SOMMAIRE DU N^o 111

Éditorial

C'est pour moi sans doute la dernière occasion de vous présenter mes vœux. Après cinq années à la tête de la Gazette, je céderai la place à Jean-Christophe Leger cet été. Par ailleurs depuis quelque mois la composition de la Gazette est entièrement réalisée par Claire Ropartz. Qu'elle soit ici remerciée pour l'efficacité de son travail, qui vient en surcharge de ses autres responsabilités à la SMF. Enfin le numéro spécial 2006 souffre d'un petit retard dû à l'ampleur du projet : la retranscription des entretiens de Liliane Beaulieu avec Henri Cartan. Il vous parviendra au cours de l'année 2007, que je vous souhaite bonne et heureuse.

— Colette Anné

SMF

Mot de la Présidente

Vous recevez avec cette *Gazette* un exemplaire de la brochure « Zoom sur les métiers des mathématiques » réalisée en partenariat avec l'ONISEP. Le document sera diffusé à plusieurs dizaines de milliers d'exemplaires, notamment à l'ensemble des collèges et lycées, ainsi qu'à tous les membres de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP) et des autres associations parties prenantes du projet (SMAI, SFDS, femmes et mathématiques).

Destiné à un public large et extérieur à notre communauté, ce document met en évidence une évolution notable du rôle de notre discipline dans la société française. Les métiers des mathématiques se diversifient indiscutablement, et nous ne sommes pas les seuls à le dire. La presse commence à se faire l'écho de ce changement : Robin Carcan, dans la revue Courrier Cadre de l'Association Pour l'Emploi des Cadres, ou encore Amélie Castan pour le magazine pour lycéens *Phosphore* ou plus récemment pour Eureka ont publié des articles décrivant la variété et l'ubiquité des métiers des mathématiques.

Sa lecture est utile pour nous aussi : les métiers des mathématiques sont parfois différents de ceux que nous imaginions, les parcours de formation qui y conduisent également. Nos formations universitaires sont-elles bien adaptées ? Comment renforcer la présence des mathématiques dans les écoles d'ingénieurs, dont beaucoup de professionnels des mathématiques sont issus ? Groupe de travail avec la Commission du Titre des Ingénieurs, réunion publique sur le niveau L, réunion des responsables de Masters, parrainage du troisième colloque « Mathématiques dans les formations d'ingénieur », voilà quelques initiatives de la SMF dans les prochains mois dans ce domaine.

Mais ces actions ne suffisent pas. Il faut travailler avec toutes les associations de mathématiques, avec les autres disciplines scientifiques, ce que nous faisons dans le cadre d'Action Science. Il faut surtout réussir à toucher plus profondément l'opinion publique et les décideurs politiques. Alors que des besoins nouveaux en compétences mathématiques se manifestent, l'évolution de l'enseignement secondaire depuis la « rénovation pédagogique » de 1995 a entraîné une chute brutale du niveau mathématique des bacheliers scientifiques. En 1994 près de 75 000 élèves avaient 9 h de mathématiques par semaine en terminale, ils n'étaient plus qu'environ 35 000 à avoir 7,5 h de mathématiques par semaine en 2004 ! Et, malgré cela, l'idée que les mathématiques demeurent avant tout un outil de sélection reste profondément ancré dans l'esprit de nombre de nos concitoyens et alimentée régulièrement par la presse et les médias. Comment sortir de cette impasse ?

Il n'y a évidemment pas de recette miracle. Il faut en toute circonstance expliquer et essayer de convaincre. « Zoom sur les métiers des mathématiques » est un outil de plus à notre disposition pour faire avancer la réflexion collective sur l'utilité et la nécessité des mathématiques. Dans cet esprit, nous avons prévu d'organiser au printemps une rencontre entre plusieurs centaines de lycéennes et lycéens et ces jeunes professionels qui vivent au jour le jour les nouveaux métiers des mathématiques.

Le 15 décembre 2006
Marie-Françoise Roy

MATHÉMATIQUES

La preuve originale de S. Mazur pour son théorème sur les algèbres normées

Pierre Mazet[1]

1. Introduction

Théorème 1. *Toute $\mathbb{C}$-algèbre normée qui est un corps est isomorphe au corps des nombres complexes.*

C'est une version classique d'un énoncé connu sous le nom de Théorème de Gelfand-Mazur.

Historiquement le premier énoncé de ce type est celui de Stanislaw Mazur publié dans les *Annales de la Société Polonaise de Mathématiques* [9] daté du 25 juin 1938 sous la forme :

Théorème 2. *Si, dans un anneau linéaire $\mathfrak{A}$, une norme est définie satisfaisant – outre des conditions habituelles – à la condition $\|A.B\| = \|A\|.\|B\|$, l'anneau $\mathfrak{A}$ équivaut (c.-à-d. peut être représenté en conservant les opérations et la norme) soit au corps des nombres réels, soit à celui des nombres complexes, soit au corps des quaternions réels ; si $\mathfrak{A}$ est un corps (non nécessairement commutatif) et la norme satisfait à la condition plus faible $\|A.B\| \leqslant \|A\|.\|B\|$, il est isomorphe (c.-à-d. représentable homéomorphiquement avec conservation des opérations) à un des trois corps mentionnés.*

Ces résultats sont repris sous une forme légèrement différente dans une note aux *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* du 28 novembre 1938 [1] où l'on trouve :

Théorème 3. *Chaque domaine de rationalité du type (B^*) est isomorphe au domaine de rationalité des nombres réels, des nombres complexes ou des quaternions.*

(Dans la terminologie de Mazur, un domaine de rationalité est une $\mathbb{R}$-algèbre qui est un corps ; elle est dite de type B^* lorsqu'elle est munie d'une norme d'algèbre.)

En restreignant cet énoncé au cas des $\mathbb{C}$-algèbres on obtient immédiatement l'énoncé 1

Peu de temps après, Israil Moiseevic Gelfand dans une note aux *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS* du 27 mars 1939 [2] présente son programme d'études des $\mathbb{C}$-algèbres normées et énonce :

[1] Université Pierre et Marie Curie, Institut de mathématiques de Jussieu (UMR 7586)

Théorème 4. *The ring of residues to a maximal ideal is the corpus of complex numbers.*

Ce qui est équivalent à l'énoncé 1.

Si ces notes contiennent les énoncés indiqués, elles ne contiennent aucune preuve. Toutefois la note de Gelfand annonce la parution de la démonstration des énoncés dans le Recueil Mathématique de Moscou.

Effectivement en 1941, dans son article fondateur de la théorie des algèbres normées, Gelfand [3] donne tous les développements annoncés dans la note [2] et, en particulier, la preuve du théorème 4. Cette preuve, particulièrement élégante, s'appuie sur la théorie des fonctions holomorphes et le théorème de Liouville.

Parallèlement, Mazur ne publie aucune preuve de son énoncé et, à ma connaissance, il faut attendre le livre [6] ([7] pour une version en anglais) de W. Zelazko (élève de S. Mazur) en 1968 pour lire la preuve originale de Mazur telle qu'il la lui a transmise. Cette preuve, comme celle de Gelfand, s'appuie sur le théorème de Liouville. La différence fondamentale est que, l'énoncé de Mazur étant dans le cadre des algèbres réelles, on y considère la partie réelle de $\dfrac{1}{X-\lambda}$ et des fonctions harmoniques alors que Gelfand considère $(x-\lambda e)^{-1}$ et des fonctions holomorphes.

La preuve de Mazur est donc tout aussi élégante que celle de Gelfand, c'est pourtant cette dernière qui est restée la preuve la plus utilisée pour démontrer l'énoncé 1. Il est d'ailleurs curieux de constater que, en 1987, dans sa note [5] sur les contributions de Mazur à l'analyse fonctionnelle, G. Köthe mentionne le théorème 3 mais cite immédiatement Gelfand pour la preuve de l'énoncé. De même, en 1991, dans l'article de [10] ([11] pour une version anglaise et [8] pour une version française) consacré aux théorèmes de Hopf et de Gelfand-Mazur, R. Remmert dit : *« Si Hopf avait eu connaissance en 1940 de la note aux* Comptes Rendus *de Mazur ; il aurait sans aucun doute démontré ce théorème »* . On a donc l'impression que l'absence d'une preuve par Mazur de son énoncé créait un manque réel comblé par Gelfand quelques années plus tard. Peut-être même certains mathématiciens ont douté que Mazur ait effectivement obtenu une preuve complète de son énoncé. Nous allons voir que cette preuve existait bien et comment elle a pu être retrouvée.

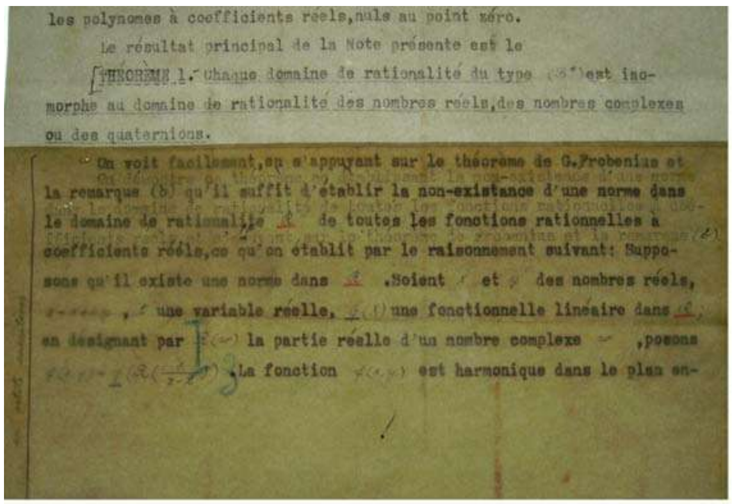
2. La preuve de Mazur retrouvée

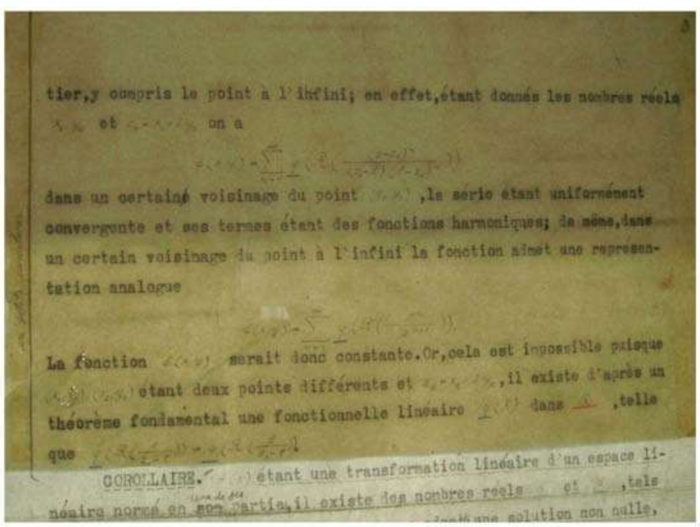
C'est pour répondre à une question demandant une preuve élémentaire du théorème de Gelfand-Mazur que j'ai voulu trouver la preuve originelle de Mazur. Constatant qu'elle n'avait jamais été publiée j'ai essayer de retrouver dans les livres une explication à cette absence de publication. c'est alors que j'ai été intrigué par une note en bas de page dans le livre [6] de W. Zelazko. Le livre étant rédigé en polonais (j'ignorais alors l'existence de la version anglaise [7]), je n'ai pas réalisé tout de suite qu'il comportait la preuve transmise par Mazur à Zelazko. C'est donc en faisant traduire cette note en bas de page que j'ai appris que le manuscrit original de S. Mazur comportait la démonstration mais que celle-ci avait dû être supprimée car la première version de la note avait été jugée trop longue.

Afin d'approfondir ce point j'ai demandé à C. Gilain d'aller voir aux archives de l'académie des sciences de Paris sous quelle forme était le manuscrit originel de Mazur. C'est ainsi qu'il a découvert qu'immédiatement après l'énoncé principal (théorème 3) le manuscrit était caché par une feuille de papier collée qui recouvrait toute la démonstration et sur laquelle se trouve la petite phrase que l'on trouve actuellement dans la note indiquant très succinctement la démarche :

On démontre ce théorème en établissant la non-existence d'une norme dans le domaine de rationalité de toutes les fonctions rationnelles à coefficients réels, et en s'appuyant sur le théorème de Frobenius et la remarque b.

Heureusement, les feuilles de papier utilisées sont suffisamment fines pour que l'on puisse lire les parties cachées par transparence. On trouvera ci-dessous les photos des zones concernées ; la démonstration cachée apparaît dans les parties plus foncées de la photo qui sont vues par transparence. La phrase indiquée précédemment apparaît en plus clair par dessus le texte de la preuve dans la première photo.


les polynomes à coefficients réels, nuls au point zéro.
Le résultat principal de la Note présente est le
THÉORÈME 1. Chaque domaine de rationalité du type [illegible] est isomorphe au domaine de rationalité des nombres réels, des nombres complexes ou des quaternions.
On voit facilement, en s'appuyant sur le théorème de G. Frobenius et la remarque (b) qu'il suffit d'établir la non-existance d'une norme dans le domaine de rationalité [illegible] de toutes les fonctions rationnelles à coefficients réels, ce qu'on établit par le raisonnement suivant: Supposons qu'il existe une norme dans [illegible]. Soient [illegible] et [illegible] des nombres réels, [illegible], [illegible] une variable réelle, [illegible] une fonctionnelle linéaire dans [illegible], en désignant par [illegible] la partie réelle d'un nombre complexe [illegible], posons [illegible]. La fonction [illegible] est harmonique dans le plan en-


tier, y compris le point à l'infini; en effet, étant donnés les nombres réels [illegible] et [illegible] on a
[illegible]
dans un certain voisinage du point [illegible], la série étant uniformément convergente et ses termes étant des fonctions harmoniques; de même, dans un certain voisinage du point à l'infini la fonction admet une représentation analogue
[illegible]
La fonction [illegible] serait donc constante. Or, cela est impossible puisque [illegible] étant deux points différents et [illegible], il existe d'après un théorème fondamental une fonctionnelle linéaire [illegible] dans [illegible], telle que [illegible]
COROLLAIRE. [illegible] étant une transformation linéaire d'un espace linéaire normé en son partie, il existe des nombres réels [illegible] et [illegible], tels [illegible] une solution non nulle,

On pourra noter sur la marge gauche l'inscription verticale « en petits caractères ». Il s'agit probablement d'une tentative de S. Mazur pour raccourcir le manuscrit sans faire disparaître la preuve.

Voici donc le texte de cette preuve :

On voit facilement en s'appuyant sur le théorème de G. Frobenius et la remarque (b) qu'il suffit d'établir la non-existence d'une norme dans le domaine de rationalité $\mathcal{R}$ de toutes les fonctions rationnelles à coefficients réels, ce qu'on établit par le raisonnement suivant : supposons qu'il existe une norme dans $\mathcal{R}$. Soient x et y des nombres réels, $z = x + iy$, t une variable réelle, $\varphi(X)$ une fonctionnelle linéaire dans $\mathcal{R}$; en désignant par $\mathcal{R}(w)$ la partie réelle d'un nombre complexe w, posons $f(x,y) = \varphi(\Big(\mathcal{R}(\frac{1}{z-t})\Big)$. La fonction $f(x,y)$ est harmonique dans le plan entier, y compris le point à l'infini ; en effet, étant donnés les nombres réels x_0, y_0 et $z_0 = x_0 + iy_0$ on a

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi\Big(\mathcal{R}(\frac{(z-z_0)^n}{(z_0-t)(t-z_0)^n})\Big)$$

dans un certain voisinage du point (x_0, y_0), la série étant uniformément convergente et ses termes étant des fonctions harmoniques ; de même dans un certain voisinage du point à l'infini la fonction admet une représentation analogue

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\Big(\mathcal{R}(\frac{t^n}{z^{n+1}})\Big) \ .$$

La fonction $f(x,y)$ serait donc constante. Or cela est impossible puisque $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ étant deux points différents et $z_k = x_k + iy_k$, il existe d'après un théorème fondamental une fonctionnelle linéaire $\varphi(X)$ dans $\mathcal{R}$ telle que

$$\varphi\Big(\mathcal{R}(\frac{1}{z_1-t})\Big) \neq \varphi\Big(\mathcal{R}(\frac{1}{z_2-t})\Big) \ .$$

On notera d'ailleurs une légère erreur dans ce manuscrit puisque la sommation dans les développements en série indiqués doit être faite pour n allant de 0 à l'infini et non de 1 à l'infini.

3. Commentaires sur les énoncés de Mazur et de Gelfand et sur les preuves respectives.

Bien que très voisins, les énoncés de Mazur et de Gelfand relèvent de préoccupations différentes. Le travail de Mazur est dans la lignée du théorème de G. Frobenius [4] qui affirme essentiellement que les seuls corps qui soient des $\mathbb{R}$-algèbres de dimension finie sont, à isomorphisme près, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{H}$. On trouvera d'ailleurs une intéressante étude sur les problèmes de ce type dans l'article de R. Remmert de [10] (ou [11] ou [8]).

En fait G. Frobenius montre que les corps mentionnés sont les seules $\mathbb{R}$-algèbres sans diviseur de 0 qui ne possèdent pas d'élément transcendant (ce qui s'applique évidemment aux corps de dimension finie). Le but de Mazur est d'étendre ce résultat en remplaçant l'hypothèse « de dimension finie » par l'hypothèse « normée ». Tout revient donc à prouver qu'il n'y a pas de norme d'algèbre sur le corps $\mathbb{R}(X)$ des fractions rationnelles à coefficients réels. L'étude se place donc délibérément dans le cadre des scalaires réels.

De son côté, Gelfand souhaite montrer qu'il y a correspondance biunivoque entre les idéaux maximaux d'une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach et ses caractères (c'est-à-dire les morphismes de cette algèbre vers $\mathbb{C}$). Le contexte est donc celui des $\mathbb{C}$-algèbres de Banach. Ce contexte permet alors de développer la théorie des fonctions holomorphes de $\mathbb{C}$ vers une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach et d'obtenir la preuve que nous connaissons. Cette preuve est alors très rapide mais suppose des préliminaires sur la théorie des fonctions holomorphes à valeurs dans un espace de Banach, ce qui prend plusieurs pages dans l'article de Gelfand. La preuve de Mazur paraît donc sensiblement plus rapide. On doit cependant noter qu'elle est très succincte au niveau des justifications. Il suffit, pour s'en convaincre de voir la preuve détaillée présentée par Zelazko dans [6] ou [7].

Il faut par ailleurs remarquer que le fait que les espaces normés considérés par Gelfand sont complets est utile pour définir la notion de fonction holomorphe alors que la preuve de Mazur montre que cette hypothèse de complétude est inutile (il est d'ailleurs facile de déduire les cas général à partir du cas des algèbres complètes). On peut donc dire que, si le cadre utilisé par Gelfand lui permet une preuve particulièrement élégante, celui de Mazur consistant à prouver la non existence d'une norme d'algèbre sur $\mathbb{R}(X)$ permet d'expliciter plus clairement le fond du problème.

La similitude des deux preuves peut donner à penser qu'il y a eu un échange entre Mazur et Gelfand mais je n'ai pas pu élucider ce point.

Il est par ailleurs intéressant de noter que les deux preuves font appel au théorème de Hahn-Banach et donc à l'axiome du choix pour appliquer le théorème de Liouville à des fonctions à valeurs scalaires. Plus précisément, Mazur fait référence à « un théorème fondamental » sans le citer plus explicitement tandis que Gelfand invoque un « théorème de Hahn ». Il est cependant facile de contourner cette utilisation de l'axiome du choix en utilisant le théorème de Liouville pour les fonctions sous-harmoniques et en remarquant que la norme de la fonction utilisée est sous-harmonique.

Ainsi, le théorème de Gelfand-Mazur est réputé pour avoir une démonstration très simple pourvu que l'on utilise quelques notions assez sophistiquées comme la théorie des fonctions holomorphes à valeurs dans un espace de dimension infinie et le théorème de Hahn-Banach. En fait il est assez facile de contourner ces notions délicates en revenant aux deux principes fondamentaux de cette preuve (que ce soit dans la version de Mazur ou celle de Gelfand) à savoir la formule de la moyenne et le principe du maximum qui en découle. C'est une telle preuve que je propose dans la sections suivante.

4. Une preuve élémentaire ?

Il s'agit donc de prouver le théorème 1.

Raisonnons par l'absurde et considérons une $\mathbb{C}$-algèbre normée A qui est un corps différent de $\mathbb{C}$. En notant e l'élément unité de A, il y a donc un élément a dans A qui n'appartient pas $\mathbb{C}e$. Ainsi, pour tout λ dans $\mathbb{C}$, $a - \lambda e$ n'est pas nul, donc est inversible, ce qui permet d'introduire la fonction $\varphi : \lambda \mapsto (a - \lambda e)^{-1}$ de $\mathbb{C}$ vers A. Montrons alors que l'étude de cette fonction aboutit à une contradiction.

4.1. Quelques remarques simples.

La relation $\dfrac{\lambda}{X-\lambda} = \dfrac{X}{X-\lambda} - 1$ prouve $\lambda\varphi(\lambda) = a\varphi(\lambda) - 1$, d'où

$$|\lambda| \cdot \|\varphi(\lambda)\| \leqslant \|a\| \cdot \|\varphi(\lambda)\| + 1 \quad \text{ et, si } |\lambda| > \|a\|,\ \|\varphi(\lambda)\| \leqslant \frac{1}{|\lambda| - \|a\|}.$$

En particulier on a :

$$\|\varphi(\lambda)\| \to 0 \quad \text{lorsque} \quad |\lambda| \to +\infty. \tag{1}$$

La relation $\dfrac{1}{X-\lambda} - \dfrac{1}{X-\mu} = \dfrac{\lambda-\mu}{(X-\lambda)(X-\mu)}$ donne

$$\varphi(\lambda) - \varphi(\mu) = (\lambda-\mu)\varphi(\lambda)\varphi(\mu)\ .$$

On en déduit $\big|\|\varphi(\lambda)\| - \|\varphi(\mu)\|\big| \leqslant |\lambda-\mu| \cdot \|\varphi(\lambda)\| \cdot \|\varphi(\mu)\|$, d'où l'on tire

$$\Big|\frac{1}{\|\varphi(\lambda)\|} - \frac{1}{\|\varphi(\mu)\|}\Big| \leqslant |\lambda-\mu|\ .$$

Cela prouve la continuité de $\dfrac{1}{\|\varphi(\lambda)\|}$ et donc de $\|\varphi(\lambda)\|$ comme fonction de λ.

4.2. Preuve du théorème.

Pour α fonction de $\mathbb{C}$ dans un groupe additif définissons $\Delta\alpha$ sur $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ par :

$$\Delta\alpha(\lambda,t) = \alpha(\lambda+t) + \alpha(\lambda+\mathrm{j}t) + \alpha(\lambda+\mathrm{j}^2t)\ .$$

Nous utiliserons en particulier $\alpha=\varphi$, $\alpha=\|\varphi\|$ et $\alpha=N$ où $N(\lambda)=\lambda\bar\lambda$.

On vérifie aisément $\Delta N(\lambda,t) = 3\lambda\bar\lambda + 3t\bar t$.
Par ailleurs, la relation

$$\frac{1}{X-t} + \frac{1}{X-\mathrm{j}t} + \frac{1}{X-\mathrm{j}^2t} = \frac{3}{X} + \frac{3t^3}{X(X-t)(X-\mathrm{j}t)(X-\mathrm{j}^2t)}$$

fournit (en substituant $a-\lambda$ à X)

$$\Delta\varphi(\lambda,t) = 3\varphi(\lambda) + 3t^3\varphi(\lambda)\varphi(\lambda-t)\varphi(\lambda-\mathrm{j}t)\varphi(\lambda-\mathrm{j}^2t)\ .$$

Compte tenu de la continuité de φ, on a donc, pour λ fixé :

$$\text{pour } t\to 0, \quad \Delta\varphi(\lambda,t) = 3\varphi(\lambda) + O(t^3). \tag{2}$$

On a clairement

$$\Delta\|\varphi\|(\lambda,t) \geqslant \|\Delta\varphi(\lambda,t)\|, \text{ d'où } \Delta\|\varphi\|(\lambda,t) \geqslant 3\|\varphi(\lambda)\| + O(t^3)\ .$$

Introduisons alors, pour $\varepsilon>0$, la fonction $\psi = \|\varphi\| + \varepsilon N$. Les résultats précédents prouvent, pour λ fixé, $\Delta\psi(\lambda,t) \geqslant 3\psi(\lambda) + 3\varepsilon t\bar t + O(t^3)$; il s'ensuit que, dès que $|t|$ est suffisamment petit mais non nul, on a $\Delta\psi(\lambda,t) > 3\psi(\lambda)$. En particulier, dans ces conditions, l'un au moins des $\psi(\lambda-t)$, $\psi(\lambda-\mathrm{j}t)$, $\psi(\lambda-\mathrm{j}^2t)$ est strictement supérieur à $\psi(\lambda)$. On peut donc conclure qu'en aucun point de $\mathbb{C}$, la fonction ψ ne peut présenter un maximum local.

Choisissons alors un $R > 0$, sur le compact $\overline{D}(0, R)$ la fonction ψ qui est continue atteint un maximum. D'après le résultat précédent ce maximum ne peut être atteint à l'intérieur du disque, il est donc atteint sur la frontière, d'où la majoration :

$$\psi(0) = \|\varphi(0)\| \leqslant \sup_{|\lambda|=R} \psi(\lambda) = \sup_{|\lambda|=R} \|\varphi(\lambda)\| + \varepsilon R^2. \tag{3}$$

En faisant tendre ε vers 0 la relation précédente donne

$$\|\varphi(0)\| \leqslant \sup_{|\lambda|=R} \|\varphi(\lambda)\| \ ;$$

en faisant tendre ensuite R vers l'infini, on obtient, grâce à (1), $\|\varphi(0)\| = 0$ ce qui fournit une contradiction puisque φ n'est jamais nulle et achève la démonstration.

Remerciements :

Je tiens à remercier tout particulièrement le professeur W. Zelazko, d'une part pour son livre dont la note en bas de page a été le point de départ de cette recherche et d'autre part pour les informations personnelles qu'il a pu me donner sur S. Mazur. Mes remerciements vont également à mon collègue C. Gilain qui m'a introduit dans les archives de l'académie des sciences de Paris et m'a donné de nombreux conseils utiles pour mener à bien ce travail.

5. Références

[1] S. Mazur *Sur les anneaux linéaires*, C. R. Acad. Sci., Paris, **207** (1938), 1025-1027.
[2] I. Gelfand *On normed rings*, C. R. (Dokl.) Acad. Sci. URSS, **23** (1939), 430-432.
[3] I. Gelfand *Normierte Ringe*,Matem. Sbornik, **51** (1941), 3-24.
[4] G. Frobenius *Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen*, J. reine ang. Math. **84** (1878), 1-63.
[5] G. Köthe *Stanislaw Mazur's contributions to functional analysis*, Math. Ann. **277** (1987), 489-528.
[6] W. Zelazko *Algebry Banacha*, Biblioteka Matematyczna 32. Warszawa : Panstwowe Wydawnictwo Naukowe (1968).
[7] W. Zelazko *Banach algebras*,Modern Analytic and Computational Methods in Science and Mathematics. Amsterdam : Elsevier Publishing Company (1973(.
[8] H-D. Ebbinghaus, H. Hermès, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, J. Neukirch, A. Prestel, R. Remmert *Les nombres. Leur histoire, leur place et leur rìle*, Vuibert. Paris (1998).
[9] S. Mazur *Sur les anneaux linéaires*, Annales de la Société Polonaise de Mathématiques **17** (1938) p. 112.
[10] H-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, J. Neukirch, A. Prestel, R. Remmert , Springer-Lehrbuch, Springer (1992).
[11] H-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, J. Neukirch, A. Prestel, R. Remmert *Numbers*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, (1996).

Géométrie analytique *p*-adique : la théorie de Berkovich

Antoine Ducros[1]

À la fin des années quatre-vingts, Vladimir Berkovich a suggéré un nouveau point de vue sur la géométrie analytique *p*-adique, et plus généralement ultramétrique ([5], [6] ; voir aussi [8] et [27]). Il obtient notamment des espaces localement compacts et localement connexes par arcs ; de plus, ils ont tendance à contenir de manière naturelle les réalisations géométriques de nombreux objets combinatoires (graphes de réduction, éventails, immeubles de Bruhat-Tits...) que l'on définit abstraitement en géométrie algébrique ; mieux, ils se rétractent souvent sur les réalisations en question.

Motivée à l'origine par des questions de théorie spectrale, l'approche de Berkovich s'est révélée extrêmement féconde.

On lui doit la démonstration de certaines conjectures difficiles de géométrie arithmétique (cycles évanescents, correspondance de Jacquet-Langlands) ; elle a offert un cadre particulièrement pertinent pour établir des variantes *p*-adiques de résultats de géométrie complexe (autour de l'analyse harmonique, des systèmes dynamiques, de l'équidistribution...) ou réelle (bonnes propriétés des parties semi-algébriques, description purement topologique de certains groupes de cohomologie étale...) ; elle a été utilisée pour mettre au point une théorie des dessins d'enfants *p*-adiques ; elle permet d'intégrer des 1-formes différentielles *p*-adiques sur de *vrais* chemins ; elle est liée à la géométrie tropicale ; elle a servi à étudier la combinatoire du diviseur exceptionnel d'une désingularisation, sur *n'importe quel* corps parfait ; elle sert à mieux comprendre le comportement d'une famille de variétés *complexes* au-dessus d'un disque épointé.

Dans ce qui suit, nous faisons tout d'abord quelques rappels sur les corps ultramétriques, et traitons les exemples de $\mathbb{Q}_p$ et $\mathbb{C}_p$. Dans une seconde partie, nous expliquons les problèmes rencontrés lorsqu'on veut faire de la géométrie analytique sur ce type de corps, disons quelques mots des approches de Tate et Raynaud, puis présentons celle de Berkovich (faute de connaissances suffisantes, nous ne parlerons malheureusement pas de celle de Huber, exposée par exemple dans [37]) ; pour éviter un exposé trop technique, nous ne donnons pas de définitions précises, et nous contentons d'énoncer les principales propriétés des espaces qu'il construit.

La troisième partie est consacrée à la description de l'analytifiée d'une variété algébrique ; nous insistons tout particulièrement sur le cas de la droite projective ; nous expliquons le lien entre la réduction modulo *p* d'une courbe projective *p*-adique et le type d'homotopie de la courbe analytique associée.

La quatrième partie est enfin dévolue à un survol succinct des applications de la théorie de Berkovich que nous avons évoquées ci-dessus (on en trouvera une recension plus substantielle dans le chapitre 3 de [27]).

[1] Université de Nice - Sophia Antipolis

1. Les corps ultramétriques, l'exemple des corps p-adiques

On dit qu'une application φ définie sur un groupe abélien et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ satisfait *l'inégalité ultramétrique* si $\varphi(a+b) \leqslant \max(\varphi(a), \varphi(b))$ pour tout couple (a, b) ; si φ est paire, ceci implique l'égalité $\varphi(a+b) = \max(\varphi(a), \varphi(b))$ *dès que* $\varphi(a)$ *et* $\varphi(b)$ *diffèrent*, comme on le voit en écrivant $a = a+b-b$ ou $b = a+b-a$.

Un *corps ultramétrique* est un corps muni d'une valeur absolue (que l'on notera systématiquement $|\ |$) qui satisfait l'inégalité ultramétrique. Soit k un tel corps. On vérifie sans difficultés les faits suivants :

- la topologie dont il hérite est totalement discontinue (indépendamment de sa complétude éventuelle) ;

- le sous-ensemble $\{x \in k, |x| \leqslant 1\}$ de k en est un sous-anneau, appelé *anneau des entiers* de k et noté k° ; son corps des fractions n'est autre que k ; c'est une partie à la fois ouverte et fermée de k ;

- le sous-ensemble $\{x \in k, |x| < 1\}$ de k est l'unique idéal maximal de k° ; on le note $k^{\circ\circ}$, et l'on désigne par $\widetilde{k}$ le quotient $k^\circ/k^{\circ\circ}$, que l'on appelle le *corps résiduel* de k.

Un exemple moins idiot qu'il n'en a l'air. Tout corps muni de la valeur absolue triviale (qui vaut 1 sur les éléments non nuls, et 0 sur 0), est un corps ultramétrique complet ; comme on le verra plus bas, faire de la géométrie analytique sur ce type de corps peut se révéler fructueux (*cf.* [48]).

1.1. Exemple : le corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques

Soit p un nombre premier ; pour tout nombre rationnel non nul r, on note $v_p(r)$ l'exposant de p (qui est un entier *relatif*) dans la décomposition de r en produit de facteurs premiers. Soit ε un réel strictement compris entre 0 et 1. L'application $|\ |$ de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}_+$ qui envoie 0 sur 0 et tout élément r de $\mathbb{Q}^*$ sur $\varepsilon^{v_p(r)}$ est une valeur absolue, dite *p-adique*, qui satisfait l'inégalité ultramétrique. Remarquons, pour fixer un peu les idées, que si r appartient à $\mathbb{Z}$ alors $|r| \leqslant 1$, la majoration étant stricte si et seulement si r est multiple de p.

