vergleich mit MADPET und MADPET-II

Für MicroPET und Sherbrooke-Animal-PET wurden Methoden entwickelt, die eine statistische Bildrekonstruktion auf Basis von Sinogrammen durchführten. Die Verwendung von Sinogrammen schränkte jedoch das Potential der verwendeten Methoden ein, da zusätzlich die Überlagerungen der gemessenen Daten bei der Umformung zum Sinogramm zu berücksichtigen waren. Diese Überlagerungen waren zum Teil auf Parallaxeneffekte, aber auch auf die Tatsache zurückzuführen, dass sowohl die Bildelemente als auch die Sinogrammelemente wesentlich schmäler als die Breiten der Kristalle waren. Allerdings wurden für beide Tomographen, MicroPET und Sherbrooke-Animal-PET, im Vergleich zu MADPET und MADPET-II geringere Überlagerungen erwartet. Um dies zu verdeutlichen, wurde eine Abschätzung der relativen Parallaxeneffekte der vier Tomographen angestellt. Sie basierte auf der Annahme, dass alle Systeme aus Einzeldetektoren bestanden, die symmetrisch in gleichen Abständen zu einem Ring angeordnet waren. Abbildung 7.2 zeigt schematisch die geometrischen Bedingungen für diese Abschätzung. Es wurde die Breite der weitesten TOR mit

$$\begin{aligned} w &= w_1 + 2 \cdot w_2 & (7.13) \\ &= l \cdot \cos \alpha + b \cdot \sin \alpha \\ &= l \cdot \cos \alpha + b \cdot \sqrt{1 - [\cos \alpha]^2} \end{aligned}$$

ermittelt. Hierfür wurde, wie in Abbildung 7.2 verdeutlicht, die äußerste, noch vollständig das Gesichtsfeld überstreichende TOR gewählt. Der Winkel  $\alpha$  wurde unter Vernachlässigung der Kristallbreite  $b$  durch

$$\alpha \approx \arccos \left( \frac{f}{s+l} \right) \quad (7.14)$$

angenähert. Da für den Einfluss des Parallaxeneffektes auf das rekonstruierte Bild die relative Breite der TOR bezüglich der Kantenlänge der Bildelemente entscheidend ist, wurde diese aus den Gleichungen 7.13 und 7.14 mit

$$t = \frac{w}{p} \quad (7.15)$$

berechnet. Dieser Wert schätzte somit die Verbreiterung der Systemantwortfunktionen am Gesichtsfeldrand, in Einheiten der zur Anwendung kommenden Pixelgrößen, ab. Für einen anschaulicheren Vergleich der Parallaxeneffekte am Rande der rekonstruierten Gesichtsfelder der vier Tomographen wurden deren  $t$ -Werte in Relation zu dem Wert von MicroPET (kleinster Wert) ausgedrückt:

$$t' = \frac{t}{t_{\text{MicroPET}}}. \quad (7.16)$$

Tabelle 7.2 zeigt zusammenfassend diese Werte nebst den verwendeten Randbedingungen. Der abgeschätzte Parallaxeneffekt war aufgrund der größeren Systemdurchmesser, der daraus resultierenden kleineren relativen Gesichtsfelddurchmesser und den größeren Pixelkanten für MicroPET ( $t' = 1,0$ ) und Sherbrooke-Animal-PET ( $t' = 1,09$ ) deutlich geringer als für MADPET ( $t' = 1,22$ ) und MADPET-II ( $t' = 1,63$ ). Es waren also gegenüber dieser Arbeit für beide Tomographen, MicroPET und Sherbrooke-Animal-PET, konstruktionsbedingt reduzierte Parallaxeneffekte zu erwarten.

Der gewählte Ansatz, die physikalischen Prozesse beim Nachweis von Gammaquantenpaaren analytisch zu bestimmen, beinhaltete im Besonderen den Vorteil, dass die daraus resultierenden Gewichte nicht mit Rauschen behaftet waren. Dies hatte eine effiziente Speicherung der Nicht-Null-Elemente zur Folge. Weiterhin wurde auf diese Weise der Rechenaufwand für die Charakterisierung dieser Prozesse, im Vergleich zu der Verwendung von Monte Carlo Simulationen, erheblich reduziert. Jedoch erfolgten diese analytischen Berechnungen für beide Tomographen unter vereinfachten Annahmen. Die genaue Untersuchung des Einflusses dieser Einschränkungen auf die rekonstruierten Bilder wurde hier nicht durchgeführt.

Es ist jedoch zu erwarten, dass diese Annahmen mit zunehmendem relativen Gesichtsfelddurchmesser und abnehmender Pixelgröße nicht weiter gültig sind. In diesem Fall werden bei dem Ansatz von Qi et al. für MicroPET die Variationen der Antwortfunktion innerhalb der Gruppen ( $i, *$ ) überhand nehmen. Die Gruppierung muss dann in kleineren Teilen erfolgen, bis hin zur individuellen Bestimmung jedes einzelnen Matrixelements ( $i, j$ ). Für Selivanovs Ansatz ist zu erwarten, dass die Menge der möglichen schrägen Flugbahnen im Falle von stark gegeneinander gekippten Detektoren ( $\theta$  groß, da die zu rekonstruierenden Pixel nah am Detektorring liegen) zunimmt. Hier kann dann die Annahme, dass die Berechnung von parallelen Trajektorien ausreichend ist, nicht mehr akzeptiert werden.

Bei den in dieser Arbeit vorgestellten Methoden für MADPET und MADPET-II wurden keine derartigen Einschränkungen vorgenommen. Durch Verwenden der Monte Carlo Gewichtematrix wurde ohne Auflösungsverlust oder Verzerrungen die statistische Rekonstruktion einer Bildmatrix ermöglicht, die annähernd den gesamten Systemdurchmesser ausfüllte.

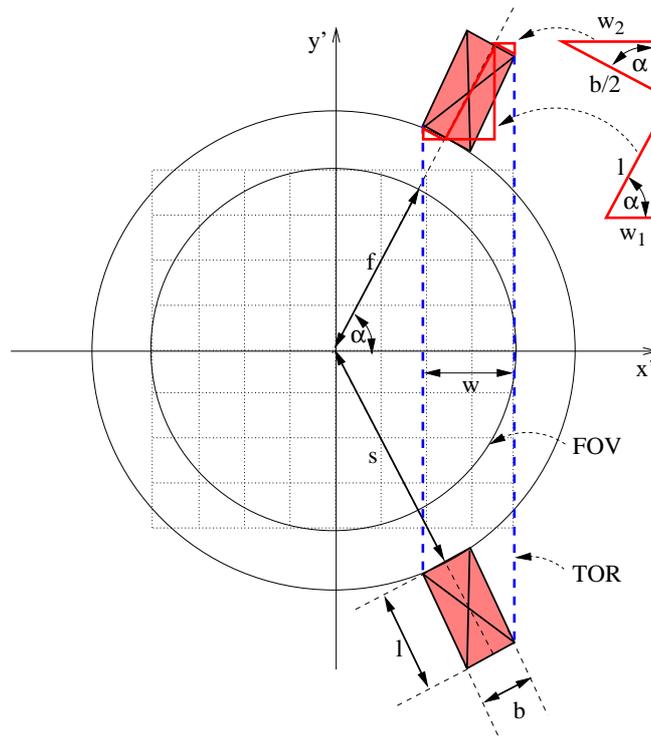


Abbildung 7.2: Abschätzung der Stärke der Parallaxeneffekte

Zu Abbildung 7.2: Es wurde für ein symmetrisches Ringsystem abgeschätzt, wieviele Bildpunkte die breiteste TOR überstreicht. Die Breite dieser äußersten, das Gesichtsfeld noch vollständig überstreichenden, TOR betrug in dieser Skizze ungefähr  $t = 2$  Pixel. Die Darstellung ist nicht maßstabsgetreu.

			MicroPET	Sherbrooke	MADPET	MADPET-II
Radius System	[mm]	$s$	86,00	155,00	43,00	35,55
Radius FOV	[mm]	$f$	50,00	59,00	40,00	34,00
Kristalllänge <sup>(1)</sup>	[mm]	$l$	10,00	20,00	12,00	8,00
Kristallbreite	[mm]	$b$	2,00	3,00	3,70	2,00
Pixelgröße	[mm]	$p$	0,75	0,95	1,00	0,50
TOR Breite <sup>(2)</sup>	[mm]	$w$	6,92	9,57	11,27	7,50
TOR Breite <sup>(3)</sup>	[pix]	$t$	9,22	10,07	11,27	14,99
<b>Rel. Parallaxeff.</b> <sup>(4)</sup>		$t'$	1,00	1,09	1,22	1,63

Tabelle 7.2: Abschätzung der Stärke der Parallaxeneffekte

Zu Tabelle 7.2: Vereinfacht wurden für alle Topmographen symmetrische Ringstrukturen (keine Detektorblöcke) angenommen. Anmerkung (1): Für MADPET-II wurde die Länge der Kristalle in der hinteren Lage verwendet. Anmerkung (2): Angegeben ist die Breite der äußersten, und somit weitesten, noch vollständig im Gesichtsfeld liegenden TOR. Anmerkung (3): Die Anzahl der Pixel, die von den äußersten TORs überlappt werden. Anmerkung (4): Wie (3), jedoch im Verhältnis zum besten Wert (MicroPET).

# Kapitel 8

## Diskussion

Ziel dieser Arbeit war die Entwicklung einer verbesserten tomographischen Bildrekonstruktion für zwei Kleintier-Positronen-Emissions-Tomographen, MADPET und MADPET-II. Sie sollte die systemspezifischen Nachweiseigenschaften dieser Tomographen berücksichtigen, um deren Potential für die hochauflösende und hochsensitive PET mit uneingeschränkter Bildqualität zu nutzen. Eine wichtige Bedingung für die vollständige Abbildung von Mäusen und Ratten war eine ortsunabhängige und hohe Ortsauflösung innerhalb eines großen rekonstruierbaren Gesichtsfeldes.

Eine Voraussetzung für den Betrieb von MADPET, mit dem bereits intensiv Messungen von Phantomen und lebenden Kleintieren durchgeführt wurden, war die Gewährleistung einer konstanten Messbereitschaft für die Dauer einer PET-Untersuchung. Dies gelang durch die Lastverteilung der bei der Messung anfallenden Aufgaben auf mehrere Rechner mittels einer parallelen virtuellen Maschine (PVM) und die sorgfältige Berechnung und Korrektur der dabei anfallenden Totzeiten des Messrechners [10, 11, 118]. Die Forderung nach einer hohen Auflösung in einem großen Teil des Systemdurchmessers konnte unter Berücksichtigung von Monte Carlo Simulationen des Tomographen in den statistischen Rekonstruktionsalgorithmen erfüllt werden [12, 13, 14]. Die Rechenzeit für die drei Monte Carlo Simulationsdurchgänge betrug auf einem Einzelprozessorrechner insgesamt 12 Tage (siehe Anhang B und C). Da MADPET aus verhältnismäßig wenig Einzeldetektoren, angeordnet in zwei Blöcken, bestand und das System zur Erhöhung der Abtastung in 30 Winkelschritten rotiert werden musste, war die Zahl der in dieser Simulation nachgewiesenen Koinzidenzen ( $0,1 \cdot 10^9$ ) ausreichend, um alle Matrixelemente für die statistische Rekonstruktion zu ermitteln. Hierbei konnten die zu getrennten Winkelschritten gehörenden Matrixelemente unter Verwendung der selben simulierten Koinzidenzen berechnet werden, was die 30-malige Nutzung der Simulation erlaubte (Gewinnfaktor = 30). Insgesamt konnten damit  $3,1 \cdot 10^9$  Koinzidenzen für die Berechnung der Matrix untersucht werden,  $3,0 \cdot 10^9$  davon wurden nach Prüfung akzeptiert. Die in dieser Arbeit beschriebenen Entwicklungen des PVM-Messsystems, der Vorverarbeitung und der iterativen statistischen Rekonstruktion unter Verwendung der Monte Carlo Gewichtematrix werden zum Teil seit Anfang 1999 bei allen am MADPET durchgeführten Phantom- und Kleintiermessungen eingesetzt.

Für MADPET-II konnten noch keine Messprogramme entwickelt werden, da sowohl das Detektor- als auch das Elektroniksystem noch nicht vollständig aufgebaut waren. Es wurden jedoch wiederum die Elemente der Gewichtematrix für die statistische Rekonstruktion aus Monte Carlo Simulationen berechnet. Die hierfür benötigten 45 Simulationsdurchgänge

erforderten insgesamt 45 Tage Rechenzeit auf einem Standard PC System (siehe Anhang B und C). Die für MADPET-II simulierten Koinzidenzen konnten unter Berücksichtigung der Symmetrien im Detektorsystem 18-malig verwendet werden (Gewinnfaktor = 18).

Diese Methoden resultierten bei beiden Tomographen in rekonstruierten Ortsauflösungen, die nahe bei den intrinsischen Auflösungen der Detektorsysteme lagen. Für diese hochauflösende Bildrekonstruktion wurde kein Verlust an Bildqualität, z.B. anhand von Artefakten aufgrund mangelhafter tomographischer Abtastung, beobachtet. Vielmehr waren die Abbildungseigenschaften über annähernd den gesamten Systemdurchmesser weitgehend konstant. Dies stellt eine deutliche Verbesserung gegenüber anderen Rekonstruktionsmethoden dar. In klinischen Systemen [1, 151] wird meist nur ein kleiner Bereich (50-60 %) des Systemdurchmessers rekonstruiert, wobei sich die Abbildungseigenschaften - im Besonderen die rekonstruierte Ortsauflösung - in diesem Bereich stark verändern. Auch aufwändigere Methoden für Kleintier-Tomographen anderer Arbeitsgruppen, MicroPET und Sherbrooke-Animal-PET (siehe Kapitel 7), wurden lediglich für die Rekonstruktion eines kleinen Gesichtsfeldes optimiert. Diese Methoden beinhalteten die Berücksichtigung der Wechselwirkungen der Gammaquanten mit den Detektorsystemen. Für deren Charakterisierung wurden hauptsächlich analytische Methoden unter vereinfachenden Annahmen angewendet. Dadurch konnte der nötige Rechenaufwand reduziert und gute Abbildungseigenschaften erreicht werden. Eine Abschätzung des Parallaxeneffekts für MADPET, MADPET-II, MicroPET und Sherbrooke-Animal-PET zeigte, dass die in dieser Arbeit entwickelten Methoden mit einem um bis zu 63 % höheren Parallaxeneffekt konfrontiert waren. Diese Abschätzung zeigte, dass die von Qi et al. [22, 98, 99, 119, 120] für MicroPET und von Selivanov et al. [7, 136, 135] für Sherbrooke-Animal-PET entwickelten Methoden für MADPET und besonders für MADPET-II nicht anwendbar waren.

Die Verwendung von Monte Carlo Simulationen für die Entwicklung von Rekonstruktionsmethoden, die das Nachweisverhalten der Tomographen mit berücksichtigen, wird derzeit nur in wenigen Fällen durchgeführt. Der in dieser Arbeit gewählte Ansatz, alle Matrixelemente für die statistische Rekonstruktion aus Monte Carlo Simulationen unter Berücksichtigung der dominanten Wechselwirkungen zu berechnen, wurde erstmals 1989 von Hoffman et al. [49] vorgeschlagen, jedoch niemals für die Bildrekonstruktion eines hochauflösenden Systems angewendet. In dieser Arbeit konnte gezeigt werden, dass dieser Ansatz ohne die Verwendung teurer Hochleistungsrechner durchführbar war und zu hervorragenden Resultaten führte.

Hierbei wurde auf einen der großen Vorteile der Monte Carlo Methode zurückgegriffen: einzelne Prozesse konnten abgeschaltet werden, um die verbleibenden Wechselwirkungen genauer zu studieren. Besonders für die Berechnung der Gewichtsmatrizen war eine große Anzahl von nachgewiesenen Koinzidenzen für jede Detektorpaar-zu-Pixel Kombination nötig. Um die geforderte Zahl an simulierten Gammaquantenpaaren, die resultierenden Datenmengen und die in der Analyse zu beachtenden Prozessstypen einzugrenzen, konnten einige untergeordnete physikalische Prozesse in den hier für MADPET und MADPET-II durchgeführten Monte Carlo Simulationen nicht behandelt werden:

- die Positronenreichweite,
- die Abweichungen der Gammaquantenflugbahnen von  $180^\circ$ ,
- die Inhomogenitäten der Detektoren,
- die Streuung der Gammaquanten im Objekt und

- die Energiedepositionen in mehreren Kristallelementen durch ein einzelnes Gammaquant.

Die Positronenreichweite kann, insbesondere bei der PET mit den  $\beta^+$ -aktiven Nukliden  $^{11}\text{C}$ ,  $^{13}\text{N}$  und vor allem  $^{15}\text{O}$  (siehe Tabelle 2.1 auf Seite 8), bei hochauflösenden Systemen einen zunehmenden Fehler in der Systemmatrix verursachen [44, 80]. Eine vielversprechende Lösung ist der Ansatz von Qi et al. (siehe Kapitel 7). Darin wird die Positronenreichweite in Form einer, für das zu verwendende Nuklid berechneten,  $J \times J$  Diagonalmatrix  $\mathbf{A}_{positron}$  vor der Rekonstruktion mit der systemspezifischen Systemmatrix multipliziert, um die Rekonstruktion von Daten, die mit diesem Nuklid gemessen wurden, zu verbessern.

Die Abweichung von der Kollinearität der Flugbahnen beider Vernichtungsquanten hingegen verursacht bei kleinen Systemdurchmessern keinen relevanten Fehler. Kleine Detektorabstände resultieren in einer geringen örtlichen Abweichung der Gammaquanten beim Eintreffen auf das Detektorsystem [44, 80].

In dieser Arbeit wurden die Nachweiseigenschaften der Einzeldetektoren durch das Messen der koinzidenten Sensitivitäten von Detektorpaaren bestimmt. Die Unterschiede in Höhe und Breite der elektrischen Signale, resultierend in der Position und Breite des Photopeaks im Energiespektrum jedes Einzeldetektors (und der daraus berechneten Energieauflösung), wurden hier innerhalb der Vorverarbeitung berücksichtigt. Das Verwenden solcher Informationen in Monte Carlo Simulationen ist generell denkbar. Die vom Photosensor registrierte Lichtmenge kann vom Nachweisort des Gammaquants innerhalb des Kristalls abhängen. Hierbei spielen z.B. Unterschiede in der Oberflächenstruktur und Verunreinigungen im Kristall eine Rolle. Der Lichttransport in den Kristallen, insbesondere dessen Unterschiede von Kristall zu Kristall, wurde in dieser Arbeit nicht untersucht.

Die Streuung der Gammaquanten im Objekt sollte jedoch speziell bei zukünftigen hochauflösenden Kleintiertomographen behandelt werden. Je kleiner der Durchmesser eines Tomographen, um so größer wird die relative Objektgröße und um so wahrscheinlicher wird der Nachweis von im Objekt gestreuten Gammaquanten. Die damit einhergehende Fehlinterpretation der Quantenflugbahnen (siehe Abbildung 2.6 auf Seite 16, Fall 4) resultiert in einer verschlechterten Ortsauflösung und in einem erhöhten Untergrund. Der erste Schritt zur Behandlung dieser gestreuten Quanten ist deren Identifizierung im Messdatensatz anhand ihrer Energiedeposition. In dieser Arbeit wurde der Einfluss der Streuung im Objekt durch die Wahl einer hohen Energieschwelle (450 keV) unterdrückt. Bei einer niedrigeren Energieschwelle müssen die gestreuten Gammaquanten für eine Streukorrektur identifiziert werden. Hierfür bestehen bereits Methoden [107, 149], die aus dem rekonstruierten Volumen einen Messdatensatz, der nur gestreute Gammaquanten enthält, iterativ ermitteln und diesen für die Korrektur in der erneut auszuführenden Rekonstruktion anwenden. De Jong et al. [27] entwickelten für die SPECT eine fortgeschrittenere Methode, die in der statistischen Rekonstruktion mittels eines effizienten (da schnellen) Monte Carlo Algorithmus den Vorwärtsprojektionsschritt ( $\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{A}\mathbf{f}^k$ ) durch eine Monte Carlo Vorwärtsprojektion ersetzte. Dadurch wurde bei jeder Vorwärtsprojektion in jedem Iterationsschritt  $k$  auch die Streuung von Gammaquanten und deren Nachweis in falschen Detektoren, die nicht auf der ursprünglichen Trajektorie lagen, ermöglicht. Dies bedeutete eine verbesserte Behandlung der bei der Messung ablaufenden physikalischen Prozesse innerhalb der statistischen Bildrekonstruktion, und resultierte in einer Streukorrektur, ohne die Zahl der nutzbaren Koinzidenzen durch Subtraktion der im Objekt gestreuten Koinzidenzen zu reduzieren. Wie diese benötigen die meisten anderen Methoden zur Streukorrektur Informationen über die Struktur des Objekts, um die Streuzentren zu ermitteln. Diese Informationen werden aus CT- oder Transmissionsmessungen gewonnen,

die in erster Linie für die Korrektur der Schwächung durchgeführt werden. Die Schwächung wiederum verursacht eine Reduktion der Zahl der gemessenen Koinzidenzen im Gegensatz zu der Fehlpositionierung, verursacht durch Streuung. Für MADPET-II wird längerfristig die Angliederung an ein Kleintier-CT-Gerät angestrebt. Mit diesem können anatomische Informationen sowohl für eine Schwächungskorrektur als auch für eine Streukorrektur gemessen werden.

Besonders bei MADPET-II, der eine Vielzahl von unterschiedlichen Messprotokollen - vor allem dynamische Messungen - erlauben soll, ist die Sensitivität von entscheidender Bedeutung. Es können zwei wesentliche Maßnahmen genannt werden, um die Sensitivität des Tomographen - also die Zahl der nutzbaren Wechselwirkungen - zu erhöhen und somit die nötige Messzeit zu reduzieren.

Die naheliegende Maßnahme ist, Wechselwirkungen mit geringeren Energiedepositionen zu akzeptieren und zu verarbeiten. In dieser Arbeit wurde für alle Methoden eine untere Energieschwelle von 450 keV verwendet. Rafecas et al. [123, 126] konnten innerhalb dieses Projekts zeigen, dass das Senken der Schwelle auf 100 keV eine mehr als vierfache Sensitivitätssteigerung bewirkt. Voraussetzung hierbei ist jedoch, dass auch die Streuung der Gammaquanten im Detektorsystem behandelt wird [24, 137], da nahezu ein Drittel der dabei registrierten Quanten Mehrfachwechselwirkungen im Detektorsystem erfahren. Dies erfordert die Identifikation und Charakterisierung von Wechselwirkungen der Gammaquanten mit mehreren Detektoren durch die Daten verarbeitenden Programme. Ein Ansatz hierfür sind Methoden, die im Messdatensatz, der dynamischen Datenliste, diese Wechselwirkungen finden und bei der Erstellung der List-Mode Histogramme auf mehrere LORs verteilen bzw. die korrekte LOR ermitteln [24, 123, 126, 137]. Genauer ist jedoch die Berücksichtigung dieser Mehrfachstreuungen in der Gewichtematrix. Die Monte Carlo Simulationsprogramme für MADPET-II müssten hierfür modifiziert und erneut durchgeführt werden, da in den bisherigen Simulationen nur Energiedepositionen größer 300 keV akzeptiert und die Speicherung der Mehrfachgestreuten unterbunden wurden.

Die zweite, an dieser Stelle anzusprechende Maßnahme zur Sensitivitätssteigerung ist die Berücksichtigung von allen registrierten Koinzidenzen, auch von jenen, die mit zwei zu unterschiedlichen Detektorringen gehörenden Kristallen gemessen wurden. Die in dieser Arbeit entwickelten Systemmatrizen dienen jedoch der 2D-Rekonstruktion von Schichtbildern aus 2D-Messdaten. Die Rekonstruktion dreidimensionaler Objektverteilungen wurde durch die Messung und Rekonstruktion einzelner Schichten und das Zusammensetzen der Schichtbilder zu einem Volumendatensatz durchgeführt (siehe Kapitel 5). Dies war für den 2D-Tomographen MADPET die einzige Möglichkeit, Volumendaten zu erfassen. MADPET-II wird aus acht Detektorringen bestehen, mit denen zur Erhöhung der Sensitivität im 3D-Modus gemessen werden kann. Während die Suche von Koinzidenzen in der Datenliste für 2D- und 3D-Daten keine zusätzlichen Maßnahmen erfordert, verlangt eine 3D-Bildrekonstruktion spezielle Methoden, die in zwei Klassen unterteilt werden können.

Einerseits können die in 3D gemessenen Daten zu 2D-Datensätzen umgeformt und anschließend mit 2D-Rekonstruktionsalgorithmen rekonstruiert werden. Die Umformung erfolgt, in dem die zwischen Detektoren aus unterschiedlichen Ringen registrierten Daten einer einzelnen Schicht in der Mitte zwischen beiden beteiligten Detektorringen zugeordnet [26, 30] oder auf mehrere Schichten verteilt werden. Das Verteilen auf mehrere Schichten kann entweder mit der (engl.) *multi slice rebinning* Technik [82] oder der Fourieranalyse der 3D-Daten mittels der (engl.) *fourier rebinning* Methode [25, 28, 30, 85] erfolgen. Um jedoch weiterhin die

exakte Übereinstimmung der MADPET-II 2D-Gewichtematrix mit dem Messprozess (also der Abbildung der 3D-Koinzidenzdaten zu 2D-Schichtdaten) zu gewährleisten, müssten die in diesen Umformungsprozessen angewendeten geometrischen Transformationen mit in die Gewichtematrix integriert werden.

Vielversprechender ist jedoch der Ansatz, die in 3D gemessenen Daten ohne geometrische Umformung zu rekonstruieren. Bereits von anderen Gruppen entwickelte 3D-Rekonstruktionsmethoden zeigten gegenüber der Umformung zu 2D-Messdaten und der anschließenden 2D-Rekonstruktion überlegene Resultate bezüglich ihrer Auflösung und Bildqualität [99, 119, 120, 143]. Eine 3D-Rekonstruktion für MADPET-II sollte auf der Rekonstruktion eines unverarbeiteten 3D-List-Mode Histogramms - im Gegensatz zu 3D-Sinogrammen nach geometrischer Transformation - basieren. Die hierfür notwendige 3D-Gewichtematrix für MADPET-II wird wiederum eine Modifikation der Monte Carlo Simulationsprogramme für das Simulieren von 3D-Vertizes und 3D-Trajektorien und den Nachweis in allen (3D) LORs erfordern. Für die 3D-Rekonstruktion des MADPET-II mit 35 Schichten (0,5 mm axiale Schichtdicke, resultierend in kubischen Voxeln) steigt damit die Zahl  $J$  der zu rekonstruierenden Voxel auf bis zu  $35 \times 140 \times 140 = 686000$ , die Zahl  $I$  der Messelemente in einem 3D-List-Mode Histogramm auf bis zu  $1152 \times 1152 = 1327104$ . Daraus würde eine vollständige 3D-Systemmatrix  $\mathbf{A}$  mit bis zu  $9 \cdot 10^{11}$  Matrixelementen resultieren. Bei einer Speichertiefe von 2 Byte pro Matrixelement würde diese Matrix mehr als drei Terabyte Arbeitsspeicher für ihre Berechnung erfordern. Eine Abschätzung der Anzahl von Nicht-Null-Elementen der endgültigen, für die 3D-Rekonstruktion im komprimierten ASPIRE-Sparse-Format gespeicherten Matrix wurde hierbei jedoch außer Acht gelassen. Es ist zu erwarten, dass die tatsächliche 3D-Gewichtematrix wesentlich kleiner sein wird, da ein Großteil der Matrixelemente den Wert Null enthalten wird und somit keiner Speicherung bedarf.