Le corps $\mathbb{Q}_p$ des *nombres p-adiques* est par définition le complété de $\mathbb{Q}$ pour la valeur absolue p-adique. C'est un corps ultramétrique complet. Il admet une description explicite relativement maniable : tout élément de $\mathbb{Q}_p$ s'écrit d'une unique manière $\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i p^i$, où les a_i sont des entiers compris entre 0 et $p-1$, nuls pour i suffisamment négatif ; la valeur absolue d'un nombre p-adique non nul $\sum a_i p^i$ est égale à ε^j, où $j = \inf\{i, a_i \neq 0\}$; l'addition et la multiplication dans $\mathbb{Q}_p$ se font à l'aide de l'algorithme usuel, avec retenues. Il est immédiat que $\sum a_i p^i$ appartient à $\mathbb{Q}_p^\circ$ (resp. $\mathbb{Q}_p^{\circ\circ}$) si et seulement si a_i est nul pour tout i strictement négatif (resp. négatif ou nul).

Traditionnellement, l'anneau $\mathbb{Q}_p^\circ$ est noté $\mathbb{Z}_p$ et est appelé *l'anneau des entiers p-adiques.* D'après ce qui précède, son idéal maximal $\mathbb{Q}_p^{\circ\circ}$ est simplement $p\mathbb{Z}_p$ et le corps résiduel $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On démontre facilement à l'aide du critère séquentiel que $\mathbb{Z}_p$ est compact. Comme les parties de la forme $a + p^n\mathbb{Z}_p$ (avec a dans $\mathbb{Q}_p$ et n dans $\mathbb{N}$) forment une base de la topologie de $\mathbb{Q}_p$, ce dernier est localement compact.

L'anneau $\mathbb{Z}_p$ a moralement « tendance à coder les propriétés vraies modulo p^n pour tout n » . Par exemple, un système d'équations polynomiales à coefficients dans $\mathbb{Z}$ a une solution dans $\mathbb{Z}_p$ si et seulement si il en a une dans chacun des $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Cette assertion est à rapprocher de la suivante : un tel système a une solution dans $[0;1]$ si et seulement si il a, pour chaque entier n, une solution à $1/n$ près dans $\mathbb{Q} \cap [0;1]$. En effet, on a recours dans les deux cas à un objet conceptuellement sophistiqué ($\mathbb{Z}_p$ d'un côté, $\mathbb{R}$ de l'autre) pour éviter de devoir travailler en permanence « à une précision arbitrairement grande près » (une congruence modulo p^n peut être vue, *via* la valeur absolue p-adique, comme une approximation d'autant plus précise que n est élevé).

1.2. Le corps $\mathbb{C}_p$

Soit $\overline{\mathbb{Q}_p}$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$. La valeur absolue de ce dernier s'y prolonge de manière unique, mais le corps ultramétrique ainsi obtenu n'est pas complet ; son complété $\mathbb{C}_p$ reste heureusement algébriquement clos. C'est en quelque sorte l'analogue p-adique du corps des complexes, et il lui est d'ailleurs abstraitement isomorphe, puisque son degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ est la puissance du continu.

Le sous-groupe $|\mathbb{C}_p^*|$ de $\mathbb{R}_+^*$ est $\varepsilon^{\mathbb{Q}}$ (pour tout entier i, la valeur absolue de toute racine i-ième de p est égale à $\varepsilon^{1/i}$) ; le corps résiduel $\widetilde{\mathbb{C}_p}$ est une clôture algébrique de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Soit ρ la flèche quotient $\mathbb{C}_p^{\circ} \to \widetilde{\mathbb{C}_p}$. Pour tout λ appartenant à $\widetilde{\mathbb{C}_p}$, le sous-ensemble $\rho^{-1}(\lambda)$ de $\mathbb{C}_p^{\circ}$ est une boule *ouverte* de rayon 1 (dont n'importe quel point est un centre). L'anneau $\mathbb{C}_p^{\circ}$ est recouvert par les $\rho^{-1}(\lambda)$, qui sont en nombre infini et deux à deux disjoints ; il n'est donc pas compact. Comme tout ouvert non vide de $\mathbb{C}_p$ contient une boule fermée de rayon ε^n pour n assez grand, laquelle est homéomorphe à $\mathbb{C}_p^{\circ}$ *via* la multiplication par p^n, le corps ultramétrique complet $\mathbb{C}_p$ n'est pas localement compact.

2. Les différentes approches de la géométrie analytique ultramétrique

2.1. Le problème

Le rôle majeur joué par les corps p-adiques en géométrie arithmétique a incité à développer sur ces derniers, et plus généralement sur tout corps ultramétrique complet, une géométrie analytique analogue à celle pratiquée sur $\mathbb{C}$.

On fixe à partir de maintenant un corps ultramétrique complet k, dont la valeur absolue peut être triviale. On utilise les notations k^{o} et k^{oo} introduites au tout début de l'article ; on désignera par $\sqrt{|k^*|}$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs dont une puissance non nulle appartient à $|k^*|$.

Les notions de série entière et de rayon de convergence s'étendent telles quelles à k ; elles y sont même, en un sens, plus maniables que dans la situation classique, puisqu'une série d'éléments de k converge si et seulement si son terme général tend vers zéro.

Mais la totale discontinuité de k pose assez rapidement un problème redoutable. Considérons en effet la fonction qui vaut 1 sur k° et 0 sur $k - k^{\circ}$. Comme k° est à la fois ouvert et fermé, cette fonction est localement constante, et *a fortiori* localement développable en série entière ; mais il n'est évidemment pas raisonnable de la considérer comme globalement analytique. Il semble donc, si l'on s'en tient aux définitions naïves, que l'analyticité sur k ne soit pas une notion de nature locale.

2.2. L'approche de Tate

Que signifie précisément l'expression « être de nature locale » ? Sur le corps $\mathbb{C}$, on qualifie ainsi les propriétés qu'il suffit de tester sur un recouvrement ouvert de l'espace ambiant. L'idée de Tate ([46]) a consisté à décréter qu'en géométrie analytique ultramétrique, on considère une propriété comme étant de nature locale s'il suffit de la tester sur un recouvrement ouvert *admissible* de l'espace ambiant.

Il n'est pas question de donner ici la définition d'un recouvrement admissible ; disons simplement qu'il s'agit d'un recouvrement dans lequel il y a suffisamment de chevauchements entre les ouverts pour que les conditions de coïncidence sur les intersections constituent des contraintes dignes de ce nom. Le recouvrement de la droite affine par la boule unité fermée et son complémentaire est l'exemple typique à exclure.

Un espace analytique au sens de Tate (c'est ce qu'on appelle un espace *analytique rigide*) apparaît ainsi comme un espace topologique totalement discontinu sur lequel on distingue certaines familles d'ouverts, dont on dit qu'elles forment un recouvrement admissible de leur réunion ; si l'on veut être plus précis, il y a lieu de recourir au formalisme des *topologies de Grothendieck.*

Les objets qui se recollent convenablement en géométrie complexe (tels les fonctions, les fibrés vectoriels...) se recollent convenablement en géométrie analytique rigide, *pourvu que l'on se restreigne à des recouvrements admissibles.*

2.3. L'approche de Raynaud

Indépendamment de sa nature exacte, un espace analytique rigide est localement défini par l'annulation de certaines fonctions analytiques sur un polydisque unité fermé. Raynaud propose alors ([40], [13]–[16]) la chose suivante : *effectuer des changements de variables adéquats afin que les fonctions en question, ainsi que les données de recollement entre les différentes cartes, soient données par des séries à coefficients dans k°*. Une telle opération est (moyennant certaines hypothèses de finitude) toujours possible ; il y a en général plusieurs choix possibles, chacun d'eux donnant lieu à ce qu'on appelle un *modèle* de l'espace analytique rigide dont on est parti.

Lorsqu'on a fixé un tel modèle, on peut réduire modulo $k^{\circ\circ}$ les séries qui le décrivent. Comme elles convergent sur le polydisque unité fermé, presque tous leurs coefficients sont dans $k^{\circ\circ}$, et elles s'envoient ainsi sur des *polynômes* sur le corps $\widetilde{k}$; ces derniers définissent une variété *algébrique* sur $\widetilde{k}$, c'est la *fibre spéciale* de notre modèle. La considération des fibres spéciales permet de ramener certains problèmes de géométrie analytique sur k à des questions de géométrie algébrique sur $\widetilde{k}$.

Mentionnons que les recouvrements admissibles de Tate se retrouvent dans la théorie de Raynaud : ils correspondent, *grosso modo*, aux recouvrements de Zariski des fibres spéciales des modèles.

2.4. L'approche de Berkovich

Elle est détaillée dans les deux textes fondateurs [5] et [6]. On peut la décrire très succinctement en disant que Berkovich *rajoute des points aux espaces rigides analytiques*, et obtient par ce biais des objets jouissant notamment d'excellentes propriétés topologiques.

Ce procédé est à bien des égards analogue à celui mis en œuvre lorsque, pour passer d'une variété algébrique au sens naïf sur un corps algébriquement clos au schéma correspondant, l'on adjoint un point générique à chaque fermé irréductible de dimension strictement positive.

Quelques précisions. À tout espace analytique rigide X_0 est associé de manière naturelle un « espace de Berkovich » X possédant les propriétés suivantes.

• X est localement compact et localement connexe par arcs, et X_0 s'identifie, comme espace topologique, à une partie dense de X.

• Si X_0 est défini comme le lieu des zéros d'une famille de fonctions sur un polydisque unité fermé, X est compact.

• Il existe une classe particulière de sous-ensembles de X, les *domaines analytiques*, qui comprend entre autres les ouverts de X, ainsi que certaines parties compactes : par exemple, si X_0 est la droite affine analytique et si $Y_0 \subset X_0$ est le disque unité fermé, alors $Y \subset X$ est un domaine analytique compact.

• À tout point x de X est associé une extension ultramétrique complète de k, le *corps résiduel complété de* x, que l'on note $\mathscr{H}(x)$; le point x appartient à X_0 si et seulement si $\mathscr{H}(x)$ est fini sur k.

• Pour tout domaine analytique U de X, on sait définir l'algèbre $\mathscr{O}_X(U)$ des *fonctions analytiques sur* U ; si x est un point de U on dispose d'un morphisme de k-algèbres $\mathscr{O}_X(U) \to \mathscr{H}(x)$, appelé *évaluation en* x et noté $x \mapsto f(x)$.

• Si U et V sont deux domaines analytiques de X avec $V \subset U$, il existe une application de *restriction* $\mathscr{O}_X(U) \to \mathscr{O}_X(V)$. Si l'on se restreint aux ouverts de X, alors $U \mapsto \mathscr{O}_X(U)$ est un faisceau.

• L'algèbre $\mathscr{O}_X(X)$ coïncide avec l'algèbre des fonctions analytiques sur l'espace rigide analytique X_0.

Quelques commentaires.

- Le dernier point peut se formuler ainsi : Berkovich modifie les espaces topologiques considérés par la géométrie rigide, mais pas leurs anneaux de fonctions.

- $U \mapsto \mathscr{O}_X(U)$ est un faisceau *sans qu'il y ait besoin, pour recoller les fonctions, de se restreindre à des recouvrements ouverts d'un type particulier*. Cette amélioration par rapport à la situation analytique rigide, en apparence spectaculaire, s'explique très simplement : la topologie de X est telle que si (U_i) est une famille d'ouverts de X et si l'on pose $U = \bigcup U_i$, alors $(U_i) \cap X_0$ est automatiquement un recouvrement *admissible* de $U \cap X_0$.

3. L'analytifiée d'une variété algébrique

Nous n'en dirons pas plus ici sur les espaces de Berkovich généraux ; nous avons choisi d'insister sur un cas particulier, celui de l'espace de Berkovich associé à une variété *algébrique* sur k ([5], §3.4), dont nous allons décrire précisément l'espace topologique sous-jacent.

3.1. Le cas affine

Soit $\mathscr{X}$ une variété algébrique affine sur k, donnée par un système d'équations polynomiales $(P_1, \ldots, P_m)$ en n variables $X_1, \ldots, X_n$. Posons

$$\mathrm{A} = k[X_1, \ldots, X_n]/(P_1, \ldots, P_m).$$

L'idée qui sous-tend la définition de l'espace de Berkovich $\mathscr{X}^{an}$ associé à $\mathscr{X}$ est la suivante : *on s'intéresse aux points de $\mathscr{X}$ à valeur dans* toutes *les extensions ultramétriques complètes de k*. Soit L une telle extension ; l'évaluation des fonctions induit une bijection entre l'ensemble des L-points de $\mathscr{X}$ et celui des homomorphismes de k-algèbres de A dans L. Pour cette raison, on appellera *évaluation* tout k-morphisme de A dans une extension ultramétrique complète de k.

À toute évaluation sera donc associé un point de l'espace que l'on cherche à construire. Par ailleurs, donnons-nous une évaluation $\mathrm{A} \to L$, et une extension ultramétrique complète L' de L. La composée de $\mathrm{A} \to L$ et de $L \hookrightarrow L'$ est une évaluation $A \to L'$. *Il est raisonnable de décréter que les points associés à* $\mathrm{A} \to L$ *et à* $\mathrm{A} \to L'$ *coïncident* : il s'agit en effet simplement de dire que tout L-point peut *a fortiori* être vu comme un L'-point.

On est ainsi amené à définir l'espace $\mathscr{X}^{an}$ comme l'ensemble des classes d'équivalences d'évaluations, relativement à la relation engendrée par les identifications mentionnées ci-dessus.

Pour naturelle qu'elle apparaisse, cette définition n'est ni très tangible, ni très maniable, et nous allons immédiatement en donner une autre, qui lui est équivalente. Soit $\mathrm{A} \to L$ une évaluation. Sa composée avec la valeur absolue de L définit une application de A dans $\mathbb{R}_+$ qui est multiplicative, satisfait l'inégalité ultramétrique, et coïncide sur k avec la valeur absolue ; une telle application de A dans $\mathbb{R}_+$ sera appelée une *semi-norme multiplicative*.

On fait ainsi correspondre à chaque évaluation une semi-norme multiplicative sur A. Réciproquement, soit x une telle semi-norme. Son noyau $\mathfrak{p}_x$ est un idéal premier de A, par lequel elle passe au quotient ; elle induit de ce fait une valeur absolue ultramétrique sur le corps des fractions de $\mathrm{A}/\mathfrak{p}_x$; le complété correspondant est noté $\mathscr{H}(x)$, et $\mathrm{A} \to \mathscr{H}(x)$ est une évaluation, qui est par construction minimale au sein de sa classe d'équivalence.

Il n'est pas difficile de voir que l'on vient de mettre en bijection l'ensemble des classes d'équivalences d'évaluations et celui des semi-normes multiplicatives sur A. Ceci conduit à cette nouvelle définition : *l'espace $\mathscr{X}^{an}$ est l'ensemble des semi-normes multiplicatives sur* A, *muni de la topologie induite par la topologie produit de* $\mathbb{R}^{\mathsf{A}}$.

Remarque 1. On a donné une description de *l'espace topologique sous-jacent à* $\mathscr{X}^{an}$; on ne dira rien ici du faisceau des fonctions analytiques sur ce dernier.

Remarque 2. Soit x un point de $\mathscr{X}^{an}$, autrement dit une semi-norme multiplicative sur A. Le corps $\mathscr{H}(x)$ introduit ci-dessus est bien entendu le même que celui dont il a été question plus haut ; la restriction à A de l'évaluation $f \mapsto f(x)$ est la flèche naturelle $\mathsf{A} \to \mathscr{H}(x)$; pour toute fonction f de A, le réel $x(f)$ est ainsi égal à $|f(x)|$, et c'est cette dernière notation que l'on emploiera de préférence, pour des raisons psychologiques évidentes.

Remarque 3. Tout k-point de la variété algébrique $\mathscr{X}$ donne lieu à une évaluation $\mathsf{A} \to k$, donc à un point de $\mathscr{X}^{an}$. Il est très facile de voir que l'on établit ainsi une bijection entre $\mathscr{X}(k)$ et l'ensemble $\mathscr{X}^{an}(k)$ des points de $\mathscr{X}$ tels que $\mathscr{H}(x) = k$. Si l'on munit $\mathscr{X}(k)$ de la topologie (totalement discontinue) héritée de celle de k, et $\mathscr{X}^{an}(k)$ de la topologie induite par celle de $\mathscr{X}^{an}$, *cette bijection est un homéomorphisme.*

Remarque 4. En envoyant une semi-norme sur son noyau, on définit une application continue de $\mathscr{X}^{an}$ vers le schéma $\mathscr{X}$.

3.2. Le cas général

On définit l'analytifiée $\mathscr{X}^{an}$ d'une variété algébrique quelconque $\mathscr{X}$ par recollement à partir du cas affine. Indiquons quelques propriétés satisfaites par l'espace $\mathscr{X}^{an}$.

i) $\mathscr{X}(k)$, muni de la topologie totalement discontinue induite par celle de k, est homéomorphe au sous-ensemble $\mathscr{X}^{an}(k)$ de $\mathscr{X}^{an}$ constitué des points x tels que $\mathscr{H}(x) = k$ (et muni de la topologie induite) ; si k est algébriquement clos et si sa valeur absolue n'est pas triviale, alors $\mathscr{X}^{an}(k)$ est dense dans $\mathscr{X}^{an}$.

ii) $\mathscr{X}^{an}$ est muni d'une application continue et surjective vers le schéma $\mathscr{X}$, qui induit une bijection $\pi_0(\mathscr{X}^{an}) \simeq \pi_0(\mathscr{X})$; en particulier $\mathscr{X}^{an}$ est connexe (et partant, connexe par arcs) si et seulement si $\mathscr{X}$ est connexe.

iii) $\mathscr{X}^{an}$ est séparé si et seulement si $\mathscr{X}$ est séparé, et compact si et seulement si $\mathscr{X}$ est propre ; dans ce dernier cas, les théorèmes de type GAGA s'appliquent.

iv) La *dimension topologique* de $\mathscr{X}^{an}$ est égale à celle de $\mathscr{X}$.

Aparté : comparaison avec la géométrie complexe. À tout $\mathbb{C}$-schéma de type fini $\mathscr{X}$ peut être associé un espace analytique complexe $\mathscr{X}^{an}$. Dans ce contexte, la propriété *iii*) reste vraie, et $\mathscr{X}^{an} \to \mathscr{X}$ induit encore une bijection $\pi_0(\mathscr{X}^{an}) \simeq \pi_0(\mathscr{X})$. La dimension topologique de $\mathscr{X}^{an}$ est par contre égale *au double* de la dimension de Krull de $\mathscr{X}$, et $\mathscr{X}^{an} \to \mathscr{X}$ n'est pas surjective (en général...) ; elle identifie $\mathscr{X}^{an}$ à $\mathscr{X}(\mathbb{C})$ *muni de la topologie transcendante.*

3.3. Étude détaillée de la droite projective

Les références pour ce qui suit sont les paragraphes 4.1 *et* 4.2 *de* [5]. Comme $\mathbb{P}^1_k$ est propre, $\mathbb{P}^{1,an}_k$ est compact ; comme $\mathbb{P}^1_k$ est connexe, $\mathbb{P}^{1,an}_k$ est connexe par arcs. Il vérifie en fait la propriété suivante, bien plus forte, qui en fait ce qu'on appelle un *arbre réel* : pour tout couple (x, y) de points de $\mathbb{P}^{1,an}_k$, il existe *un et un seul* fermé de $\mathbb{P}^{1,an}_k$ homéomorphe à un intervalle compact d'extrémités x et y. Ceci entraîne immédiatement la simple connexité de $\mathbb{P}^{1,an}_k$; on peut montrer qu'il est contractile.

Exemples d'arcs réels tracés sur $\mathbb{P}^{1,an}_k$. Si a est un élément de k, il définit un k-point de $\mathbb{A}^{1,an}_k \subset \mathbb{P}^{1,an}_k$, que l'on note encore a ; on désigne par ∞ le point à l'infini de $\mathbb{P}^{1,an}_k$. Pour tout a dans k et tout réel positif r, l'application $\eta_{a,r}$ de $k[T]$ dans $\mathbb{R}_+$ qui envoie $\sum a_i(T-a)^i$ sur $\max |a_i| r^i$ est une semi-norme multiplicative, et donc un point de $\mathbb{A}^{1,an}_k \subset \mathbb{P}^{1,an}_k$; on pose $\eta_{a,\infty} = \infty$.

Soient a et b deux éléments de k. Faisons deux remarques : $\eta_{a,0}$ envoie tout polynôme P sur $|P(a)|$, et coïncide donc avec a ; si r est un réel supérieur ou égal à $|b-a|$, alors $\eta_{a,r} = \eta_{b,r}$.

On peut maintenant décrire l'unique intervalle tracé sur $\mathbb{P}^{1,an}_k$ reliant a à ∞ : c'est $\{\eta_{a,r}\}_{0\leqslant r\leqslant\infty}$; quant à celui qui joint a à b, c'est la réunion de $\{\eta_{a,r}\}_{0\leqslant r\leqslant|b-a|}$ et de $\{\eta_{b,r}\}_{|b-a|\geqslant r\geqslant 0}$ (rappelons que $\eta_{a,|b-a|} = \eta_{b,|b-a|}$).

Dans chacun de ces intervalles, seules les extrémités sont des points rigides classiques ; les points intérieurs, qui sont de la forme $\eta_{c,r}$ avec r dans $\mathbb{R}^*_+$, sont « nouveaux » .

Nombres de branches aboutissant à un point donné.

• Soit a appartenant à $k \cup \{\infty\}$. Comme le schéma $\mathbb{P}^1_k - \{a\}$ est connexe, il en va de même de l'espace $\mathbb{P}^{1,an}_k - \{a\}$.

• Soit a appartenant à k et soit r un réel strictement positif qui n'appartient pas à $\sqrt{|k^*|}$. L'espace $\mathbb{P}^{1,an}_k - \eta_{a,r}$ a exactement deux composantes connexes, respectivement définies par les conditions $|T-a| < r$ et $|T-a| > r$.

• Soit a appartenant à k et soit r un réel strictement positif qui appartient à $\sqrt{|k^*|}$. L'espace $\mathbb{P}^{1,an}_k - \eta_{a,r}$ a une infinité de composantes connexes. Nous allons les décrire en nous plaçant, pour simplifier, dans la situation où $a = 0$, où $r = 1$, et où k est algébriquement clos. Soit S un système de représentants de $\widetilde{k}$ dans k°. Pour tout s appartenant à S, notons U_s l'ouvert de $\mathbb{P}^{1,an}_k$ défini par la condition $|T-s| < 1$; soit U_∞ l'ouvert de $\mathbb{P}^{1,an}_k$ défini par la condition $|T| > 1$. Les U_s, où s parcourt $\mathrm{S} \cup \{\infty\}$, sont exactement les composantes connexes de $\mathbb{P}^{1,an}_k - \eta_{0,1}$.

Remarque. Si P est un point de $\mathbb{P}^{1,an}_k$ alors tout voisinage U de P contient *toutes les composantes connexes de* $\mathbb{P}^{1,an}_k - P$ *sauf un nombre fini*. La topologie de $\mathbb{P}^{1,an}_k - P$ est ainsi plus grossière que sa topologie d'arbre ; c'est le prix à payer pour avoir affaire à un espace compact.

3.4. Type d'homotopie et réduction modulo p

Le graphe d'une courbe semi-stable déployée. On dira qu'une courbe algébrique projective sur $\widetilde{k}$ est *semi-stable déployée* si ses seules singularités sont des $\widetilde{k}$-points doubles ordinaires dont les deux tangentes sont définies sur $\widetilde{k}$. À une telle courbe est associé un graphe construit comme suit : à chaque composante irréductible correspond un sommet, et à chaque point double une arête qui joint les deux sommets correspondants (resp. se referme en un cercle sur le sommet correspondant) s'il appartient à deux composantes (resp. n'appartient qu'à une composante). Ainsi, le graphe associé à une réunion de deux droites projectives sécantes en un point est un segment ; celui qui correspond à une cubique nodale ou à une chaîne polygonale de droites projectives est un cercle.

Étude des courbes à réduction semi-stable déployée. Soit $\mathscr{X}$ une k-courbe projective et lisse. Supposons qu'il existe un système d'équations de $\mathscr{X}$ *à coefficients dans* k^o (ou, pour être plus technique et plus précis, un k^o-schéma propre et plat de fibre générique isomorphe à $\mathscr{X}$) dont la réduction modulo k^{oo} définit une $\widetilde{k}$-courbe projective semi-stable déployée $\widetilde{\mathscr{X}}$; *cette hypothèse n'est pas forcément vérifiée, mais l'est toujours après une extension finie éventuelle du corps de base.* On dispose d'une application $\rho : \mathscr{X}^{an} \to \widetilde{\mathscr{X}}$, dite de *réduction modulo k^{oo}*.

Exemple : le cas de la droite projective. Donnons quelques propriétés de la flèche $\rho : \mathbb{P}^{1,an}_k \to \mathbb{P}^1_{\widetilde{k}}$. Si $a \in k^o$ alors $\rho(a)$ est le point $\widetilde{a}$ de $\mathbb{A}^1_{\widetilde{k}} \subset \mathbb{P}^1_{\widetilde{k}}$; si $a \in (k - k^o) \cup \{\infty\}$ alors $\rho(a)$ est le point à l'infini de $\mathbb{P}^1_{\widetilde{k}}$; enfin $\rho(\eta_{0,1})$ est le point générique de $\mathbb{P}^1_{\widetilde{k}}$.

Revenons à la courbe $\mathscr{X}$. On démontre ([5], §4.3) les assertions suivantes.

- Si η est le point générique d'une composante irréductible $\mathscr{F}$ de $\widetilde{\mathscr{X}}$, alors $\rho^{-1}(\eta)$ est un singleton $\{\sigma_{\mathscr{F}}\}$.

- si x est un point double de $\widetilde{\mathscr{X}}$, alors $\rho^{-1}(x)$ est isomorphe à une couronne ouverte, c'est-à -dire à un ouvert de $\mathbb{A}^{1,an}_k$ défini par une condition de la forme $s < |T| < t$. Remarquons qu'un tel ouvert contient en particulier l'intervalle ouvert $\{\eta_{0,r}\}_{r \in]s;t[}$, que l'on immerge ainsi dans $\mathscr{X}^{an}$; si x appartient à deux composantes irréductibles $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ (resp. à une seule composante irréductible $\mathscr{F}$) de $\widetilde{\mathscr{X}}$, alors l'image de $\{\eta_{0,r}\}_{r \in]s;t[}$ dans $\mathscr{X}^{an}$ relie $\sigma_{\mathscr{F}}$ à $\sigma_{\mathscr{G}}$ (resp. se referme en un cercle sur $\sigma_{\mathscr{F}}$).

On vient ainsi de construire un homéomorphisme entre le graphe de $\widetilde{\mathscr{X}}$ et un certain fermé Γ de $\mathscr{X}^{an}$. On prouve que $\mathscr{X}^{an}$ se rétracte sur Γ.

Remarque. Si $\widetilde{\mathscr{X}}$ est lisse, alors Γ est un point et $\mathscr{X}^{an}$ est dès lors contractile.

3.5. Quelques résultats complémentaires

Topologie des courbes analytiques en général. À l'aide de ce que l'on vient de faire, on démontre ([6], §4.3) les faits suivants : *si X est une courbe analytique quelconque, alors tout point de X a une base de voisinages contractiles qui sont des arbres réels ; de plus, il existe un fermé Γ de X qui est un graphe localement fini vers lequel X admet une rétraction compacte.*

Variétés algébriques de dimension supérieure. Soit $\mathscr{X}$ une variété projective lisse sur k. Supposons que l'on puisse trouver un système d'équations de $\mathscr{X}$ à coefficients dans k° dont la réduction $\widetilde{\mathscr{X}}$ modulo $k^{\circ\circ}$ soit une $\widetilde{k}$-variété algébrique *pluristable* ([10], §4.1 ; cela signifie moralement que son lieu singulier ressemble localement à une intersection d'hyperplans de coordonnées). On peut alors ([9], th. 8.1 et [10], §4 et §5), exactement comme dans le cas des courbes :

• définir abstraitement un polyèdre de dimension majorée par celle de $\mathscr{X}$ et qui code la combinatoire des singularités de $\widetilde{\mathscr{X}}$; c'est par exemple un point si $\widetilde{\mathscr{X}}$ est lisse ;

• construire un homéomorphisme entre ce polyèdre et un certain fermé Γ de $\mathscr{X}^{an}$;

• montrer que $\mathscr{X}^{an}$ se rétracte sur Γ (ceci entraîne entre autres que $\mathscr{X}^{an}$ est contractile dès que $\widetilde{\mathscr{X}}$ est lisse).

Topologie des espaces analytiques lisses. En se ramenant, à l'aide notamment des altérations de De Jong, à une situation du type que l'on vient de considérer, Berkovich démontre ([9], th. 9.1) que si la valeur absolue de k n'est pas triviale, *tout espace k-analytique lisse est localement contractile.*

Groupes réductifs et immeubles de Bruhat-Tits. Si le corps k est local et si G est un k-groupe algébrique réductif *défini sur $\mathbb{Z}$*, Berkovich construit ([5], §5.4) deux plongements de son immeuble de Bruhat-Tits $\mathscr{B}(G,k)$ dans G^{an}.

Variétés toriques et éventails. Soit k un corps quelconque, que l'on munit de la *valeur absolue triviale*. Soit $\mathscr{X}$ une variété torique sur k, le tore en jeu étant supposé déployé. Dans [48], Thuillier définit un certain domaine analytique compact $\mathscr{X}^{\sqsupset}$ de $\mathscr{X}^{an}$, et montre l'existence d'un fermé E de $\mathscr{X}^{\sqsupset}$ qui s'identifie naturellement à la compactification canonique de l'éventail $\mathscr{E}$ de $\mathscr{X}$; de plus, $\mathscr{X}^{\sqsupset}$ se rétracte sur E, et la structure polyédrale de $\mathscr{E}$ se retrouve en considérant la restriction à E des normes de certaines fonctions analytiques.

4. Fécondité de la théorie de Berkovich

4.1. Géométrie arithmétique

Après avoir jeté les bases de sa théorie, Berkovich a entrepris ([6]) de définir la topologie et la cohomologie étales sur ses espaces analytiques, et d'établir à leur sujet les résultats attendus (dualité de Poincaré, pureté, théorèmes de comparaison...). Elles ont joué un rôle crucial dans la preuve de deux conjectures.

• **Une conjecture de Deligne concernant les cycles évanescents**. Elle a été démontrée par Berkovich ([7]).

• **Une conjecture de Carayol et Drinfeld relative aux correspondances de Langlands et Jacquet-Langlands locales**. Elle a été établie par Boyer, Harris et Taylor dans le cas p-adique, et par Hausberger dans celui d'égale caractéristique ([17], [34], [35], [36]) ; il s'agit essentiellement de montrer que la correspondance cherchée se réalise dans la cohomologie étale de certains espaces analytiques convenables, qui apparaissent comme des revêtements du « demi-plan de Poincaré p-adique » ; dans cet esprit, on peut également mentionner un article récent de Dat ([24]).

4.2. Analogues p-adiques de résultats complexes

• **Théorie spectrale.** Il est facile d'exhiber une algèbre de Banach non nulle $\mathscr{A}$ sur $\mathbb{C}_p$ et un élément a de $\mathscr{A}$ dont le spectre au sens naïf est vide (notons que dans ce cas $\lambda \mapsto (a-\lambda)^{-1}$ est une fonction localement analytique sur $\mathbb{C}_p$, mais pas globalement). C'est pour remédier à ce défaut que Berkovich a fondé sa théorie. Si k est un corps ultramétrique complet et si a est un élément d'une k-algèbre de Banach $\mathscr{A}$, Berkovich définit ([5], §7) le spectre de a comme une partie non pas de k, mais de $\mathbb{A}_k^{1,an}$. Il retrouve alors les résultats usuels : le spectre est compact, non vide si $\mathscr{A}$ est non nulle, sa trace sur k est le spectre classique, et toute fonction analytique au voisinage du spectre peut être évaluée en a.

• **Analyse harmonique.** Pour des raisons variées, divers auteurs (Baker, Favre, Jonsson, Rumely, Thuillier) ont récemment cherché à faire de l'analyse harmonique sur les courbes ultramétriques ([2]–[4], [28], [29], [47]). Les résultats les plus aboutis et les plus systématiques dans cette voie sont ceux de Thuillier ([47]) ; en utilisant de manière absolument essentielle la structure locale d'arbre réel des courbes analytiques de Berkovich, il définit sur ces dernières les notions de fonctions harmoniques, de fonctions lisses, d'opérateur dd^c, de courant... et démontre les analogues des assertions connues sur les surfaces de Riemann ; il s'en sert ensuite pour reformuler la théorie de l'intersection en géométrie d'Arakelov.

• **Systèmes dynamiques et équidistribution.** Les premiers travaux en matière de systèmes dynamiques sur $\mathbb{C}_p$ (il s'agissait d'étudier l'itération de fractions rationnelles à une indéterminée) ont été réalisés par Rivera-Letelier ([41]–[43]) ; ils ont montré l'intérêt qu'il y avait, même pour comprendre des phénomènes ne concernant *a priori* que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ (tels l'existence de points périodiques attractifs ou répulsifs), à considérer l'action d'une fraction rationnelle sur l'espace de Berkovich $\mathbb{P}^{1,an}_{\mathbb{C}_p}$ (notons que Rivera-Letelier travaille souvent avec la topologie d'arbre sur ce dernier, plus fine que celle de Berkovich).

Faisons une petite digression vers l'équidistribution en dynamique complexe. Considérons une fraction rationnelle R en une variable sur $\mathbb{C}$, et soit z un point complexe tel que $R^{-2}(z)$ ne soit pas égal à $\{z\}$. Pour tout n, notons μ_n la moyenne des masses de Dirac en les antécédents de z par R^n, comptés avec multiplicité. Un résultat classique assure que (μ_n) converge faiblement vers une mesure de probabilités sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ne dépendant pas de z.

Favre et Rivera-Letelier ont démontré ([30]) exactement le même résultat sur $\mathbb{C}_p$, à cela près que la mesure limite *vit sur l'espace de Berkovich* $\mathbb{P}^{1,an}_{\mathbb{C}_p}$*, et qu'il peut* *arriver que son support ne contienne aucun $\mathbb{C}_p$-point.* Dans certains cas (notamment lorsque la fraction s'étend en un endomorphisme de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}_p^{\circ}}$), la mesure limite peut être par exemple $\delta_{\eta_{0,1}}$.

Un phénomène analogue se produit pour l'équidistribution *de points de petite hauteur* ([4], [18], [31]). Par exemple, Chambert-Loir a établi dans [18] une variante p-adique d'un théorème de Szpiro, Ullmo et Zhang ([45]) en la matière, et sa mesure limite μ vit, comme celle de Favre et Rivera-Letelier, sur l'espace de Berkovich associé à la variété qu'il considère ; dès que celle-ci est de dimension strictement positive, le support de μ ne comprend aucun $\mathbb{C}_p$-point.

• **Théorie de Nevanlinna, courbes entières, hyperbolicité de Kobayashi... dans le cadre p-adique.** La théorie de Berkovich a été utilisée par différents auteurs (Berkovich lui-même, Cherry...) pour obtenir un certains nombres de résultats dans ce domaine ([5], [19]–[22]) ; par exemple, Berkovich a démontré que tout morphisme analytique de la droite affine dans une courbe de genre au moins égal à 1 est constant ([5], th. 4.5.1).

4.3. Analogues p-adiques de résultats réels

• **Bonnes propriétés des parties semi-algébriques.** Soit $\mathscr{X}$ une variété algébrique affine réelle d'anneau A. On dit qu'une partie de $\mathscr{X}(\mathbb{R})$ est *semi-algébrique* si elle peut être définie par une combinaison booléenne d'inégalités entre fonctions de A. Il est bien connu que toute application polynomiale entre variétés réelles affine transforme une partie semi-algébrique en une partie semi-algébrique, et que les composantes connexes d'une partie semi-algébrique sont en nombre fini, et sont elles-même semi-algébriques.

Soit k un corps ultramétrique complet et soit $\mathscr{X}$ une k-variété algébrique affine d'anneau A. On dira qu'une partie de $\mathscr{X}^{an}$ est *semi-algébrique* si elle peut être définie par une combinaison booléenne de conditions de la forme $|f| \bowtie \lambda|g|$, où f et g appartiennent à A, où λ est un réel positif, et où $\bowtie$ est l'un des quatre symboles d'inégalités. Les deux résultats mentionnés ci-dessus se transposent alors *mutatis mutandis* dans ce contexte ([26], prop. 2.5 et th. 3.2).

• **Description purement topologique de certains groupes de cohomologie étale.** Un théorème classique de Witt assure que le groupe de Brauer d'une courbe réelle lisse $\mathscr{X}$ s'identifie à $(\mathbb{Z}/2)^{\pi_0(\mathscr{X}(\mathbb{R}))}$, *via* l'évaluation point par point.

L'auteur a établi dans [25] (th. 4.2 et th. 5.2) un analogue p-adique de ce résultat, qui réinterprète et étend un résultat antérieur de Kato ([38], cor. 2.9) ; cet analogue consiste à décrire un certain groupe de cohomologie associé à une courbe algébrique p-adique lisse $\mathscr{X}$ en termes de la topologie de $\mathscr{X}^{an}$: on choisit un graphe localement fini Γ vers lequel $\mathscr{X}^{an}$ admet une rétraction compacte, et le groupe étudié s'identifie alors à celui des cochaînes harmoniques sur Γ, à coefficients dans $\mathbb{Z}/n$ pour un certain n. Cet isomorphisme est construit à l'aide d'une évaluation ponctuelle des classes de cohomologie, qui ne donnerait rien si l'on se limitait aux points rigides, en lesquels cette évaluation est toujours nulle.

4.4. Autres applications

• **Dessins d'enfants p-adiques.** La théorie des dessins d'enfants vise à comprendre $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ en termes géométriques et combinatoires. Yves André a utilisé les espaces de Berkovich pour proposer ([1]) une approche analogue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$, approche qui repose sur la considération de certains revêtements étales particuliers, dits *tempérés*, des courbes analytiques de Berkovich sur $\mathbb{C}_p$; le groupe qui classe les revêtements en question n'est en général ni discret, ni profini : celui de l'analytifiée une courbe elliptique à mauvaise réduction est ainsi isomorphe à $\mathbb{Z} \times \widehat{\mathbb{Z}}$.

• **Intégration p-adique sur de vrais chemins.** Berkovich a exploité le caractère localement connexe par arcs de ses espaces pour développer sur ces derniers une théorie de l'intégration des 1-formes différentielles fermées ([11]). Celle-ci, inspirée en partie par les travaux antérieurs de Coleman ([23]) sur les courbes, s'applique à tout espace analytique lisse X sur $\mathbb{C}_p$. Elle associe à toute 1-forme fermée ω sur X et à tout chemin γ, tracé sur X et d'extrémités appartenant à $X(\mathbb{C}_p)$, un élément $\int_\gamma \omega$ de $\mathbb{C}_p[\log p]$, qui ne dépend que de la classe d'homotopie de γ. Cette intégrale est essentiellement calculée par différence des primitives ; l'essentiel du travail de Berkovich consiste à construire une classe convenable de fonctions au sein desquelles vivent les primitives en question.

• **Géométrie tropicale et conjecture de Bogomolov.** Dans un article récent ([33]), Gubler démontre une conjecture de Bogomolov concernant les points de petite hauteur d'une variété abélienne $\mathscr{A}$ définie sur un corps F lui-même de type fini sur un corps algébriquement clos k, moyennant l'hypothèse que $\mathscr{A}$ a une réduction totalement dégénérée en au moins une valuation discrète divisorielle de F. Sa preuve repose sur des résultats intermédiaires de géométrie tropicale, qu'il établit dans [32] à l'aide de la théorie de Berkovich. Les résultats en question portent sur les sous-variétés analytiques de $\mathbb{G}_m^{n,an}$; ils se transfèrent aux variétés abéliennes à réduction totalement dégénérée, en écrivant l'analytifiée d'une telle variété comme le quotient de $\mathbb{G}_m^{n,an}$ par un réseau.

• **Familles de variétés complexes sur le disque épointé.** Soit K le corps des fonctions méromorphes au voisinage de l'origine sur $\mathbb{C}$, et soit $\mathscr{X}$ une variété algébrique propre sur K. Elle définit, pour tout nombre complexe z non nul et de module suffisamment petit, une variété algébrique complexe $\mathscr{X}_z$. Par ailleurs, on peut par complétion plonger K dans $\mathbb{C}((t))$. Lorsqu'on munit $\mathbb{C}((t))$ d'une valeur absolue t-adique, on en fait un corps ultramétrique complet, dont la topologie n'a plus rien à voir avec celle de $\mathbb{C}$ (puisque ce dernier, en tant que sous-corps de $\mathbb{C}((t))$, est discret). Il semble néanmoins qu'existent de nombreux liens entre la famille des $\mathscr{X}_z(\mathbb{C})$ et l'espace de Berkovich $\mathscr{X}^{an}_{\mathbb{C}((t))}$.

Par exemple, lorsque $\mathscr{X}$ est une variété de Calabi-Yau, l'on peut définir de façon cohérente une métrique g_z de diamètre 1 sur chacun des $\mathscr{X}_z(\mathbb{C})$; si $\mathscr{X}$ a une réduction totalement dégénérée, Kontsevich et Soibelman conjecturent ([39]) que lorsque z tend vers zéro, $(\mathscr{X}_z(\mathbb{C}), g_z)$ s'effondre sur un espace métrique qui s'identifie à un fermé de $\mathscr{X}^{an}_{\mathbb{C}((t))}$ sur lequel ce dernier se rétracte.

Revenons au cas d'une variété algébrique $\mathscr{X}$ propre quelconque ; la famille des $\mathrm{H}^\bullet(\mathscr{X}_z(\mathbb{C}),\mathbb{Z})$ définit une *variation de structure de Hodge mixte* sur le disque épointé D^* ; une fois choisi un revêtement universel $\widetilde{D^*}$ de D^* de groupe Π, on peut définir la *limite* de la famille des $\mathrm{H}^\bullet(\mathscr{X}_z(\mathbb{C}),\mathbb{Z})$, et l'on obtient ainsi une structure de Hodge mixte $\mathrm{H}^\bullet_{\mathrm{lim}}$ sur laquelle Π agit. Soit F le complété (pour la topologie t-adique) de la clôture algébrique de K qui correspond à $\widetilde{D^*}$. Berkovich démontre ([12], th. 5.1) qu'il existe pour tout i un isomorphisme Π-équivariant

$$\mathrm{H}^i(|\mathscr{X}_F^{an}|,\mathbb{Q}) \simeq W_0(\mathrm{H}^i_{\mathrm{lim}}\otimes\mathbb{Q}),$$

où $|\mathscr{X}_F^{an}|$ désigne l'espace topologique sous-jacent à $\mathscr{X}_F^{an}$.

• **Le diviseur exceptionnel d'une désingularisation.** Soit k un corps parfait, soit X une k-variété intègre et soit Y son lieu singulier. Considérons une désingularisation $X' \to X$ de X telle que l'image réciproque Y' de Y soit un diviseur à croisements normaux stricts. Soit Δ la réalisation géométrique du complexe d'incidence des composantes de Y'. Thuillier a démontré ([48], th. 4.6) que le type d'homotopie de Δ ne dépend pas du choix de X' ; il étend ainsi un théorème de Stepanov ([44]) qui aboutissait à la même conclusion, mais en supposant k de caractéristique nulle et Y propre. La preuve de Thuillier consiste à munir k de la valeur absolue triviale, à associer au couple (X,Y) un espace de Berkovich sur k, et à montrer que ce dernier se rétracte sur l'un de ses fermés homémomorphe à Δ ; il utilise ses résultats déjà mentionnés sur les variétés toriques, en se fondant sur le fait que sur un corps parfait, l'immersion du complémentaire d'un diviseur à croisements normaux stricts est toroïdale.

5. Références

[1] Y. ANDRÉ – *On a geometric description of* $\mathrm{Gal}(\overline{Q_p}/Q_p)$ *and a p-adic avatar of* $\widehat{GT}$, Duke Math. J. **119** (2003), n°. 1, 1-39.

[2] M. BAKER and R. RUMELY – *Harmonic Analysis on Metrized graphs*, prépublication.

[3] M. BAKER and R. RUMELY – *Analysis and dynamics on the Berkovich projective line*, prépublication.

[4] M. BAKER and R. RUMELY – *Equidistribution of small points, rational dynamics, and potential theory*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **56** (2006), n°. 3, 625-688.

[5] V. G. BERKOVICH – *Spectral theory and analytic geometry over non-archimedean fields*, Mathematical Surveys and Monographs **33**, AMS, Providence, RI, 1990.

[6] V. G. BERKOVICH – *Étale cohomology for non-archimedean analytic spaces*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **78** (1993), 5-161.

[7] V. G. BERKOVICH – *Vanishing cycles for formal schemes*, Invent. Math. **115** (1994), n°. 3, 539-571.

[8] V. G. BERKOVICH – *p-Adic Analytic Spaces* in Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berlin, August 1998, Doc. Math. J. DMV, Extra Volume ICM II (1998), 141-151.

[9] V. G. BERKOVICH – *Smooth p-adic analytic spaces are locally contractible*, Invent. Math. **137** (1999), n°. 1, 1-84.

[10] V. G. BERKOVICH – *Smooth p-adic analytic spaces are locally contractible. II*, *in* Geometric aspects of Dwork theory. Vol. I, II, 293-370, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2004.

[11] V. G. BERKOVICH – *Integration of one-forms on p-adic analytic spaces*, Annals of Mathematics Studies 162, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2006, 168 pp.

[12] V. G. BERKOVICH – *A non-Archimedean interpretation of the weight zero subspaces of limit mixed Hodge structures*, prépublication (août 2006, version révisée en novembre 2006).

[13] S. BOSCH and W. LÜTKEBOHMERT – *Formal and rigid geometry. I. Rigid spaces*, Math. Ann. **295** (1993), n°. 2, 291-317.

[14] S. BOSCH and W. LÜTKEBOHMERT – *Formal and rigid geometry. II. Flattening techniques*, Math. Ann. **296** (1993), n°. 3, 403-429.

[15] S. BOSCH, W. LÜTKEBOHMERT and M. RAYNAUD – *Formal and rigid geometry. III. The relative maximum principle*, Math. Ann. **302** (1995), n°. 1, 1-29.

[16] S. BOSCH, W. LÜTKEBOHMERT and M. RAYNAUD – *Formal and rigid geometry. IV. The reduced fibre theorem*, Invent. Math. **119** (1995), n°. 2, 361-398.

[17] P. BOYER –*Mauvaise réduction des variétés de Drinfeld et correspondance de Langlands locale*, Invent. Math. **138** (1999), n°. 3, 573-629.

[18] A. CHAMBERT-LOIR – *Mesures et équidistribution sur les espaces de Berkovich*, à paraître dans J. reine angew. Math.

[19] W. CHERRY – *Non-Archimedean analytic curves in abelian varieties*, Math. Ann. **300** (1994), n°. 3, 393-404.

[20] W. CHERRY – *A survey of Nevanlinna theory over non-Archimedean fields*, *in* International Workshop on Value Distribution Theory and Its Applications (Hong Kong, 1996). Bull. Hong Kong Math. Soc. **1** (1997), n°. 2, 235-249.

[21] W. CHERRY – *Non-Archimedean big Picard theorems*, prépublication sur ArXiv, référence math.AG/0207081.

[22] W. CHERRY and M. RU – *Rigid analytic Picard theorems*, Amer. J. Math. **126** (2004), n°. 4, 873-889.

[23] R. COLEMAN – *Dilogarithms, regulators and p-adic L-functions*, Invent. Math. **69** (1982), n°. 2, 171–208.

[24] J.-F. DAT – *Espaces symétriques de Drinfeld et correspondance de Langlands locale*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup **39** (2006), n°. 1, 1-74.

[25] A. DUCROS – *Cohomologie non ramifiée sur une courbe p-adique lisse*, Compositio Math. **130** n°. 1 (2002), 89-117.

[26] A. DUCROS – *Parties semi-algébriques d'une variété algébrique p-adique*, Manuscripta Math. **111** n°. 4 (2003), 513-528.

[27] A. DUCROS – *Espaces analytiques p-adiques au sens de Berkovich*, exposé **958** du séminaire Bourbaki, mars 2006.

[28] C. FAVRE and M. JONSSON – *The valuative tree*, Lecture Notes in Mathematics **1853**, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[29] C. FAVRE and M. JONSSON – *Valuative analysis of planar plurisubharmonic functions*, Invent. Math. **162**, n°. 2, 2005.

[30] C. FAVRE et J. RIVERA-LETELIER – *Théorème d'équidistribution de Brolin en dynamique p-adique*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **339** (2004), n°. 4, 271-276.

[31] C. FAVRE et J. RIVERA-LETELIER – *Équidistribution quantitative des points de petite hauteur sur la droite projective*, Math. Ann. 335 (2006), n°. 2, 311-361.

[32] W. GUBLER – *Tropical varieties for non-archimedean analytic spaces*, prépublication sur ArXiv, réf. math.NT/0609383, sept. 2006.

[33] W. GUBLER – *The Bogomolov conjecture for totally degenrated abelian varieties*, prépublication sur ArXiv, réf. math.NT/0609387, sept. 2006.

[34] M. HARRIS – *Supercuspidal representations in the cohomology of Drinfeld upper half spaces ; elaboration of Carayol's program*, Invent. Math. **129** (1997), 75-119.

[35] M. HARRIS and R. TAYLOR –*The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Ann. Math. Studies **151**(2001).

[36] T. HAUSBERGER – *Uniformisation des variétés de Laumon-Rapoport-Stuhler et conjecture de Drinfeld-Carayol*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **55** (2005), n°. 4, 1285–1371.

[37] R. HUBER – *Étale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces*, Aspects of Mathematics **E 30.** Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1996.

[38] K. KATO – *A Hasse principle for two-dimensional global fields*, with an appendix by Jean-Louis Colliot-Thélène, J. reine angew. Math. **366** (1986), 142-183.

[39] M. KONTSEVICH and Y. SOIBELMAN – *Affine structures and non-archimedean analytic spaces*, prépublication sur ArXiv, référence math.AG/0406564, 2004.

[40] M. RAYNAUD – *Géométrie analytique rigide d'après Tate, Kiehl,$\cdots$*, *in* Table Ronde d'Analyse non archimédienne (Paris, 1972), pp. 319-327. Bull. Soc. Math. France, Mem. N°. **39–40**, Soc. Math. France, Paris, 1974.

[41] J. RIVERA-LETELIER – *Espace hyperbolique p-adique et dynamique des fonctions rationnelles*, Compositio Math. **138** (2003), n°. 2, 199-231.

[42] J. RIVERA-LETELIER – *Dynamique des fonctions rationnelles sur des corps locaux*, in Geometric methods in dynamics. II. Astérisque N°. **287** (2003), xv, 147-230.

[43] J. RIVERA-LETELIER – *Points périodiques des fonctions rationnelles dans l'espace hyperbolique p-adique*, Comment. Math. Helv. **80** (2005), n°. 3, 593-629.

[44] D. A. STEPANOV – *A note on the dual complex associated to a resolution of singularities*, prépublication disponible sur ArXiv, référence math.AG./0509588, sept. 2005.

[45] L. SZPIRO, E. ULLMO and E. ZHANG – *Équirépartition des petits points*, Invent. Math. **127** (1997), n°. 2, 337-347.

[46] J. TATE – *Rigid analytic spaces*, Invent. Math. **12** (1971), 257–289.

[47] A. THUILLIER – *Théorie du potentiel sur les courbes en géométrie analytique non archimédienne. Applications à la théorie d'Arakelov*, thèse soutenue à l'IRMAR, Université de Rennes 1 (2005).

[48] A. THUILLIER –*Géométrie toroîdale et géométrie analytique non archimédienne*, prépublication **10-2006** de l'Université de Regensburg.

Mémoire 105

Quantitative analysis of metastability in reversible diffusion processes via a Witten complex approach: the case with boundary

B. Helffer, F. Nier

Cet article prolonge des travaux antérieurs de Bovier-Eckhoff-Gayrard-Klein, Bovier-Gayrard-Klein et Helffer-Klein-Nier. L'objet principal en est l'analyse asymptotique quand le paramètre h>0 tend vers 0 des petites valeurs propres du Laplacien associé à la forme quadratique de Dirichlet définie sur $C_0^\infty(\Omega)$ où Ω est un domaine borné régulier et f est une fonction de Morse sur $M=\overline{\Omega}$. Les travaux précédents traitaient le cas d'une variété compacte M sans bord ou le cas $M=R^n$. Ici nous analysons le cas d'une variété compacte à bord. Après l'introduction d'un complexe de cohomologie de Witten adapté au cas à bord, nous donnons une description très précise des valeurs propres exponentiellement petites. En particulier, nous traitons l'effet du bord sur les développements asymptotiques.

This article is a continuation of previous works by Bovier-Eckhoff-Gayrard-Klein, Bovier-Gayrard-Klein and Helffer-Klein-Nier. The main object is the analysis of the small eigenvalues (as $h\to 0$) of the Laplacian attached to the quadratic Dirichlet form defined on $C_0^\infty(\Omega)$ where Ω is a bounded connected open set with C^∞-boundary and f is a Morse function on $M=\overline{\Omega}$. The previous works were devoted to the case of a manifold M which is compact but without boundary or R^n. Our aim is here to analyze the case with boundary. After the introduction of a Witten cohomology complex adapted to the case with boundary, we give a very accurate asymptotics for the exponentially small eigenvalues. In particular, we analyze the effect of the boundary in the asymptotics.

prix public* : 26 € - prix membre* : 18 €
* frais de port non compris

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
F - 75231 PARIS CEDEX 05

http://smf.emath.fr

MATHÉMATIQUES ET MUSIQUE

C'est pour moi un grand plaisir que de présenter brièvement François Nicolas, en ouverture à la suite de textes qu'il a accepté de rédiger pour la Gazette des Mathématiciens. Cette suite visitera librement le thème, apparemment familier mais vaste, mystérieux, peut-être paradoxal, des rapports entre mathématiques et musique. Voilà en effet plus de vingt ans que j'ai eu le privilège de faire sa connaissance au Conservatoire national supérieur de musique de Paris, lorsqu'il travaillait auprès du regretté Jean-Paul Rieunier aux concerts de création contemporaine et que j'étudiais moi-même le violon avec Gérard Poulet. Nos chemins se sont d'ailleurs recroisés lorsque fut donnée l'une de ses œuvres au concert des vingt ans d'X-Musique, groupe réunissant des musiciens amateurs et professionnels, issus ou non de cette Ecole polytechnique que François et moi avions tous deux fréquentée, quoique à des périodes différentes.

La triple culture scientifique, philosophique et musicale de François Nicolas, sa formation en informatique musicale à l'Ircam ont contribué à irriguer une personnalité particulièrement riche et fertile. Homme de radio, compositeur, il a participé à la mise au point du logiciel Modalys (synthèse par modèles physiques) puis à celle de la Timée (source multi-hauts-parleurs). Son ouvrage sur « La singularité Schoenberg » (Éditions Ircam/L'Harmattan, 1998) demeure l'une des études les plus pénétrantes de cette figure fondatrice, et néanmoins méconnue, de la musique du XX^e siècle. L'étroite interrelation entre composition et réflexion théorique sur la musique se reflète dans son activité éditoriale : cofondateur de la revue Entretemps, ancien membre du comité éditorial de la Revue de musicologie, animateur des Samedis d'Entretemps (rencontres autour de livres sur la musique) et de différents séminaires sur les liens entre musique et mathématiques, psychanalyse, philosophie, histoire...

Depuis quelques années, François Nicolas est basé à l'École normale supérieure de la rue d'Ulm, où il a été professeur associé en charge de la musique contemporaine et actuellement chercheur associé au Laboratoire Pensée des Sciences et au sein du Collectif Histoire-Philosophie-Sciences.

Thanh-Tâm Lê

« Raisonances » mathématiques en musique

François Nicolas[1]

Depuis 1999, des rencontres régulières entre musiciens et mathématiciens ont lieu à Paris ; elles tentent de prolonger, dans les conditions d'aujourd'hui, ces rapports que musique et mathématiques ont initialement noués en Grèce au VIe siècle avant J.-C.

Différentes contributions du Forum Diderot (Société de Mathématique Européenne) de décembre 1999 ont été recueillies dans le volume *Mathematics and Music*[2].

Un tout récent livre *Penser la musique avec les mathématiques*[3] *?* rend compte, pour sa part, de la première année (2000-2001) d'un séminaire mathématiques/musique/philosophie (surnommé *Mamuphi*) organisé ensuite à l'Ircam (Paris). Depuis lors, un double séminaire prolonge ces confrontations : l'un, généraliste, *Mamuphi*[4], se tient le samedi matin à l'ÉNS (Ulm) ; l'autre, plus centré sur les applications des mathématiques à la musique, *MaMuX*[5], se tient le samedi après-midi à l'Ircam.

Ces activités, qui se poursuivront en 2006-2007 dans les mêmes conditions, sont consultables sur les sites respectifs des deux séminaires :

-*Mamuphi* : `http://www.entretemps.asso.fr/maths`,

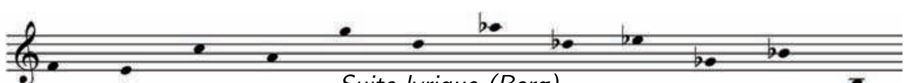
-*MaMuX* : `http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/`.

« Raisonances[6] »

Il s'agira pour l'auteur de cette chronique de la nourrir de ces rencontres, en présentant surtout quelques manières de faire résonner les mathématiques en direction de la musique, de mettre ainsi les mathématiques en position de « raisonance » à l'endroit de la musique. On privilégiera ce faisant une flèche allant des mathématiques vers la musique, là où la flèche inverse (un musicien saisit les mathématiciens d'un problème musical qu'il ne sait résoudre par ses propres moyens) prévaut ordinairement.

Un sens ...

Donnons un exemple tout à fait élémentaire du recours ordinaire du musicien au mathématicien : si l'on connaît la série utilisée par Berg dans sa *Suite lyrique* :



Suite lyrique (Berg)

[1] Compositeur, École normale supérieure/Ircam, `http://www.entretemps.asso.fr/Nicolas`
[2] Ed. G. Assayag, H.G. Feichtinger et J.F. Rodrigues ; Springer-Verlag, 2002.
[3] Dir. G. Assayag, G. Mazzola et F. Nicolas, Éd. Delatour, 2006.
[4] Dir. C. Alunni, M. Andreata et F. Nicolas.
[5] Dir. Équipe Ircam Représentations musicales.
[6] Définition : une raisonance est une résonance entre raisons relevant de domaines hétérogènes, en l'occurrence entre rationalités mathématique et musicienne.

série à la fois dodécaphonique (c'est-à-dire comportant une fois et une seule les douze hauteurs du total chromatique) et tous-intervalles (c'est-à-dire comportant chacun des onze intervalles de la gamme chromatique, et répétant le seul triton[7]), on se demande bien vite combien il y a de telles séries dans l'ensemble des séries dodécaphoniques.

Si le musicien peut facilement calculer le nombre de ces dernières (11 ! = 39 916 800 séries dodécaphoniques[8]), le calcul du sous-ensemble des séries tous-intervalles, lui, n'ira nullement de soi. La simple construction d'une autre série de ce type ne va déjà pas de soi, en-dehors de sa modalité triviale suivante :

C'est en ce point que le musicien se tourne vers le mathématicien pour lui demander son aide. Le résultat obtenu – il existe 1 928 séries de ce type (soit 519 séries, à rétrogradations et renversements près[9]), c'est-à-dire environ une série tous-intervalles parmi 20 000 séries dodécaphoniques – est généralement obtenu par extension combinatoire : par construction systématique de la totalité des séries en question, les nombres 519 et 1 928 découlant alors d'un décompte général des séries construites, par exemple celle-ci :

Les mathématiques offrent-elles un autre moyen, plus direct, d'obtenir ce résultat ? Les nombres 519 et 1928 auraient-ils des propriétés remarquables ? Malheureusement, on ne saurait plus interroger Ramanujan sur ce point... Mais le mathématicien Harald Fripertinger a construit[10] en 1993 la formule générale du nombre de ce type de séries pour n'importe quel tempérament égal partageant l'octave. Reste, semble-t-il – avis aux amateurs ! – à inventer un algorithme construisant l'arborescence des séries sans *backtracking*...

---

[7] Triton : intervalle de trois tons (ou six demi-tons), anciennement nommé « *diabolus in musica* », et orthographié tantôt en quarte augmentée (ex. do – fa$^{\#}$) ou en quinte diminuée (ex. do - sol^{b}). Une série dodécaphonique tous-intervalles, devant forcément répéter un des onze intervalles existants, ne peut répéter que le triton puisque 1+2+3... +11=66, soit 6 (mod. 12).

[8] 11 ! et non 12 ! car on considère musicalement qu'une série dodécaphonique est « la même » à une transposition de hauteur près (autant dire que la série est caractérisable par sa succession d'intervalles), si bien qu'on pourra toutes les classer en partant d'une première hauteur arbitraire, par exemple un do.

[9] 519 = 445 + 74 et 1928 = 445*4 + 74*2

[10] `www.uni-graz.at/~fripert/musical_theory.html` : *Enumeration in Musical Theory* (janvier 1993).

. . . et l'autre

Si le sens de circulation, allant d'une particularité musicale vers sa formalisation et sa généralisation mathématiques, constitue bien l'orientation ordinaire, cette chronique voudrait rehausser le parcours inverse, circulant cette fois des mathématiques vers la musique, en sorte de mettre en évidence la capacité des mathématiques de stimuler la pensée musicale.

Dans cette manière de mettre mathématiques et musique en « raisonance », la mathématique ne se présente plus au musicien comme dispensatrice de formules prêtes à l'emploi, de résultats applicables, mais plutôt comme une pensée en acte dont les plis, détours et échappées sont par eux-mêmes susceptibles de stimuler le musicien qui prend soin de s'y confronter.

Peu de musiciens, il est vrai, s'attachent à lire de la mathématique, à en apprendre, à s'éduquer en s'y frottant. L'auteur de ces lignes – par atavisme sans doute, mais aussi par conviction profonde que « la musique ne pense pas seule », que la musique pense d'autant mieux qu'elle n'est pas seule à penser et qu'à ce titre la pensée en acte dans la mathématique est pour la musique prioritaire (en compagnie, il est vrai, de la poésie et de la philosophie) – se plie depuis longtemps à cet exercice, de manière plutôt volage, butinant par-ci, folâtrant par-là, en ami de la mathématique, de ses exigences démonstratives, de sa clarté de pensée et de sa puissance de transmission.

Il va de soi qu'à présenter ainsi les échos musiciens de ses lectures mathématiques, l'auteur, musicien, ne prétendra nullement apprendre quoi que ce soit sur les mathématiques à des mathématiciens qui en savent bien plus long que lui. Il espère simplement apporter sa modeste contribution à un hymne dont Lautréamont, vers 1867-1869, a fixé le ton dans les Chants de Maldoror : *« Ô mathématiques sévères, [...] merci, pour les services innombrables que vous m'avez rendus. Merci, pour les qualités étrangères dont vous avez enrichi mon intelligence. »*

sans médiation. . .

On essaiera de circuler ici des mathématiques vers la musique directement, sans la médiation donc d'une autre science (de la physique le plus souvent, donc de l'acoustique) ou de la philosophie.

– Passer par l'acoustique pour circuler de la mathématique vers la musique est la voie la plus fréquentée : il est vrai qu'elle dispose d'une puissance « naturelle » (puisque le son est le matériau même de la musique, la science physique du matériau ne peut qu'éclairer la base « naturelle » du savoir musicien) mais il s'agit là, en général, d'apports plus techniques que réflexifs. Disons que la manière dont une exploration scientifique du matériau sonore peut ou non orienter la musique en pensée est une vaste discussion musicienne. Qu'il suffise pour cela de rappeler l'exemple, majestueux, du *Traité des objets musicaux* de Pierre Schaeffer (Seuil, 1966), qui, initié par le projet de déduire les objets musicaux des objets sonores, avait la rare honnêteté d'en reconnaître, en cours de route (pages 578-579 très exactement), l'impossibilité.

– Passer par la philosophie est la voie royale pour nouer mathématiques et musique. Dès l'origine grecque d'ailleurs, le nœud s'est fait à trois, non à deux (voir Arpad Szabo : *Les débuts des mathématiques grecques* – Vrin, Paris, 1977). L'auteur de cette chronique, ami de la philosophie tout autant que de la mathématique, aime à expérimenter ce nœud mais, ce dernier n'étant pas un entrelac borroméen, il est possible de nouer musique et mathématiques *directement*.

Comment déployer un tel rapport direct des mathématiques vers la musique ? On envisagera de le faire ici essentiellement de trois manières :

(1) D'abord dans la guise d'un « comme », que ce soit celui de la métaphore (comparaison de deux termes), celui de l'analogie (comparaison de deux rapports) ou celui de la fiction (logique du « comme si »).

(2) Ensuite sous la loi d'une formalisation, pouvant alors conduire à telle ou telle application particulière : formalisation mathématique apte à mieux comprendre tel ou tel problème spécifiquement musical. Je me suis ainsi livré, ailleurs[11], à l'exercice fort instructif de m'inspirer de la théorie de l'intégration (Riemann, Lebesgue, Kurzweil-Henstock) pour formaliser l'audition musicale...

(3) Enfin, plus synthétiquement, comme conditionnement : entendons par là une manière pour la pensée musicale de faire écho plus global en musique, comme « enveloppement » de la pensée musicale et musicienne. Par exemple, depuis Rameau, les musiciens soucieux de théoriser leur art prennent la science mathématique pour mesure de ce que théoriser veut vraiment dire, non forcément pour faire « de même » (c'est là l'objet propre des théories mathématiques de la musique – telle celle d'Euler – , différentes des théories musiciennes de la musique – telle celle de Rameau – : il est clair que théoriser la musique n'a pas les mêmes enjeux et ne mobilise pas les mêmes moyens pour un mathématicien et pour un musicien...) mais pour s'en inspirer. Il ne s'agira donc plus ici, comme dans la modalité précédente, de se référer à une théorie mathématique particulière, bien choisie et susceptible d'éclairer un problème musical spécifique, mais de se référer à la manière même dont la mathématique prend en charge ce que théoriser (ou formaliser, ou conjecturer, ou déduire, ou démontrer, etc.) veut dire pour s'en inspirer (ce qui n'est pas dire « appliquer ») en ce qu'on pourra appeler un style particulier de discours musicien ou d'intellectualité musicale.

Cette chronique errera ainsi librement, au fil des lectures mathématiciennes offertes à son auteur par l'actualité éditoriale, entre ces trois modalités.

Dedekind

Commençons aujourd'hui par un texte mathématique, contemporain de la déclaration poétique de Lautréamont.