Es lassen sich weitere Ansätze finden, die während der MADPET-II 3D-Rekonstruktion im Arbeitsspeicher zu haltende Systemmatrix zu verkleinern. Ein denkbares Mittel ist das Ausnützen von Symmetrien im 3D-Rekonstruktionsproblem. Dies setzt jedoch voraus, dass der verwendete Rekonstruktionsalgorithmus, im Speziellen dessen Implementierung in dem verwendeten Rekonstruktionsprogramm, solch eine für den MADPET-II reduzierte Systemmatrix unterstützt. Eine von Fessler et al. [32] angekündigte Weiterentwicklung der ASPIRE Rekonstruktionsalgorithmen wird voraussichtlich diese Möglichkeit beinhalten.

Eine weitere anstehende Aufgabe ist die Rekonstruktion der MADPET-II Daten während der Messung. Das Ziel hierbei ist, dass jede Koinzidenz unmittelbar nach ihrer Registrierung an einen Rekonstruktionsalgorithmus weitergeleitet wird, der diese dann zum Aktualisieren des während der Messung dargestellten Bildes verwendet. Somit kann zeitgleich mit der Messung ein sich stetig verbesserndes Bild beobachtet werden. Dies kann vor allem bei der Positionierung der Tiere im Tomographen und bei der Festlegung der optimalen Messzeit helfen. Letzteres ist besonders wichtig bei Messungen, die mehrere Tischpositionen beinhalten, wie z.B. die Aufnahme von Ganzkörperdaten (wie in Abbildung 2.1 auf Seite 9 von einem Menschen dargestellt). Aufgrund des angestrebten Konzepts, mehrere Rechner über PVM zu einem Messsystem zu verbinden, ist die Lastverteilung der dabei anfallenden Aufgaben und somit eine durch die Rekonstruktion ungestörte Messung gewährleistet.

Es gibt zwei Klassen von Rekonstruktionsmethoden, die hierfür in Frage kommen. Die so genannten List-Mode-Algorithmen verwenden Datenlisten anstatt Sinogrammen für die Rekonstruktion. Sie basieren auf einem modifizierten OSEM Algorithmus, der als Datenuntergruppen Gruppen von einzelnen Koinzidenzen anstatt Gruppen von Sinogrammelementen

(und den darin histogrammierten Koinzidenzen) verwendet. Die zweite Klasse benützt die (engl.) *singular-value decomposition* (kurz: SVD) der Systemmatrix, um diese in invertierbare Anteile zu zerlegen. Nachdem man das lineare Gleichungssystem auf diese Weise invertiert hat, kann eine gemessene Koinzidenz direkt zur Verbesserung der aktuellen Lösung in den Algorithmus gegeben werden.

Die in dieser Arbeit entwickelten Methoden für die Verarbeitung und Rekonstruktion der Daten von MADPET und MADPET-II zeigten hervorragende Resultate bezüglich einer unveränderlichen Ortsauflösung zusammen mit einer hohen Bildqualität in einem großen Gesichtsfeld. Durch die Verwendung von Monte Carlo Simulationen konnten die bildgebenden Prozesse genau beschrieben und die Nutzbarkeit der Monte Carlo Methode für die tomographische Bildrekonstruktion aufgezeigt werden. Abgesehen von der Mehrfachstreuung der Gammaquanten im Detektorsystem berücksichtigten die hier entwickelten Systemmatrizen die wichtigsten Wechselwirkungen von Gammaquanten mit dem Detektorsystem. Es wurde eine hervorragende Übereinstimmung der Resultate für simulierte und gemessene Daten des MADPET gefunden. Diese Übereinstimmung war eine Bestätigung des Ansatzes, durch Monte Carlo Gewichtematrizen die Bildrekonstruktion für gemessene Daten von hochauflösenden Kleintiertomographen zu verbessern. Somit rechtfertigte sie die Untersuchungen der Monte Carlo Simulationen für MADPET-II und die Berechnung und Anwendung der Monte Carlo Gewichtematrix für diesen Tomographen.

Die nächsten Schritte für eine weitere Verbesserung dieser Methoden betreffen die Behandlung der physikalischen Prozesse im Objekt, sowohl die Positronenreichweite als auch die Streuung und Absorption der Gammaquanten. Weiterhin wird sich verstärkt die Entwicklung einer vollständigen 3D-Rekonstruktion unter Verwendung einer Monte Carlo 3D-Gewichtematrix, basierend auf dieser Arbeit, anschließen.

# Anhang A

## Bezeichnungen und Größenordnungen

### A.1 Generelle Nomenklatur in mathematischen Ausdrücken

Für die übersichtlichere Darstellung der zu beschreibenden Algorithmen werden diese teilweise in Vektor- und Matrixschreibweise, an Stelle der Komponentenschreibweise, angegeben. Hierfür werden folgende Vektor- und Matrixoperationen verwendet (hier als Beispiel im  $\mathbb{R}^3$ ):

- **Komponentenweise Multiplikation bzw. Division**

Zwei Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  identischer Dimensionierung werden komponentenweise multipliziert bzw. dividiert, das Resultat ist wiederum ein Vektor:

$$\mathbf{a} \odot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 \\ a_2 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} a_1/b_1 \\ a_2/b_2 \\ a_3/b_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

- **Skalarprodukt**

Die übliche Beziehung zum Bilden des Skalarprodukts zweier Vektoren,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3, \quad (\text{A.2})$$

wird in dieser Arbeit verwendet. Sie wird im Allgemeinen auch mit

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \quad (\text{A.3})$$

angegeben.

- **Produkt einer Matrix mit einem Vektor**

Die übliche Beziehung zum Bilden des Produkts aus Matrix und Vektor gilt weiterhin (hier  $2 \times 3$  Matrix mit  $3 \times 1$  Vektor ergibt  $2 \times 1$  Matrix):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + a_{13}b_3 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + a_{23}b_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Größe	Schriftart
Skalare Werte	Arabische Buchstaben (klein), Bsp.: $j$
Vektoren	Arabische Buchstaben (klein, fett gedruckt), Bsp.: $\mathbf{f}$
Matrizen	Arabische Buchstaben (groß, fett gedruckt), Bsp.: $\mathbf{A}$
Vektor- und Matrixelemente	Indizierte arabische Buchstaben (klein), Bsp.: $f(j)$ bzw. $a(i, j)$
Winkel	Griechische Buchstaben, Bsp.: $\phi$

Tabelle A.1: Richtlinien für die Darstellung mathematischer Größen

Bezeichner	Beschreibung
$q$	Skalare Größe
$q \rightarrow q + a$	Rechenvorschrift: Das Verändern einer Größe $q$ (hier Addition der skalaren Größe $a$ ), da die Schreibweise $q = q + a$ mathematisch nicht korrekt ist
$\hat{q}$ , oft auch $Q$	Maximaler Wert der skalaren Größe $q$ . Bei Indizes wird in der Regel der entsprechende Großbuchstabe verwendet: $q \in [1, Q] \equiv q \in [1, \hat{q}]$
$\max_r \{q(r)\}$ , bzw. $\max_r \{\mathbf{q}\}$	Maximaler Wert der mehrdimensionalen Größe $\mathbf{q}$ bezüglich seines Index $r$
$q_r$ oder $q^r$	Unterscheidung der skalaren Größe $q$ für unterschiedliche Bedingungen $r$ , z.B. werden $t_1$ und $t_2$ für die Messzeiten des ersten und zweiten Winkelschritts verwendet
$\mathbf{q}$	mehrdimensionale Größe
$\mathbf{q}(*, r)$	Der vollständige Spaltenvektor der $r$ -ten Spalte der Matrix $\mathbf{q}$
$\mathbf{q}(t, *)$	Der vollständige Zeilenvektor der $t$ -ten Zeile der Matrix $\mathbf{q}$
$q(r)$ , $[q]_r$ und $[q](r)$	Skalares Element der eindimensionalen Größe $\mathbf{q}$ mit Index $r$
$(a, b]$	Definiert ein Intervall skalarer Werte. $a$ ist hierbei nicht enthalten, $b$ ist enthalten
$\{u ; \text{Bedingung}\}$	Definiert eine Untermenge der Menge $U$ , deren Elemente $u$ die angegebene Bedingung erfüllen
$U_1 \cap U_2$	Definiert die Schnittmenge der Mengen $U_1$ und $U_2$ , also $U_1 \cap U_2 \equiv \{u ; u \in U_1 \text{ und } u \in U_2\}$
$U_1 \cup U_2$	Definiert die Vereinigungsmenge der Mengen $U_1$ und $U_2$ , also $U_1 \cup U_2 \equiv \{u ; u \in U_1 \text{ oder } u \in U_2\}$
$\mathcal{O}\{q\}$	Operator $\mathcal{O}$ wirkt auf Argument $q$
$\mathcal{O} ; \forall_{u \in U}$	Die angegebene Operation $\mathcal{O}$ ist für alle Elemente $u$ der Menge $U$ zu wiederholen
$\mathbf{1}$	Einheitsvektor
$\mathbb{1}$	Einheitsmatrix
$\mathbb{R}, \mathbb{G}$	Menge alle reellen bzw. ganzen Zahlen
$\mathcal{D}_l \{\omega_l\} ; l \in [1, L]$	Diagonaloperator. Besetzt die Diagonalelemente einer $L \times L$ Matrix mit den Werten $\omega_l$ . Alle Elemente außerhalb der Diagonalen werden auf Null gesetzt
$\arg \min_{\alpha} \{f(\alpha)\}$ , bzw. $\arg \max_{\alpha} \{f(\alpha)\}$	Liefert jenen Wert von $\alpha$ , für den die Funktion $f(\alpha)$ minimal bzw. maximal wird
$\mathcal{F}_{dim}, \mathcal{F}_{dim}^{-1}$	Fouriertransformationsoperator im Raum $dim$ , vorwärts und rückwärts
$\otimes$	Faltung zweier mehrdimensionaler Größen
$\sim$	Zeichen für eine Proportionalitätsbeziehung

Tabelle A.2: Generelle Nomenklatur in mathematischen Ausdrücken

## A.2 Bezeichnungen und Größenordnungen in Kapitel 3

Bezeichnung	Beschreibung
$i$	$\in [1, I]$ ; Index für die Detektorpaare
$j$	$\in [1, J]$ ; Index für die Bildpunkte
$\lambda(j)$	Summe der wahren Emissionsereignisse im Bildpunkt $j$
$f(j)$	Element bzw. Bildpunkt $j$ des rekonstruierten Bildes $\mathbf{f}$ , das $\lambda$ annähert
$k$	$\in [0, K]$ ; Index für die Anzahl der Iterationen
$m(r, \phi)$	Tomographische Projektion $\mathbf{m}$ , im Winkel $\phi$ im Abstand $r$ vom Ursprung
$g(i)$	Generelle Definition des Elements $i$ des durch $\mathbf{g} = \mathbf{A}\mathbf{f}$ beschriebenen Messdatensatzes
$a(i, j)$	Element der Gewichtematrix $\mathbf{A}$ , also die Wahrscheinlichkeit für eine Emission aus Bildpunkt $j$ , im Detektorpaar $i$ nachgewiesen zu werden
$\mathcal{O}\{f(j), c(j)\}$	Operator für die Modifikation des Wertes von Bild $\mathbf{f}$ im Bildpunkt $j$ anhand des Korrekturwertes $c(j)$
$\mathcal{T}_{\mathcal{R}}\{\lambda\}$	Operator für die Radontransformation der Verteilung $\lambda$
$\mathcal{FBP}$	Operator für die Gefilterte Rückprojektion

Tabelle A.3: Im Kapitel 3 verwendete Bezeichnungen und ihre Größenordnungen

Bezeichnung	Beschreibung
$\mathbf{M} = \mathcal{F}_{1D}\{\mathbf{m}\}$	Die in 1D Fouriertransformierte $\mathbf{M}$ der ursprünglichen Größe $\mathbf{m}$
$\mathbf{F} = \mathcal{F}_{2D}\{\mathbf{f}\}$	Die in 2D Fouriertransformierte $\mathbf{F}$ der ursprünglichen Größe $\mathbf{f}$
$\Phi$	Die Schätzfunktion