Les éditions du Tricorne viennent de rendre à nouveau disponibles, en traduction française, les Traités sur la théorie des nombres de Richard Dedekind : *Continuité et nombres irrationnels* (1872), *Correspondance avec Lipschitz sur les nombres irrationnels* (1876), *Que sont et à quoi servent les nombres ?* (1888). Cette publication donne ainsi l'heureuse occasion de lire/relire des textes qui, pour un musicien un peu attentif, ne manquent pas de susciter dans son domaine propre des raisonances de pensée. J'en proposerai quatre, deux qu'on pourra dire de méthode, ou de logique, et deux qu'on dira plutôt de contenu.

[11] Voir `www.entretemps.asso.fr/Nicolas/TextesNic/Audition3.html`

Raisonance I : convergence chronologique

Dedekind nous informe, dans sa préface à *Continuité et nombres rationnels* (p.10-11), qu'en un même mois (mars 1872), trois textes indépendants de trois auteurs différents convergent, sans consultation, vers les mêmes résultats : deux traités respectivement d'E. Heine et de G. Cantor et le sien propre. Dedekind précise (p. 10, 66) que ses propres résultats, ceux qu'il est sur le point de publier en 1872, datent en fait du 24 novembre 1858[12] mais qu'il n'avait jusque-là pas pris mesure de leur importance et donc eu le souci de les publier. Il explique pour cela que la simple intuition géométrique de la continuité a pendant longtemps suffi aux mathématiciens et que la préoccupation d'une « fondation scientifique de l'arithmétique » ne s'est que tout récemment constituée chez eux. D'où le bouquet convergent d'études indépendantes.

On a ainsi le schéma suivant : préoccupation ponctuelle conduisant à l'élaboration d'une réponse locale dont la portée plus vaste n'apparaît pas – reprise de cette réponse lorsqu'une nouvelle demande (ici de fondement) se fait plus tard sentir – convergence alors de cette ancienne élaboration, réactivée, et de nouvelles propositions. Ce schéma, qui rend raison de convergence entre travaux menés indépendamment les uns des autres (et sans qu'il soit besoin pour cela de recourir à l'hypothèse paranoïaque de l'appropriation indue des travaux d'autrui) par une sorte d' « esprit du temps mathématique », pourrait tout aussi bien s'ajuster à un certain nombre de transformations musicales.

Songeons par exemple à l'invention de la série dodécaphonique, que Matthias Hauer a disputé à Arnold Schoenberg (voir le débat autour du *Docteur Faustus* de Thomas Mann) en rappelant ici que la portée compositionnelle que Schoenberg, seul, a su donner à la série justifie largement que la paternité de cette « découverte » lui reste attachée : somme toute, Schoenberg occupe face à Hauer la même place que Dedekind se reconnaît face au traité d'E. Heine quand il écrit *« J'avouerai franchement que ma présentation me paraît plus simple dans sa forme, et qu'elle semble faire ressortir le point central avec davantage de précision. »* (p. 10).

Songeons de même à la mise en œuvre par Wagner de cet accord polymorphe qui passera à la postérité comme « accord de Tristan » :

mais qu'on découvre, à peu près à la même époque (1849), sous d'autres plumes, telle celle de Chopin, dans sa mazurka posthume (op.68, n° 4) – l'orthographe en est un peu différente, quand le registre est le même – :

[12] Remarquons la coïncidence : ce délai – de 1858 à 1872 – recouvre l'élaboration et la publication de l'œuvre de Lautréamont...

Cette coïncidence n'impose nullement d'envisager que Wagner a connu ces passages et y a prélevé l'accord-pivot de son opéra mais plutôt que l'évolution du langage harmonique conduisait au même moment différents compositeurs à recourir à de nouvelles fonctions harmoniques de plus en plus chromatisées.

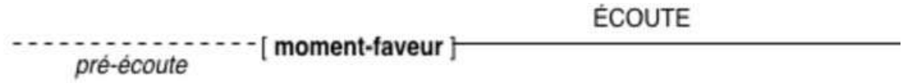
À nouveau, il est clair ici que l'appropriation par Wagner de cette idée harmonique outrepasse entièrement l'usage qu'en fait Chopin et légitime que la postérité musicale l'appelle « accord de Tristan » : en ce point harmonique, Wagner occupe bien vis-à-vis de Chopin la même position que Schoenberg vis-à-vis de Hauer, et Dedekind vis-à-vis d'E. Heine.

Songeons également à la manière dont la musique a pu engager de vastes tournants (en 1750 – fin du baroque – ou 1828 – fin du style classique – comme en 1923 – début du dodécaphonisme – ou 1951 – début du sérialisme –) par convergence de préoccupations semblables : ceci atteste que ce qui rend possible un bond dans la pensée tient moins à l'offre de découvertes qu'à l'émergence d'une demande provenant d'un nouveau contexte (d'un nouvel « esprit du temps ») : sans la nouvelle « demande », tant que le problème de pensée auquel la trouvaille est susceptible de répondre n'a pas été dégagé, l'offre de solutions se présente comme purement technique et n'est guère opérante.

Raisonance II : méthode de la réciproque

Dedekind explique (p. 20) qu'une trouvaille est au principe de son principal résultat en matière de continuité : constatant *« que tout point de la droite engendre un découpage de celle-ci en deux parties telles que tout point de l'une des parties se trouve à gauche de tout point de l'autre, [...] je trouve l'essence de la continuité dans la réciproque, donc dans le principe suivant : "Si tous les points de la droite se divisent en deux classes telles que tout point de la première classe se situe à gauche de tout point de la deuxième, alors il existe un et un seul point qui produit cette répartition de tous les points en deux classes, cette coupure de la droite en deux parties." »*

Il peut y avoir, me semble-t-il, une productivité musicale de ce principe de la réciproque (« Si tout point définit une coupure, alors toute coupure définira un point. ») si bien qu'en cet endroit, les musiciens peuvent prendre exemple en matière de méthode sur les mathématiciens. Ainsi on pourrait soutenir, dans le cadre d'une théorie musicienne de l'écoute musicale – cadre qui, bien sûr, outrepasse celui d'une telle chronique – la proposition suivante : « si tout moment-faveur définit une écoute en la séparant d'une pré-écoute, réciproquement toute écoute définira, par sa séparation d'une pré-écoute, un moment-faveur ». Cette proposition musicale est intuitionnable si l'on indique qu'un « moment-faveur » est un bref moment qui, en cours d'œuvre, fait basculer une pré-écoute en écoute véritable :



La logique de la réciproque sera alors celle-ci :

Dans un premier temps, on soutiendra qu'il faut qu'il se passe quelque chose en cours d'œuvre (un moment-faveur où l'oreille pénètre dans l'œuvre, accède à son intention profonde) pour qu'une écoute musicale véritable naisse à partir de là puis s'épanouisse.

Dans un second temps, on fera l'hypothèse réciproque que si quelqu'un a vraiment réussi à écouter une œuvre, s'il y a vraiment eu une écoute à l'œuvre, c'est bien parce qu'il s'est passé quelque chose en cours d'audition, un moment singulier (nommé moment-faveur) où l'œuvre s'est entrouverte en sorte que l'oreille a pu découvrir le processus musical jusque-là souterrain et commencer d'y adhérer.

Raisonance III : coupure et continuité

Dedekind, à la suite de sa découverte de la coupure, ajoute : « La plupart de mes lecteurs seront très déçus d'apprendre que cette trivialité [la coupure] est censée dévoiler le secret de la continuité. [...] L'adoption de cette propriété de la ligne n'est rien d'autre qu'un axiome, par lequel nous conférons à la ligne sa continuité, par lequel nous forgeons nous-même la continuité de la ligne. Si l'espace possède quelque existence réelle, il n'est pas nécessaire qu'il soit continu ; maintes de ses propriétés demeureraient identiques même s'il était discontinu. Et si nous savions de façon certaine que l'espace est discontinu, rien ne nous empêcherait, si on le souhaitait, de le rendre continu en pensée en comblant ses vides ; mais ce remplissage consisterait à créer de nouveaux individus-points et il devrait se réaliser conformément au principe évoqué ci-dessus. » (p. 20-21)[13]. Il revient, à différentes reprises, sur ce point : « Pour moi, le concept d'espace est totalement indépendant, totalement séparable de la représentation de la continuité. » (p. 56) « Si quelqu'un me dit que nous ne saurions concevoir l'espace autrement que comme continu, je me permettrai d'en douter » (p. 67).

Cette caractérisation de la continuité par la coupure et la dissociation qui s'en infère des notions d'espace et de continuité a une portée immédiatement musicale dont Pierre Boulez s'est probablement inspiré dans son *Penser la musique aujourd'hui* sous-titré *Le nouvel espace sonore* (1962).

Relisons Boulez : *« Il me semble primordial de définir le continuum. Ce n'est sûrement pas le trajet continu "effectué" d'un point à un autre de l'espace (trajet successif ou somme instantanée). Le continuum se manifeste par la possibilité de couper l'espace suivant certaines lois ; la dialectique entre continu et discontinu passe donc par la notion de coupure ; j'irai jusqu'à dire que le continuum est cette possibilité même car il contient, à la fois, le continu et le discontinu ; la coupure, si l'on veut, change le continuum de signe. Plus la coupure deviendra fine, tendra vers*

[13] Au demeurant, un tel « remplissage » a depuis été réalisé, et dans quelles proportions !, par J. H. Conway : voir ses nombres surréels (Harry Gonshor : *An introduction to the Theory of Surreal Numbers*, Cambridge University Press, 1986) et leur appropriation philosophique par Alain Badiou : *Le Nombre et les nombres* (Seuil, 1990).

un epsilon de la perception, plus on tendra vers le continu proprement dit, celui-ci étant une limite, non seulement physique, mais, tout d'abord, physiologique. [...] La qualité de la coupure définit la qualité microstructurelle de l'espace lisse ou strié » (p. 95-96).

Comme toujours chez Boulez, influencé par la culture scientifique sans en être pour autant un véritable adepte ni un connaisseur attentif [14], la proximité de sa catégorie musicienne avec le concept mathématique est transparente tout en privilégiant une interprétation mathématiquement imprécise car musicalement ajustée : pour Boulez, la coupure est découpage d'un segment, d'un intervalle sur la droite, non pas un partage de part et d'autre d'un point. Il est vrai que pour le « working musician » (et, contrairement à ce qu'on pense souvent, Boulez est plus tel que véritable théoricien[15]), l'idée mathématique de point n'est jamais dissociable d'un voisinage minimal donnant épaisseur perceptible à ce qui s'y passe : une hauteur sonore sera toujours musicalement accompagnée d'un vibrato élémentaire de fréquences, et un instant sonore ne saurait exister perceptivement sans une durée minimale...

Toujours est-il que l'ombre de la coupure de Dedekind plane clairement sur cette problématique de Boulez quoiqu'indirectement (via quelles médiations ? : celle de Louis Rougier ?). Ou encore : du concept mathématique de Dedekind à la catégorie musicienne de Boulez, il y a raisonance (et pas application, ou déduction). Il est vrai que cette raisonance Dedekind-Boulez est surdéterminée par une raisonance de pensée bien plus globale qu'on pourrait dire celle de Bourbaki et du sérialisme, soit un même style constructiviste de pensée enveloppant et contemporanéisant mathématique et musique.

Il faudrait examiner de même – mais cela nous entraînerait trop loin – les raisonances de la distinction continuité/espace posée par Dedekind dans l'intellectualité musicale de Boulez. Qu'en est-il pour la musique par exemple d'un espace essentiellement discret ?

Raisonance IV : infini & fini

Soit la célèbre « définition de l'infini » (p. 71) par Dedekind en 1888 dans son *Que sont et à quoi servent les nombres ?* : *« Un système S est dit infini s'il est semblable à une de ses parties propres ; dans le cas contraire, S est un système fini. »* (p. 99)

Ce prodigieux renversement, où le fini devient pensé comme non-infini (à proprement parler, il n'y a pas ici de double négation), où l'infini s'avère premier dans la pensée, plus simple et plus ordinaire à concevoir, quand le fini devient appréhendé comme exception, sans propriété affirmative intrinsèque, peut susciter également une raisonance vers la musique.

On pourrait soutenir ainsi que les œuvres musicales se partagent en deux catégories disjointes selon qu'elles vont implicitement se concevoir comme figurations infinie ou finie d'une entreprise, par ailleurs, à l'évidence finie. Introduisons en

[14] Voir l'entretien réalisé le 4 mars 2005 à l'ÉNS : `www.diffusion.ens.fr/index.php?res=conf&idconf=609` D'où il ressort clairement que Boulez, s'il est bien un admirateur des mathématiques, n'en est pas pour autant un familier ni à proprement parler un ami (en ce que ce terme suppose de proximité et de complicité).

[15] Au moment où il exposait à Darmstadt *Penser la musique aujourd'hui*, Boulez composait un de ses chefs-d'œuvre : *Pli selon Pli*.

deux mots à cette difficile et passionnante question musicale. Une œuvre musicale comporte toujours comme moment-clef son moment de la fin, ce moment où l'œuvre, si elle se veut plus qu'un simple morceau de musique – qui ne sait s'achever qu'en s'enfonçant dans une rumeur indéfinie (voir ces pièces de musique sans conclusion et se terminant par un *fade out*) – doit décider de s'arrêter, doit assumer le moment de conclure. Mais, cette finitude assumée peut se projeter musicalement selon deux images alternatives : celle d'un infini délimité ou celle d'une finitude déclarée.

L'œuvre musicale pourra se représenter comme infini circonscrit au moyen d'un effet décalqué de la propriété de l'infini d'être équipotent à certaines de ses parties propres, effet qui, dans l'ordre propre du sensible (celui de l'art) se donnera par un effet « Vache-qui-rit » soit une figure de miroir endogène où le tout se reflète en une de ses parties. L'attrait bien connu pour un partage des durées selon la section d'or (beaucoup d'œuvres de Debussy sont nourries de ce partage...[16]) ne doit-il pas être ainsi compris : si le rapport du tout à la plus grande partie équivaut au rapport de cette grande partie à la petite, alors la principale section de l'œuvre apparaîtra une introjection de la totalité...

À l'inverse, d'autres œuvres musicales vont adopter un parti pris esthétique tout à fait opposé en choisissant de briser systématiquement toute « symétrie » et homothétie internes comme celle de la section d'or (tout/grande partie équivaut à grande/petite parties) en sorte de représenter au plus juste, dans le sensible, sa finitude essentielle.

Là où le premier type d'œuvre pourra laisser une impression d'infinité (mimant, en quelque sorte, une profondeur « naturelle »), le second type générera plutôt une sidération face à une finitude essentielle, dont le charme sensible apparaîtra d'autant plus fascinant qu'il procède d'une maigreur troublante (voir l'économie d'une fugue de Bach qui mobilise l'attention de l'auditeur par le simple entrelacement de 3 voix pendant 2 à 3 minutes, soit en moins de 1000 notes...).

[16] Voir *Debussy in proportion* de Roy Howatt (Cambridge University Press, 1983).

Les résultats de l'enquête sur la licence

La Commission Enseignement de la SMF

La commission enseignement de la SMF poursuit son travail sur l'enseignement supérieur. Elle a décidé de concentrer ses efforts sur le niveau L (l'ensemble des six semestres), où les problèmes semblent les plus criants. Dans un premier temps, nous avons fait une enquête, et nous avons envoyé un questionnaire aux correspondants de la SMF dans les diverses universités.

Nous avons obtenu 21 réponses, ce qui fait un bon échantillon car elles sont relativement bien équilibrées (universités scientifiques/pluridisciplinaires, Paris/province), et nous tenons à remercier ceux qui ont répondu, car il fallait un effort certain pour réunir les données que nous demandions.

Remarquons d'abord que, dans toutes les réponses sauf une, le L représente au moins la moitié des services de mathématiques de l'université, et parfois beaucoup plus. Notre intérêt bien compris devrait donc nous pousser à y faire attention...

Quelles leçons peut-on tirer des résultats de l'enquête ? Nous en voyons quatre principales :

Un grand manque de lisibilité

La réforme LMD avait pour but d'améliorer la lisibilité des diplômes : c'est certainement perfectible, pour être gentil. Au vu des données que nous avons recueillies, il est difficile de comprendre l'organisation du diplôme, l'articulation avec les autres parcours, et surtout la structuration en unités obligatoires, optionnelles ou facultatives... Chaque université a fait ses choix, sans soucis de cohérence pour une discipline donnée. Il nous a souvent été difficile d'interpréter les réponses que nous recevions (en particulier sur les horaires), et c'est pourquoi nous ne présenterons pas l'ensemble des résultats.

Un fort morcellement des enseignements

En particulier, le nombre moyen d'enseignants de mathématiques que voit un étudiant de première année est de 8, il peut monter jusqu'à 11, ce qui ne semble pas très pédagogique. Plusieurs universités (mais pas toutes) présentent des unités de mathématiques de petite taille.

Une grande variabilité

Elle se manifeste sur plusieurs points :

– le nom du domaine (Sciences et Technologie, Sciences-Technologie-Santé, Sciences, Mathématiques et Informatique, Mathématiques, Informatique et Applications) et de la mention. Cependant, une forte convergence est notée sur les deux premières appellations.

– la taille des modules (qui peut être de $2, 3, 3\,1/2, 4, 4\,1/2, 5, 6, 7, 7\,1/2, 9, 11, 12, 14$ crédits européens) ; en conformité avec les propriétés arithmétiques du nombre 60, les tailles les plus fréquentes sont de 3, 5 et 6.

– le nombre de semestres communs avec les autres cursus, qui va de 0 à 6. Cependant, on retrouve classiquement un plus fort tronc commun avec l'informatique, puis la physique, puis la chimie.

– le volume horaire, qui semble très divers, mais pour lequel les réponses sont peu exploitables, à cause des unités optionnelles. C'est l'un des points sur lesquels le manque de cadre général se fait sentir. En particulier, le volume horaire en mathématiques au premier semestre est extrêmement variable, mais cela semble lié à des stratégies de spécialisation (progressive ou rapide) des étudiants, variables suivant les universités. Il y a certainement des phénomènes de rattrapage, mais difficilement lisibles.

Il serait intéressant de pouvoir comparer cette hétérogénité avec la situation précédente. Le sentiment le plus partagé est qu'elle est devenue plus importante. Il n'y a cependant pas de données fiables sur le système antérieur (DEUG MIAS + licence de mathématiques) permettant d'étayer ce sentiment.

Des contenus disparates

Il est difficile, à la lecture de l'enquête, de définir les contenus scientifiques d'un cursus L « typique ». Les cursus ont des contenus variables, et certains sujets sont abordés à des moments très divers suivant les universités. Il y a un noyau dur de base, en gros l'algèbre linéaire et l'analyse de base (fonctions, suites et séries) :

– algèbre linéaire en général en S1-S2
– formule de Taylor en S1-S2
– réduction des endomorphismes en S2-S4
– suites et séries de réels et de fonctions en S2-S4
– calcul différentiel en S3-S4.

Mais tout le reste est très variable : les probabilités élémentaires sont optionnelles dans 9 universités sur 21, et parfois enseignées en S6 ; la topologie générale n'est jamais enseignée dans 4 universités, les EDP jamais enseignées dans 10 universités, les structures algébriques de base sont très variables, enseignées entre le S1 et le S6, voire jamais dans une université (il est possible que cette variabilité reflète en partie la difficulté qu'il y a à connaître le programme exact des unités proposées).

En analysant les réponses au questionnaire, nous avons eu envie de soulever la question *« la licence de mathématiques existe-t-elle ? »* : y a-t-il DES licences de maths, plutôt qu'UNE licence de maths ? Si oui, est-ce une bonne chose ? Nous devons entamer la réflexion sur ce point. Les physiciens et les informaticiens l'ont déjà tentée pour « leur » licence.

Suite au dépouillement de l'enquête, les commissions enseignement de la SMF et de la SMAI ont réuni le 6 octobre 2006 les correspondants qui avaient répondu, pour discuter à partir de ces constats. Un compte-rendu de la réunion est fait par ailleurs dans ce volume. Nous voudrions juste donner ici quelques impressions. Nous avons constaté que, contrairement à la diversité des résultats de l'enquête, les interventions des participants allaient globalement dans le même sens. En particulier, dans les universités qui sont en phase de discussion du contrat quadriennal, on se dirige vers une diminution de la part optionnelle, et une simplification du cursus pour augmenter sa lisibilité. Plusieurs collègues veulent aussi augmenter la taille des unités d'enseignement. Certains souhaitent que le ministère prenne une part plus active dans la définition des cursus de licence ; mais nous pensons que même si la DGES en avait l'envie et la capacité, c'est à nous de prendre cela en charge, et nous souhaitons que notre communauté s'en saisisse.

La réunion s'est achevée sur la proposition de former un groupe de travail sur le cursus de licence, qui pourrait réfléchir à ce que devrait contenir une licence pour qu'elle puisse s'appeler licence de Mathématiques. Une première réunion publique aura lieu le samedi 13 janvier, à 14 heures à l'IHP.

Compte-rendu de la journée du 6 octobre 2006 consacrée au L

Ce compte-rendu reprend dans leur diversité les opinions qui se sont exprimées lors de la journée, et n'engage pas la Commission Enseignement.

Ont participé à cet après midi de réflexion : Pierre Arnoux, Jean-Marc Bonnisseau, Jean-Pierre Borel, Driss Boularas, Guy Chassé, Gilles Christol, François Goichot, Jean-Pierre Leca, Pierre Loidreau, Marc Peigné, Marie-Jeanne Perrin, Frédérique Petit, Marie-Françoise Roy, Didier Schmitt, Michèle Weidenfeld, Jacques Wolfmann.

Marie-Françoise Roy accueille les participants en réaffirmant l'importance pour la SMF et la SMAI des questions d'enseignement. L'idée de l'enquête sur laquelle porte la journée d'aujourd'hui remonte à environ deux ans.

La journée est introduite et présentée par Jean-Pierre Borel qui mentionne les points suivants :

– l'existence d'un rapport « Les filières scientifiques et l'emploi » (dossier 177 de la DGES `http://media.education.gouv.fr/file/84/8/2848.pdf`) issu d'un groupe piloté par Catherine Béduwé,

– le nombre de nouveaux bacheliers inscrits actuellement en classes préparatoires scientifiques est de 22 000 ; compte tenu des doubles inscriptions classes préparatoires/université, il est possible que ce nombre ait dépassé celui des nouveaux bacheliers inscrits à l'université (toutes Sciences confondues), qui est passé de 63 000 en 1995 (qui marquait un sommet) à 38 000 en 2005,

– plusieurs études de Daniel Duverney pour « Action Sciences », en particulier l'une sur le baccalauréat : `http://www.sfc.fr/ActionSciences.htm#proposbac`. Ces études prévoient, à notre niveau, une chute de 10% des effectifs dans les prochaines années. (voir aussi `http://home.nordnet.fr/~dduverney/monsite/niveau2/artped.htm`).

Après l'introduction de Jean-Pierre Borel, Pierre Arnoux donne l'analyse des résultats de l'enquête sur le L (voir article précédent).

Les étudiants

Jean-Pierre Leca commence par présenter l'exemple du cursus MASS où les mathématiques sont associées à l'économie, à la démographie ou à l'informatique (de gestion). À Paris I, la première année est commune aux trois cursus. Un bon quart des étudiants y vient pour ne plus faire de physique ni de chimie. Depuis peu, le recrutement se fait aussi à partir des Bac ES spécialité maths et non plus à partir du seul Bac S. Cela crée une dynamique positive (fratries). Il est fait remarquer que le logiciel de pré-inscription RAVEL ne connaît pas les filières MASS pas plus qu'il ne connaît les cursus math-info. Conséquence, cette année, les inscriptions dans les cursus math-info en région parisienne ont diminué de 50%. Le Ministère a créé un portail étudiant sur lequel le mot informatique ne permet pas d'arriver aux licences math-info (`http://www.etudiant.gouv.fr`). Pour cela, il faut taper mathématiques, le Ministère refusant la bidisciplinarité. En ce qui concerne la licence mention mathématiques, le passage au LMD a permis de fidéliser le public dans les universités « de proximité » qui avaient subi il y a quelques années la concurrence des classes préparatoires ouvertes en grand nombre. À l'entrée à l'université, les étudiants ont souvent du mal à dire pourquoi ils sont là. En province, le noyau dur qui se destinait vers le CAPES se déplace vers le professorat des écoles. Mais le problème principal est le manque de perspective de ces carrières, le taux de succès à ces concours étant beaucoup trop faible. Une fois le barrage de la première année de médecine passé ou rentré en école d'ingénieur, l'étudiant est quasiment certain de finir médecin ou ingénieur. Rappelons que 70% des étudiants titulaires d'un master de mathématiques se placent dans le privé : finance, assurance,... Le processus de Bologne prévoit pourtant trois niveaux d'employabilité, en particulier au niveau L ! L'exemple des classes prépas intégrées est intéressant. À Tours[1], le recrutement se fait sur simple entretien (ce qui suffit à motiver l'étudiant), les niveaux L1 et L2 sont communs avec ceux de la licence math-info, et le taux de succès est très important. Dans ce cas, l'étudiant rentre dans l'une des écoles d'ingénieur du réseau. Certains de ces étudiants reviennent à l'université au niveau M2. Attention cependant à laisser poreux le système entre l'université et ces prépas intégrées, et à l'équilibre des moyens entre filières. Et jusqu'à quel point ce système est-il généralisable ?

[1] Voir l'article de Marc Peigné ci-après.

La modularité

Au contraire des collègues des autres disciplines, les mathématiciens se plaignent du découpage des unités en petits morceaux. Souvent, le LMD semble avoir supprimé la notion d'équipe pédagogique. Dans certains endroits comme à Nancy, la mise en place du LMD a permis le passage des enseignements de maths en cours-TD en première année. À d'autres, comme à Paris VI, ces expériences ont été supprimées. De l'avis général, il ne faut pas trop morceler : pas d'unité en-dessous de 6 ECTS, et il faut encourager les unités à 9, voire les unités doubles à 12 ECTS. La diversité proposée par le LMD a engendré des difficultés d'organisation telles que les options deviennent obligatoires et que l'on constate un retour à plus de rigidité : le nombre de parcours proposés est en diminution. La compensation se fait différemment d'une université à l'autre. Quand ce n'est pas déjà le cas, la pression étudiante est forte pour imposer la compensation annuelle. Cette dernière, si elle permet à certains étudiants de pouvoir s'inscrire à des concours administratifs nécessitant une licence, en pénalisent d'autres qui sont pris au piège (à Paris I, les étudiants reçus par compensation ne peuvent s'inscrire en master).

La pluridisciplinarité

Les exemples proposés d'enseignements pluridisciplinaires reposent sur la bonne volonté des enseignants. Les cursus sont en fait plus tubulaires qu'autrefois et les étudiants dans l'ensemble se spécialisent plus vite. Cependant, le choix entre les mentions mathématiques, informatique, ou math-info, peut se faire très tardivement, en semestre S6. À noter qu'il n'y a pas de master bi-disciplinaire math-info. Certaines unités imposées par les universités en S1 pour avoir des semestres communs sont considérées par certains comme du temps perdu, ce qui incite les collègues à se « rattraper » par la suite. Y. Yebbou présente l'exemple des classes préparatoires où le début de l'année est utilisé pour adoucir la transition ; les étudiants en profitent pour apprendre à calculer.

Mobilité, lisibilité, contenus

Pour l'instant dans l'ensemble, les universités n'ont pas trop de mal à gérer les mobilités entre les universités, soit parce qu'il y en a peu, soit parce que les étudiants arrivent avec un descriptif assez précis de ce qu'ils ont fait (ce qui nécessite néanmoins un gros travail). Il n'y a pas de compensation entre universités. Les transferts entre classes préparatoires et universités se font à l'aide de conventions entre l'université et les établissements concernés. Comment s'y retrouver dans les diverses dénominations ? Par exemple, le parcours mathématiques et informatique de Nancy n'a rien à voir avec la mention math-info de Paris VI qui, elle, est vraiment bidisciplinaire. Pour améliorer la lisibilité du L de mathématiques, il est suggéré que la SMF fasse une demande au Ministère afin qu'il précise ce qu'il attend d'une licence de mathématiques. Il n'existe pas de site centralisant les maquettes de L. Ce travail, utile à la fois pour les enseignants et les étudiants, devrait être du ressort du Ministère mais n'a aucune chance d'être fait, aucune évaluation scientifique des licences n'étant prévue. La communauté pourrait s'en charger. La Société Française de Physique (SFP) et la Société des Personnels Enseignants et Chercheurs en Informatique de France (SPECIF) ont travaillé pour proposer un cursus de physique, avec des pré-requis de mathématiques. Toujours dans le but d'améliorer la lisibilité du L, ne faudrait-il pas avoir une réflexion analogue sur le contenu mathématique dans les trois années du L ?

Conclusion

Pour l'ensemble des participants à la journée, la création d'un petit groupe de travail qui déblayerait le sujet paraît une nécessité urgente.

Ce groupe de travail, qui doit associer à sa réflexion la communauté toute entière, devrait dégager le socle (terme à discuter) de connaissances, compétences et savoir-faire, qui doit être présent dans toute licence de mathématiques.

Trois pistes sont évoquées pour engager cette réflexion. Deux sont de type « programme », il s'agit de ceux du CAPES et des classes préparatoires. Le troisième consiste à privilégier la bonne assimilation des connaissances à l'ampleur d'un programme.

Le Parcours des écoles d'ingénieurs Polytech

Marc Peigné[1]

Le Parcours des écoles d'ingénieurs Polytech (PeiP) a été ouvert en septembre 2004 à Tours lors de la mise en place du LMD sur l'université François Rabelais (vague B). Il propose aux étudiants concernés de suivre un cursus L1 et L2, en mathématiques ou physique, comme les autres étudiants de l'université, avec quelques modules spécifiques plus directement liés à un cursus d'écoles d'ingénieurs. À l'issue du L2, l'étudiant peut poursuivre ses études au sein d'une École d'Ingénieurs du réseau Polytech, et ce, à condition d'avoir validé le L1 et le L2 en deux ans. Ce parcours existe en fait dans plusieurs universités en France où la Faculté des sciences et une École universitaire coopèrent : c'est le cas ainsi à Clermont-Ferrand, Grenoble, Lille, Marseille, Montpellier, Nantes, Nice et plus récemment Annecy-Chambéry et Paris (P. et M. Curie).

Les modules spécifiques représentent environ 70h réparties sur les semestres 1, 2 et 3 et sont assurés par l'École Polytech de Tours ; ils englobent une initiation à Latex et à la recherche sur Internet en S1, un projet en équipe en S2 et une unité de Sciences humaines et sociales, avec projet, en S3. Un stage en entreprise est aussi demandé au cours de l'été entre le L1 et le L2. Enfin, au semestre 4, des options sont réservées aux étudiants du Parcours, elles leurs permettent d'affiner leur formation en fonction des résultats obtenus aux semestres 1, 2 et 3 et des écoles qu'ils souhaitent intégrer l'année suivante. Toutes ces unités spécifiques permettent aux étudiants de découvrir de l'intérieur la vie d'une École d'Ingénieurs et de mieux appréhender les différents aspects des métiers auxquels elle prépare.

L'inscription à ce Parcours se fait sur dossier, avec un entretien personnalisé sur Tours. Le recrutement est fait actuellement au niveau national et est organisé par

[1] Directeur du Département de Mathématiques de l'Université François Rabelais à Tours, Responsable du PeiP sur la Faculté des Sciences de Tours.

le Ministère, les entretiens peuvent s'effectuer sur le site le plus proche du domicile ; l'acceptation au parcours vaut pour toutes les universités concernées.

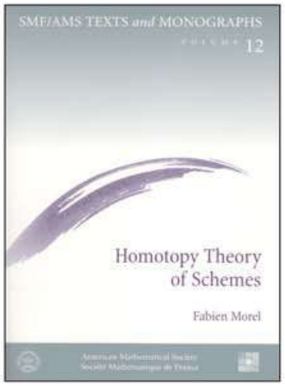
La sélection et les auditions des candidats permettent avant tout d'éviter une orientation inadaptée aux capacités de l'étudiant et à leur projet personnel. Par exemple, on sait très bien que les chances de réussite en L1 de mathématiques d'un élève ayant obtenu un baccalauréat technique sont très faibles ; sauf dans le cas d'un très bon dossier et d'une forte motivation, ces candidatures ne sont donc pas retenues. L'entretien est aussi l'occasion d'une mise au point sur les attentes des équipes pédagogiques quant au travail personnel et sur la nécessaire autonomie requise dans les filières universitaires.

L'enseignement est dispensé au sein de groupes de 30 à 35 étudiants ; en effet, sur Tours, l'enseignement en S1 de mathématiques, informatique et physique est dispensé sous forme de Cours-TD. Au cours des deux années que dure le Parcours, un accompagnement personnalisé est proposé par l'École Polytech, permettant aux étudiants de faire le point très régulièrement sur les résultats obtenus et le travail à fournir ; en cas de problèmes, les responsables du PeiP au sein de l'École Polytech informent immédiatement leurs collègues de l'université et des solutions sont alors envisagées. L'expérience prouve déjà que ce suivi, même léger, rassure les étudiants et améliore leurs résultats.

Les taux de réussite dans le PeiP sont de 80% environ en L1, soit 15 à 20% de plus que pour les autres étudiants ; sur la première « promotion », 23 étudiants étaient inscrits à ce parcours au début du L1 de mathématiques, ils sont 15 à avoir obtenu le L1 et L2 en deux ans et poursuivent actuellement leurs études sur Tours, pour l'essentiel, mais aussi sur Orléans, Clermont-Ferrand ou Nantes.

Il est bien sûr possible pour un étudiant du Parcours, ayant validé les années L1 et L2, de poursuivre ses études en L3 de mathématiques ; la promotion 2005-2006 est déjà plus fournie (37 étudiants inscrits en mathématiques) mais est aussi d'un meilleur niveau (36 ont validé le L1 en 1 an !), il semble envisageable que certains étudiants continueront en L3 de mathématiques.

Nous souhaitions en créant ce Parcours attirer tout d'abord de bons étudiants à l'université et établir un contrat gagnant-gagnant entre les Écoles Polytech Universitaires et les Facultés des Sciences. D'ores et déjà, certains bons étudiants suivent ce parcours alors qu'ils pouvaient s'inscrire en classes préparatoires aux grandes écoles, mais ne le désiraient pas ; ils apprécient cette offre de formation qui contraste quelque peu avec les cursus universitaires « longs », dont la lisibilité des débouchés est souvent jugée peu claire. La Faculté des Sciences profite de la présence de ces étudiants en L1 et L2, tout en pouvant envisager de les garder en L3 et les diriger vers un Master, voire un doctorat ; l'École Polytech Tours voit quant à elle dans les étudiants de ce Parcours un vivier d'élèves ingénieurs pour les années à venir.



SMF/AMS Texts and Monographs 12

Homotopy Theory of Schemes

Fabien Morel

In this text, the author presents a general framework for applying the standard methods from homotopy theory to the category of smooth schemes over a reasonable base scheme *k*. He defines the homotopy category $h(E_k)$ of smooth *k*-schemes and shows that it plays the same role fo smooth *k*-schemes as the classical homotopy category plays for differentiable varieties. It is shown that certain expected properties are satisfied, for example, concerning the algebraic *K*-theory of those schemes. In this way, advanced methods of algebraic topology become available in moder algebraic geometry.

Dans ce texte, nous proposons un cadre général pour appliquer les méthodes standard de théorie de l'homotopie à la catégorie des schémas lisses sur un schéma de base raisonnable. Nous montrons qu'un certain nombre de propriétés attendues sont satisfaites, par exemple concernant la K-théorie algébrique de ces schémas.

Prix public* : 39 € - prix membre* : 27 €
* frais de port non compris

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
F - 75231 PARIS CEDEX 05

http://smf.emath.fr

HISTOIRE

À l'automne 2006 est paru le premier numéro d'une nouvelle revue internationale qui peut intéresser les lecteurs de la Gazette, *l'*International Journal for the History of Mathematics Education. *Nous vous présentons ici de larges extraits de l'éditorial, signé par Gert Schubring (université de Bielefeld, Allemagne), qui présente le champ des recherches en histoire de l'enseignement des mathématiques auxquelles ce journal a choisi de se consacrer. Ce premier numéro présente un premier article sur l'enseignement de la géométrie au 20e siècle dans les High schools américaines, un deuxième sur le rôle de la géométrie projective dans l'éducation italienne à la fin du 19e siècle, un troisième sur l'histoire de la dénomination des théorèmes de géométrie dans les manuels scolaires et un dernier sur les réformes curriculaires en mathématiques dans les classes secondaires eu Brésil dans les années 1930. Ces articles, ainsi que l'intégralité de l'éditorial, sont consultables en ligne à l'adresse* `http://journals.tc-library.org/index.php/hist_math_ed`.

Hélène Gispert

International Journal for the History of Mathematics Education[1]

Gert Schubring[2]

Voici le premier numéro de la revue, dont le but est d'être un forum international pour les études sur l'histoire de l'enseignement des mathématiques, un champ qui jusqu'ici n'a été que marginalement représenté dans les revues existantes. Ce fut le succès remarquable du groupe de travail « History of Learning and Teaching Mathematics » au 10e « International Congress on Mathematics Education » qui s'est tenu à Copenhague en 2004, qui montra le besoin d'un forum international stable et permanent pour de telles recherches. Nous pensons ainsi qu'une revue internationale consacrée à l'histoire de l'éducation mathématique saura, aux côtés des différents journaux d'éducation mathématique, d'histoire de l'éducation et d'histoire des mathématiques, intéresser un public d'éducateurs, de décideurs, d'historiens et de mathématiciens.

L'intention première de l'*International Journal of Mathematics Education* est de pourvoir l'enseignement et l'éducation mathématiques d'une mémoire et de révéler ainsi des points de vue sur les périodes passées (allant de l'antiquité à nos jours), en débrouillant des idées fausses sur des événements passés (par exemple, l'euphorie

[1] Traduction : Hélène Gispert
[2] Université de Bielefeld, Allemagne.

des réformes). Cette revue fera connaître aux enseignants de mathématiques et autres personnes intéressées, les contraintes politiques, sociales, culturelles (telles qu'elles apparaissent lors d'événements historiques, à des périodes données) qui sont en jeu dans les processus d'amélioration de l'instruction mathématique. La revue vise à dépasser la seule échelle nationale d'histoires culturelles et sociales déconnectées entre elles et voudrait contribuer à mettre à jour des thèmes et des caractéristiques communs aux développements de l'instruction mathématique dans différentes cultures, en cherchant à repérer ce qui constitue des spécificités ou des particularités nationales et ce qui pourrait relever de tendances globales. Étant donné les relations étroites existant entre la production et la diffusion du savoir mathématique contemporain et/ou classique, les réflexions théoriques sur la fonction de l'enseignement devraient contribuer à mieux saisir les formes concrètes et pratiques que peuvent prendre ces relations.

Pratiquement toutes les questions de recherche dans le champ de l'éducation mathématique ont une dimension historique qui, trop souvent, demeure implicite ou est traitée trop superficiellement. L'explicitation consciente de l'histoire de l'éducation et de l'enseignement mathématiques pourrait leur être grandement profitable. Plus important encore, l'histoire de l'enseignement des mathématiques devrait constituer une des dimensions du savoir professionnel des enseignants de mathématiques. Afin de pouvoir affronter les problèmes qu'ils rencontrent dans leur vie professionnelle, les professeurs de mathématiques devraient être informés de l'évolution de leur profession. Ils devraient savoir comment celle-ci a émergé, comment elle s'est développée, à quels problèmes elle a été confrontée, et quels ont été les obstacles qui ont dû être surmontés pour l'établissement effectif d'un enseignement mathématique.

Le propos principal de la revue sera l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques à l'école (premier et second degré ou équivalents) et de ce fait, la formation de ses enseignants. L'histoire institutionnelle de l'enseignement supérieur mathématique sera aussi prise en compte. Toutes les périodes historiques, toutes les cultures et tous les pays seront considérés, y compris bien évidemment ceux où un système scolaire n'a pas encore été formellement institutionnalisé. Le champ des recherches en histoire de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques, toujours en plein développement, nécessite une réflexion et un approfondissement méthodologiques. Les paragraphes suivants veulent présenter un rapide aperçu des défis auxquels ces recherches sont confrontées et qui devraient susciter de nouvelles études approfondies.

Des études nationales

Il est tout à fait naturel que la plupart des recherches, passées et actuelles, se concentrent sur l'histoire d'un pays et d'une culture, dans la mesure où l'histoire de l'enseignement mathématique fait partie de l'histoire générale de l'éducation dans chaque pays, chaque culture. Mais sous peine que cette recherche se réduise à une collection d'histoires séparées, sans lien les unes aux autres, il est nécessaire d'établir des relations entre ces différentes histoires et de mettre à jour ce qui peut être « général » et ce qui constitue des particularités culturelles, sociales ou politiques. Nous souhaitons ainsi recevoir des études qui présentent des histoires nationales dans une perspective comparative internationale.

Approches

Un thème traditionnel des études historiques est l'analyse de l'évolution des programmes de mathématiques ayant eu cours dans des types d'institutions et dans des régions géographiques donnés. Grâce à l'accessibilité relativement aisée à ce type de sources, cette orientation historiograhique a conduit principalement à l'étude des décisions prises par les autorités centrales des états respectifs. Même si l'on réduit le large spectre des thèmes historiographiques aux seules études de programmes, un véritable enjeu est alors de savoir si et comment des décisions centralisées sont mises en œuvre dans la pratique scolaire, ce qui ouvre à nouveau une vaste gamme de dimensions contextuelles pertinentes utiles aux développements historiques.

L'entité même qu'est l'ensemble structuré des concepts mathématiques, à savoir les « mathématiques scolaires », est loin de n'être qu'un dérivé ou une projection du « savoir savant » ; bien au contraire les mathématiques scolaires se développent comme le résultat de nombreuses interactions, voire même de pressions, entre secteurs différents de la société.

Les mathématiques ne figurent jamais de façon autonome dans les systèmes éducatifs, ce qui complique encore plus la recherche dans notre champ. Elles y fonctionnent toujours à l'intérieur de structures qui sont le produit de plusieurs disciplines scolaires. C'est alors la valeur sociale et culturelle des mathématiques qui varie de façon si importante en regard de celle des autres éléments de cette structure, dont nous voulons encourager l'étude dans différents contextes politiques.

Interdisciplinarité

Ces différents contextes, qui influencent et déterminent au plus haut point l'évolution historique, montrent, quoiqu'il en soit, que l'histoire de l'enseignement et de l'éducation mathématiques constitue un champ d'étude interdisciplinaire. Les principales disciplines à l'œuvre sont l'histoire des mathématiques et l'histoire de l'éducation, l'histoire elle-même y jouant également un rôle. La sociologie, et en particulier la sociologie des religions, est aussi tout à fait essentielle.

Fonctions et statuts de l'enseignement mathématique

Il s'avère que le rang attribué aux mathématiques dans l'ensemble des valeurs sociales et culturelles a toujours été un point-clé aux différents moments de la longue histoire de l'éducation mathématique. Et ce rang est intimement lié à la fonction que l'on reconnaît à l'instruction mathématique.

On peut affirmer que les mathématiques (de même que le langage, la seconde discipline clé) a joui d'une position centrale, ferme et non discutée comme discipline clé dans les premières formes historiquement constituées d'instruction systématique : les écoles de scribes de Sumer la mésopotamienne et de l'Égypte. Cette instruction était clairement à finalité professionnelle, orientée vers les besoins concrets de l'état, pour le bon développement de son système d'administration. La haute valeur attribuée à l'instruction mathématique découlait ainsi de sa fonction administrative et professionnelle.

Dans les sociétés et cultures moins anciennes, qui virent l'établissement de classes sociales supérieures et dans lesquelles disposer de temps libre consacré à l'étude devint courant, certaines formes d'éducation libérales (ou générales) émergèrent. Il est hautement significatif que, dans la plupart de ces cas, où l'éducation n'est plus à finalité professionnelle, les mathématiques n'eurent alors qu'un rôle marginal – qu'il soit propédeutique ou auxiliaire. Ce fut un processus profondément complexe qui, en fin de compte, fit des mathématiques un des éléments centraux d'une éducation générale.

Cette élévation de son statut et la transformation de la fonction de l'apprentissage des mathématiques qui s'en suivit ont été accompagnées de débats épistémologiques sur la nature du savoir mathématique, en particulier en Europe avec l'avènement des Lumières et le début de la domination du rationalisme dans plusieurs pays. La première instauration solide d'un enseignement mathématique dans un système d'instruction publique à la suite de la Révolution française renseigne non seulement la question des liens étroits entre l'histoire de l'éducation mathématique et l'histoire générale de l'éducation, mais aussi la forte influence des facteurs culturels et politiques.

Les deux directions conflictuelles, formation professionnelle versus éducation générale, continuent, d'ailleurs, à caractériser le statut et la fonction des mathématiques scolaires aujourd'hui, et nous invitons les auteurs à s'intéresser à la façon dont ces interactions ont marqué concrètement les formes de l'enseignement mathématique.

Le nom de la revue

Nous avons réfléchi un temps au nom à donner à ce journal. L'expression History of Learning and Teaching Mathematics, nom donné à l'atelier tenu à ICME 10, quoi qu'indiquant clairement les thématiques ciblées, était trop long. Nous l'avons tout d'abord raccourci pour le titre History of Mathematics Teaching, puis avons envisagé celui de History of Mathematics Education qui englobe le système éducatif dans son ensemble en tant qu'il concerne les mathématiques et rend mieux compte du large éventail des questions en jeu, telles l'histoire des manuels, l'histoire des organisations professionnelles d'enseignants de mathématiques ou l'histoire des programmes de formation des maîtres. Mais l'expression Mathematics Education est parfois employée en référence à la discipline scientifique nommée « Mathematik-Didaktik » en, allemand, « Didattica dela matematica » en italien ou « didactique des mathématiques » en français. Pour éviter une telle étroitesse, nous avons fait figurer des sous-titres en différentes langues comme le montre la page de couverture du journal.

[...]

PRIX ET DISTINCTIONS

Comment K. Itô a révolutionné l'étude des processus stochastiques

Marc Yor[1]

Le premier prix Gauss a été décerné à Kiyosi Itô lors du congrès international de Madrid en août 2006. À cette occasion, il m'a été demandé de présenter succinctement son œuvre (ou une partie...), ce que je fais ici avec le plus grand plaisir.

K. Itô a révolutionné une première fois, entre 1944 et 1950, le calcul des probabilités, et plus particulièrement l'étude des processus stochastiques en définissant l'intégrale stochastique, et en obtenant conjointement ce que l'on appelle maintenant la formule d'Itô. Cette formule est la clé du calcul (différentiel et intégral) stochastique. Ce calcul a permis, entre autres choses, de passer du « calcul extérieur » développé initialement par Kolmogorov, et les spécialistes des processus de Markov, tels que W. Doeblin par exemple puis plus tard E. Dynkin (i.e. : étude de semi-groupes et résolvantes de Markov, équations de Fokker-Planck-Kolmogorov), à un « calcul intérieur » qui opère directement sur les trajectoires des processus en question.
Voyons plus précisément ce que signifient les phrases précédentes en termes et au moyen d'hypothèses mathématiques rigoureuses. Je ferai ici une présentation un peu plus générale que celle d'Itô, mais l'essentiel est déjà bien entendu dans les travaux d'Itô.

Les processus stochastiques $(X_t, t \geqslant 0)$ dont il sera question par la suite sont adaptés à une famille croissante – appelée filtration – $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ de sous-tribus de la tribu « ambiante » d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$: pour tout t fixé, $\mathcal{F}_t$ représente « l'information » accessible jusqu'à l'instant t et X_t est une variable $\mathcal{F}_t$-mesurable : on dit alors que le processus X est $(\mathcal{F}_t)$-adapté. Introduisons maintenant la classe des $(\mathcal{F}_t)$-martingales, c'est-à-dire les processus (M_t) tels que : $E[M_t/\mathcal{F}_s] = M_s$ $(s < t)$ (par exemple, le gain au cours du temps dans un jeu équitable...).

Si $(X_t, t \geqslant 0)$ est la somme d'une $(\mathcal{F}_t)$ martingale (locale) (M_t), et d'un processus à variation bornée $(\mathcal{F}_t)$ adapté, (V_t), le calcul stochastique d'Itô consiste, dans un premier temps, à donner un sens aux intégrales stochastiques $\int_0^t H_s dX_s$,

[1] Université Paris VI, Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires et Institut Universitaire de France.

où (H_s) est un processus convenablement $(\mathcal{F}_s)$ adapté, et disons localement borné, la difficulté résidant dans la définition de $\int_0^t H_s dM_s$.
Il se trouve, et c'est ce qui fait tout l'intérêt du Calcul d'Itô, que ces intégrales stochastiques, loin d'être une construction « gratuite », vont intervenir de façon extrêmement naturelle dans bon nombre de discussions probabilistes que, pour simplifier la présentation, je supposerai ici relatives au mouvement brownien (B_t) n-dimensionnel ; je vais présenter 3 points où interviennent de façon cruciale les intégrales stochastiques :

1. tout d'abord, la fameuse formule d'Itô !
Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe C^2, on peut montrer facilement que :

$$\left(f(B_t) - f(B_0) - \frac{1}{2}\int_0^t \Delta f(B_s) ds, t \geqslant 0 \right)$$

est une martingale (locale) ; celle-ci n'est autre que l'intégrale stochastique :

$$\int_0^t \nabla f(B_s) \bullet dB_s.$$

2. toute variable de carré intégrable Y, mesurable par rapport à la tribu engendrée par $(B_s, s \geqslant 0)$ peut s'écrire sous la forme :

$$E[Y] + \int_0^\infty y_s \bullet dB_s \ ,$$

où (y_s) est un processus prévisible tel que : $E\left[\int_0^\infty |y_s|^2 ds\right] < \infty$. Cette propriété est équivalente à l'extrémalité de la mesure de Wiener parmi l'ensemble de toutes les lois de martingales.
En mathématiques financières, elle exprime que « le marché brownien est complet ».

3. Considérons $(Z_t \equiv X_t + iY_t, t \geqslant 0)$ mouvement brownien complexe issu de z_0, obtenu à partir de deux mouvements browniens réels indépendants $(X_t, t \geqslant 0)$ et $(Y_t, t \geqslant 0)$.
Soit $f : \mathbb{C} \setminus \{z_1, ..., z_n\} \to \mathbb{C}$ une fonction méromorphe. On suppose $z_1, ..., z_n$ tous différents de z_0. Ainsi, $(Z_t, t \geqslant 0)$ ne visite p.s. pas ces points et on peut définir, comme cela est fait en analyse pour toute courbe continue à valeurs dans $\mathbb{C} \setminus \{z_1, ..., z_n\}$, l'intégrale $\int_{Z_{(0,t)}(\omega)} f(z)dz$ le long de la trajectoire brownienne, en intégrant soigneusement le long d'une chaîne de petites boules qui recouvrent $Z_{(0,t)}(\omega)$.
On peut montrer que cette intégrale coïncide p.s. avec l'intégrale stochastique complexe $\int_0^t f(Z_s(\omega))dZ_s$. En particulier, ceci permet d'obtenir une représentation comme intégrale stochastique de la détermination continue de l'argument de $(Z_u, u \geqslant 0)$ autour de 0, i.e. :

$$\theta_t(\omega) - \theta_0(\omega) = \operatorname{Im} \int_0^t \frac{dZ_s}{Z_s} = \int_0^t \frac{X_s dY_s - Y_s dX_s}{X_s^2 + Y_s^2}$$

permettant, par exemple, de démontrer assez simplement le théorème de Spitzer :

$$\frac{2}{\log t}\,\theta_t \xrightarrow[t\to\infty]{\text{(loi)}} C_1$$

avec C_1 : variable de Cauchy, à l'aide purement de calculs portant sur la partie radiale $|Z_t|$ de Z_t.

Bien entendu, j'ai choisi pour la présentation des 3 points précédents un cadre – brownien – aussi simple que possible. Mais, chacun de ces points admet de vastes généralisations, respectivement :

1. formule d'Itô (puis d'Itô-Tanaka-Meyer) pour une semi-martingale générale ;
2. théorèmes de représentation des martingales dans une filtration donnée ;
3. géométrie différentielle stochastique ; intégration de formes différentielles le long de trajectoires browniennes sur une variété, extensions multidimensionnelles du théorème de Spitzer.

Il ne faudrait pas déduire de cette présentation extrêmement minimaliste que les travaux d'Itô ne s'appliquent qu'au mouvement brownien. En effet, les intégrales stochastiques permettent de définir les *équations différentielles stochastiques* lesquelles donnent là encore une *approche trajectorielle* (le plus souvent) à la construction de nombreux processus de Markov ; alors que le « calcul extérieur » donnait surtout une approche analytique, et non pas vraiment probabiliste...

Il est tout à fait remarquable que « l'acceptation » au niveau international du calcul stochastique d'Itô ait pris, grosso modo, vingt-cinq ans, le catalyseur ayant été le merveilleux petit livre de H.P. Mc Kean : *Stochastic integrals*, paru en 1969. Depuis lors, toute formation de 3[e] cycle en Probabilités offre un ou plusieurs cours de calcul stochastique chaque année !
Il est d'ailleurs également remarquable et tout à fait étonnant, que dans le célèbre livre de K. Itô et H.P. Mc Kean : *Diffusion processes and their sample paths*, paru en 1965, aucune mention ne soit faite du calcul stochastique d'Itô !

Pour en terminer avec ce point, disons que maintenant l'intégration stochastique (par rapport aux processus X dont il a été question plus haut, qui constituent l'ensemble des semi-martingales) fait tellement partie du bagage commun des probabilistes que l'on ne mesure peut être plus suffisamment ce qu'il a fallu d'ingéniosité à Itô pour y parvenir ! Il a d'ailleurs été montré, à la fin des années soixante-dix, que la classe des semi-martingales est précisément celle pour laquelle on peut définir une intégrale (stochastique), qui a les bonnes propriétés d'intégrale, mais je resterai très vague ici...

Toutefois, on est vite ramené à plus d'humilité lorsque l'on examine le foisonnement de petits progrès qui sont faits, depuis maintenant une bonne dizaine d'années, par tel ou tel groupe pour bâtir quelque chose qui ressemblerait à une théorie de l'intégration stochastique « à la Itô » par des processus tels que les mouvements browniens fractionnaires qui, mis à part le mouvement brownien, ne sont pas des semi-martingales.
Gageons qu'une approche cohérente de ces questions mettra encore quelques années à être élaborée !

Un second apport de génie de K. Itô est sa présentation en 1970 de la théorie des excursions pour les processus de Markov. De quoi s'agit-il ? Pour aborder cette théorie le plus simplement possible, intéressons-nous à nouveau au mouvement brownien réel $(B_t, t \geqslant 0)$ et à l'ensemble aléatoire $\mathcal{Z}(\subset \mathbb{R}_+)$ de ses zéros, précisément :

$$\mathcal{Z}_\omega = \{t \geqslant 0 : B_t(\omega) = 0\} .$$

Presque sûrement, $\mathcal{Z}_\omega$ est un ensemble de type Cantor, sans point isolé, et de mesure de Lebesgue nulle.
Mais, la mesure aléatoire : $dL_t(\omega) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{1}{2\varepsilon} 1_{(|B_t(\omega)|\leqslant\varepsilon)} dt\right)$ a précisément cet ensemble pour support ; le processus croissant $L_t(\omega) \equiv \int_0^t (dL_s(\omega))$ n'est autre que le temps local du mouvement brownien découvert par P. Lévy, et son inverse : $\tau_\ell \equiv \inf\{t : L_t > \ell\}$, $\ell \geqslant 0$, permet « d'étiqueter » l'ensemble de toutes les excursions :

$$e_\ell(\omega) : t \to B_{\tau_{\ell\_}(\omega)+t}\, 1_{(t<\tau_\ell(\omega)-\tau_{\ell\_}(\omega))}$$

effectuées hors de 0 par B.
Le théorème fondamental d'Itô est que $(e_\ell, \ell > 0)$ est un gigantesque processus de Poisson, plus précisément : si Γ est un Borélien « raisonnable » de l'espace de toutes les trajectoires absorbées, c'est-à-dire des fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telles que : $f(0) = 0$, $f(t) = 0$, pour tout $t \geqslant V_f$, et $f(t) \neq 0$, pour tout t entre 0 et V_f, alors le processus :

$$N_\ell^\Gamma = \sum_{\lambda\leqslant\ell} 1_\Gamma(e_\lambda)\,,\ (\ell \geqslant 0)\,,$$

est un processus de Poisson dont l'intensité

$$n(\Gamma) \equiv \frac{1}{\ell} E[N_\ell^\Gamma]$$

définit une mesure σ-finie n, maintenant couramment appelée mesure d'Itô, dont D. Williams et J.-M. Bismut ont donné des caractérisations simples qui permettent de faire de ce résultat d'Itô un outil extrêmement performant pour l'étude du mouvement brownien, et de nombreux autres processus de Markov.
Pour résumer, la théorie des excursions d'Itô permet d'étudier le mouvement brownien, prototype de processus Markovien continu, à l'aide d'un gigantesque processus de Poisson ; le processus de Poisson standard, rappelons-le, est le plus simple des processus de Lévy (= processus à accroissements indépendants, et homogènes dans le temps) ; il croît uniquement par sauts d'amplitude 1.
C'est là un véritable tour de force, ou de « magie », toute « l'astuce » consistant à remplacer le mouvement brownien *unidimensionnel* par un processus de Poisson *infinidimensionnel*. K. Itô écrit d'ailleurs à la fin de la préface de ses « Selected Papers » (Springer ; 1987) : « j'ai pris l'habitude de considérer des phénomènes finidimensionnels d'un point de vue infini-dimensionnel », et donne comme exemple sa théorie des excursions. On pourrait d'ailleurs multiplier les études probabilistes pour lesquelles ce point de vue est extrêmement fructueux ; un exemple célèbre est celui du calcul de Malliavin, dont une approche consiste à « plonger » le mouvement brownien dans le cadre du processus à deux paramètres que l'on désigne

souvent comme le drap brownien. Itô lui-même a présenté en plusieurs occasions des exposés sur le calcul de Malliavin.

Revenons à la théorie des excursions d'Itô dont une conséquence importante est la réalisation en termes du mouvement brownien, de nombreux processus de Lévy purement discontinus, par exemple : $\left(\int_0^{\tau_\ell} f(B_s)ds, \ell \geqslant 0\right)$ pour f localement intégrable. On peut d'ailleurs très bien reconstruire B à partir du processus de Poisson des excursions $(e_\ell, \ell \geqslant 0)$.

Ainsi, processus de Lévy continus et discontinus sont présentés dans le même cadre brownien, alors que bien souvent, on prend soin de bien séparer la partie brownienne et la partie à sauts pour un processus de Lévy ! !

Il faudrait citer bien d'autres aspects magnifiques de l'œuvre d'Itô... Je choisirai simplement son article : Extensions of Stochastic Integrals (1976), dans lequel, en se demandant quel sens donner à l'intégrale $\displaystyle\int_0^t B_1 dB_s$, K. Itô pose très clairement la question de l'étude du grossissement de filtrations, question également soulevée à la même époque par P.A. Meyer et D. Williams, et à laquelle T. Jeulin, J. Jacod..., ont apporté de magnifiques réponses.

Je terminerai ce survol bien incomplet par une note un peu plus personnelle : j'ai eu le privilège, en plusieurs circonstances, en particulier à Katata en août 1981 lors d'un « Séminaire Taniguchi » de pouvoir discuter tranquillement avec K. Itô ; nos conversations ont plusieurs fois tourné autour des intégrales singulières, valeurs principales, etc..., qui m'ont fasciné depuis que j'en ai appris l'existence... Lors de l'une de ces conversations, probablement aux alentours de 1990, après avoir mentionné certains résultats obtenus avec Ph. Biane sur la valeur principale de Cauchy : $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t 1_{(|B_s|\geqslant\varepsilon)}\frac{ds}{B_s}$, sujet que nous avons traité aussi bien avec le calcul stochastique, mais pour lequel la théorie des excursions était véritablement l'outil idéal, j'ai évoqué, la difficulté qu'il me semblait y avoir à définir des valeurs principales pour les intégrales stochastiques $\displaystyle\int_0^t v_s dB_s$, celles-ci nécessitant toujours l'intégrabilité des processus à valeurs positives v^2... K. Itô me dit alors simplement qu'il avait pensé à cette question, mais ne savait pas comment y répondre...

J'ai voulu mentionner cette conversation, car la simplicité des remarques de K. Itô en réponse à mes interrogations ne faisait que refléter, dans mon esprit, la clarté et la profondeur de ses travaux qui ont définitivement donné leurs lettres de noblesse à la discipline de « Calculs différentiel et intégral stochastiques » qu'il a fondée.

Références générales à l'œuvre d'Itô

[1] K. Itô : *Selected papers* (avec une Introduction de D. Stroock et S. Varadhan). Springer (1987).

[2] N. Ikeda, S. Watanabe, M. Fukushima, H. Kunita (eds) : *Itô's Stochastic Calculus and Probability Theory*. Springer (1996).

[3] Articles à paraître dans le *Japanese Journal of Mathematics* (2007).

Astérisque 306

Sur les caractères des groupes réductifs finis à centre non connexe : applications aux groupes spéciaux linéaires et unitaires

C. Bonnafé

Un premier but de cet article est de présenter une synthèse des résultats de plusieurs auteurs concernant les caractères des groupes réductifs finis à centre non connexe, notamment les caractères de Gelfand-Graev et les caractères semisimples. Un deuxième but est d'étudier l'influence de la non connexité du centre sur la théorie des faisceaux-caractères, en particulier ceux dont le support rencontre la classe unipotente régulière : ce sont les analogues naturels des caractères semisimples. Le dernier but est l'application de ces résultats aux groupes réductifs finis de type A, déployés ou non (comme par exemple les groupes spéciaux linéaires ou unitaires). Lorsque le cardinal du corps fini de référence est assez grand, nous obtenons un paramétrage des caractères irréductibles, calculons explicitement le foncteur d'induction de Lusztig dans la base des caractères irréductibles, paramétrons les faisceaux-caractères et montrons que les fonctions caractéristiques de ces faisceaux-caractères sont des transformées de Fourier des caractères irréductibles (conjecture de Lusztig). Ces résultats permettent de construire un algorithme théorique pour calculer la table de caractères de ces groupes.

A first aim of this paper is to present an overview of results obtained by several authors on the characters of finite reductive groups with non-connected centre. We emphasise on Gelfand-Graev and semisimple characters. A second aim is to study the influence of the non-connectedness of the centre on the theory of character sheaves, in particular those whose support meets the regular unipotent class: these are analogues of the semisimple characters. The last aim is the application of these results to finite reductive groups of type A, split or not (as for instance the special linear or special unitary groups). Whenever the cardinality of the finite field is large enough, we obtain a parametrization of the irreducible characters, a parametrization of the character sheaves, and we show that the characteristic functions of character sheaves are Fourier transforms of the irreducible characters (Lusztig's conjecture). This gives a theoretical algorithm for computing the character table of these groups.

Prix public* : 26 € - prix membre* : 18 €
* frais de port non compris

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
F - 75231 PARIS CEDEX 05

http://smf.emath.fr

INFORMATIONS

L'Associazione Subalpina Mathesis di Torino

Franco Pastrone[1], Livia Giacardi[2]

L'*Associazione Subalpina Mathesis di Torino* est une association de professeurs de mathématique de l'Université, de l'École Polytechnique de Turin, des collèges et des lycées du Piémont.

L'*Associazione Mathesis* a été fondée à Rome le 15 octobre 1895 par Rodolfo Bettazzi, enseignant au Lycée Cavour de Turin et membre de l'école de Giuseppe Peano, dans le but de réaliser « l'amélioration de l'école et le perfectionnement des enseignants du point de vue scientifique et didactique ». Son activité a officiellement démarré à Turin le 1er juillet 1896 et au bout d'un an elle rassemblait déjà 113 membres provenant de toutes les régions d'Italie[3]. Elle est ensuite devenue, après plusieurs modifications de statuts, *Mathesis, Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche* (Société Italienne des Sciences Mathématiques et Physiques) et compte de nombreuses sections dans toute l'Italie. En 1991 la section turinoise s'est détachée de l'association nationale et a pris le nom de *Associazione Subalpina Mathesis di Torino*, devenant ainsi indépendante du point de vue organisationnel et financier.

Comme l'affirme son statut, l'*Associazione Subalpina Mathesis* exerce une activité d'orientation et de coordination entre les professeurs et les spécialistes des disciplines mathématiques en vue de promouvoir la qualité de la didactique, d'améliorer et de maintenir un niveau professionnel élevé des enseignants de mathématiques. À cet effet, elle organise des cycles annuels de conférences et des cours de perfectionnement pour les enseignants du primaire et du secondaire, reconnus par l'inspection académique de Turin et ouverts même aux non-membres. Elle promeut également des activités à caractère culturel telles que des pièces de théâtre, des congrès, des expositions, liées aux objectifs spécifiques de l'Association et elle a institué en l'an 2000 un prix annuel – le Prix Peano (*Premio Peano*) – pour le meilleur livre sur les mathématiques publié en Italie. Le prix en est à sa cinquième édition et il a été décerné jusqu'à présent à Apostolos Doxiadis et Piergiorgio Odifreddi, Alain

[1] Président.
[2] Membre du Comité de Direction.
[3] Pour l'histoire de l'Associazione Mathesis nous renvoyons à : *Numero speciale dedicato al "Periodico di Matematiche"* 1886-1995, Periodico di matematiche, Organo della Mathesis, s.VII, 2, 2/3, 1995 ; L. Giacardi, C. S. Roero, *La nascita della Mathesis (1895-1907)* dans *Dal compasso al computer*, Torino, Associazione Subalpina Mathesis, 1996, pp. 7-49 ; *Cento anni di matematica. Atti del convegno "Mathesis Centenario 1895-1995". Una presenza nella cultura e nell'insegnamento*, Roma, Fratelli Palombi, 1996 ; *La* Mathesis. *La prima metà del Novecento nella "Società Italiana di Scienze matematiche e fisiche"* par G. Bolondi, PRISTEM/STORIA 5, Milano, Springer-Verlag Italia, 2002.

Connes et Gabriele Lolli, Keith Devlin, Mario Livio. Depuis quelques années, elle coordonne le Stage Résidentiel de Mathématiques adressé aux étudiants les plus brillants des lycées du Piémont, qui a démarré en 1995 avec 50 élèves et qui en rassemble à présent plus de mille. L'Associazione Subalpina Mathesis compte actuellement deux sections : la Section d'Ivrea, dont le responsable est Francesco La Rosa, et la Section Bettazzi qui organise le Stage Résidentiel de Mathématiques. Depuis 1993-1994 elle publie chaque année un livre annuel qui réunit le compte-rendu des activités réalisées et les textes des conférences qui se sont tenues à Turin et à Ivrea. Les rédacteurs de cet ouvrage sont actuellement Livia Giacardi, Miranda Mosca et Ornella Robutti.