Tabelle A.4: Im Kapitel 3 verwendete Bezeichnungen: Ausnahmen

## A.3 Bezeichnungen und Größenordnungen in Kapitel 4

Bezeichnung	Beschreibung
$u$	$\in [1, U]$ ; Index für die zur Verfügung stehenden Koinzidenzen
$q$	$\in [1, Q]$ ; Index für die aus der Simulation zu extrahierenden Quellen
$\kappa$	$\in [1, N]$ ; Index für die Wechselwirkungen eines simulierten Gammaquants mit einem einzelnen Kristall
$c^a, c^b$	$\in [0, 23]$ , bzw. $[24, 47]$ ; Kanalnummern im ersten und zweiten Detektorblock
$\xi$	$\in [0, 24 \cdot 24]$ ; LOR, Detektorpaar
$\eta$	$\in [1, 30]$ ; Winkelschritt der Messung
$\tau$	$\in [1, 90]$ ; Vertikale (Winkel-) Koordinate des Sinogramms
$\rho$	$\in [1, 128]$ ; Transversale (Radial-) Koordinate des Sinogramms, 1 mm/bin
$\varrho$	$\in [1, 512]$ ; Element einer Antwortfunktion, 0,25 mm/bin
$i$	$\in [1, \xi \cdot \eta]$ ; List-Mode-Histogramm Index
$j$	$\in [1, 128 \cdot 128]$ ; Index der quadratischen Bildpunkte mit 1mm Kantenlänge
$\lambda(j)$	Ursprüngliche Verteilung des Tracers in Bildpunkt $j$
$f(j)$	Rekonstruierter Bildpunkt, der $\lambda(j)$ annähert
$k$	$\in [0, K]$ ; Index für die Anzahl der Iterationen
$s(\xi)$	Korrekturfaktor für die koinzidente Sensitivität von LOR $\xi$
$M$	$\in \{\text{CAF, VREC, TRI}\}$ ; $M$ ist die verwendete Antwortfunktion
$r^M(\xi, \varrho)$	Bin $\varrho$ der Antwortfunktion $\mathbf{r}$ für LOR $\xi$ . Soll auf ein bestimmtes Modell verwiesen werden, wird diese hochgestellt, z.B. $\mathbf{r}^{TRI}$
$z^M(\tau, \rho)$	Bin $\varrho$ des Sinogramms $\mathbf{z}$ im Projektionswinkel $\tau$ , wobei Antwortfunktionen vom Typ $M$ zum Rebinning verwendet wurde
$h(i)$	Element $i$ des gemessenen List-Mode-Histogramms $\mathbf{h}$ , das durch $\mathbf{h} = \mathbf{A}\lambda$ beschrieben wird
$n(i)$	Element $i$ des abgeschätzten List-Mode-Histogramms $\mathbf{n}$ der zufälligen Koinzidenzen
$a(i, j)$	Element der Monte Carlo List-Mode Gewichtematrix $\mathbf{A}$ , also die Wahrscheinlichkeit für eine Emission aus Bildpunkt $j$ , im Detektorpaar $i$ detektiert zu werden
$\mathcal{R}^M$	Operator für Sinogrammrebinning mit Antwortfunktionen vom Typ $M$
$\mathcal{G}_{dim}^w$	Gauß-Filter im $dim$ -dimensionalen Raum mit $w$ mm FWHM
$\mathcal{FBP}$	Operator für die Gefilterte Rückprojektion mit einem Ramp Filter
$\mathcal{PLM}, \mathcal{OLM}$	Operator für die iterative List-Mode Rekonstruktion mit PWLS bzw. OSEM

Tabelle A.5: Im Kapitel 4 verwendete Bezeichnungen und ihre Größenordnungen

## A.4 Bezeichnungen und Größenordnungen in Kapitel 6

Bezeichnung	Beschreibung
$c^a, c^b$	Jeweils $\in [0, 143]$ ; Nummern der in koinzidenz messenden Kanäle
$\xi$	$\in [0, 144 \cdot 144]$ ; LOR, Detektorpaar
$\eta$	$\in \{1, [1, 10], [1, 20]\}$ ; Winkelschritt der Messung für $\hat{\eta} \in \{1, 10, 20\}$
$\tau$	$\in [1, 180]$ ; Vertikale (Winkel-) Koordinate des Sinogramms
$\rho$	$\in [1, 140]$ ; Transversale (Radial-) Koordinate des Sinogramms, 0,5 mm/bin
$g$	$\in [1, 560]$ ; Element einer Antwortfunktion, 0,125 mm/bin
$j$	$\in [1, 140 \cdot 140]$ ; Index der quadratischen Bildpunkte mit 0,5 mm Kantenlänge
$M$	$\in \{\text{CAF}, \text{TRI}\}$ ; verwendetes Modell der Antwortfunktionen

Tabelle A.6: Im Kapitel 6 verwendete Bezeichnungen und ihre Größenordnungen  
Zu Tabelle A.6: Es sind nur die gegenüber Kapitel 4 bzw. Tabelle A.5 veränderten Größen angegeben.

## A.5 Namen der in den Kapiteln 4 bis 6 rekonstruierten Bilder

Bildname	Beschreibung
$Rtri \equiv \mathbf{f}^{TRI}$	[siehe Abschnitt 4.7.2 auf Seite 95, Gleichung 4.33] Gefilterte Rückprojektion eines Sinogramms. In der Umsortierung vom List-Mode Histogramm zum Sinogramm wurde hierbei die Antwortfunktion TRI verwendet.
$Rcaf \equiv \mathbf{f}^{CAF}$	[siehe Abschnitt 4.7.2 auf Seite 95, Gleichung 4.33] Gefilterte Rückprojektion eines Sinogramms. In der Umsortierung vom List-Mode Histogramm zum Sinogramm wurde hierbei die Antwortfunktion CAF verwendet.
$Rvrec \equiv \mathbf{f}^{VREC}$	[siehe Abschnitt 4.7.2 auf Seite 95, Gleichung 4.33] Gefilterte Rückprojektion eines Sinogramms. In der Umsortierung vom List-Mode Histogramm zum Sinogramm wurde hierbei die Antwortfunktion VREC verwendet.
$Plm \equiv \mathbf{f}^{PLM}$	[siehe Abschnitt 4.7.3 auf Seite 96, Gleichung 4.34] Iterative List-Mode Rekonstruktion mittels des PWLS Algorithmus. Es kam die aus den Monte-Carlo Simulationen berechnete Gewichtematrix zum Einsatz.
$Olm \equiv \mathbf{f}^{OLM}$	[siehe Abschnitt 4.7.3 auf Seite 96, Gleichung 4.35] Iterative List-Mode Rekonstruktion mittels des OSEM Algorithmus. Es kam die aus den Monte-Carlo Simulationen berechnete Gewichtematrix zum Einsatz.

Tabelle A.7: Namen der in den Kapiteln 4 bis 6 rekonstruierten Bilder



Anhang B

**Simulierte Daten**

## B.1 Simulierte Datensätze für den MADPET

Datensatz	Anzahl der verwendeten 1,6 GB Simulationen	Summe der genutzten Koinzidenzen	Dateigröße
Gewichtematrix	3	$\approx 3,0 \cdot 10^9$	$\approx 56$ MB
Einzelne Linienquelle	1	$\approx 5,8 \cdot 10^3$	$\approx 0,3$ MB
Strukturphantom	1	$\approx 3,8 \cdot 10^6$	$\approx 22$ MB

Tabelle B.1: Simulierte Datensätze für MADPET

Zu Tabelle B.1: In den 3 Monte Carlo Simulationen der großen Kreisscheibe wurden je  $10^9$  Quantenpaare emittiert und davon jeweils  $36 \cdot 10^6$  oberhalb der 450-keV-Energieschwelle detektiert. Die daraus entwickelte Gewichtematrix sowie die daraus berechneten tomographischen Datensätze enthielten 30 Winkelschritte, die in den Simulationen detektierten Koinzidenzen konnten somit 30 mal verwendet werden!

## B.2 Simulierte Datensätze für den MADPET-II

Datensatz	Anzahl der verwendeten 0,5 GB Simulationen	Summe der genutzten Koinzidenzen	Dateigröße
Gewichtematrix <sup>(1)</sup>	31	$6 \cdot 10^9$	106 MB
Einzelne Linienquelle	3	$\approx 3,0 \cdot 10^3$	$\approx 0,1$ MB
Strukturphantom	15	$12,8 \cdot 10^6$	300 MB

Tabelle B.2: Simulierte Datensätze für MADPET-II

Zu Tabelle B.2: In den 46 Monte Carlo Simulationen der großen Kreisscheibe wurden je  $2 \cdot 10^8$  Quantenpaare emittiert und davon jeweils  $9 \cdot 10^6$  oberhalb der 450-keV-Energieschwelle detektiert. Die daraus entwickelten tomographischen Datensätze enthielten nur einen Winkelschritt! Anmerkung <sup>(1)</sup>: Die Zahl der genutzten Koinzidenzen ist nach Berücksichtigung der Symmetrien des Detektorsystems angegeben (Faktor: 18)

## B.3 Gewichtematrizen von MADPET und MADPET-II

	MADPET	MADPET-II
Zahl der Winkelschritte	30,0	1,0
Zahl der Proxel	24×24×30	144×144×1
Zahl der Pixel	128×128	140×140
Kantenlänge der Pixel [mm]	1,0	0,5
Dateigröße eines Monte Carlo Durchgangs [GB]	1,6	0,5
Anzahl der verwendeten Simulationen	3,0	31,0
Summe der darin enthaltenen Koinzidenzen [10 <sup>6</sup> ]	108,0	285,0
Summe der davon genutzten Koinzidenzen <sup>(1)</sup> [10 <sup>6</sup> ]	3000,0	6000,0
Zahl aller Matrixelemente [10 <sup>6</sup> ]	280,0	410,0
Zahl der Nicht-Null-Elemente der Matrix [10 <sup>6</sup> ]	10,1	18,5
Mittelwert der Nicht-Null-Elemente [10 <sup>2</sup> ]	3,0	3,3
Maximalwert der Nicht-Null-Elemente [10 <sup>2</sup> ]	13,0	513,0
Mittlerer Fehler in Nicht-Null-Elementen [%]	4,7	3,9
Dateigröße im ASPIRE-Sparse-Format [MB]	56,0	106,0

Tabelle B.3: Gewichtematrizen von MADPET und MADPET-II

Zu Tabelle B.3: Anmerkung <sup>(1)</sup>: Die Zahl der genutzten Koinzidenzen ist nach Berechnung aller Winkelschritte (MADPET, Gewinnfaktor=30) bzw. nach Berücksichtigung der Symmetrien des Detektorsystems (MADPET-II, Gewinnfaktor=18) angegeben.



## Anhang C

# Rechendauer der Methoden

Dieses Kapitel fasst die von den einzelnen Programmabschnitten benötigten Rechner-Ressourcen zusammen. Im Besonderen wurden hierfür folgende Ausdrücke verwendet:

- **N/A:** Englische Abkürzung (*not available*) für „nicht verfügbar“. Werte mit diesem Inhalt konnten nicht ermittelt werden, da z.B. die korrespondierende Methode noch nicht entwickelt war.
- **Größenangaben:** Die Angabe von Datei- und Speichergrößen erfolgte anhand folgender Einheiten: 1 kB = 1024 Byte, 1 MB = 1024 kB = 1048576 Byte, 1 GB = 1024 MB = 1073741824 Byte.
- **RAM:** Dieser Wert beinhaltete nur den von dem Programm unmittelbar benötigten Arbeitsspeicher (engl. *read access memory*, kurz RAM); zusätzlicher Speicher für die Zwischenlagerung der zu lesenden Datei wurde hierbei nicht berücksichtigt.
- **Rechner R1:** Der für den MADPET-II vorgesehene VME-Ausleserechner (PVM-Slave, SUN UltraSPARC Iii, 333 MHz Prozessor, 128 MB Arbeitsspeicher, SUN-OS Solaris 7 (UNIX) Betriebssystem).
- **Rechner R2:** Ein herkömmlicher, kostengünstiger (engl.) Rechner (AMD Duron 700 MHz Prozessor, 768 MB Arbeitsspeicher, SuSE Linux 6.4 (UNIX) Betriebssystem).

Ein Vergleich der Rechenleistungen ergab, dass Rechner R2 im Vergleich zu Rechner R1 bei gleichen Anforderungen (hauptsächlich Ganzzahl- und Fließkommarechnung) ungefähr die doppelte Geschwindigkeit erreichte.

## C.1 Rechendauer der einzelnen MADPET-Methoden

Prozess	Dauer	Rechner	RAM	Dateigröße
Monte Carlo Simulation der Kreisscheibe für $36 \cdot 10^6$ detektierte aus $10^9$ emittierten Quantenpaaren	100 h	R1	5 MB	1,6 GB
Berechnen der Gewichtematrix für 30 Winkelschritte aus einer 1,6 GB Simulationsdatei	5 h	R2	76 MB	56 MB
Extraktion der tomographischen Datenliste einer Linienquelle aus einer 1,6 GB Simulationsdatei	650 s	R2	0,3 MB	0,3 MB
Extraktion der tomographischen Datenliste des Strukturphantoms aus einer 1,6 GB Simulationsdatei	800 s	R2	2 MB	22 MB
Vorverarbeitung einer Koinzidenz in der gemessenen Datenliste	$2,5 \mu\text{s}$	R2	3,5 MB	dynamisch
Einsortierung einer Koinzidenz in das List-Mode Histogramm	$0,2 \mu\text{s}$	R2	1 MB	72 kB
Einsortierung einer Koinzidenz in das Parallel-Sinogramm	$20 \mu\text{s}$	R2	4 MB	96 kB
Gefilterte Rückprojektion für ein Bild	0,3 s	R2	1 MB	65 kB
Iterative List-Mode Rekonstruktion für eine Iteration	0,5 s	R2	57 MB	65 kB

Tabelle C.1: Rechendauer der im Kapitel 4 vorgestellten Methoden

## C.2 Rechendauer der einzelnen MADPET-II-Methoden

Prozess	Dauer	Rechner	RAM	Dateigröße
Monte Carlo Simulation der Kreisscheibe für $9 \cdot 10^6$ detektierte aus $0,16 \cdot 10^9$ emittierten Quantenpaaren	24 h	R1	5 MB	0,5 GB
Berechnen der Gewichtematrix für einen Winkelschritt aus einer 0,5 GB Simulationsdatei	0,5 h	R2	780 MB	30 MB
Extraktion der tomographischen Datenliste einer Linienquelle aus einer 0,5 GB Simulationsdatei	60 s	R2	0,3 MB	30 kB
Extraktion der tomographischen Datenliste des Strukturphantoms aus einer 0,5 GB Simulationsdatei	150 s	R2	6 MB	20 MB
Vorverarbeitung der Datenliste <sup>(1)</sup>	N/A	N/A	N/A	N/A
Einsortierung einer Koinzidenz in das List-Mode Histogramm	$0,3 \mu\text{s}$	R2	1 MB	81 kB
Einsortierung einer Koinzidenz in das Parallel-Sinogramm	$2 \mu\text{s}$	R2	5 MB	100 kB
Gefilterte Rückprojektion für ein Bild	0,3 s	R2	1 MB	78 kB
Iterative List-Mode Rekonstruktion für eine Iteration	0,2 s	R2	31 MB	78 kB

Tabelle C.2: Rechendauer der im Kapitel 6 vorgestellten Methoden

Zu Tabelle C.2: Anmerkung <sup>(1)</sup>: Die Werte für die Vorverarbeitung der Datenliste waren nicht verfügbar, da noch kein funktionsfähiger Messaufbau und somit keine Datennahme vorhanden war.



# Index

- (engl.) *accidental coincidence*, 17
- (engl.) *algebraic reconstruction technique*, 44
- (engl.) *algebraic reconstruction*, xiii
- (engl.) *analog-to-digital converter*, xiii, 61
- (engl.) *annihilation*, 7
- (engl.) *avalanche photodiode*, xiii, 11
- (engl.) *backprojection*, xvii
- (engl.) *backscatter peak*, 14
- (engl.) *bent linesearch*, 41
- (engl.) *bin*, 35
- (engl.) *bloodpool*, 110
- (engl.) *bypass*, 108
- (engl.) *central slice theorem*, 30
- (engl.) *coincidence aperture function*, xiii, 19, 81
- (engl.) *coincidence response function*, xiii
- (engl.) *coincidence*, xiv
- (engl.) *column-degeneracy*, 37
- (engl.) *conjugate gradient*, 41
- (engl.) *convolution backprojection*, xiii, 33
- (engl.) *cutoff frequency*, 32
- (engl.) *cutoff*, 32
- (engl.) *data-weighted least-squares*, 39
- (engl.) *deadtime*, 64
- (engl.) *degeneracy*, 37
- (engl.) *delayed-window*, 92
- (engl.) *detection*, xiv
- (engl.) *dual-layer detector module*, 121
- (engl.) *event*, xiv
- (engl.) *expectation-maximization*, 40, 43
- (engl.) *filtered backprojection*, xiv, 32
- (engl.) *forwardprojection*, xix
- (engl.) *fourier rebinning*, 156
- (engl.) *full-width half-maximum*, xiv, 14
- (engl.) *full-width tenth-maximum*, xiv
- (engl.) *gated acquisition*, 108
- (engl.) *gated*, 108
- (engl.) *imagewise image update*, 42
- (engl.) *imaging*, xiii
- (engl.) *inter-crystal scatter*, 18
- (engl.) *iterative coordinate descent*, 49
- (engl.) *iterative least-squares*, 43
- (engl.) *least-squares*, xvi, 39
- (engl.) *likelihood*, xv, 38
- (engl.) *line-of-response*, xiv, 23
- (engl.) *list-mode data*, xiv, 61
- (engl.) *log-likelihood*, 38, 45
- (engl.) *look-at-me*, 61
- (engl.) *magnetic resonance imaging*, 1
- (engl.) *maximum likelihood expectation maximization*, xv
- (engl.) *maximum-likelihood*, 38, 39
- (engl.) *multi slice rebinning*, 156
- (engl.) *nonnegativity constraint*, 40
- (engl.) *ordered subsets expectation maximization*, xv
- (engl.) *parallel virtual machine*, xvi, 64, 67
- (engl.) *partial volume effect*, 103
- (engl.) *penalized weighted least squares*, xvi, 49
- (engl.) *penalty*, 49
- (engl.) *photomultiplier tube*, xvi, 11
- (engl.) *photopeak*, 13
- (engl.) *picture element*, xv, 23
- (engl.) *pixelwise image update*, 43
- (engl.) *positron emission tomography*, xv, 1
- (engl.) *preconditioned conjugate gradient*, 49
- (engl.) *precondition*, 48, 49
- (engl.) *preprocessing*, 73
- (engl.) *primary LOR*, 18
- (engl.) *probability density function*, 23
- (engl.) *probability matrix*, xviii
- (engl.) *projection element*, xvi, 23
- (engl.) *projection ray sum*, xvii
- (engl.) *projectionwise image update*, 44
- (engl.) *projection*, xvi
- (engl.) *pseudo random number*, 24

- (engl.) *radiopharmaceuticals*, 3  
 (engl.) *ramp*, 30  
 (engl.) *random coincidence*, xvi, 17  
 (engl.) *read access memory*, 169  
 (engl.) *rebinning*, xiii, xviii, 34, 92  
 (engl.) *reconstruction weights*, xviii, 35  
 (engl.) *rectangular response function*, xvi, 81  
 (engl.) *reflective memory*, 123, 125  
 (engl.) *resolution*, xiii  
 (engl.) *row-degeneracy*, 37  
 (engl.) *run*, 24  
 (engl.) *second-order neighbouring*, 49  
 (engl.) *seed*, 24  
 (engl.) *shaper*, 58, 61  
 (engl.) *shifted log-likelihood*, 39  
 (engl.) *shifted-poisson*, 38, 45, 46, 96, 137, 145  
 (engl.) *simultaneous iterative reconstruction technique*, 44  
 (engl.) *single photon emission computed tomography*, xvii, 1  
 (engl.) *single slice theorem*, 30  
 (engl.) *singles*, 17  
 (engl.) *singular-value decomposition*, 37, 158  
 (engl.) *sinogram*, xvii  
 (engl.) *standard deviation*, xvii, 7  
 (engl.) *statistical reconstruction*, xvii  
 (engl.) *steepest ascent*, 40  
 (engl.) *steepest descent*, 40  
 (engl.) *subset balance*, 46  
 (engl.) *subsets*, xv, xviii, 46, 96  
 (engl.) *successive overrelaxation*, 49  
 (engl.) *system matrix*, xviii, 35  
 (engl.) *time-of-flight*, xviii, 15  
 (engl.) *total coincidences*, xviii, 18  
 (engl.) *tracer*, 3, 24  
 (engl.) *triangular response function*, xviii, 81  
 (engl.) *true coincidence*, xviii, 15  
 (engl.) *tube-of-response*, xviii, 23  
 (engl.) *unweighted least-squares*, 39  
 (engl.) *volume element*, xix, 23  
 (engl.) *weighted least-squares*, 39, 48  
 (engl.) *weights*, xiv, 35  
 (engl.) *x-ray computed tomography*, 1  
*Olm*, xv, 97, 107, 137  
*Plm*, xv, 97, 107, 137  
*Rcaf*, xvi, 97, 107, 137  
*Rtri*, xvii, 97, 107, 137  
*Rvrec*, xvii, 97, 107  
 2D-PET, 22  
 3D-PET, 22  
 a-priori, 40  
 ADC, xiii, 61  
 Akkumulationszeit, 106  
 Akquisition, 3  
 Algebraische Rekonstruktion, xiii  
 Analog-zu-Digital Konverter, 61  
 anterior, 111  
 Antwortfunktion, xiii, 19, 76, 81–83, 91–94, 97, 98, 103, 104, 121, 130, 133, 137, 145, 150, 151  
 Antwortlinie, 23, 29  
 Antwortröhre, 23  
 APD, xiii, 11  
 Apex, 111  
 ART, 44  
 ASPIRE, 50, 133, 157, 167  
 Auflösung, xiii  
 axial, 23  
 BGO, 11  
 Bildelement, 23  
 Bildgebung, xiii  
 Bleiabschirmung, 22, 121  
 CAF, xiii, xvi, 19, 81  
 CBP, xiii, 33  
 Compton-Kante, 13  
 Compton-Kontinuum, 13  
 CT, 1, 16, 155  
 Datenliste, xiv, xvi, 61  
 Detektion, xiv  
 Detektorblock, 61  
 Detektormodul, 61  
 Diastole, 108  
 Doppellagen, 121  
 Durchgang, 24  
 dynamisch, 55  
 dynamische Akquisition, 3  
 eins-zu-eins Kopplung, 58

- Einzelphotonen Emissions Computer Tomographie, 1  
EKG, 108  
Elektrokardiogramm, 108  
EM, 40, 43  
Energieauflösung, 14, 155  
Energiefenster, 15  
Energieschwelle, 15  
Entartung, 37  
Ereignis, xiv  
  
FBP, xiv, xvi, xvii, 32  
Filterverstärker, 58  
Funktion der quadratischen Abweichung, 39  
FWHM, xiii, xiv, 14  
FWTM, xiv  
  
GATE-Impuls, 61  
Gaußsches Fehlerintegral, 39  
gefaltete Rückprojektion, xiii, 33  
gefilterte Rückprojektion, xiii, xiv, xvi, xvii, 32  
Gesichtsfeld, 23, 28  
getriggert, 108  
getriggerte Untersuchung, 108  
Gewichtematrix, xiv, xviii, 35  
GLUT, 8  
  
Halbleiterdiode, 11  
Halbwertsbreite, xiii, xiv  
Herzbasis, 111  
Herzhinterwand, 111  
Herzspitze, 111  
Herzvorderwand, 111  
  
ICD, 49  
ILST, 43  
Impulsverstärkung, 124  
inferior, 111  
intrinsische Auflösung, 19  
  
Kernladungszahl, 8  
Kernspintomographie, 1  
KHK, 108  
Kinetik, 55  
Klein-Nishina, 13  
koinzident, 15  
koinzidente Antwortfunktion, 81  
Koinzidenz, xiv, 15  
Koinzidenz, wahre, xviii, 15, 38  
Koinzidenz, zufällige, xvi, 17, 38  
Koinzidenzelektronik, 61  
kollinear, 7  
konjugierte Gradienten, 41  
Koronare Herzkrankheit, 108  
Kovarianzmatrix, 48  
  
LAM, 61  
Lawinen-Photodiode, 11  
Lichtsensoren, 11  
Lineares Gleichungssystem, 35  
linker Ventrikel, 107  
List-Mode Histogramm, 75  
LOR, xiv, xviii, 23  
LS, 39  
LSO, 11  
LSO-APD, 13, 14, 58, 64, 65, 96, 119, 124  
Lutetium-Oxyorthosilikat, 11  
  
MicroPET, 87, 145  
ML, 39  
MLEM, xv, 137  
Monte Carlo, 23  
MRI, 1  
multiplikativen ART, 44  
Myokard, 107  
  
Nachweis, xiv  
Nachweiseigenschaft, 104  
Nachweiseigenschaften, 36, 76  
Nachweiswahrscheinlichkeit, xvii, 35, 36, 54, 87, 104, 132–134, 149  
NaJ, 11  
Natriumiodid, 11  
nicht-invasiv, 1  
  
Ortsfrequenz, xv, 30  
OSEM, xv, xviii, 96, 137  
  
Parallaxeneffekt, xv, 20  
Parallele Virtuelle Maschine, xvi, 67  
Partialvolumeneffekt, 103, 110, 144  
PCG, 49  
PDF, 23  
Pedestal, 14  
Perfusion, 107

- Perfusionsstörung, 108  
 PET, xv, 1  
 Phantom, 96, 97  
 Photodiode, 11  
 Photoeffekt, 16  
 Photoelektronenvervielfacher, 11  
 Photopeak, 14  
 Pixel, xv, 23  
 PMT, xvi, 11  
 poissonverteilt, 38  
 Positronenreichweite, 8, 15, 19, 35, 36, 147  
 Positronium, 7  
 primare LOR, 18  
 Projektion, xvi, 1, 28  
 Proxel, xvi, 23  
 Pseudo-Zufallszahl, 24  
 PVM, xvi, 64, 67, 153  
 PVM-Master, 67  
 PVM-Slave, 67  
 PWLS, xv, xvi, 49, 135  
 PWLS-ICD(+SOR), 49  
 PWLS-PCG, 49, 96  
  
 Radiopharmaka, 3  
 Radontransformation, 28  
 RAM, 169  
 Ramp-Rekonstruktion, 33  
 Rampe, 30, 32, 33  
 Rampenfilter, 33, 95, 135  
 RANDOMS, xvi, xviii, 17, 38, 106  
 Reangulierung, 109  
 Rebinningoperator, 94  
 REC, xvi, xvii, 81  
 Rechnertotzeit, 65  
 Regulierung, 39  
 Regulierungsfunktion, 40  
 Rekonstruktion, 1, 3  
 Rotationssymmetrie, 132  
 Röntgen Computer Tomographie, 1  
 Rückprojektion, xvii  
 Rückstreupeak, 14  
  
 Saat, 24  
 Schichtabstand, 105  
 Schwächung, 16  
 Schwächungskorrektur, 16  
 Schätzfunktion, xvii, 37  
 Schätzfunktion, konkave, 41  
 Schätzfunktion, konvexe, 41  
 SD, xvii, 7, 83  
 Septen, 22  
 Singles-Datenliste, 124  
 Sinogramm, xvii, 35  
 SIRT, 44  
 SOR, 49  
 Spalten-Entartung, 37  
 SPECT, xvii, 1  
 Standardabweichung, xvii, 7, 83  
 Statistische Rekonstruktion, xvii  
 Stenose, 107  
 Strahlsumme, xvi, xvii  
 Streuung, kohärente, 16  
 Streuuntergrund, 14  
 SVD, 37, 158  
 Systemmatrix, xiv, xviii, 35, 104  
 Systole, 108  
 Szintillationskristall, 10, 11  
  
 TOF, xviii, 15  
 TOR, xviii, 23  
 TOTALS, xviii, 18, 38, 106  
 Totzeit, 64, 65  
 transaxial, 23  
 transaxiale Schnittbilder, 3  
 Transmissionsmessung, 155  
 TRI, xvii, xviii, 81  
 TRUES, xviii, 15, 38  
  
 ULS, 39  
 Umsortierung der Projektionsdaten, xviii,  
     34  
 Untergruppen, xv, xviii, 46, 96, 137  
  