Le site de la société (`http://www.dm.unito.it/mathesis/mathesis.htm`) fournit toutes les informations relatives aux différents domaines d'activité, le calendrier des initiatives et les tables des matières des ouvrages publiés. Une section a récemment été ajoutée, consacrée à l'histoire de l'enseignement des mathématiques en Italie, qui réunit des documents importants (dispositions légales, comptes-rendus de congrès de la Mathesis, programmes, tableaux des matières et des horaires, articles de type méthodologique particulièrement intéressants, ...) pour l'histoire de l'enseignement secondaire de 1859 à 1923.

Les activités de cette dernière année scolaire 2005-2006 ont été nombreuses et particulièrement suivies et appréciées. Les conférences ont été au nombre de vingt-deux. Selon le schéma désormais bien établi, certaines ont été consacrées à la didactique et à la recherche concernant la didactique des mathématiques, d'autres à l'histoire des mathématiques, deux aux fondements et les restantes à des thèmes généraux de culture mathématique. Toutes les conférences ont été intéressantes et de bon niveau. Celle de Michela Fontana sur la mission en Chine du savant jésuite Matteo Ricci, celle d'Alberto Conte sur le monde à deux dimensions de *Flatlandia* et celle de Keith Devlin sur l'utilisation des mathématiques pour une meilleure prise de décision ont notamment remporté un grand succès auprès du public. L'intervention d'Enrico Arbarello, qui a présenté une introduction à la théorie des cordes et celle d'Antonio Fasano sur la contribution que les mathématiques peuvent apporter, en travaillant en collaboration avec les ingénieurs, les chimistes, les biologistes, les médecins, etc., à des recherches dans leurs domaines spécifiques, ont été particulièrement stimulantes et de haut niveau.

Le début et la fin de l'année scolaire ont été caractérisés, comme le veut désormais la coutume, par le *Prix Peano* qui représente aujourd'hui, grâce à la collaboration des collectivités locales, un véritable événement visant à la divulgation scientifique et intéressant un large public. Le 1er décembre 2005 Marcus du Sautoy, mathématicien de l'Université d'Oxford, divulgateur de haut niveau, présentateur à l'Académie Norvégienne de Sciences et Lettres de Lennart Carleson, vainqueur du Prix Abel 2006, a reçu le Prix *Peano 2004* pour son livre *L'enigma dei numeri primi* (2004), traduction italienne de *The Music of the Primes. Searching to Solve the Greatest Mystery in Mathematics* (2003). À l'occasion de la cérémonie de remise du prix au Teatro Colosseo de Turin, du Sautoy a tenu une conférence sur le thème de son livre devant un public de plus de mille spectateurs, remportant un succès éclatant. Le gagnant du *Premio Peano 2005* a été annoncé lors de la dernière rencontre avant les vacances d'été. Il s'agit de Peter Pesic, du St. John's College de Santa Fe, Nouveau Mexique, États-Unis, pour son livre *La* *prova di Abel* (2005), traduction italienne d'*Abel's Proof. An Essay on the Sources and Meaning of Mathematical Unsolvability* (2003). La remise du prix aura lieu le 14 décembre 2006 à Turin.

Pendant les mois de mai et juin, à Pra Catinat, s'est tenu en trois sessions de trois journées chacune, le Stage Résidentiel de Mathématiques, MATH 2006, adressé aux élèves les plus brillants des quatre premières classes des lycées. Sa réalisation a été possible grâce à l'engagement de près de soixante-dix enseignants, aussi bien du secondaire que de l'université, et surtout au travail infatigable de Maria Gemma Gallino et de Pier Luigi Pezzini.

L'initiative est caractérisée par l'interaction productive entre différentes énergies : l'Université avec certains de ses professeurs et de ses étudiants du cours de maîtrise à orientation didactique ; la SIS (École de spécialisation pour enseignants) avec des superviseurs et un grand nombre d'enseignants en spécialisation ; les professeurs et les élèves des lycées. L'objectif proposé est, d'une part, celui d'illustrer de manière approfondie les concepts des mathématiques tout en laissant libre cours aux applications et aux jeux mathématiques, et, d'autre part, de présenter, à travers des modalités insolites pour l'école, des aspects plus avancés des mathématiques liés aux différents sujets traités.

L'environnement naturel dans lequel se déroule le stage permet aux élèves de travailler essentiellement en plein air ce qui leur donne l'occasion de vérifier à travers des expériences concrètes – lorsque cela est possible – certaines parties de la théorie qui leur est présentée.

L'esprit de collaboration d'un groupe consistant de professeurs qui mettent leurs idées en commun, qui préparent minutieusement les diverses activités du stage lors de fréquentes rencontres périodiques au cours de l'année, favorise le dialogue constructif et fécond entre l'expérience des professeurs forts de nombreuses années d'enseignement et l'effervescence, l'imagination, les nouvelles astuces de professeurs plus jeunes. Par ailleurs les différents thèmes sont abordés sous une perspective insolite pour les étudiants, qui met en relief les aspects ludiques des mathématiques, ses racines historiques, les applications aux diverses sciences et à la vie quotidienne, et les thématiques les plus actuelles. Même les modalités d'étude sont différentes car elles visent à valoriser la recherche personnelle de chaque élève qui a comme point de départ une trace à peine ébauchée dans un dossier spécial préparé par les professeurs et renouvelé chaque année. Les matériaux concrets à manipuler et sur lesquels travailler ne sont qu'un prétexte de jeu, mais ils servent à offrir un support utile et efficace au raisonnement. MATH 2006 a vu la participation de 968 élèves des lycées et il a impliqué 65 enseignants, 9 enseignants en spécialisation de la SIS, 3 étudiants du cours de maîtrise en mathématiques et 4 professeurs universitaires.

Liée à l'événement mondial des Jeux Olympiques de Turin 2006, *SNOW MATH, Matematica sulla neve – Scivolando tra i paletti della matematica* (SNOW MATH, Mathématiques sur la neige – Glissades entre les piquets des mathématiques) est une manifestation qui s'est déroulée à Turin à Villa Gualino du 15 au 18 novembre 2005 dans le but de sensibiliser les étudiants aux Jeux Olympiques et de promouvoir l'étude scientifique et mathématique d'événements et de performances sportives, impliquant la population estudiantine dans des compétitions à caractère scientifique. La collaboration de l'Union Mathématique Italienne a permis de faire connaître cette initiative auprès de 5.189 lycées italiens et les demandes de participation ont été très nombreuses. Les 22 étudiants choisis ont été sélectionnés parmi les finalistes des championnats nationaux de mathématiques (Cesenatico 2005) et parmi les élèves les plus brillants du Stage de Mathématiques (Pra Catinat 2005). La manifestation s'est déroulée sur trois jours et elle a été divisée en deux sessions : la première consacrée aux cours, conférences et séminaires sur des sujets liés au thème de la neige et des sports d'hiver, la seconde destinée à des épreuves individuelles et par équipes sur des questions liées aux sujets didactiques développés pendant les cours. La mécanique du skieur, neige et fractales (Michele Barsanti), la forme du flocon de neige (Franco Pastrone), la dynamique des glaciers (Fabrizio Martin), les modèles mathématiques de la dynamique des avalanches (Silvia Farronato), les mathématiques et les remonte-pentes (Giulia Dogliani), ont été les principaux thèmes abordés lors des séminaires et des conférences. Le séjour s'est terminé par la remise des prix des mains de Piero Gros (champion olympique du slalom spécial, Innsbruck 1976) aux trois vainqueurs des épreuves, Luca Barbieri de Milan, Stefano Attanasio de Rome, Roberta Guadagni de Ciriè (TO). Un CD-ROM a été réalisé contenant le programme de la manifestation, les textes des cours et des séminaires, les problèmes proposés dans les diverses épreuves ainsi que les solutions correspondantes, la liste des participants et une galerie photographique des moments forts de la manifestation et de la remise des prix.

Les publications mathématiques : panorama et synthèse sur une situation en évolution

Véronique Cohoner, Françoise Dal'Bo, Liliane Zweig[1]

Nous remercions les différentes personnes qui ont accepté de relire ce texte avant sa diffusion et de nous faire part de leur point de vue.

Les nouvelles technologies de l'information et de la communication ont redistribué les rôles entre éditeurs et auteurs dans la chaîne éditoriale d'un texte scientifique. Désormais la frappe, voire la mise au format, sont assurées par l'auteur. Par ailleurs, si ce dernier cède ses droits, ce qui est souvent le cas, son fichier devient propriété de l'éditeur.

On aurait pu penser que cette redistribution allait freiner la forte augmentation des prix de vente des revues amorcée depuis une vingtaine d'années, et permettre la mise sur le marché d'abonnements électroniques moins onéreux, or il n'en est rien. Pour expliquer ce phénomène les éditeurs évoquent les restructurations économiques et les lourds investissements liés à l'installation de nouveaux outils, au travail des fichiers, à la numérisation rétrospective et à la mise en ligne des anciennes collections. À ces arguments s'ajoutent des intérêts économiques. Une

[1] V. Cohoner, Ingénieur d'étude CNRS, responsable de la Bibliothèque de l'Institut de Recherches Mathématiques de Rennes, F. Dal'Bo, Professeur des Universités en Mathématiques, L. Zweig, Ingénieur de recherche CNRS, co-responsable du Réseau National des Bibliothèques de Mathématiques et responsable de la Bibliothèque de l'Institut Henri Poincaré.

étude [1] portant sur l'évolution des prix des revues mathématiques montre en effet que si l'augmentation du prix par page touche autant les revues académiques[2], en général peu axées sur le profit, que commerciales[3], le prix par volume de ces dernières est en revanche nettement plus élevé. Pour illustrer notre propos donnons le prix par page et le nombre de pages annuelles pour 2003 des abonnements suivants :

– *Inventiones Mathematicae*, Springer : 1,07$ (2710 pages)
– *Annals of Mathematics*, Princeton University Press : 0,12$ (2056 pages)
– *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Walter de Gruyter : 0,82$ (2813 pages)
– *Annales de l'Institut Fourier*, Association des Annales de l'I.F : 0,14$ (2314 pages).

Environ cinq cents revues de mathématiques sont régulièrement consultées dans le monde. Les deux tiers sont commerciales.

En France, un laboratoire de mathématiques consacre en moyenne un tiers de son budget à la documentation, et principalement à l'achat de revues. En 2003, les bibliothèques de mathématiques ont dépensé environ 3 300 000€ pour leurs abonnements. La communauté mathématique est donc directement touchée par la politique inflationniste des éditeurs commerciaux, qui met les institutions universitaires et de recherche dans une position difficilement tenable à long terme, tant sur le plan financier qu'intellectuel. Pour y faire face, les professionnels de la documentation et les chercheurs ont réagi à la lumière de leur culture et de leurs intérêts. De nombreux textes ont été écrits sur le sujet, la *Gazette des mathématiciens* en publie d'ailleurs régulièrement ([2], [3]). Notre texte a été rédigé à la suite d'une table ronde organisée en 2006 par la bibliothèque de l'Institut de Recherches Mathématiques de Rennes. Il tente d'apporter une vue d'ensemble sur les principales initiatives prises en France.

Des consortiums auprès d'éditeurs commerciaux

Les principaux acheteurs de documentation scientifique dans le secteur de la recherche se sont regroupés au plan national afin de négocier collectivement auprès d'éditeurs commerciaux et d'acquérir des ressources numériques aux meilleures conditions.

[2] Revues académiques : revues éditées et diffusées par des structures (sociétés savantes, presses universitaires) soutenues, à des degrés divers, par l'Etat. Selon les pays, ce terme peut recouvrir des réalités bien différentes. Donnons des exemples de telles revues et de leur prix par page, pour l'année 2003 : *Annales de l'Institut Fourier* (0,14$-2314 pages), *Annals of mathematics* (0,12$-2056 pages), *Bulletin de la Société Mathématique de France* (SMF, 0,20$ -616 pages), *Duke mathematical journal* (Duke University press, 0,47$-2968 pages).

[3] Revues commerciales : revues éditées et diffusées par des grands groupes d'édition indépendants. Donnons des exemples de telles revues et de leur prix par page : *Communications in partial differential equations* (Dekker, 0,83$-2107 pages), *Communications in pure and applied mathematics* (Wiley, 1,27$-1803 pages), *Inventiones Mathematicae* (Springer, 1,07$-2710 pages), *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (W. de Gruyter, 0,82$-2813 pages), *Journal of algebra* (Elsevier, 0,59$-7812 pages).

Consortium Universitaire de Périodiques Numériques

En 1999, des responsables de SCD (Service Commun de Documentation) d'universités françaises ont créé une association dénommée COUPERIN servant d'intermédiaire entre les universités et les éditeurs. Cette association qui compte actuellement environ deux cents établissements est guidée par une logique pluridisciplinaire et se définit comme un outil national de mutualisation. Concrètement, son rôle est de négocier des accès électroniques auprès d'éditeurs sur la base de grilles tarifaires par paliers, calculées à partir du chiffre d'affaires[4] (de l'année antérieure au contrat) des établissements ou de leurs effectifs (chercheurs et étudiants). Le nombre d'adhérents étant important, et l'éventail des disciplines représentées très large, les négociations portent souvent sur un grand nombre de titres (*bouquets* électroniques d'abonnements), voire sur tout le catalogue électronique de l'éditeur. Donnons une idée des conditions tarifaires obtenues. Le chiffre d'affaires engagé par un établissement auprès d'un éditeur doit être maintenu pendant la durée du contrat (le plus souvent trois ou quatre ans), en contrepartie, celui-ci limite ses augmentations pendant cette période. Le prix d'un bouquet payé par un établissement, pour l'option couplage « papier/électronique » correspond environ à son chiffre d'affaires majoré de 10%. En général, l'établissement peut alors accéder à la totalité du catalogue de l'éditeur. Pour un choix d'option « tout électronique », le prix est d'environ 95% du chiffre d'affaires. Si l'établissement souhaite acquérir dans ce bouquet électronique des versions papier, il devra selon les contrats, soit les payer au prix fort, soit s'acquitter uniquement de 25% de leurs prix.

Concernant les conditions obtenues pour l'archivage : dans la plupart des contrats, l'éditeur donne un accès aux versions des cinq dernières années sur son site. Lorsqu'un établissement met fin à son contrat avec un éditeur, s'il était en option « tout électronique », l'accès aux revues qu'il a « loué » pendant des années n'est pas garanti en ligne sur le site de l'éditeur : tel éditeur peut fournir un CD, tel autre laisser un accès gratuit pendant quelque temps, puis demander à nouveau un paiement. Dans ce contexte, on peut comprendre que les bibliothèques de mathématiques qui peuvent se le permettre résistent à la formule du « tout électronique », et souhaitent conserver les versions papier, qui seules pour l'instant garantissent un accès simple et rapide, indépendant des systèmes informatiques et de leur suivi. La plupart des contrats proposés par COUPERIN laissent encore le choix entre le « couplage papier/électronique » et le « tout électronique ». En pratique, l'évolution des usages des chercheurs et la pression exercée par les éditeurs amènent de plus en plus les directeurs de SCD à privilégier la formule « tout électronique », qui leur permet également d'alléger la gestion des abonnements et d'économiser des locaux.

Négociations du CNRS

Les négociations menées par le CNRS sont maintenant suivies par la Direction de l'Information Scientifique et pilotées par l'INIST (Institut de l'Information Scientifique et Technique). Elle peuvent être thématiques ou pluridisciplinaires. Celles qui concernent les mathématiques ont lieu dans un contexte pluridisciplinaire. Ces négociations diffèrent de celles entreprises par COUPERIN sur les points suivants :

[4] Chiffre d'affaires d'un établissement : somme des prix des abonnements papier souscrits par l'établissement auprès d'un éditeur, sur une année.

– seule la formule du «tout électronique » sur l'ensemble du catalogue des éditeurs est retenue,

– le financement de l'accès électronique est entièrement pris en charge au niveau national par le CNRS, avec une répartition du coût entre départements scientifiques,

– les membres des unités mixtes ou propres de recherche ont accès aux ressources proposées via le portail de l'INIST (*BiblioSciences*).

Négociations du Réseau National des Bibliothèques de Mathématiques

En raison des relations privilégiées qu'entretenait la communauté mathématique avec l'éditeur Springer[5], le Réseau National des Bibliothèques de mathématiques (RNBM[6])[4] a été le premier en France à signer un contrat de type consortium avec cet éditeur. Les négociations ont commencé en 1998 et ont permis un accès gratuit à Link (portail électronique de Springer) pour tous les laboratoires de mathématiques français pendant dix-huit mois permettant entre autres de tester ce projet. Le contrat définitif a été signé pour les années 2001/2004, puis a été renouvelé en 2005 pour un an : il donnait l'accès électronique à une liste choisie de titres, pour l'ensemble des laboratoires de mathématiques français participant à ce contrat.

En 2004, le RNBM a acquis le statut de groupement de services au sein du CNRS. Par ailleurs à partir de 2005 l'association COUPERIN et le CNRS ont négocié conjointement auprès de Springer. Au vu de cette nouvelle situation, le RNBM les a rejoint pour négocier le contrat Springer 2006-2008. Des contacts avec Elsevier avaient été pris dès 1997, mais la proposition de cet éditeur, jugée trop coûteuse, n'avait pas été retenue.

Depuis 2000, d'autres négociations ont été menées par le RNBM, notamment avec l'American Mathematical Society (AMS) pour la base de données *MathSciNet*. Dans le cadre de ces différents accords, un grand nombre de mathématiciens a ainsi accès à la majeure partie du catalogue de l'éditeur Springer, ainsi qu'aux bases de données *Zentralblatt-Math* et *MathSciNet*. Dans un esprit de mutualisation, l'accès à ces bases de données a été étendu à l'ensemble d'une université et à la plateforme Mathrice[7] (accès par login et mot de passe individuels), qu'il ait été payé par le RNBM ou par le SCD. Ce qui différencie les négociations du RNBM de celles menées par COUPERIN et le CNRS se résume essentiellement aux points suivants :

– elles sont pilotées par les utilisateurs, via les 2 responsables du RNBM : un mathématicien et une bibliothécaire,

– elles sont thématiques, et portent sur une liste de revues mathématiques,

– seule la formule « couplage papier/électronique » est retenue,

– le financement est variable : pour les accès électroniques Springer, le RNBM prend en charge le surcoût pour tous les laboratoires, pour les bases de données

[5] Springer : cet éditeur, qui avait lui-même acquis Birkhäuser, a été racheté par le groupe d'investissements britannique Cinven and Candover, qui possède aussi Kluwer. Donc lorsque nous citons les journaux de cet éditeur, cela inclut les revues traditionnelles de Springer, celles de Birkhäuser, de Kluwer ainsi qu'un grand nombre de traductions de journaux scientifiques russes et chinois, tous édités ou diffusés sous le nom de Springer Science+Business Media.

[6] RNBM : groupement de services du CNRS, réseau national regroupant les bibliothécaires et les mathématiciens responsables des bibliothèques des laboratoires de mathématiques.

[7] Mathrice : groupement de services CNRS, réseau de métier regroupant les informaticiens des laboratoires de mathématiques du CNRS dans les universités et écoles d'ingénieur françaises.

MathSciNet et ZentralBlatt-Math, la facturation s'effectue directement entre le laboratoire ou le SCD, et l'éditeur.

Concertations entre les trois composantes

Dans le contexte actuel, les éditeurs impliqués dans les négociations se limitent à quelques grands groupes commerciaux internationaux ayant mainmise sur le marché (par exemple Elsevier et Springer). Il est donc fréquent que les trois composantes : COUPERIN, CNRS et RNBM, entreprennent des démarches auprès d'un même éditeur. Cette situation, reflet de la complexité de l'organisation de la recherche française, implique une grande coordination. La négociation conjointe Couperin/CNRS/RNBM [5] auprès de l'éditeur Springer en est un exemple concret.

Un effort de coordination au niveau national a également été fait sur le plan de l'archivage. Deux centres nationaux d'hébergement assureront l'archivage des abonnements électroniques provenant de l'accord Springer : l'INIST et l'Agence Bibliographique de l'Enseignement Supérieur, en collaboration avec le Centre Informatique de l'Enseignement Supérieur (ABES, CINES). Cette nouvelle organisation devrait permettre entre autres à un établissement se désabonnant d'un titre électronique, après la fin du contrat, de continuer à avoir accès aux « années qu'il a payées ».

Des réactions mitigées au sein des laboratoires de mathématiques

Les ressources documentaires jouent un rôle essentiel en mathématiques, et sont souvent comparées à un grand équipement dans d'autres disciplines. La communauté mathématique française s'est mobilisée très tôt pour piloter une politique documentaire nationale et thématique. Quatre structures y sont impliquées : les deux groupements de services RNBM et Mathrice, l'unité mixte de services Cellule MathDoc[8], [4], et la bibliothèque de mathématiques de Paris-Sud[9]. Les bibliothèques de laboratoires, qui sont au cœur de cette organisation nationale thématique, ont aussi à prendre en compte la politique documentaire du CNRS, et celle de leur université.

Bibliothèque de mathématiques et CNRS

L'apport du CNRS au sein d'une bibliothèque de mathématiques, lorsque celle-ci relève d'une unité mixte de recherche, se concrétise par des personnels, un financement au laboratoire, et l'accès aux ressources électroniques souscrites par cette institution. Pour l'instant, les abonnements CNRS sont financés au niveau national, ce qui n'a donc pas de répercussions au niveau du laboratoire. On peut cependant s'interroger sur l'évolution de cette situation.

[8] Cellule MathDoc : unité mixte de service CNRS-Université Joseph Fourier, dont le travail est de rendre accessible à la communauté mathématique française la documentation mathématique sous toutes ses formes grâce à un certain nombre de programmes et d'applications.

[9] Bibliothèque de mathématiques de Paris-Sud : appelée Bibliothèque Jacques Hadamard, elle est Centre d'Acquisitions et de Diffusion de l'Information Scientifique et Technique (CADIST) (par convention avec le Ministère).

Bibliothèque de mathématiques et université

Dans la vie quotidienne d'un laboratoire de mathématiques, le dossier COUPERIN est souvent source de nombreuses discussions. Selon les universités, le SCD peut prendre à sa charge certains abonnements mathématiques ou faire payer une participation pour l'électronique. Les réactions locales suscitées par les accords Couperin sont de natures différentes, et dépendent essentiellement de la taille du laboratoire, du caractère transdisciplinaire des thèmes de recherche qui y sont développés, et de la qualité des relations au sein d'une université entre le trio : mathématiciens, personnels du SCD et du centre de ressources informatiques.

Lorsque le laboratoire est de petite taille, et souscrit donc très peu d'abonnements sur ses crédits propres, la contractualisation entre SCD et éditeurs pour des accès électroniques est bien accueillie, puisqu'elle permet aux mathématiciens d'avoir accès à de nouveaux journaux, moyennant une contribution financière modeste (voire nulle dans certains cas). En revanche, elle soulève plus de questions au sein des laboratoires disposant d'une bibliothèque de recherche abonnée aux principales revues mathématiques. En général, le statut d'une telle bibliothèque au sein de l'établissement est celui d'une bibliothèque associée[10], ce qui lui laissait jusqu'à présent une très grande autonomie vis-à-vis du SCD. Aujourd'hui, lorsque l'université s'engage auprès d'un éditeur via COUPERIN, elle implique forcément la bibliothèque de recherche, en imposant pendant la période contractuelle des clauses de non désabonnement aux revues papier concernées. En contrepartie, les chercheurs ont accès à tout le catalogue électronique de l'éditeur, ce qui est intéressant s'ils sont amenés à consulter régulièrement les travaux d'autres champs disciplinaires.

Si le mode de fonctionnement instauré par COUPERIN, et basé sur la mutualisation[11], représente un gain pour les petits établissements il ne résout pas complètement le problème financier de départ, comme en témoignent les nombreux appels des SCD en faveur d'une augmentation de leur budget. Pour y répondre, certaines universités commencent à demander une contribution financière aux laboratoires. Cette contribution, dont le calcul est très variable selon les universités, est un facteur de dépendance quelquefois mal perçu par les laboratoires de mathématiques qui subventionnent déjà fortement leur documentation et consultent peu les revues des autres disciplines.

Qui pilote la documentation ?

La mise en place de consortiums nationaux pluridisciplinaires a également fait resurgir une question de fond portant sur l'organisation de la documentation au sein des universités, et plus précisément sur la répartition des missions entre personnels

[10] Bibliothèque associée : bibliothèque de recherche associée par statut au SCD gérant en indépendance son budget et son personnel (CNRS pour la plupart). La très grande majorité des bibliothèques de mathématiques ont ce statut, elles sont en général financées par les crédits de laboratoire et les plans pluri-formations du Ministère. D'autres bibliothèques ont un statut de bibliothèque intégrée : le personnel et les crédits sont gérés par le SCD.

[11] Exemple de conditions obtenues par COUPERIN auprès d'un éditeur : une université ayant un chiffre d'affaires papier de 300 000 € paiera un surcoût de 10% pour accéder au portefeuille entier, une université plus petite ou plus jeune ayant un chiffre d'affaires de 30 000 € paiera un surcoût de 12%.

des bibliothèques et chercheurs, auxquels s'ajoutent aujourd'hui les ingénieurs en informatique [6].

Au sein de la communauté mathématique ces missions sont aujourd'hui bien réparties, ce qui n'est pas toujours le cas au sein des universités. La faible représentation des chercheurs dans les instances documentaires nationales et locales, et donc, la faible influence des utilisateurs sur le choix de leurs revues en est un exemple. Des actions récentes vont cependant dans le sens d'une amélioration. Au niveau national, le RNBM est négociateur pour les mathématiques auprès de COUPERIN. Au niveau local, des universités ont mis en place des « comités de pilotage » jouant le rôle d'interface entre le SCD et la communauté des chercheurs, dans lesquels les scientifiques sont majoritaires [4]. Cette initiative met en lumière un problème plus complexe qu'il n'y paraît, puisque si d'un côté les chercheurs se plaignent de leur faible influence sur les décisions documentaires au sein de leur université, de l'autre, les responsables de SCD déplorent la forte absence des chercheurs dans les comités de pilotage (les mathématiciens sont souvent les plus assidus). Cette désaffection peut s'expliquer par un manque de disponibilité des chercheurs, mais aussi par un découragement face à la profusion des accords, leur coût élevé, la technicité des contrats et la difficulté de prendre en compte la spécificité de chaque discipline représentée dans l'établissement.

La situation des revues académiques

La présence de clauses de non désabonnement imposées par les contrats signés dans le cadre des consortiums favorise la situation de monopole des grands groupes éditoriaux. Par exemple, si la qualité scientifique d'une revue engagée dans un consortium baisse, la seule possibilité pour les bibliothèques souhaitant abandonner ce titre est de l'échanger contre un autre titre du catalogue du même éditeur. De plus, si pour des raisons financières, une bibliothèque est amenée à se désabonner, elle ne pourra le faire que sur des revues hors contrats, donc essentiellement sur des revues isolées relevant de petits éditeurs. Par ailleurs, en cas de rachat d'un petit éditeur par un de ces groupes, il arrive que des titres jugés non rentables soient supprimés. Ces phénomènes, ajoutés aux dépenses qu'un éditeur doit effectuer pour adapter sa chaîne de production aux nouvelles technologies, montrent l'état précaire dans lequel se trouvent aujourd'hui les revues isolées. Les mathématiciens sont particulièrement concernés par cette situation inquiétante, puisque environ un tiers de leurs revues est académique. Celles-ci sont d'ailleurs souvent d'excellente qualité, voire parmi les meilleures.

Un soutien organisé

Ces dernières années, à l'initiative de scientifiques, de bibliothécaires ou d'ingénieurs en informatique, de nombreuses structures d'aide à l'édition et à la diffusion électronique (voire plus) se sont mises en place dans le monde entier. Citons par exemple, au plan européen, la Société Mathématique Européenne qui s'est mobilisée en créant l'European Mathematical Information Service (EMIS). Dans le même esprit, le « Project Euclid », à but non-lucratif, créé aux USA en 2000 par des membres de la bibliothèque universitaire de Cornell, propose un portail de diffusion des versions électroniques d'une quarantaine de revues académiques de mathématiques, dont *Annals of Mathematics* (accès libre jusqu'en

2006), *Duke Mathematical Journal* (accès réservé aux abonnés). En partenariat avec ce projet, et à l'initiative de mathématiciens, on peut citer aussi le pôle d'édition Mathematical Sciences Publishers (MSP) [3]. En France, le ratio des revues académiques est d'environ deux tiers, ce qui représente une vingtaine de revues, dont cinq sont publiées par la SMF ([7], [8]). Dans le but de les soutenir, la cellule MathDoc a créé très récemment un CEntre de Diffusion de Revues Académiques de Mathématiques (CEDRAM) [9], fonctionnant sur un principe de mutualisation des ressources d'édition, de fabrication et de diffusion électronique. L'intérêt principal d'une telle initiative, soutenue par le Ministère de la Recherche, le CNRS et l'Université Joseph Fourier, est d'augmenter la visibilité et l'impact des revues partenaires, de réduire les coûts et de garantir l'accès à long terme aux archives en les maintenant près de ceux qui pourront les faire évoluer avec la technologie.

Numérisation des collections anciennes

La communauté mathématique, lorsqu'elle en a eu les moyens, s'est organisée pour numériser les fonds anciens. Différents programmes se sont développés. Certains, comme « *Göttinger Digitalisierungzentrum* » ou « *Gallica* » (Bibliothèque Nationale de France) sont orientés vers la conservation des fonds anciens. D'autres portent sur l'accès à ces fonds et élaborent des outils permettant aux chercheurs de naviguer au sein de cette littérature. Citons par exemple : « *Journal STORage* » (pluridisciplinaire, USA), « *Electronic Mathematical Archiving Network Initiative* » (EMANI[12], thématique, international), « *NUMérisation de Documents Anciens Mathématiques* » (NUMDAM, thématique, piloté par la Cellule MathDoc, France).

Ces différentes initiatives, toutes déclarées « à but non lucratif » sont financées, selon les cas et les pays, par des subventions mixtes, publiques ou privées. En général, une partie (parfois très importante) des dépenses reste à la charge de la structure. Ceci peut expliquer en partie les tarifs élevés pratiqués par le « Project Euclid » ou « JStor ». Peut-être faudrait-il, dans les commissions de bibliothèque, ne pas s'arrêter uniquement à l'aspect financier, mais essayer de tenir compte également de l'aspect « éthique » d'un abonnement.

Des circuits parallèles de diffusion et d'archivage

Le développement de l'informatique et du web permet à d'autres modèles de communication et de circulation de l'information de voir le jour, et remet en question le circuit traditionnel de publication. L'objet éditorial est en train de changer : de revue, il devient article, base de données ou moteur de recherche ([10], [11]). L'utilisation des pages web personnelles a été une des premières initiatives prises dans ce contexte. Elle a en effet répondu à un besoin essentiel de faire circuler rapidement l'information et a ainsi permis de contourner le problème du délai de

[12] EMANI : il s'agit d'un projet collectif impliquant cinq partenaires : d'une part l'éditeur Springer, et d'autre part les universités de Cornell, Göttingen, Shinghua, ainsi que le tandem Cellule MathDoc/RNBM. Le but est de numériser rétrospectivement un certain nombre de journaux mathématiques et de les mettre à disposition gratuitement sur le web (plus d'une cinquantaine de journaux sont disponibles). Cette initiative semble en sommeil actuellement, l'éditeur ayant procédé lui-même à une numérisation rétrospective massive de ses journaux et les proposant à la vente par paquets disciplinaires.

publication dans les revues. Ces nouveaux outils ont également permis aux chercheurs de créer des revues électroniques gratuites, avec comités de lecture, telle que *Documenta Mathematica*.

Parallèlement, des scientifiques ont mis en place des *serveurs réservoirs*, appelés aussi *Archives Ouvertes*, destinés à accueillir les textes des chercheurs, dans des stades variés allant du brouillon à l'article publié ([12], [13]). Toutes ces initiatives s'inscrivent dans un mouvement dénommé globalement *Archives Ouvertes* qui a débuté au début des années 90 et dont l'objectif est de favoriser, au sein de la communauté scientifique, un accès libre, gratuit et rapide à la connaissance [14]. Concrètement, pour un auteur, s'inscrire dans ce mouvement signifie essentiellement :

– accorder à tous les utilisateurs un droit d'accès gratuit à sa publication électronique, à condition que son nom soit cité lors de l'utilisation des résultats de ses travaux,
– déposer sa publication dans au moins un serveur réservoir.

On constate aujourd'hui que la plupart de ces initiatives s'inscrivent dans un cadre institutionnel. En France, un grand nombre d'institutions de recherche publique ont désormais pris conscience de l'intérêt de se doter d'une plate-forme commune de dépôt de la production scientifique, qui leur permettrait, entre autres, d'évaluer leurs chercheurs, de valoriser et promouvoir la recherche française. La signature récente d'un protocole d'accord [15] entre différents partenaires (dont le CNRS et la Conférence des Présidents d'Université) en vue de coordonner l'archivage ouvert de la production scientifique française en est une des conséquences concrètes. Dans le même ordre d'idées, on peut aussi citer la création par le CNRS d'un comité de pilotage des *Archives Ouvertes* [16].

Des serveurs réservoirs

Le serveur le plus connu en mathématiques est l'archive ouverte *ArXiv*, créée en 1991 par le physicien Paul Ginsparg à Los Alamos et maintenue actuellement par l'université de Cornell, dont le site miroir est hébergé par le Centre pour la Communication Scientifique Directe (CCSD, Unité Propre de Service du CNRS). Les textes déposés, qui parfois sont déjà publiés dans une revue, sont archivés et accessibles aux chercheurs gratuitement [3].