 Varianzmatrix, 48  
 Ventrikel, 107  
 Vernichtung, 7  
 Volumenelement, 23  
 Vorverarbeitung, 73  
 Vorwärtsprojektion, xix, 35  
 Voxel, xix, 23  
  
 Wahrscheinlichkeitsfunktion, 23  
 Wahrscheinlichkeitsmatrix, xviii, 35  
 Wandbewegung, 110  
 Wechselwirkungsquerschnitt, 10

Wechselwirkungswahrscheinlichkeit, 23

Wismuthgermanat, 11

WLS, 39

Zehntelwertsbreite, xiv

Zeilen-Entartung, 37

Zufallszahlen, 23

zweidimensionale Messung, 22

Zweilagigenmodul, 121

zweilagiges Detektormodul, 121

Zählexperiment, 38



# Literaturverzeichnis

- [1] L.-E. Adam, J. Zaers, H. Ostertag, H. Trojan, M. E. Bellemann, and G. Brix. Performance evaluation of the whole-body PET scanner ECAT EXACT HR+ following the IEC standard. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 44(3):1172–1179, June 1997.
- [2] A. H. Andersen and A. C. Kak. Simultaneous algebraic reconstruction technique (SART): A superior implementation of the ART algorithm. *Ultrason Imag.*, 6(1):81–94, January 1984.
- [3] J. M. M. Anderson, B. A. Mair, M. Rao, and C.-H. Wu. Weighted least-squares reconstruction methods for positron emission tomography. *IEEE Med. Imag.*, 16(2):159–165, April 1997.
- [4] P. Andreo. Monte Carlo techniques in medical radiation physics. *Phys. Med. Biol.*, 36:861–920, 1991.
- [5] R. D. Badawi, M. A. Lodge, and P. K. Marsden. Algorithms for calculating detector efficiency normalization coefficients for true coincidences in 3D PET. *Phys. Med. Biol.*, 43:189–205, 1998.
- [6] H. H. Barrett. The Radon transform and its applications. In E. Wolf, editor, *Progress in optics XXI*, chapter III. Elsevier Science Publishers B.V., 1984.
- [7] M. Bentourkia, D. Lapointe, V. Selivanov, I. Buvat, and R. Lecomte. Determination of blood curve and tissue uptake from left ventricle using FADS in rat FDG-PET studies. *IEEE Trans. Nucl. Sci. Symp. and Med. Imag. Conf.*, 2:1124–1127, 1999.
- [8] P. R. Bevington, editor. *Data reduction and error analysis for physical sciences*. McGraw-Hill Book Company, New York, San Francisco, St. Louis, Toronto, London, Sydney, 330 West 42nd Street, New York 10036, USA, 1969.
- [9] G. Böning, B. J. Pichler, M. Rafecas, E. Lorenz, M. Schwaiger, and S. I. Ziegler. Untersuchungen an einem hochauflösenden Positronen-Emissions-Tomographen mit Lawinen-Photodioden-Auslese. *Nuklearmedizin*, 38:A29, April 1999. Abstract.
- [10] G. Böning, B. J. Pichler, M. Rafecas, E. Lorenz, M. Schwaiger, and S. I. Ziegler. Implementation of a parallel virtual machine in the data acquisition system of a high resolution animal PET. *IEEE NSS and MIC 2000 conference records CD*, 2000. Conference record, IEEE 2000 NSS and MIC conference, Lyon, France; rejected for full print.

- [11] G. Böning, B. J. Pichler, M. Rafecas, M. Schwaiger, E. Lorenz, and S. I. Ziegler. Ein Datenakquisitionssystem für einen hochauflösenden Positronen-Emissions-Tomographen. *Informatik aktuell; Bildverarbeitung für die Medizin; Springer Verlag*, pages 393–397, March 2000.
- [12] G. Böning, B. J. Pichler, M. Rafecas, M. Schwaiger, E. Lorenz, and S. I. Ziegler. Improved image generation for high resolution animal PET using Monte-Carlo simulations of the system response function. *J. Nucl. Med.*, 41(5):887P, May 2000. Abstract.
- [13] G. Böning, B. J. Pichler, M. Rafecas, M. Schwaiger, E. Lorenz, and S. I. Ziegler. Implementation of Monte Carlo coincident aperture functions in image generation of a high resolution animal positron tomograph. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 48(3):805–810, June 2001.
- [14] G. Böning, M. Rafecas, B. J. Pichler, S. Bieler, M. Schwaiger, E. Lorenz, and S. I. Ziegler. Bestimmung der koinzidenten Antwortfunktion eines hochauflösenden Positronen-Emissions-Tomographen mittels Monte-Carlo-Simulation. *Nuklearmedizin*, 39(37-55):A59, April 2000. Abstract.
- [15] G. Böning, M. Rafecas, B. J. Pichler, M. Schwaiger, E. Lorenz, and S. I. Ziegler. Image reconstruction for MADPET-II: A high resolution dual-layer positron tomograph. *J. Nucl. Med*, 2002. Abstract (in press).
- [16] G. Böning and S. I. Ziegler. Moderne Instrumentierung - Neuheiten für die Kardiologie. *Der Nuklearmediziner*, 22(2):77–84, 1999.
- [17] G. Brix, J. Doll, M. E. Bellemann, H. Trojan, U. Haberkorn, P. Schmidlin, and H. Ostertag. Use of scanner characteristics in iterative image reconstruction for high-resolution positron emission tomography studies of small animals. *Eur. J. Nucl. Med*, 24(7):779–786, July 1997.
- [18] G. Brix, J. Zaers, L.-E. Adam, M. E. Bellemann, H. Ostertag, H. Trojan, U. Haberkorn, J. Doll, F. Oberdorfer, and W. J. Lorenz. Performance evaluation of a whole-body PET scanner using the NEMA protocol. *J. Nucl. Med.*, 38(10):1614–1623, October 1997.
- [19] I. N. Bronstein and K. A. Semendjajew, editors. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt/Main, 24 edition, 1989. ISBN: 3-87144-492-8.
- [20] T. F. Budinger. Time-of-flight positron emission tomography: Status relative to conventional PET. *J. Nucl. Med.*, 24(1):73–78, January 1983.
- [21] A. Chatziioannou, S. Cherry, Y. Shao, R. Silverman, K. Meadors, T. Farquhar, M. Pedarsani, and M. Phelps. Performance evaluation of micropet: A high-resolution lutetium oxyorthosilicate pet scanner for animal imaging. *J Nucl Med*, 40:1164–1175, 1999.
- [22] A. Chatziioannou, J. Qi, A. Moore, A. Annala, K. Nguyen, R. M. Leahy, and S. R. Cherry. Comparison of 3D maximum a posteriori and filtered backprojection algorithms for high resolution animal imaging with microPET. *Trans. Med. Imag.*, 19(5):507–512, May 2000.

- [23] S. R. Cherry, Y. Shao, R. W. Silverman, K. Meadors, S. Siegel, A. Chatziioannou, J. W. Young, W. F. Jones, J. C. Mpyers, D. Newport, A. Boutefnouchet, T. H. Farquhar, M. Andreaco, M. J. Paulus, D. M. Binkley, R. Nutt, and M. E. Phelps. MicroPET: A high resolution PET scanner for imaging small animals. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 44(3):1161–1166, June 1997.
- [24] K. A. Comanor, P. R. G. Virador, and W. W. Moses. Algorithms to identify detector Compton scatter in PET modules. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 43(4):2213–2218, August 1996.
- [25] C. Comtat, P. E. Kinahan, M. Defrise, C. Michel, and D. W. Townsend. Fast reconstruction of 3D PET data with accurate statistical modelling. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 45(3):1083–1089, June 1998.
- [26] M. E. Daube-Witherspoon and G. Muehllehner. Treatment of axial data in three-dimensional PET. *J. Nucl. Med.*, 28(11):1717–1724, November 1987.
- [27] H. W. de Jong and F. J. Beekman. Rapid SPECT simulation for downscatter in non-uniform media. *Phys. Med. Biol.*, 46(3):621–635, March 2001.
- [28] M. Defrise, P. E. Kinahan, D. W. Townsend, C. Michel, M. Sibomana, and D. F. Newport. Exact and approximate rebinning algorithms for 3D PET data. *IEEE Trans. Med. Imag.*, 16(2):145–158, April 1997.
- [29] R. D. Evans. *The Atomic Nucleus*. McGraw-Hill Book Company, INC., New York, 1955.
- [30] T. H. Farquhar, A. Chatziioannou, and S. R. Cherry. An evaluation of exact and approximate 3-D reconstruction algorithms for a high-resolution, small-animal scanner. *IEEE Trans. Med. Imag.*, 17(6):1073–1080, December 1998.
- [31] J. A. Fessler. Penalized weighted least-squares image reconstruction for positron emission tomography. *IEEE Med. Imag.*, 13(2):290–300, June 1994.
- [32] J. A. Fessler. ASPIRE 3.0 users guide: A sparse iterative reconstruction library. Technical Report 293, Comm. and Sign. Proc. Lab., Dept. of EECS, Univ. of Michigan, Ann Arbor, MI, 48109-2122, July 1995.
- [33] J. A. Fessler. Mean and variance of implicitly defined biased estimators (such as penalized maximum likelihood): Applications to tomography. *IEEE Trans. Imag. Proc.*, 5(3):493–506, March 1996.
- [34] J. A. Fessler. Conjugate-gradient preconditioning methods: Numerical results. Technical Report No. 303, Communications & Signal Processing Laboratory, Department of Electrical Engineering and Computer Science, The University of Michigan, The University of Michigan, Ann Arbor, Michigan 48109, January 1997.
- [35] J. A. Fessler and S. D. Booth. Conjugate-gradient preconditioning methods for shift-variant PET image reconstruction. *IEEE Trans. Imag. Proc.*, 8(5):688–699, May 1999.

- [36] J. A. Fessler and W. L. Rogers. Resolution properties of regularized image reconstruction methods. Technical Report No. 297, Communications & Signal Processing Laboratory, Department of Electrical Engineering and Computer Science, The University of Michigan, The University of Michigan, Ann Arbor, Michigan 48109, December 1996.
- [37] R. L. Ford and W. R. Nelson. The EGS code system: Computer programs for the Monte Carlo simulation of electromagnetic cascade showers (version 3). Technical Report SLAC-210, Stanford Linear Accelerator Center, Stanford, CA, 1978.
- [38] G. A. Geist, A. Beguelin, J. D. W. Jiang, R. Manchek, and V. Sunderam. PVM: Parallel Virtual Machine - A users guide and tutorial for network parallel computing. *MIT Press*, 1994.
- [39] P. Gilbert. Iterative methods for three-dimensional reconstruction of an object from projections. *J. Theor. Biol.*, 36:105–117, 1972.
- [40] M. Goitein. Three-dimensional density reconstruction from a series of two-dimensional projections. *Nucl. Instr. Meth.*, 101:509–518, 1972.
- [41] R. Gordon, R. Bender, and G. T. Herman. Algebraic reconstruction techniques (ART) for three-dimensional electron microscopy and X-Ray photography. *J. Theor. Biol.*, 29:471–481, 1970.
- [42] A. S. Group. *GEANT – Detector description and simulation tool*. CERN, Genf, Schweiz, October 1994. CERN Program Library Long Writeup W5013.
- [43] H. Guan and R. Gordon. Computed tomography using algebraic reconstruction techniques (ARTs) with different projection access schemes: A comparison study under practical situations. *Phys. Med. Biol.*, 41(9):1727–1743, September 1996.
- [44] S. F. Haber, S. E. Derenzo, and D. Uber. Application of mathematical removal of positron range blurring in positron emission tomography. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 37(3):1293–1299, June 1990.
- [45] T. J. Hebert and R. Leahy. Fast methods for including attenuation in the EM algorithm. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 37(2):754–758, April 1990.
- [46] M. Héon, J. Cadorette, P. Richard, D. Rouleau, S. Rodrigue, and R. Lecomte. A stationary sampling scheme for multilayer positron tomographs. *IEEE Trans. Med. Imag.*, 12(2):293–298, June 1993.
- [47] T. Herbert and R. M. Leahy. A generalized EM algorithm for 3-D bayesian reconstruction from Poisson data using Gibbs priors. *IEEE Trans. Med. Imag.*, 18(2):194–202, June 1989.
- [48] G. Herman, editor. *Image Reconstruction from Projections*. Topics in Applied Physics. Springer Verlag, Berlin Heidelberg NewYork, 1979.
- [49] E. J. Hoffman, T. M. Guerrero, G. Germano, W. M. Digby, and M. Dahlbom. PET system calibrations and corrections for quantitative and spatially accurate images. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 36(1):1108–1112, February 1989.

- [50] E. J. Hoffman, S.-C. Huang, M. E. Phelps, and D. E. Kuhl. Quantitation in positron emission tomography: 4. Effect of accidental coincidences. *J. Comput. Assist. Tomogr.*, 5(3):391–400, 1981.
- [51] E. J. Hoffman, S.-C. Huang, D. Plummer, and M. E. Phelps. Quantitation in positron emission tomography: 6. Effect of nonuniform resolution. *J. Comput. Assist. Tomogr.*, 6(5):987–999, 1982.
- [52] E. J. Hoffmann, T. M. Guerrero, G. Germano, W. M. Digby, and M. Dahlbom. PET system calibration and corrections for quantitative and spatially accurate images. *IEEE trans. Nucl. Sci.*, 36:1108–1112, 1998.
- [53] H. M. Hudson and R. S. Larkin. Accelerated image reconstruction using ordered subsets of projection data. *IEEE Trans. Med. Imag.*, 12:601–609, August 1974.
- [54] R. Huesmann. The effects of a finite number of projection angles and a finite lateral sampling of projections on the propagation of statistical errors in transverse section reconstruction. *Phys. Med. Biol.*, 22:511–521, 1977.
- [55] S. P. Hume and T. Jones. Positron emission tomography (PET) methodology for small animals and its application in radiopharmaceutical preclinical investigation. *Nucl. Med. Biol.*, 25:729–732, 1998.
- [56] F. James. Monte Carlo theory and practice. In *Reports on Progress in Physics*, volume 43, pages 1145–1189. Institute of Physics Publishing Ltd., London, 1980.
- [57] F. James. A review of pseudorandom number generators. *Comp. Phys. Comm.*, 60:329–344, 1990.
- [58] F. James. *MINUIT – Function minimization and error analysis*. CERN, Genf, Schweiz, March 1994. CERN Program Library Long Writeup D506.
- [59] A. Jeavons, R. Chandler, and C. Dettmar. A 3D HIDAC-PET camera with sub-millimetre resolution for imaging small animals. *IEEE Trans Nucl Sci*, 46:468–473, 1999.
- [60] W. F. Jones, J. H. Reed, J. L. Everman, J. W. Young, and R. D. Seese. Next generation PET data acquisition architectures. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 44:1202–1207, 1997.
- [61] K. Jordan. Mathematische Grundlagen der Rekonstruktion und quantitativen Aktivitätsbestimmung in vivo. In *Messtechnik in der Emissions-Computertomographie*, volume XV 1/B of *Handbuch der Radiologie*, chapter G. Springer Verlag, 1985.
- [62] J. S. Karp, G. Muehllehner, D. A. Mankoff, C. E. Ordonez, J. M. Ollinger, M. E. Daube-Witherspoon, A. T. Haigh, and D. J. Beerbohm. Continuous-slice PENN-PET: A positron tomograph with volume imaging capability. *J. Nucl. Med.*, 31(5):617–627, May 1990.
- [63] B. Karuta and R. Lecomte. Effect of detector weighting functions on the point spread function of high-resolution PET tomographs: A simulation study. *IEEE Trans. Med. Imag.*, 11(3):379–385, September 1992.

- [64] L. Kaufman. Maximum likelihood, least squares, and penalized least squares for PET. *IEEE Trans. Med. Imag.*, 12(2):200–214, June 1993.
- [65] P. E. Kinahan, J. A. Fessler, and J. S. Karp. Statistical image reconstruction methods in PET with compensation for missing data. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 44(4):1552–1557, August 1997.
- [66] O. Klein and Y. Nishina. *Z. Phys.*, 52:853, 1929.
- [67] G. Knoll. *Radiation Detection and Measurement*. John Wiley and Sons, New York, 2 edition, 1989.
- [68] D. S. Lalush, E. C. Frey, and B. M. W. Tsui. Fast maximum entropy approximation in SPECT using the RBI-MAP algorithm. *Trans. Med. Imag.*, 19(4):286–294, April 2000.
- [69] K. Lange and R. Carson. EM reconstruction algorithms for emission and transmission tomography. *J. Computer Assisted Tomography*, 8(2):306–316, April 1984.
- [70] S. Lanzavecchia and P. L. Bellon. Fast computation of 3D Radon transform via a direct Fourier method. *Bioinformatics*, 14(2):212–216, 1998.
- [71] S. Lanzavecchia, P. L. Bellon, and M. Radermacher. Fast and accurate three-dimensional reconstruction from projections with random orientations via Radon transforms. *J. Struct. Biol.*, 128:152–164, 1999.
- [72] S. A. Larsson. *Gamma camera emission tomography*. Number Supplementum 363 in ACTA RADIOLOGICA. Dept. of Radiation Physics, The Karolinska Institute and The University of Stockholm, Stockholm, Sweden, 1980. ISSN: 0365-5954.
- [73] R. Leahy. Editorial: Recent developments in iterative image reconstruction for PET and SPECT. *Trans. Med. Imag.*, 19(4):257–259, April 2000.
- [74] R. M. Leahy and J. Qi. Statistical approaches in quantitative PET. *Statistics and Computing*, 10:147–165, 2000.
- [75] R. Lecomte, J. Carodette, P. Richard, S. Rodrigue, and D. Rouleau. Design and engineering aspects of a high resolution positron tomograph for small animal imaging. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 41(4):1446–1452, 1994.
- [76] R. Lecomte, J. Carodette, Rodrigue, D. Lapointe, D. Rouleau, M. Bentourkia, R. Yao, and P. Msaki. Initial results from the Sherbrooke avalanche photodiode positron tomograph. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 43(3):1952–1957, 1996.
- [77] R. Lecomte, C. Martel, and J. Cadorette. Study of the resolution performance of an array of discrete detectors with independent readouts for positron emission tomography. *IEEE Trans. Med. Imag.*, 10(3):347–357, September 1991.
- [78] P. L'Ecuyer. Efficient and portable combined random number generators. *Communications of the ACM*, 31(6):742–744, 1988.
- [79] R. Leo, editor. *Techniques for nuclear and particle physics experiments*. Springer Verlag, Berlin, 2 edition, 1993. ISBN: 3-540-57280-5.

- [80] C. S. Levin and E. J. Hoffman. Calculation of positron range and its effect on the fundamental limit of positron emission tomography system spatial resolution. *Phys. Med. Biol.*, 44:781–799, 1999.
- [81] T. K. Lewellen, A. N. Bice, R. L. Harrison, M. D. Pencke, and J. M. Link. Performance measurements of the SP3000/UW time-of-flight positron emission tomograph. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 35:665–669, 1988.
- [82] R. M. Lewitt, G. Muehllehner, and J. S. Karp. 3D image reconstruction for PET by multi-slice rebinning and axial filtering. *Conf. Record of the IEEE Nucl. Sci. Symp. and Med. Imag. Conf.*, 3:2054–2061, 1991.
- [83] Z. Liang. Detector response restoration in image reconstruction of high resolution positron emission tomography. *IEEE Trans. Med. Imag.*, 13(2):314–321, June 1994.
- [84] The linux lab project home page. <http://www.llp.fu-berlin.de>.
- [85] X. Liu, M. Defrise, C. Michel, M. Sibomana, C. Comtat, P. E. Kinahan, and D. W. Townsend. Exact rebinning methods for three-dimensional PET. *IEEE Trans. Med. Imag.*, 18(8):657–664, August 1999.
- [86] M. Ljungberg, S.-E. Strand, and M. A. King, editors. *Monte Carlo calculations in nuclear medicine*. Medical Science Series: Applications in diagnostic imaging. Institute of Physics Publishing Ltd., London, 1998.
- [87] H. Lundqvist, M. Lubberink, and V. Tolmachev. Positron Emission Tomography. *Eur. J. Phys.*, 19(6):537–552, 1998.
- [88] T. Mayer-Kuckuk, editor. *Kernphysik*. Teubner Studienbücher, Physik, Stuttgart, 5 edition, 1992. ISBN: 3-519-43021-5.
- [89] B. Mazoyer, R. Trebossen, C. Schoukroun, B. Verrey, A. Syrota, J. Vacher, P. Lemasson, O. Monnet, A. Bouvier, and J. L. Lecomte. Physical characteristics of TTV03, a new high spatial resolution time-of-flight positron emission tomograph. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 37:778–782, 1990.
- [90] S. R. Meikle, S. Eberl, R. R. Fulton, and M. Kassiou. The influence of tomograph sensitivity on parameter estimation in small animal imaging systems. *IEEE Nucl. Sci. Symp. and Med. Imag. Conf.*, 3:1898–1903, 1998.
- [91] C. I. Melcher and J. S. Schweitzer. A promising new scintillator: Cerium-doped lutetium oxyorthosilicate. *Nucl. Instr. and Meth. in Phys.*, pages 212–214, 1992.
- [92] K. Meyberg and P. Vachenaer. *Höhere Mathematik 1*. Springer Verlag, Berlin, 1990.
- [93] K. Meyberg and P. Vachenaer. *Höhere Mathematik 2*. Springer Verlag, Berlin, 1991.
- [94] C. Michel, M. Sibomana, A. Bol, X. Bernard, M. Lonneux, M. Defrise, C. Comtat, P. E. Kinahan, and D. W. Townsend. Preserving Poisson characteristics of PET data with weighted OSEM reconstruction. *Proc. IEEE Trans. Nucl. Sci. Symp.*, 2:1323–1329, 1998.

- [95] W. W. Moses and S. E. Derenzo. Empirical observations of performance degradation in positron emission tomographs utilizing block detectors. *J. Nucl. Med.*, 34:101P, 1993.
- [96] W. W. Moses, P. R. G. Virador, S. E. Derenzo, R. Huesman, and T.-F. Budinger. Design of a high-sensitivity PET camera for human brains and small animals. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 44(4):1487–1491, August 1997.
- [97] K. Mueller, R. Yagel, and J. F. Cornhill. The weighted-distance scheme: A globally optimizing projection ordering method for ART. *IEEE Trans. Med. Imag.*, 16(2):223–230, April 1997.
- [98] E. U. Mumcuoglu and S. R. C. R. M. Leahy. Bayesian reconstruction of PET images: Methodology and performance analysis. *Phys. Med. Biol.*, 41:1777–1807, 1996.
- [99] E. U. Mumcuoglu, S. R. C. R. M. Leahy, and E. Hoffmann. Accurate geometric and physical response modelling for statistical image reconstruction in high resolution PET. *Proc. IEEE Nucl. Sci. Symp. and Med. Imag. Conf.*, 3:1569–1573, 1996.
- [100] F. Munz. *Parallele und verteilte Algorithmen in der funktionellen medizinischen Bildgebung*. Dissertation, Institut für Informatik, Lehrstuhl für Rechnertechnik und Rechnerorganisation, Technische Universität München, 1999.
- [101] W. R. Nelson, H. Hirayama, and D. W. O. Rogers. The EGS4 code system. Technical Report SLAC-265, Stanford Linear Accelerator Center, Stanford, CA, 1985.
- [102] J. Nuyts. Image formation and data processing. In C. Schiepers, editor, *Diagnostic Nuclear Medicine*, pages 237–249. Springer Verlag, Berlin, 2000.
- [103] H. Nyquist. Certain factors affecting telegraph speed. *Bell Syst. Tech. J.*, 3:324, 1924.
- [104] H. Nyquist. Certain topics in telegraph transmission theory. *AIEE Trans.*, 47:617–644, 1928.
- [105] T. R. Oakes, V. Sossi, and T. J. Ruth. Normalization for 3D PET with low-scatter planar source and measured geometric factors. *Phys. Med. Biol.*, 43:961–972, 1998.
- [106] N. A. of Sciences. Mathematics and physics of emerging biomedical imaging.
- [107] J. M. Ollinger. Model based scatter correction for fully 3D PET. *Phys. Med. Biol.*, 41(1):153–176, January 1996.
- [108] J. M. Ollinger and J. A. Fessler. Positron-Emission-Tomography. *IEEE Sign. Proc. Mag.*, 14(1):43–55, January 1997. ISSN: 1053-5888.
- [109] C. E. Ordonez, K. L. Matthews, and W. Chang. Rebinning errors in coincidence imaging due to depth of interaction. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 48(4):1386–1390, August 2001.
- [110] B. J. Pichler. *Untersuchung der Detektionseigenschaften von Lutetium-Oxyorthosilikat-Szintillationskristallen und Lawinen-Photodioden für die hochauflösende Positronen-Emissions-Tomographie*. Diplomarbeit im Studiengang Elektrotechnik, Technische Universität München, 1997.

- [111] B. J. Pichler. *Entwicklung eines Detektors für die hochauflösende Positronen-Emissions-Tomographie basierend auf Lutetium-Oxyorthosilikat-Szintillatoren, Lawinen-Photodioden-Matrizen, integrierter Elektronik und Doppellagenauslese*. Dissertation, Technische Universität München, 2001.
- [112] B. J. Pichler, G. Böning, E. Lorenz, R. Mirzoyan, W. Pimpl, M. Schwaiger, and S. I. Ziegler. Studies with a prototype high resolution PET scanner based on LSO-APD modules. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 45(3):1298–1302, June 1998.
- [113] B. J. Pichler, G. Böning, M. Rafecas, W. Pimpl, E. Lorenz, M. Schwaiger, and S. I. Ziegler. A 4x8 APD array, consisting of two monolithic silicon wafers, coupled to a 32-channel LSO matrix for high resolution PET. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 48(4):1391–1396, August 2001.
- [114] B. J. Pichler, W. Pimpl, W. Buttler, G. Böning, M. Rafecas, E. Lorenz, and S. I. Ziegler. Integrated low noise, low power, fast charge-sensitive preamplifier for avalanche photodiodes in JFET-CMOS-Technology. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 48(6):2370–2374, December 2001.
- [115] D. G. Politte and D. L. Snyder. Corrections for accidental coincidences and attenuation in maximum-likelihood image reconstruction for positron-emission-tomography. *IEEE Nucl. Sci. Symp. and Med. Imag. Conf.*, 3(3):1158–1162, 1999.
- [116] B. Povh, K. Rith, C. Scholz, and F. Zetsche, editors. *Teilchen und Kerne*. Springer Verlag, Berlin, 3 edition, 1995. ISBN: 3-540-59438-8.
- [117] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, editors. *Numerical Recipes in C, The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 2nd edition, 1994.
- [118] Die „parallel virtual machine“ Internetseite. [http://www.epm.ornl.gov/pvm/pvm\\_home.html](http://www.epm.ornl.gov/pvm/pvm_home.html).
- [119] J. Qi, R. M. Leahy, S. R. Cherry, A. Chatziioannou, and T. H. Farquhar. High resolution 3D bayesian image reconstruction using the microPET small animal scanner. *Phys. Med. Biol.*, 43(4):1001–1013, March 1998.
- [120] J. Qi, R. M. Leahy, C. Hsu, T. H. Farquhar, and S. R. Cherry. Fully 3D bayesian image reconstruction for the ECAT EXACT HR+. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 45(3):1096–1103, June 1998.
- [121] J. Radon. *Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten*. Number 69 in Math. Phys. Kl. Ber. Verh. Saechs. Akad. Leipzig, 1917. [Translation by: P.C. Parks in *IEEE Trans. Med. Imag.*, MI-5, 170, 1986].
- [122] M. Rafecas. *Effects of normalization and scatter discrimination methods for the high resolution LSO-APD PET*. Tesis de licenciatura, Universitat de València, 1998.
- [123] M. Rafecas. *High Resolution Animal PET with Granulated Detectors: Pre-reconstruction Processing and Evaluation of Novel Design Options*. Dissertation, Universitat de València, 2001.