En s'appuyant sur cette expérience, et en l'élargissant à d'autres domaines, le CCSD a développé un serveur national dénommé HAL, pour *Hyper Article en Ligne*, qui sert aujourd'hui de plate-forme pour le dépôt de la production scientifique de nombreux laboratoires.

Une partie de la communauté reproche à ces serveurs un manque de filtrage, et une trop grande ouverture à une littérature non validée. Allant dans le sens de ces remarques, des scientifiques [17] ont entrepris de mettre en place un serveur tiers proposant une évaluation en ligne par des comités éditoriaux d'une partie des textes déposés sur ArXiv ou HAL.

Positions des éditeurs et droits d'auteurs

La position des éditeurs traditionnels, commerciaux ou non, face à ces archives ouvertes varie selon les cas. En mathématiques, la plupart des éditeurs acceptent que l'auteur autoarchive ses textes, sur des serveurs ou une page web, à un stade qui varie selon les contrats d'édition. Par exemple, pour Elsevier et Springer, l'autoarchivage du fichier de l'auteur (et non de celui de l'éditeur) est accepté ; pour la SMF, seul l'autoarchivage du fichier de l'auteur à l'état de « prépublication » est accepté. Dans tous les cas, l'auteur peut intervenir en proposant une modification du « copyright agreement » fourni par l'éditeur ([12]). Le développement des archives ouvertes passe donc avant tout par une prise de conscience de la part des chercheurs de l'importance des questions de propriété intellectuelle et de licence de publication.

Le rôle des éditeurs et des revues

La présence de ce nouveau mode de circulation de l'information, parallèle au circuit traditionnel de l'édition, et notamment la mise en place de « serveurs réservoirs évalués » nous amènent à nous interroger sur le rôle des éditeurs et des revues aujourd'hui, et donc à analyser les attentes des chercheurs en matière de publication scientifique.

Les principales fonctions d'une publication

Dans les grandes lignes, nous pouvons retenir les fonctions [11] suivantes :

– Paternité et intégrité
– Évaluation
– Diffusion
– Archivage et référencement

Le rôle des éditeurs

Les revues représentent encore aujourd'hui le principal mode « organisé » de circulation de la connaissance dans le secteur de la recherche. Historiquement, les imprimeurs et les éditeurs ont été pendant des siècles les seuls capables de fabriquer une revue, au sens matériel du terme : frappe, impression. Depuis l'arrivée du traitement de texte mathématique TEX, une grande partie de ce travail est désormais assurée par les chercheurs eux-mêmes. Néanmoins, les éditeurs, par le biais des revues, continuent d'assurer les trois fonctions décrites précédemment :

– La paternité et l'intégrité d'un texte, garanties dès sa rédaction, sont plus fortement protégées grâce à la publication dans une revue,
– L'évaluation est assurée par un comité éditorial composé de chercheurs, souvent bénévoles, chargé d'organiser l'examen des articles par des arbitres indépendants (« referee »),
– La diffusion, lorsqu'elle est bien faite, reste encore une mission importante de l'éditeur.

Concernant l'archivage : jusqu'à l'arrivée des versions électroniques, cette fonction était exclusivement du ressort des institutions (Bibliothèque Nationale de France, CADIST, bibliothèques universitaires et de recherche). Aujourd'hui, les éditeurs sont impliqués puisqu'ils détiennent les fichiers des auteurs, si ceux-ci n'ont pas négociés leurs droits patrimoniaux. Dans ce contexte les bibliothèques, qui restent propriétaires de leurs abonnements papier, doivent en revanche se contenter d'une location des versions électroniques.

À quoi servent les revues aujourd'hui ?

Si l'on se place dans une perspective à moyen terme, et si l'on suppose que le mouvement *Archives Ouvertes* va prendre de l'ampleur, on peut donc imaginer que la communauté mathématique aura toutes les compétences pour organiser la circulation de ses propres textes. Il est plus difficile de faire des prédictions sur le mode de circulation qui l'emportera, développement des revues académiques, existence exclusive des *Archives Ouvertes* ou concomitance de ces deux modes. En revanche, on peut s'interroger sur la raison d'être des revues aujourd'hui.

Une de leurs principales fonctions est de fournir un outil permettant de mesurer la qualité de la recherche. Grand nombre de chercheurs publient, à l'heure actuelle, non pas pour diffuser leurs résultats, puisqu'ils peuvent le faire par les pages web ou les serveurs d'archives, mais pour s'assurer une notoriété. Même s'il est difficile d'en établir la liste exhaustive, les revues sont classées par valeur scientifique. En tête de liste on trouve par exemple deux revues généralistes : *Annals of Mathematics* (académique) et *Inventiones Mathematicae* (commerciale). Ce classement intervient de façon cruciale, d'une part dans le processus de reconnaissance du travail d'un chercheur, et d'autre part dans l'évaluation (et donc dans le financement) des laboratoires. Plus généralement, on peut dire que les revues permettent de structurer la discipline en la partitionnant selon des thèmes, des points de vue (comptes rendus, revues généralistes ou spécialisées), des individus (membres des comités éditoriaux), et des valeurs (revues réputées scientifiquement ou non, commerciales ou non).

Conclusion

Il semblerait donc que nous nous acheminions vers un nouveau monde de l'édition dans lequel les chercheurs, grâce aux outils performants qu'ils ont développés, seront à même de diffuser largement et à moindre coût leurs fichiers, et de les archiver. Cette forte implication des scientifiques a fait naître un conflit d'intérêts entre les éditeurs commerciaux et les auteurs, qui leur reprochent essentiellement d'augmenter trop fortement leurs tarifs et de s'approprier leurs fichiers au détriment des archives ouvertes. Ces points de désaccord portent pour l'instant principalement sur les revues, l'édition électronique du livre de mathématiques étant à un stade moins avancé.

Comment améliorer cette nouvelle situation qui touche de plein fouet l'édifice des revues mathématiques ?

Différentes idées circulent à ce sujet. Des mathématiciens proposent de faire évoluer le circuit éditorial traditionnel, par exemple en renforçant le pôle des revues académiques et en travaillant sur les droits d'auteurs. Dans un esprit plus radical, une partie de la communauté souhaite supprimer les revues au profit de « serveurs réservoirs évalués ». Comme nous l'avons montré dans ce texte, ces idées se concrétisent par des initiatives menées en parallèle.

À la lumière de ces différentes expériences, on peut se demander quel sera le rôle des institutions dans ce nouveau monde éditorial construit selon des grands principes de « liberté », « d'ouverture » et de « gratuité ». On peut aussi s'interroger sur les critères qui seront utilisés pour filtrer la masse d'informations et évaluer les chercheurs. À l'heure actuelle, aucune position n'ayant été arrêtée sur le plan national, les mathématiciens et leurs institutions naviguent à vue. De cette phase de transition devrait émerger une nouvelle politique documentaire, si la communauté mathématique repense sa politique scientifique, et si l'Etat la soutient dans cette remise en question.

Références

[1] Tableau d'évolution des prix de 250 revues de mathématiques, http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~rehmann/BIB/AMS/Title.html

[2] Publier des revues mathématiques, R. Kirby, *Gazette des mathématiciens*, 108 (2006).

[3] La communication scientifique en mathématique, G. Kuperberg, *Gazette des mathématiciens*, 94 (2002).

[4] La documentation pour la recherche mathématique à l'université : des améliorations à apporter, à la lumière de l'expérience, V. Cohoner, F. Dal'Bo, L. Zweig, (2004) http://www.rnbm.org/relations.pdf.

[5] Lettre de cadrage CPU/CNRS, http://bibliosciences.inist.fr/IMG/pdf/Cadre_de_Responsabilite-3.pdf.

[6] *La revue scientifique*, 5e série, Tomes 3 et 4 (1905), La place de la science dans les bibliothèques : pp. 1-7 La science dans les bibliothèques : pp. 13-18 ; 48-53 ; 77-80 ; 106-113 ; 138-141 ; 174-183 Un écho de l'enquête sur la science dans les bibliothèques : pp. 688-689.

[7] http ://smf.emath.fr/InfoLiens/LiensUtiles/PublicationsFrancaises.html

[8] Les publications de la Société Mathématique de France, J.-P. Allouche, *Gazette des mathématiciens*, 108 (2006).

[9] L'édition sans drame, T. Bouche, Y. Laurent, C. Sabbah, *Gazette des mathématiciens*, 108 (2006).

[10] Les Nouvelles relations auteur-éditeur-lecteur, E. Guichard, (2000), http://www.chass.utoronto.ca/french/foire2000/colloque/guichard.htm

[11] Publication scientifique : le rôle des États dans l'ère des TIC, R. Di Cosmo (2006), http://www.pps.jussieu.fr/~dicosmo/FreeAccessToScience.pdf

[12] Bibliothèque de l'Institut Fourier : l'Auto-archivage, ou le droit au libre accès aux résultats de la recherche, http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/BIBLIO/autoarchiv.html

[13] Libre accès à l'information scientifique et technique, http://openaccess.inist.fr

[14] La Communication scientifique revue et corrigée par internet, H. Bosc, http://www.tours.inra.fr/prc/internet/documentation/communication_scientifique/comsci.htm

[15] Protocole d'accord en vue d'une approche coordonnée, au niveau national, pour l'archivage ouvert de la production scientifique, http://www.godoc.cnrs-gif.fr/docspdf/protocoleAO_pour_signature.pdf.

[16] Décision n° 060175DAJ du 14 mars 2006 portant sur la création du Comité de pilotage des archives ouvertes, CNRS, http://www.dsi.cnrs.fr/bo/2006/05-06/24-bo0506-dec060175dAj.htm

[17] Conférence donnée par J.-P. Demailly en 2006 à Rennes : « Sur les archives ouvertes ».

Recrutements universitaires des mathématiciens en 2006 (1re session)

Laurent Busé

Cette fiche est, pour sa majeure partie, extraite des statistiques 2006, 1re session, du Ministère de l'Éducation Nationale disponibles à l'URL : http://www.education.gouv.fr/personnel/enseignant_superieur/enseignant_chercheur/statistiques.htm

Cette année, il faut noter une augmentation globale, c'est-à-dire toutes disciplines confondues, du nombre de postes publiés (avant les opérations de mutation-détachement) d'environ 15%, ce qui correspond à environ 500 postes de plus qu'en 2005 et 2004. Cette augmentation profite principalement aux postes de maîtres de conférences.

Flux entrant des enseignants-chercheurs

	Postes en 25	Postes en 26	Postes toutes disciplines	% 25 et 26
MCF	50	78	1984	6,45%
PR	24	23	688	6,83%

Si la progression des postes de maîtres de conférences est d'environ 15% en section 25, elle explose en section 26 où le nombre de recrutés augmente de près de 60% par rapport à 2005.

Qualifications

Section	Dossiers examinés	Candidats retenus	Taux de qualification
Maître de Conférences			
25	288	217	75,35%
26	409	284	69,44%
Professeurs			
25	125	103	82,4%
26	116	96	82,76%

Toutes sections confondues, 15457 dossiers ont été examinés et 8937 qualifications (57,82%) comme maître de conférences ont été délivrées (noter qu'un même candidat peut recevoir plusieurs qualifications et donc présenter plusieurs dossiers).

Pour les professeurs, 3157 dossiers ont été examinés et 1920 qualifications (60,82%) ont été délivrées.

Recrutement par année de qualification

Section	Année de qualification du candidat nommé						
	2002	2003	2004	2005	2006	Total	% qual. en 2006
Maître de Conférences							
25		3	7	16	24	50	48,00%
26		5	8	22	43	78	55,13%
27		2	12	40	94	148	51%
Toutes sections	1	131	288	548	1016	1984	51,21%
Professeurs							
25		3	2	6	13	24	54,17%
26		2	3	5	13	23	56,52%
27		3	3	18	26	50	52,00%
Toutes sections		70	101	200	313	686	45,63%

Répartition des recrutés par sexe

Section	Femmes	Hommes	Total	% Femmes
Maître de Conférences				
25	7	43	50	14%
26	26	52	78	33,3%
27	39	109	148	26,4%
Toutes sections	837	1147	1984	42,2%
Professeurs				
25	2	22	24	8,3%
26	4	19	23	17,4%
27	12	38	50	24%
Toutes sections	185	503	688	26,9%

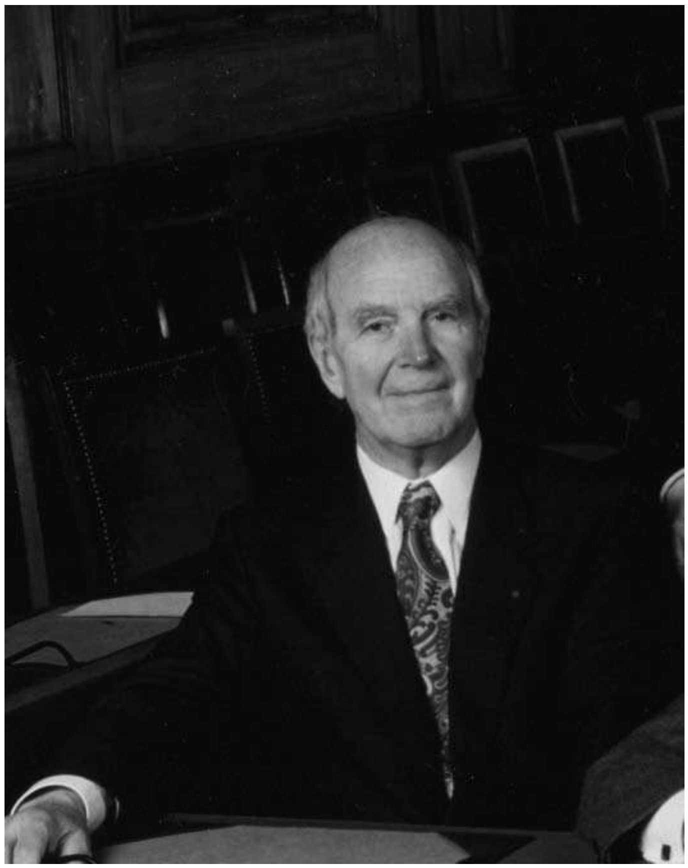
Age moyen du candidat nommé

Section	Maître de Conférences		Professeurs	
	Effectifs	Age moyen	Effectifs	Age moyen
25	50	29 ans 10 mois	24	37 ans et 3 mois
26	78	29 ans et 9 mois	23	37 ans et 8 mois
27	148	30 ans	50	40 ans
Toutes sections	1984	32 ans et 8 mois	686	43 ans et 4 mois

Complément : recrutement des jeunes chercheurs au CNRS et à l'INRIA

En 2006, le CNRS a recruté 12 CR dont 3 femmes. De son côté, l'INRIA a recruté 27 CR (19 hommes et 8 femmes) dont 9 (8 hommes et 1 femme) peuvent être considérés[1] comme des mathématiciens.

[1] Ce chiffre résulte d'une interprétation subjective après inspection du profil des recrutés.



© Académie des sciences de l'Institut de France

Gustave Choquet (1990)

CARNET

Gustave Choquet

(1er mars 1915 - 14 novembre 2006)

Michel Talagrand

Ce texte est celui qui va paraître dans l'annuaire de l'Académie des sciences.

Gustave Choquet, né à Solesmes dans le Nord le premier mars 1915, élu Membre de l'Académie le 29 novembre 1976 dans la section Mathématiques, est décédé à Lyon le 14 novembre 2006.

Admis à l'École Normale Supérieure en 1934, il fut reçu premier à l'agrégation de mathématiques en 1937. Il fut Maître de Conférences puis Professeur à Paris VI de 1949 à 1984, et parallèlement à l'École Polytechnique de 1960 à 1969. Il fit de nombreux séjours de longue durée dans des universités étrangères.

Les travaux de Gustave Choquet sont marqués par une vision directe et géométrique des problèmes, et atteignent souvent à une suprême élégance. Il a manifesté une prédilection pour les problèmes clefs, problèmes qu'il a su reformuler dans le cadre le plus général possible et qui l'ont amené à la création de concepts nouveaux et pénétrants dont l'impact a été considérable. Il a abordé de nombreux domaines : topologie générale, fonctions de variables réelles, théorie de la mesure, théorie du potentiel, analyse fonctionnelle convexe et ses applications, théorie des nombres.

Les premiers travaux de Gustave Choquet portent sur des études fines de topologie des sous-ensembles du plan, et l'amènent à la solution d'un célèbre problème de Lebesgue sur la caractérisation des fonctions dérivées. Dès 1944, il s'intéresse à la théorie du potentiel, qui sera pour lui une source constante d'inspiration. Ses recherches conduites avec J. Deny sur les noyaux de convolution ont des applications importantes dans la théorie des marches aléatoires sur les groupes. S'attaquant au problème de la capacitabilité des ensembles boréliens, il est amené par étapes à l'élaboration de la théorie des capacités, théorie qui se rattache à la théorie de la mesure. D'une grande puissance, elle demeure d'une étonnante jeunesse. C'est la théorie des capacités qui l'amène à son tour à la découverte du théorème de représentation intégrale : tout point d'un convexe compact d'un espace localement convexe (de dimension infinie) est le barycentre d'au moins une mesure de probabilité portée essentiellement par l'ensemble de ses points extrémaux. Il caractérise en outre le cas d'unicité : les célèbres « simplexes de Choquet ». La grande variété d'application de ces résultats (en théorie ergodique, algèbres d'opérateurs, processus stochastiques, théorie du potentiel, analyse harmonique) leur ont assuré un retentissement considérable, et ces outils font aujourd'hui partie du patrimoine universel des mathématiques.

Gustave Choquet a été non seulement le créateur d'une œuvre mathématique vaste et profonde, mais aussi un enseignant hors pair. Les innovations majeures qu'il introduisit en 1955 dans son cours d'analyse se répandirent immédiatement. Son intérêt pour la pédagogie ne s'est jamais démenti, et s'est traduit notamment par sa présidence de 1950 à 1958 de la Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques (Commission Gattegno).

Personnalité marquante, très attachante, adoré de ses étudiants, son immense talent n'avait d'égal que son charisme personnel.

Les travaux de Gustave Choquet ont profondément marqué l'extraordinaire développement de l'analyse mathématique au cours de la deuxième moitié du vingtième siècle. Il a renouvelé la discipline et son influence dans l'enseignement des mathématiques continue de toucher de nombreuses générations.

Les témoignages qui suivent se rapportent principalement à l'engagement de Gustave Choquet pour l'enseignement, une présentation de son œuvre scientifique sera publiée dans un prochain numéro de la Gazette.

Gustave Choquet et l'enseignement des mathématiques à l'université

Marc Rogalski[1]

Permettez-moi de commencer par quelques souvenirs personnels. J'ai rencontré pour la première fois Gustave Choquet en octobre 1962, en assistant à son cours du Diplôme d'Enseignement Supérieur de « Topologie et théorie des fonctions ». Avec quelques camarades, c'était le premier cours universitaire que nous suivions sérieusement. Nous étions à vrai dire assez ignorants, par exemple en théorie de la mesure (absente des enseignements de licence de l'époque), alors que G. Choquet supposait que ses auditeurs savaient naturellement ce que signifiait l'expression « mesure *portée* par les points extrémaux d'un convexe compact ». Il nous fallut donc apprendre le b. a.-ba de la théorie par nous-mêmes...

Le style d'enseignement de G. Choquet était assez étonnant, mais très stimulant. Nous avions droit aux grandes idées qui sous-tendaient les théorèmes, toujours illustrées de petits dessins, d'ailleurs assez peu figuratifs, mais les détails concrets des démonstrations étaient souvent laissés aux auditeurs. Nous étions ainsi contraints à un travail personnel sur des notions parfois très récentes (par exemple, les notes aux CRAS de G. Choquet sur les cônes convexes faiblement complets et sur les mesures coniques, partie importante du cours qu'il nous donnait, sont parues moins de six mois avant celui-ci !). Nous eûmes un peu de mal à relever ce défi, et nous avons passé l'examen de février avec quelques trous dans certaines démonstrations. Heureusement, les vacances nous permirent de retravailler la question, et à la rentrée une sorte de bourse d'échange de démonstrations nous permit d'achever collectivement la compréhension du cours.

Le style d'enseignement de Gustave Choquet tel que nous l'avons découvert en cette année 1962 n'était pas un hasard, mais la conjonction d'un penchant naturel et d'une théorie.

Sa préférence a toujours été de faire des démonstrations succinctes, et de refuser d'écrire des pages de détails avec lemmes emboîtés et propositions intermédiaires en grand nombre. Il nous a expliqué plus tard qu'il pensait, lors de ses premiers travaux, que l'intérêt d'un résultat diminuait nettement avec la longueur et la technicité de sa démonstration. Cela ne l'a pas empêché à l'époque de prouver des théorèmes de démonstrations longues et compliquées, mais cela a contribué à rendre leurs rédactions tardives ou parfois inexistantes pendant très longtemps. Un tel penchant ne pouvait pas ne pas se refléter dans ses enseignements de troisième cycle.

Mais cette manière d'enseigner résultait aussi d'une théorie pédagogique clairement revendiquée. Le plus simple à ce sujet est de donner la parole à G. Choquet lui-même :

[1] Professeur émérite à l'Université des sciences et technologies de Lille.

« J'ai compris que chaque enseignant doit constamment lutter contre la tentation toujours renouvelée de se satisfaire d'un cours limpide et rigoureux, mais sans tenir compte des acquis des élèves ni de leurs réactions ou de leurs incompréhensions.»[2]
« De plus, l'exposé trop formalisé d'une théorie ne donne aucune idée de ce qu'est, en fait, l'activité mentale du mathématicien : observation, mathématisation, solution du problème dans le modèle ainsi créé, retour à l'observation initiale, généralisations et applications. » [3]
« L'important est l'activité personnelle des élèves ; on apprend à faire des maths non pas en écoutant une leçon purifiée, mais en manipulant des êtres mathématiques. Les mêmes principes sont valables pour l'initiation à la recherche ».[4]
« Nous succombons indéfiniment au mirage des programmes soigneusement mis au point et nous pensons, surtout à l'Université, qu'un cours bien structuré sur un programme modernisé est le but final de notre pédagogie. Le professeur prépare avec conscience un beau cours, rigoureux et limpide comme l'eau claire d'une source et s'étonne, lors de l'examen, que cette eau pure se soit muée en un liquide trouble peu appétissant. C'est donc que la beauté de la matière enseignée et la clarté de l'exposé ne sont pas suffisantes, et ne sont peut-être même pas absolument nécessaires. » [5]
« L'important n'est pas la somme de travail et d'ingéniosité fournie par le professeur, mais celle fournie par l'étudiant. Autrement dit, l'essentiel n'est pas le cours, mais le travail personnel de l'étudiant. Il faut donc que, d'une façon ou d'une autre, le professeur provoque cet effort personnel. » [6]

À la lecture de ces textes, on comprend mieux le style d'enseignement qui nous avait étonné en 1962, et pourquoi il a été si efficace, en tout cas pour nous qui étions assez motivés et curieux. Je dois dire que bien des cours de troisième cycle que j'ai suivis dans les années soixante (période où un assistant débutant pouvait se cultiver tranquillement, la pression pour publier à tout prix n'ayant pas atteint le degré insensé qu'elle a maintenant) étaient loin de respecter les principes de Gustave Choquet. Certains étaient si merveilleusement « pédagogiques » qu'ils donnaient à l'auditeur l'impression de tout comprendre : les difficultés importantes étaient ainsi en fait cachées, et cela n'incitait pas au travail personnel ; on se retrouvait au bout de deux mois complètement perdu, bien qu'ayant assisté à « *un beau cours rigoureux et limpide comme l'eau claire d'une source* ».

Bien sûr, ces principes peuvent sembler un peu extrêmes. En fait, G. Choquet savait parfaitement les adapter à la réalité, et, par exemple, ses enseignements de premier et second cycle tenaient compte du besoin de sécurité qu'ont aussi des étudiants dont un grand nombre ne se destineront pas à la recherche.

Pour ce faire, Gustave Choquet a été en particulier un remarquable rédacteur de manuels. Les polycopiés de son cours de Calcul Différentiel et Intégral (CDI), publiés au Centre de Documentation Universitaire (CDU), et partiellement repris dans le célèbre tome II de son Cours d'Analyse[7] (une plaisanterie qui l'amusait toujours

[2] *Hommes de science*, Hermann, Paris, 1990, p. 61.
[3] *Ibidem*.
[4] *Ibidem*.
[5] *Formation des chercheurs de mathématiques*, Chantiers de pédagogie de l'APMEP, 1973, p. 73.
[6] *Ibidem*, p. 76.
[7] *Cours d'Analyse, tome II Topologie*, Masson, Paris.

était de lui demander quand il publierait le tome I) ont enthousiasmé plusieurs générations d'étudiants. Bien des universitaires utilisent toujours ce « tome II » pour leur enseignement, et le recommandent aux étudiants. On peut aussi citer ses cours à l'École Polytechnique (pendant les années 1965-1970), qui ont convaincu plusieurs élèves d'abandonner la voie royale et profitable de l'industrie ou de l'administration pour se lancer dans la recherche mathématique.

Signalons d'ailleurs que l'ensemble de ses cours de mathématiques (à l'exception de son tome II de topologie) est maintenant réuni dans un recueil unique[8], qui reprend en particulier des polycopiés jadis édités au CDU et désormais quasi-introuvables.

Lorsqu'on relit ces cours écrits entre 1955 et 1970, on est encore étonné de leur modernité. Le parti pris axiomatique est certain, mais on sent qu'il n'est qu'un outil pour aller rapidement au cœur d'instruments puissants et d'applications importantes. En ce sens, ils reflètent la manière dont Gustave Choquet aimait faire des mathématiques. Là encore, laissons-lui la parole :

« Je suis un intuitif et un géomètre. Dès l'école primaire et le lycée, de tout problème mathématique j'essayais d'avoir une vision géométrique, de le traduire en figures simplifiées au maximum pour en dégager le squelette fonctionnel. Cette habitude m'a conduit, à l'âge adulte, à adopter un style de recherche qui consiste, tout en m'appuyant sur une connaissance approfondie d'un ou plusieurs cas particuliers, à me placer dès que possible dans un cadre aussi général que possible où le problème ait encore un sens, quitte à le particulariser au fur et à mesure des besoins. Ceci me permet à la fois de donner au problème la souplesse maximale et d'aboutir, si du moins je le résous, à la création d'outils mathématiques utilisables dans d'autres circonstances que celles qui les ont fait naître. » [9]

Gustave Choquet se définissait ainsi comme un « stratège » plus que comme un « tacticiens ». Il pratiquait à un haut niveau d'efficacité ce qu'on pourrait appeler l'axiomatisation locale : quand on lui posait un problème, après avoir réfléchi, très fréquemment il répondait ainsi : « *Appelons truc... Alors le problème se reformule ainsi...* ». Et cela marchait souvent ! Il avait une conscience très claire de son mode de fonctionnement mathématique, et il l'a analysé dans plusieurs textes. Il l'a en particulier expliqué lors d'un séminaire d'histoire et épistémologie (le séminaire organisé à l'origine par Maurice Loi) à propos de sa création de la théorie des capacités. Une rédaction détaillée en a été faite à l'Académie des Sciences.[10]

Après ce rapide aperçu des conceptions de Gustave Choquet sur l'enseignement et la pratique des mathématiques, il faut en venir à ce qui en fut l'illustration concrète et historique dans l'enseignement des mathématiques à l'université : la révolution de 1954-1955 dans l'enseignement du certificat de Calcul Différentiel et Intégral de la faculté des sciences de Paris. G. Choquet en parle lui-même avec beaucoup de discrétion :

---

[8] *Cours de Gustave Choquet*, Ellipses, Paris, 2002.

[9] *Hommes de science*, Hermann, Paris, 1990, p. 59.

[10] *La naissance de la théorie des capacités : réflexion sur une expérience personnelle*, La Vie des Sciences, Comptes rendus, série générale, tome 3, n° 4, juillet-août 1986, p. 385-397.

« Je dus remplacer Georges Valiron, souffrant, qui était chargé du cours de calcul différentiel et intégral ; jusque là, le programme de ce cours suivait, dans ses grandes lignes, les parties élémentaires du Traité de Goursat. J'en modifiai résolument l'orientation et le contenu et j'eus ainsi la chance d'être à l'origine d'un renouvellement de l'enseignement des mathématiques en France, au deuxième cycle d'abord puis, par contagion, au premier. » [11]

L'aspect révolutionnaire de ce qui advint cette année-là à Paris est bien plus important que G. Choquet ne le laisse croire dans cette simple allusion. Il faut rappeler que les mathématiques « modernes » (au sens des livres de Banach et de Van der Waerden) n'étaient pas à cette époque enseignées dans les universités françaises, à l'exception d'une ou deux universités de province (Nancy en particulier), et cela malgré une anticipation datant d'avant 1939 à l'université de Strasbourg (expérience continuée en 1940 dans la même université repliée à Clermont-Ferrand), par Henri Cartan.

Le blocage venait essentiellement de Paris, où quelques mathématiciens éminents maintenaient la tradition de l'analyse classique « à la française ». Les piliers de l'enseignement de CDI ont ainsi été René Garnier jusqu'en 1946, Georges Valiron à partir de 1941 (juqu'à son remplacement par Gustave Choquet en 1954), avec les interventions plus épisodiques, et variables selon les années, de Arnaud Denjoy, Maurice Fréchet, Georges Bouligand, Jean Favard, entre autres. Ces mathématiciens, malgré leur grand talent, n'avaient pas du tout introduit dans l'enseignement l'approche moderne pourtant déjà pratiquée dans certains pays étrangers.

Il y eu une exception notable, avec l'arrivée de Paul Dubreil en CDI à Paris en novembre 1947. Il y enseigna alors, et c'était une nouveauté, les rudiments de l'algèbre moderne, pendant plusieurs années. Mais il s'agissait d'un enseignement ajouté à celui de l'analyse classique, et ce dernier ne l'utilisait en rien. Henri Cartan, pionnier d'un enseignement moderne à Strasbourg, aurait pu sans doute modifier l'enseignement de CDI, mais il fut nommé pendant la guerre à l'École Normale Supérieure (il y resta jusqu'en 1965, avec une brève interruption de deux ans), et n'eut ainsi pas la latitude d'influer personnellement sur le contenu des enseignements parisiens.

C'est donc lui qui proposa, lorsque Gerges Valiron tomba malade, que Gustave Choquet le remplace en CDI. On trouve dans la correspondance de Henri Cartan à Marcel Brelot, vers 1950, une expression de la grande estime qu'il avait pour Gustave Choquet, alors âgé de trente cinq ans. Il nous a raconté, lorsque Jean-Luc Dorier et moi-même sommes allés l'interviewer, vers 1990, sur la genèse de la modernisation de l'enseignement des mathématiques à l'université, à quel point il était conscient de la révolution qu'il allait ainsi mettre en marche. Il s'en était entretenu, « avec malice », nous a-t-il dit, avec le doyen de l'époque, qui prévoyait lui aussi le tour surprenant qu'allait prendre cette substitution d'un enseignant à un autre.

Et c'est en effet à un véritable bouleversement qu'on a alors assisté. Le cours de CDI de 1954-1955 a ainsi commencé par la théorie des ensembles, s'est poursuivi par l'algèbre des groupes, anneaux et corps, la construction des réels et des complexes,

[11] *Hommes de science*, Hermann, Paris, 1990, p. 58.

l'algèbre linéaire, puis, surtout, les espaces topologiques, les espaces normés, les espaces de Hilbert, un enseignement des équations différentielles résolument nouveau et adossé à ces fondements d'analyse fonctionnelle. On était bien loin du *Traité* de Goursat et du cours de Valiron !

Le choc ainsi produit a été raconté par Jacques Roubaud[12], qui était alors étudiant en CDI, et devint écrivain et mathématicien. Donnons-lui la parole :

« La réaction de la population de l'amphi de CDI de 1954 aux premières paroles de Choquet, qui s'expliquait pour la première fois dans ce rôle (dans cette capacité) en ces lieux (il venait de prendre la succession d'un des derniers représentants de l'école ancienne d'analyse "à la française", "Valiron"), fut étonnamment semblable à la réaction courante des non-mathématiciens : l'effarement. Quel que fût leur "passé" mathématique, ils ne s'étaient pas attendus à cela. » [13]
« Ainsi, face à la brusque métamorphose de l'objet mathématique qui s'opérait devant leurs yeux (devant leurs oreilles surtout), les étudiants... avaient senti vaciller leurs certitudes les mieux établies : ils s'étaient fait de la mathématique, au cours de leurs précédentes études, une représentation devenue peu à peu invariable, ronronnante et stable, et voilà qu'elle changeait tellement qu'elle se refermait, hermétiquement, devant eux... Le désarroi des redoublants était le plus palpable : entre les cours de "Valiron" de l'année précédente et ceux de "Choquet" ils ne découvraient pour ainsi dire aucun point commun ; comme si, pendant les vacances universitaires, cette science avait été remplacée par une autre, qui n'eût porté que par commodité le même nom. » [14]

« Il s'agissait, cependant, d'une situation exceptionnelle. Tous en étaient conscients. Une rupture avait eu lieu, une tradition devenue routine avait succombé, et quelque chose d'autre commençait là (ils en étaient les témoins involontaires), avec ostentation, avec désinvolture. "Choquet", c'était clair, semblait s'amuser de leur, de notre désarroi. Du passé (mathématique) on avait fait, apparemment, table rase. » [15]

Les mathématiciens des universités de province saisirent immédiatement l'occasion. Michel Parreau m'a raconté comment ils n'osaient pas franchir le pas tant que Paris n'aurait pas bougé, et avec quel enthousiasme ils ont accueilli le nouvel enseignement de G. Choquet. En moins de trois ans, toute les universités de province rénovèrent à leur tour leur enseignement de licence en suivant la nouvelle orientation. La réforme de la licence de 1958 vint officialiser le nouveau cours : elle mit en propédeutique (Mathématiques Générales et Physique) les bases de l'algèbre générale et de l'algèbre linéaire, les nouveaux certificats de mathématiques I et II gardant en licence le cœur de l'analyse moderne. Gustave Choquet fut ainsi, en quelque sorte, le père de la licence de 1958 !