- [124] M. Rafecas, G. Böning, B. J. Pichler, E. Lorenz, M. Schwaiger, and S. I. Ziegler. Compensation for geometrical effects and normalization in a high resolution animal PET scanner. *Eur. J. Nucl. Med.*, 26(9):1029, September 1999. Abstract.
- [125] M. Rafecas, G. Böning, B. J. Pichler, E. Lorenz, M. Schwaiger, and S. I. Ziegler. Compensation for sampling patterns and missing data in a high resolution animal PET scanner. *J. Nucl. Med.*, 40(5):279P, May 1999. Abstract.
- [126] M. Rafecas, G. Böning, B. J. Pichler, E. Lorenz, M. Schwaiger, and S. I. Ziegler. Characterization and processing of inter-crystal scatter in a dual layer, high resolution LSO-APD-PET. *Phys. Med. Biol.*, 2001. Submitted article.
- [127] M. Rafecas, G. Böning, B. J. Pichler, E. Lorenz, M. Schwaiger, and S. I. Ziegler. A Monte Carlo study of high resolution PET with granulated dual layer detectors. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 48(4):1490–1495, August 2001.
- [128] D. E. Reaside. Monte Carlo principles and applications. *Phys. Med. Biol.*, 21:181–197, 1976.
- [129] R. Repges. Radontransformation. In *Bildverarbeitung für die Medizin: Grundlagen, Modelle, Methoden, Anwendungen*, pages 251–265. Springer Verlag, Berlin, 1996. Band 2 (Kapitel 8-15).
- [130] K. Sauer and C. Bouman. A local update strategy for iterative reconstruction from projections. *IEEE Trans. Sign. Proc.*, 41(2):534–548, February 1993.
- [131] G. Schatz and A. Weidinger. *Nukleare Festkörperphysik*. Teubner Studienbücher, Physik, Stuttgart, 2 edition, 1992. ISBN: 3-519-13079-3.
- [132] C. Schmelz. *Untersuchung eines neuen Detektorsystems aus LSO-Szintillatoren und Lawinen-Photodioden für die Positronen-Emissions-Tomographie*. Diplomarbeit im Studiengang Physik, Technische Universität München, 1994.
- [133] D. Schmitt, B. K. C. Carrier, and R. Lecomte. Fast point spread function computation from aperture function in high-resolution positron emission tomography. *IEEE Trans. Med. Imag.*, 7:2–12, September 1988.
- [134] M. Schwaiger and S. Ziegler. Cardiac application of positron emission tomography. In M. P. Sandler, R. E. Coleman, F. J. T. Wackers, J. A. Patton, A. Gottschalk, and P. B. Hoffer, editors, *Diagnostic Nuclear Medicine*, volume 1, pages 517–542. William and Wilkins, Baltimore, 1995.
- [135] V. Selivanov and R. Lecomte. Fast PET image reconstruction based on SVD decomposition of the system matrix. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 48(3):761–767, June 2001.
- [136] V. Selivanov, Y. Picard, J. Cardorette, S. Rodrigue, and R. Lecomte. Detector response models for statistical iterative image reconstruction in high resolution PET. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 47(3):1168–1175, June 2000.
- [137] Y. Shao, S. R. Cherry, S. Siegel, and R. W. Silverman. A study of inter-crystal scatter in small scintillator arrays designed for high resolution PET imaging. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 43(3):1938–1943, June 1996.

- [138] L. Shepp and Y. Vardi. Maximum Likelihood reconstruction for emission tomography. *IEEE Trans. Med. Imag.*, MI-1:113–122, 1982.
- [139] E. J. Soares, C. L. Byrne, and S. J. Glick. Noise characterization of block-iterative reconstruction algorithms: I. Theory. *Trans. Med. Imag.*, 19(4):260–270, April 2000.
- [140] I. Sobol'. The Monte Carlo Method. In R. Messer, J. Stone, and P. Fortini, editors, *Popular Lectures in Mathematics*. The University of Chicago Press, Chicago and London, 1974.
- [141] S. Sotthivirat and J. A. Fessler. Image recovery using partitioned-separable paraboloid surrogate coordinate ascent algorithms. *IEEE Trans. Imag. Proc.*, 11(3):306–317, March 2002.
- [142] V. S. Sunderam, G. A. Geist, J. Dongarra, and R. Manchek. The PVM concurrent computing system: Evolution, experiences, and trends. *Parallel Computing, Vol. 20 (4)*, 1993.
- [143] A. Terstegge, S. Weber, H. Herzog, H. W. Müller-Gärtner, and H. Halling. High resolution and better quantification by tube of response modelling in 3D PET reconstruction. *Proc. IEEE. Nucl. Sci. Symp. and Med. Imag. Conf.*, 3:1603–1607, 1996.
- [144] C. J. Thompson, J. Moreno-Cantu, and Y. Picard. PETSIM: Monte Carlo simulation of all sensitivity and resolution parameters of cylindrical positron imaging systems. *Phys. Med. Biol.*, 37(3):731–749, 1992.
- [145] D. W. Townsend and M. Defrise. Image reconstruction methods in positron tomography. Technical report, CERN European Organization for Nuclear Research, 1993.
- [146] J. E. Turner, H. A. Wright, and R. N. Hamm. A Monte Carlo primer for health physicists. *Health Phys.*, 48:717–733, 1985.
- [147] E. Veklerov, J. Llacer, and E. J. Hoffmann. MLE reconstruction of a brain phantom using a Monte Carlo transition matrix and a statistical stopping rule. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 35(1):603–607, February 1988.
- [148] S. Weber, H. Herzog, H. H. Coenen, M. Cremer, R. Engels, K. Hamacher, F. Kehren, H. Muehlensiepen, L. Ploux, R. Reinartz, P. Reinhart, F. Rongen, F. Sonnenberg, and H. Halling. Evaluation of the TierPET system. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 46(4):1177–1183, August 1999.
- [149] A. Werling, O. Bublitz, J. Doll, L. E. Adam, and G. Brix. Implementation of the single scatter simulation algorithm and its use in iterative image reconstruction of PET data. *IEEE Nucl. Sci. Symp. and Med. Imag. Conf.*, 3(3):1158–1162, 1999.
- [150] H. J. Wieler, editor. *PET in der klinischen Onkologie*. Steinkopf Verlag, Darmstadt, 1999. ISBN: 3-7985-1146-2.
- [151] K. Wienhard, L. Eriksson, S. Grootenok, M. Casey, U. Pietrzyk, and W. D. Heiss. Performance evaluation of the positron scanner ECAT EXACT. *J. Comp. Ass. Tomogr.*, 16(5):804–813, 1992.

- [152] M. Yavuz and J. A. Fessler. Objective functions for tomographic reconstruction from randoms-precorrected PET scans. *Proc. IEEE Nuc. Sci. Symp. Med. Imag. Conf.*, 1996.
- [153] M. Yavuz and J. A. Fessler. Statistical image reconstruction methods for randoms-precorrected PET scans. *Med. Imag. Analysis*, 2(4):369–378, 1998.
- [154] S. I. Ziegler, H. Ostertag, W. K. Kuebler, W. J. Lorenz, and E. W. Otten. Effects of scintillation light collection on the time resolution of a time-of-flight detector for annihilation quanta. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 37:574–579, 1990.
- [155] S. I. Ziegler, B. J. Pichler, G. Böning, M. Rafecas, W. Pimpl, E. Lorenz, N. Schmitz, and M. Schwaiger. A prototype high resolution animal positron tomograph with avalanche photodiode arrays and LSO crystals. *Eur. J. Nucl. Med.*, 28(2):136–143, February 2001.
- [156] S. I. Ziegler, B. J. Pichler, and E. Lorenz. Neue Detektor-Entwicklungen für die hochauflösende Positronen-Emissions-Tomographie. *Z. Med. Phys.*, 8:177–185, 1998.

# Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle bei allen Personen herzlich bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

An erster Stelle danke ich Herrn Prof. Schmitz vom Max-Planck-Institut für Physik in München und Herrn Prof. Schwaiger von der Nuklearmedizinischen Klinik der Technischen Universität München. Herr Schmitz hat sich freundlicherweise sofort bereit erklärt, diese Arbeit als mein Doktorvater zu betreuen. Er ermöglichte mir eine finanzielle Absicherung durch ein Stipendium und die Aufnahme in die an seinem Institut von Herrn Dr. Eckart Lorenz geleitete Arbeitsgruppe HEGRA. Herr Prof. Schwaiger ermöglichte mir den Einstieg in die Nuklearmedizin und in die medizinische Bildgebung und hat meine Tätigkeiten auf diesen Gebieten seit vielen Jahren verfolgt und unterstützt, nicht zuletzt durch die Schaffung einer sehr kreativen und angenehmen Arbeitsumgebung.

Herrn Dr. Eckart Lorenz danke ich vielmals für die freundliche Aufnahme in seiner Gruppe und die fachliche Betreuung meiner Arbeit stellvertretend für das Max-Planck-Institut. Seine Unterstützung dieses Projektes innerhalb seines Instituts war ein wesentlicher Faktor bei der erfolgreichen Durchführung dieser Arbeit. Er ermöglichte den fachlichen Austausch mit Kollegen durch die Bewilligung meiner Teilnahme an nationalen und internationalen Kongressen.

Mein ganz besonderer Dank gilt Frau Dr. Sibylle Ziegler von der Nuklearmedizinischen Klinik für die Anregung dieser Arbeit, ihre fachliche Betreuung und die Leitung des MADPET Projektes von Seiten der Nuklearmedizinischen Klinik. Der Gedankenaustausch mit ihr war immer ein Vergnügen und für die hervorragenden Resultate, die in dieser Arbeit erzielt wurden, maßgeblich entscheidend. Unter anderem hatte sie durch schnelles, kompetentes und auch sehr geduldiges Korrigieren der Vorversionen einen wesentlichen Anteil am Aufbau, Inhalt und Wortlaut dieser Arbeit.

Meine Mitstreiter Frau Dr. Magdalena Rafecas und Herrn Dr. Bernd Pichler kann ich nicht genug loben. Nicht selten vermochten wir uns aus den mit unseren Dissertationen verbundenen emotionalen und gelegentlich auch fachlichen Krisensituationen gegenseitig herauszuziehen. Bernd war immer für Fragen bezüglich der Tomographen-Hardware zu begeistern. Im Besonderen beteiligte er sich aufopfernd an der sorgfältigen Untersuchung der MADPET Messelektronik, was für die Entwicklung des PVM-gestützten Messaufbaus essentiell war. Magdalena kämpfte mit mir tapfer an der Front der tomographischen Datenanalyse und -verarbeitung und trug wesentlich zu meinem Verständnis der Vorgänge bei der Messung mit hochauflösenden Kleintiertomographen und der anschließenden Datenverarbeitung bei. Ihre sorgfältige Korrekturlesung dieser Arbeit war eine große Hilfe.

Für die Entwicklung und Bereitstellung der ASPIRE Rekonstruktionsbibliothek danke ich Herrn Prof. Jeff Fessler von der University of Michigan (Ann Arbor, Michigan, USA). Gemeinsam mit Herrn Dr. Vitali Selivanov (damals bei Sherbrooke-Animal-PET, Université de Sherbrooke, Québec, CAN) bestärkte er mich in Gesprächen auf Kongressen (trotz seines

übevollen Terminplans) zur weiteren Verfolgung meines hier vorgestellten Lösungsansatzes, der Monte Carlo Simulation der Systemmatrix für die iterative statistische Bildrekonstruktion unter Verwendung von List-Mode Histogrammen.

Herrn Michael Herz von der Radiochemischen Abteilung der Nuklearmedizinischen Klinik danke ich vielmals für die Synthese und Bereitstellung der Radiopharmaka. Mein Dank gilt auch Herrn Lothar Weiss vom Max-Planck-Institut für Physik in München, der mit der exakten Herstellung des Plexiglas-Strukturphantoms wesentlich zu der Qualität der hier gezeigten Bilder beigetragen hat.

Herrn Andreas Enterrottacher von der Computergruppe der Nuklearmedizinischen Klinik möchte ich für seine zahlreichen Hilfestellungen bei der Diskussion und Lösung von Rechnerproblemen danken. Nachdem sich bei mir die Idee entwickelt hatte, die Lasten bei der MADPET-Messung auf mehrere Rechner zu verteilen, erhielt ich von Herrn Dr. Frank Munz (damals an der Nuklearmedizinischen Klinik) aufgrund seiner Erfahrungen mit parallelem Rechnen die ersten Ermunterungen zur Verwendung von PVM.

Abschließend möchte ich mich ganz herzlich bei meinen Eltern bedanken. Sie haben mich in meiner Entscheidung unterstützt und mich motiviert, jedoch immer auch eine objektive und kritische Sichtweise bewahrt. Die erfahrene Lesung einer frühen Version der Arbeit durch meinen Vater war sehr wertvoll und lieferte mir zahlreiche neue Ansatzpunkte für ihre Verbesserung und Abrundung. Die regelmäßige Versorgung mit Essenspaketen durch meine Mutter war in den häufigen Extrem-Arbeitsphasen oftmals die letzte Rettung.