Le lecteur n'aura pas manqué de sentir une sorte de contradiction entre deux préoccupations pédagogiques chez Gustave Choquet : d'une part le besoin d'enseigner des théories générales, abstraites, fournissant des outils puissants, telles

[12] *Mathématique : (récit)*, Seuil, Paris.
[13] *Ibidem*, p. 11.
[14] *Ibidem*, p. 13.
[15] *Ibidem*.

que les prônait à l'époque Bourbaki, et de l'autre un refus des « cours clairs et limpides, trop formalisés ». Peut-être cette tension entre ces deux pôles était-elle inhérente aux développements des mathématiques à l'époque où G. Choquet a fait l'essentiel de ses travaux de recherche, mais peut-être aussi sommes-nous encore - et peut-être pour longtemps - pris dans le même réseau de contradictions lorsque nous voulons enseigner les mathématiques à l'université.

De ce point de vue, les rapports de Gustave Choquet avec Bourbaki mériteraient une étude spéciale (qu'il est hors de question de faire ici). Il est souvent connu actuellement pour les réserves qu'il a émises sur l'entreprise bourbakiste. On pourra trouver une telle analyse critique dans la référence de la note 2, page 62, dont nous extrayons à titre d'exemple le passage suivant :

« Les défauts ? Il semble que tout groupe qui travaille longtemps et dans l'isolement soit condamné au dogmatisme. C'est, me semble-t-il, le plus grand reproche que l'on peut faire à Bourbaki : les définitions et théorèmes de base sont assénés sans justification et sans présentation heuristique ; ils ont la sécheresse et le dépouillement d'un squelette dont la chair, pourtant savoureuse, est rejetée dans les exercices ; le lecteur qui les néglige finit par acquérir une vision caricaturale de l'activité mathématique. »

Mais Gustave Choquet n'a pas toujours été aussi critique envers Bourbaki. Par exemple, l'introduction de son premier fascicule au CDU de ses cours de CDI[16] est une profession de foi bourbakiste :

« ...on peut dire qu'une des contributions essentielles des mathématiciens du dernier demi-siècle a été de dégager les structures fondamentales des mathématiques. »

Un enthousiasme encore plus grand pour le choix bourbakiste anime une conférence qu'il fit en 1961 à Lausanne, lors d'un séminaire de la Commission Internationale sur l'Enseignement des Mathématiques[17]. Il y annonce même, assez imprudemment, comment les grandes structures bourbakistes devraient être enseignées dans le second degré ! Sans doute on voit là le début de l'engagement de G. Choquet pour la rénovation de l'enseignement secondaire qui aura lieu en 1970. L'échec relatif de cette rénovation a sans doute joué un rôle dans l'évolution de son sentiment sur le mouvement bourbakiste.

Gustave Choquet n'est plus là pour donner son sentiment sur les évolutions actuelles de l'enseignement universitaire des mathématiques. Mais peut-être devrions-nous nous inspirer de ce qu'il en a dit en 1972 (déjà, la réforme des « maths modernes » était contestée) :

« L'enseignement mathématique à l'université a subi, avec un peu d'avance, une transformation analogue à celle des lycées : les programmes ont été radicalement transformés ; on est passé de Goursat à Bourbaki ! Cette transformation s'est

[16] *Algèbre des ensembles, Algèbre*, CDU, Paris, 1960
[17] *L'analyse et Bourbaki*, L'Enseignement Mathématique, II° série, tome VIII, 1962, Genève, p. 109-135

accompagnée, de façon assez générale, d'une parcellisation poussée des enseignements ; celui-ci est divisé en unités correspondant plus ou moins aux grandes structures au sens de Bourbaki : algèbre générale, algèbre linéaire, topologie générale, intégration, variétés différentielles, etc. Le professeur chargé d'un de ces enseignements est en général un spécialiste ; il en connaît fort bien l'ossature, les notions essentielles qui sont pour lui des notions naturelles et comme allant de soi ; il axe donc son cours sur leur introduction et leur développement logique ; et souvent il ne peut en donner d'applications substantielles, soit par manque de temps, soit parce que ces applications le feraient sortir de la structure étudiée.

Elle [cette parcellisation] ne présente aux étudiants qu'une vue locale des mathématiques ; aussi comprennent-ils mal la motivation des notions introduites... et au bout de deux ou trois ans de tels enseignements, ils voient les mathématiques comme une juxtaposition de théories brillantes, mais tombées du ciel, dont les démonstrations sont en apparence faciles, mais qui de façon curieuse deviennent difficiles à appliquer dès qu'on sort des sentiers battus. » [18]

Réfléchissons un instant à ce que Gustave Choquet nous aurait dit de la dernière réforme en date, destinée à mettre en place le cursus « LMD » !

À l'issue de ce survol un peu rapide des opinions et du rôle de Gustave Choquet en ce qui concerne l'enseignement des mathématiques à l'université, il conviendrait d'étudier de façon plus approfondie le lien entre eux et sa propre pratique mathématique. Signalons à ce sujet, pour le lecteur intéressé, le passage consacré à G. Choquet dans le livre de Nicolas Bouleau où il interroge plusieurs mathématiciens sur leur conception du travail de recherche mathématique.[19]

[18] *Formation des chercheurs de mathématiques*, Chantiers de pédagogie de l'APMEP, 1973, p. 75.
[19] *Dialogues autour de la création mathématique*, réunis par Nicolas Bouleau, Association Laplace-Gauss, 1997.

Choquet et l'enseignement de la Géométrie élémentaire

André Revuz[1]

Depuis 1934, date de notre entrée à l'ÉNS, nous avons été, Choquet et moi, unis dans une amitié sans faille, fondée en grande partie sur un même amour des mathématiques et sur un profond intérêt pour leur enseignement à tous les niveaux. Quelques jours avant son 90e anniversaire, Choquet m'a rappelé qu'il se considérait avant tout comme un « enseignant-chercheur ». Il y avait eu dans nos premières réactions face aux mathématiques de profondes ressemblances que nous constatâmes assez vite. Au lycée, nous avions été tous les deux passionnés par la Géométrie. Choquet avait eu le 1er prix de mathématiques au Concours général et il est clair qu'un esprit « géométrique » a animé toutes ses recherches et son enseignement. Mais tous les deux aussi, nous avions été perturbés par le début des cours de géométrie, où, au lieu de la rigueur que l'on trouvait par la suite et qui nous enchantait, on était confronté à un discours inconsistant dont le sens s'obscurcissait à mesure qu'on voulait le comprendre. Les « démonstrations » des cas d'égalité des triangles me laissaient perplexe, ainsi que d'incroyables énoncés du type : « Un axiome est une proposition vraie que l'on ne peut pas démontrer », qui relevaient d'une épistémologie superficielle et confuse. Et ce qui m'inquiétait, c'était l'impression d'être le seul à éprouver ce malaise. Aussi ce fut pour moi un grand soulagement de constater que Choquet avait rencontré les mêmes difficultés. Mais laissons-lui la parole avec des extraits d'un livre paru en 1955 aux éditions Delachaux et Niestlé, sous le titre « L'enseignement des mathématiques », contenant des articles de E.W. Beth, Choquet, Dieudonné, Lichnerowicz, Gattegno et Piaget, qui avaient fondé en 1950 une CIEAEM (Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques) et qui avaient organisé plusieurs colloques internationaux sur les thèmes suivants :

– 1950 : relations entre le programme mathématique des écoles secondaires et le développement des capacités de l'adolescent.

– 1951 : l'enseignement de la géométrie dans les premières classes des écoles secondaires.

– 1951 : le programme fonctionnel : de l'école maternelle à l'université.

– 1952 : structures mathématiques et structures mentales.

– 1953 : les relations entre l'enseignement des mathématiques et les besoins de la science et de l'industrie.

– 1953 : les rapports entre la pensée des élèves et l'enseignement des mathématiques.

– 1954 : les mathématique modernes à l'école.

– 1955 : l'élève face aux mathématiques. Une pédagogie qui libère.

L'article de Choquet, de 54 pages, intitulé « Sur l'enseignement de la géométrie élémentaire » commençait par un « Examen critique des manuels » dont voici des extraits :

[1] Professeur honoraire à l'université Paris VII

« *La géométrie élémentaire est un beau voyage, mais son départ a souvent lieu dans une ombre douteuse et le chemin suivi traverse des bourbiers profonds, tels celui des déplacements et celui de l'orientation* ».

« *Voici un exemple de commentaire d'un manuel sur les axiomes et les postulats : "Un axiome est une proposition évidente par elle-même. Un postulat est une proposition qu'on admet sans démonstration". Le silence semble préférable à un tel commentaire qui risque d'obscurcir longtemps l'esprit de l'élève.* »

« *Un autre auteur après avoir énoncé l'axiome de la droite : "Par deux points, on peut faire passer une droite et une seule" le commente ainsi : "Nous disons que c'est une propriété caractéristique de la droite".* »

Quant aux démonstrations des cas d'égalité des triangles, Choquet n'avait, lui, pas hésité à leur refuser d'emblée toute validité. Je persiste à être stupéfait que pareilles absurdités aient paru ne gêner que très peu de gens. Cela jette une lumière inquiétante sur la manière dont sont comprises les mathématiques. Est-ce faire preuve d'un pessimisme excessif que de dire que l'enseignement est encore loin de s'être dégagé du modèle multimillénaire de la transmission sans discussion d'une vérité révélée, ce contre quoi Choquet s'est toujours énergiquement élevé.

Choquet n'a cessé de s'attaquer au problème de trouver une axiomatique sans lacune et accessible aux élèves, en en donnant d'ailleurs plusieurs solutions toutes intéressantes. Dans l'article de 1955, il a commencé à étudier les différents aspects de la question. En 1961, il a écrit une « Brochure de l'APM » sur la « Recherche d'une axiomatique commode pour le premier enseignement de la géométrie élémentaire ». En 1961, il a fait paraître chez Hermann un volume sur « L'enseignement de la géométrie ».

On peut constater avec tristesse qu'il a pratiquement prêché dans le désert. Il a montré que plusieurs axiomatiques différentes étaient possibles, ce qui était très intéressant scientifiquement... mais qui allait choisir ? Chaque professeur, semblait penser Choquet. Dans le principe ce serait très sain, mais il faudra sans doute attendre encore longtemps pour que cela soit possible. Il est certain, en outre, que l'épistémologie naïve qui pensait encore qu'un axiome était une proposition « vraie » que l'on ne pouvait pas démontrer est encore présente dans beaucoup d'esprits. La répugnance à mettre en évidence tous les axiomes que l'on utilise – parfois inconsciemment – n'a pas disparu. D'ailleurs, que pensaient les mathématiciens du début du 19^{e} siècle ? J'ai souvenir d'une remarque d'Elie Cartan après un exposé de Von Neumann à l'IHP : « *Il nous a montré que les axiomes, ça pouvait servir à quelque chose !* » S'il s'est beaucoup intéressé à l'enseignement de la géométrie élémentaire, il ne s'est pas limité à cette seule discipline. En 1956 et 1957, la SMF et l'APM organisèrent deux séries de conférences qui firent l'objet – sous le titre « Structures algébriques et structures topologiques »– de la Monographie n^{o} 7 de l'Enseignement mathématique (Genève) avec un avertissement signé par Choquet et le Président de l'APM, Gilbert Walusinski, dont j'extrais les lignes suivantes :

« *L'extension rapidement croissante de la recherche, le progrès de plus en plus rapide de la découverte imposent à ceux mêmes des professeurs qui enseignent à des niveaux élémentaires de renouveler leurs connaissances théoriques. Les souvenirs qu'ils ont gardés de leurs études en Faculté doivent être périodiquement rafraîchis. Leur enseignement même doit profiter des nouvelles acquisitions de la science : il faut enseigner aujourd'hui les Mathématiques d'aujourd'hui.* » Il ne serait pas juste de rappeler les efforts de Choquet pour améliorer l'enseignement sans rappeler les travaux de son fidèle ami C. Gattegno, dont il partageait les conceptions de l'enseignement. En 1965, Gattegno a publié chez Delachaux et Niestlé un livre intitulé « Pour un enseignement dynamique des mathématiques » que Choquet appréciait énormément et qui rassemblait un nombre considérable d'articles écrits entre 1947 et 1963.

Je me contenterai d'en faire deux citations.

En 1947 : *« On a tout simplement oublié que l'enfant est, en définitive, l'agent de sa propre compréhension et le créateur de son savoir »*. Cette remarque largement approuvée par Choquet semble avoir été très mal comprise par certains qui veulent y voir, ou feignent d'y voir une démission de l'enseignement, alors qu'il devrait être bien clair qu'enseigner c'est mettre l'élève dans des conditions favorables pour qu'il développe ses capacités et non lui asséner des résultats qu'il doit apprendre sans forcément les comprendre.

En 1950, Gattegno déclarait : *« Nous sommes souvent hostiles aux nouvelles idées et aux nouvelles méthodes ».* Remarque prémonitoire quant aux tentatives de moderniser l'enseignement, mais qui risque d'être éternellement valable. C'est chez les adultes que l'on rencontre le plus d'hostilité aux idées nouvelles qui leur demandent des efforts et qui bouleversent ce qu'ils considéraient comme définitivement acquis. S'agissant d'enseignants, leur parade est de déclarer que les idées nouvelles sont trop difficiles pour les enfants qui d'ailleurs n'ont pas la maturité nécessaire pour les dominer. Ils oublient que, pour les enfants, tout est nouveau et qu'ils n'ont pas un problème d'adaptation de leurs habitudes. Rappellerai-je la fin de la notice d'emploi d'un ordinateur : *« Si vous avez un problème, adressez-vous à votre petit-fils ! »* , ce que l'on aurait dû pour le moins compléter par « ou à votre petite-fille ».

Jean-Pierre Serre a déclaré dans sa leçon inaugurale au Collège de France : *« Le mathématicien est un homme libre ! »* Choquet en a été un exemple éminent, il n'oubliait jamais, en outre, qu'en enseignant c'est la liberté de l'élève qu'il interpellait. Les efforts que nous avons faits et les espoirs que nous avions mis dans une amélioration de l'enseignement des mathématiques ont été profondément déçus ; il s'agit d'un très difficile combat qu'il faut poursuivre en pensant aux bonnes idées que défendait Choquet et qui sont toujours d'actualité.

Mémoires d'étudiant

Gilles Godefroy

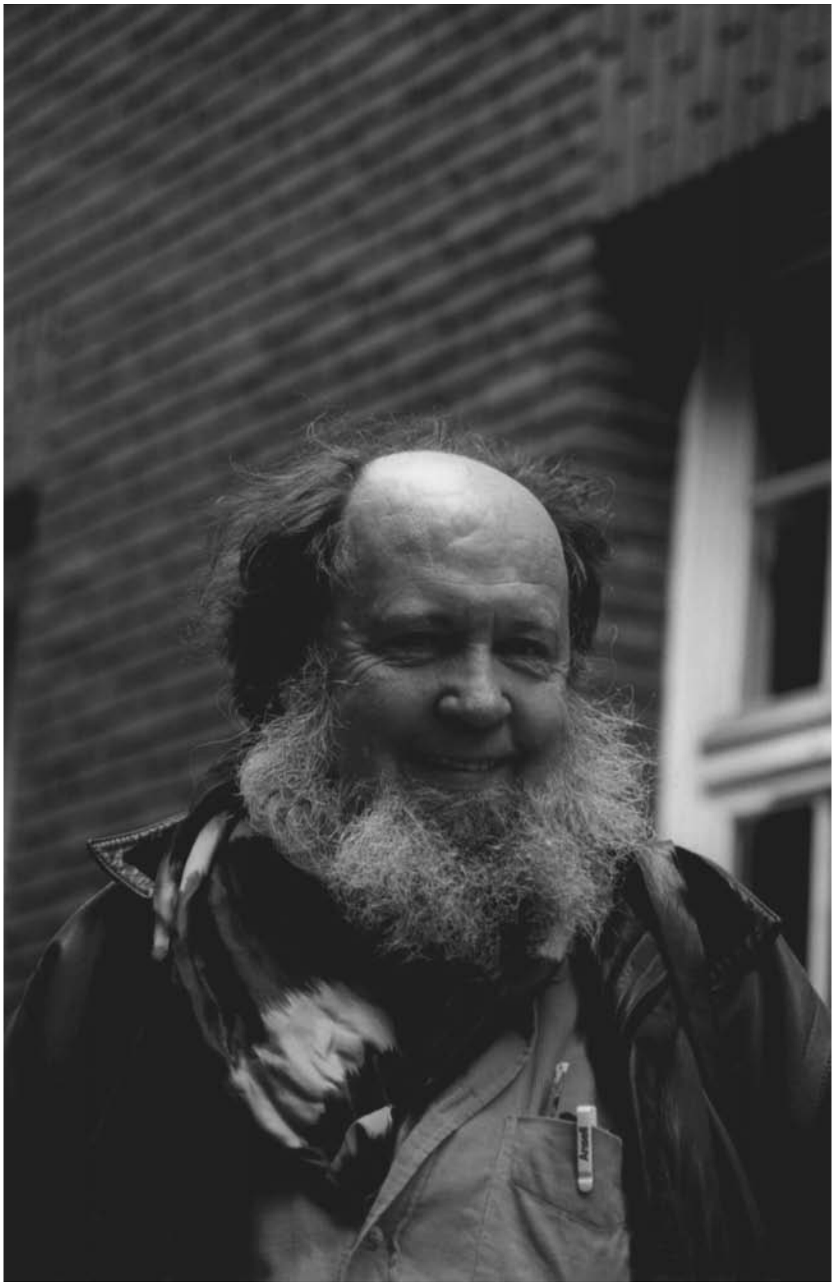
Monsieur Choquet a dirigé ma thèse. C'est avec émotion, respect et affection que je partage avec vous ces quelques souvenirs d'un élève reconnaissant.

Monsieur Choquet fut avant tout un chercheur que je voudrais qualifier non pas d'éblouissant, mais d'*éclairant*. Son intuition géométrique et sa capacité de simplifier et d'épurer les problèmes illuminaient pour ses disciples des théories débarrassées, grâce à lui, de toute complication inutile. Je me rappelle l'avoir entendu dire, après un séminaire particulièrement touffu : « *c'est compliqué, donc ce ne sont pas des mathématiques* ». C'était une plaisanterie bien sûr, mais significative. Et c'est ainsi qu'il rassurait les débutants qui, à juste titre, craignaient de s'égarer dans l'immensité des connaissances à acquérir, ou à l'inverse dans la complexité sans borne des détails techniques.

Chercheur exceptionnel, Gustave Choquet fut aussi un pédagogue qui s'est pleinement investi dans l'enseignement des mathématiques, à tous les niveaux. Cet aspect de sa carrière sera mieux évoqué par des collègues qui ont partagé son engagement. Mais il faut souligner, sans doute, que dans les mathématiques les plus avancées comme dans les plus élémentaires, il s'est toujours attaché à maintenir le contact avec le concret. Lors de la journée amicale que nous avions organisée en mars 2005 à l'occasion de ses 90 ans, je lui ai demandé quelle avait été sa plus grande émotion scientifique. Sa réponse fut : « *quand j'ai réalisé que le potentiel électrique est une capacité alternée d'ordre infini* ». Les mathématiques qu'on dit parfois pures ne tournent pas le dos à la nature, ni à ce qu'on appelait autrefois, et fort bien, les « leçons de choses ». Monsieur Choquet ne l'a jamais oublié.

Quel patron a-t-il été ? Un directeur qui ne voulait pas diriger au sens étroit du terme. Un patron qui a toujours respecté la liberté de ses élèves, en les encourageant, en les influençant bien sûr mais sans jamais chercher à les formater. L'essentiel était pour lui l'atmosphère du séminaire, où chaque auditeur pouvait saisir à sa guise la question qui lui convenait. Monsieur Choquet nous a ainsi permis de nous réaliser pleinement, chacun selon son tempérament, et sans jamais jouer le jeu très anxiogène de la comparaison. Mon environnement immédiat comprenait (et comprend toujours) plusieurs chercheurs éblouissants qui sont mes contemporains exacts. Très jeune, je n'avais pas compris que c'était pour moi une chance. Un soir de fatigue, il m'a simplement dit qu'« *il ne fallait pas chercher à devenir la copie conforme de quelqu'un d'autre* ». Parole qui libère, parole précieuse quand elle vient du patron.

Gustave Choquet inspirait le respect, il n'inspirait pas la crainte. Homme des sommets, il n'était pas sujet au vertige. Il nous a fait goûter et aimer les mathématiques, tout en nous avertissant du danger qu'il y aurait à se laisser dévorer par elles. Il nous a appris que bien souvent, le vrai, le simple et le beau coïncident. C'est ainsi que grâce à lui, j'ai pu comme beaucoup d'autres adjoindre ma petite musique au grand concert des mathématiques, poser bien des questions, en résoudre quelques-unes. Que dire de plus, à présent ? Merci, Monsieur Choquet.



© SMF

Adrien Douady, IHP (1998)

Adrien Douady

(25 septembre 1935 - 2 novembre 2006)

Colette Anné

Adrien Douady était une personnalité mathématique de premier plan et sa mort accidentelle a causé une profonde émotion dans le milieu mathématique où il n'avait que des amis. La *Gazette* lui rendra hommage dans un prochain numéro, rappelons ici quelques points biographiques[1].

Entré à l'école normale supérieure en 1954, où il fut successivement élève (1954-1957) puis agrégé préparateur (1958-1965), Adrien Douady devient chercheur au CNRS (1962-1965), puis entame sa carrière universitaire à Nice (1965-1970) et la poursuivit à Orsay. Il devient Professeur émérite de cette université en 2001, tout en maintenant un lien étroit avec l'école normale.

Adrien Douady était élève d'Henri Cartan et ses premiers travaux concernent les espaces analytiques et leurs sous-espaces ; ils lui ont valu d'être invité comme conférencier, à 31 ans, au congrès international des mathématiciens de 1966, et il les a complétés en 1974 par un article majeur. À partir de 1980, en liaison souvent avec son élève John Hubbard, il s'est tourné vers l'itération dans le champ complexe, les ensembles de Julia et l'ensemble de Mandelbrot, le vaste domaine qu'on appelle la dynamique holomorphe. Les principaux résultats dans ce domaine sont dus à Douady et à ses élèves, par exemple la connexité de l'ensemble de Mandelbrot (Douady et Hubbard) ou l'existence d'ensembles de Julia d'aire positive (Buff et Chéritat). Il était sans doute le meilleur connaisseur dans le monde de l'ensemble de Mandelbrot, qu'il avait baptisé et largement contribué à populariser, et qui reste une mine de problèmes difficiles. Il apparaît comme l'un des continuateurs les plus importants des œuvres pionnières de Pierre Fatou et de Gaston Julia sur l'itération dans le domaine complexe, et il insistait volontiers sur l'importance quelquefois méconnue des idées de Fatou. Il contribua à l'audience internationale de la France dans les domaines des systèmes dynamiques et des applications conformes.

Adrien Douady, collaborateur de Nicolas Bourbaki jusqu'en 1985, était à la fois un tombeur de problèmes (« problemkiller ») et un semeur d'idées, c'était aussi un animateur, à l'école normale, à Orsay, et récemment à l'Institut Henri Poincaré où il avait organisé en 2003 le trimestre d'automne sur les systèmes dynamiques. Il prêtait une grande attention à l'enseignement, et plus généralement à la transmission des savoirs. Il était très aimé des étudiants qui appréciaient toutes les faces de son originalité et il les aimait en retour. Il savait vulgariser les mathématiques à tous les niveaux et par tous les moyens, dont les films. « La dynamique du lapin », film réalisé avec F. Tisseyre et D. Sorensen, est pour tous les publics une façon plaisante et efficace de s'initier à la dynamique holomorphe. « Un monde fractal », exposition réalisée avec F. Tisseyre, a fait le tour du monde. Il a, par ailleurs, impulsé une bonne partie des études faites en France et dans le monde sur la didactique des mathématiques.

Adrien Douady était lauréat du prix Ampère (1989) et membre correspondant de l'Académie des sciences (1997).

[1] Repris principalement de la notice de l'académie.

LIVRES

Une introduction aux motifs - (Motifs purs, motifs mixtes, périodes)
Y. André
Société Mathématique de France, Panoramas et Synthèse n° 17, 2004. 261 p.
ISBN : 2-85629-164-3. 26 €

Il était grand temps.

Comme le dit André dans le résumé de son livre, « la théorie des motifs... a connu depuis une quinzaine d'années des développements spectaculaires. Ce texte a pour objectifs de rendre ces avancées accessibles au non-spécialiste. »

Même avant d'entrer dans les détails, qu'il soit dit que les avancées traitées dans ce texte, ne sont pas seulement rendues accessibles. Elles sont présentées, tout comme les fondements de la théorie qui les précède, de façon limpide, claire, nette, exhaustive, et avec le plus grand soin. Ce livre fait honneur à la série dans laquelle il est paru : *Panoramas et Synthèses*. Car il représente bien la synthèse la plus importante faite de cette théorie depuis la parution des *Motives (Seattle, 1991)*. En plus, les tarifs pratiqués par la SMF font que l'accessibilité de ces avancées ne restera pas une question purement théorique : toute bibliothèque, et tout mathématicien travaillant dans ce domaine, se doit de disposer de ce livre.

Après une telle ouverture, le lecteur sentira bien le besoin d'y ajouter une petite critique. Il est vrai qu'en tant que rapporteur, je suis obligé de garder une position neutre, et ce d'autant plus qu'une copie du livre me sera offerte par l'éditeur, une fois ce rapport rendu. Alors, comment faire pour rééquilibrer le jeu ? Il n'y aurait pas quelque chose qui ne va pas ? Mais si, rassurez vous. À savoir : contrairement à ce que le résumé cité ci-dessus pourrait laisser entendre, *toutes* les avancées depuis 1990 ne sont pas traitées dans ce texte. Celle dont l'absence m'a surpris, concerne les techniques *($\mathbb{A}^1$-)homotopiques*, introduites par Voevodsky pour attaquer la conjecture de Milnor, et qui se sont depuis avérées incontournables pour le développement de la théorie « mixte », notamment pour la construction du formalisme des 6 foncteurs sur les catégories des motifs « relatifs ». Je dis *homotopiques* pour les distinguer des techniques *homologiques* classiques : catégories (pseudo-)Abéliennes, additives, Tannakiennes, dérivées. Peut-être même de Kimura–O'Sullivan. Mais pas catégories de modèles, homotopiques, et pas homotopiques stables non plus. Bien sûr, le livre a déjà plus de 250 pages, et comme je l'ai déjà dit : les matières qui y sont traitées, le sont de façon exhaustive. Il s'agit donc d'un choix, d'un choix nécessaire et je dirais même : d'un bon choix. L'auteur aurait juste pu le dire, de préférence tout au début de son texte.

Là, j'ai peut-être fait un peu fort. Il convient quand-même de ne pas oublier le titre du livre, « Une introduction aux motifs ». Aussi, le lecteur commence sans doute à avoir envie de savoir ce qu'il y a dans ce livre, maintenant qu'il sait ce qu'il n'y a pas. Choisissons donc, au moins pour un moment, le registre purement descriptif. Ce texte est structuré en trois parties : *Partie I : Motifs purs* (pp. 1–132), *Partie II : Motifs mixtes* (pp. 133–198), *Partie III : Périodes* (pp. 199–243).

Les premiers chapitres (1–8) de la *Partie I* posent les bases pour tout ce qui suit. Leur intersection avec le matériel présenté dans *Motives* est donc considérable : sont traités les catégories Tannakiennes, les cycles algébriques et relations adéquates, la définition des motifs purs à la Grothendieck, les conjectures standard... À mon avis, le point le plus important parmi ceux traités lors de ces chapitres, et allant au-delà de Seattle, reste la preuve de la semi-simplicité de la catégorie des motifs numériques (Section 4.5), publiée par Jannsen en 1992 [J92] (ici comme par la suite, on se servira des références de la bibliographie, très exhaustive, du livre d'André). À noter aussi la définition de l'équivalence de « smash-nilpotence » $\sim_{\otimes \mathrm{nil}}$ (Section 3.2.4), introduite par Voevodsky [Vo95]. Le point de vue des $\otimes$-idéaux (Section 4.4) est utile : il lie notamment l'équivalence numérique $\sim_{\mathrm{num}}$ au $\otimes$-idéal maximal $\mathcal{N}$, et l'équivalence de « smash-nilpotence » au $\otimes$-idéal $\sqrt[\otimes]{0}$ de la $\otimes$-catégorie *CHM* des motifs de Chow. Ainsi, la conjecture de nilpotence de Voevodsky « $\sim_{\otimes \mathrm{nil}} = \sim_{\mathrm{num}}$ » devient un énoncé concernant la structure de la catégorie *CHM*, à savoir « $\sqrt[\otimes]{0} = \mathcal{N}$ ». Comme le dit André dans son avant-propos, « nous avons cherché à mettre l'accent sur les aspects structurels... » Effectivement. Si on voulait concentrer la motivation de l'auteur et la raison d'être principale de ce livre en une seule phrase, on choisirait bien celle-là : mettre l'accent sur les aspects structurels. Car il s'agit de « hiérarchiser et...mettre en valeur la cohérence et la complémentarité des nombreuses conjectures qui forment l'armature idéale au sein de laquelle continue de s'échafauder la théorie » (continuation et fin de l'avant-propos). Ah ! Comme ceci est bien dit. Le chapitre 7 est une bonne illustration de ce principe. À partir de la conjecture de plénitude concernant la réalisation de Hodge, de Tate, d'Ogus, de DeRham–Betti,..., la conjecture de semi-simplicité des objets dans l'image essentielle de cette réalisation se voit réduite à deux propriétés structurelles de la catégorie des motifs homologiques (Section 7.1.1) : (1) $\sim_{\mathrm{hom}} = \sim_{\mathrm{num}}$, (2) cette catégorie (après modification de la contrainte de commutativité) devient, *via* la réalisation en question, une sous-catégorie Tannakienne de la catégorie des structures de Hodge, des modules sous l'action du groupe de Galois,... À noter que les conjectures de plénitude et de semi-simplicité concernant la réalisation de DeRham–Betti (Section 7.5) sont des conséquences formelles de la conjecture des périodes de Grothendieck, qui prédit que le degré de transcendance du corps engendré par les périodes, est maximal ; cette question sera illustrée très concrètement dans la *Partie III*.

Le chapitre 9 décrit deux manières de contourner les conjectures standard. « L'idée est de partir de la catégorie des motifs homologiques..., et de modifier cette catégorie de manière minimale pour la rendre Abélienne semi-simple. » Deux voies sont possibles : modification *par excès* (Section 9.2) et *par défaut* (Section 9.3). (Bien entendu, si $\sim_{\mathrm{hom}} = \sim_{\mathrm{num}}$, alors ces modifications ne changent rien.) Il s'agit du premier chapitre dans lequel l'auteur décrit surtout des travaux et des idées largement dus à lui-même. Notons que la modification par excès remplace les cycles algébriques par les cycles dits *motivés*. *Grosso modo*, un cycle est motivé s'il appartient à l'algèbre engendrée par les cycles algébriques et les inverses des isomorphismes de Lefschetz. Comme le montre le chapitre 10, cette notion est assez efficace. Elle permet d'apporter une précision au résultat classique de Deligne « Hodge implique Hodge absolu sur les variétés Abéliennes » [D82].

Car en fait, un cycle de Hodge sur une telle variété est même motivé. On pourrait dire que la stratégie de preuve suit celle de Deligne, puisque l'analyse clé reste celle des propriétés du *transport parallèle* (Section 10.1) dans une famille de variétés projectives et lisses. Mais on pourrait aussi dire que l'auteur, soucieux de « mettre l'accent sur les aspects structurels », a réussi à en identifier un dont la nature n'avait pas été complètement saisie auparavant : le transport parallèle est motivé, et non seulement « Hodge absolu » ! Le chapitre 11 redevient plus conjectural. Sont énoncées les conjectures de Bloch–Beilinson–Murre (BBM) concernant l'existence d'une certaine filtration sur les anneaux de Chow. Parmi les points post-Seattliens, je mentionnerai : la construction par S. Saito d'un candidat pour la filtration BBM (Section 11.3), et le lien entre BBM et la conjecture de nilpotence de Voevodsky (à savoir : BBM implique Voevodsky ; Section 11.5). À mon avis, le matériel du chapitre suivant représente l'avancée la plus importante depuis Jannsen en matière de motifs purs : « D'après Jannsen, la catégorie des motifs numériques est Abélienne semi-simple. Que peut-on dire de la structure de la catégorie des motifs pour d'autres équivalences adéquates, notamment pour l'équivalence rationnelle ? » Rappelons que l'énoncé de Jannsen va dans les deux sens : pour que la catégorie des motifs soit Abélienne semi-simple et non-triviale, il faut et il suffit que l'équivalence adéquate soit égale à $\sim_{\mathrm{num}}$. Ce qui nous empêche de rêver inutilement.

Définition. — Une *catégorie de Kimura–O'Sullivan* sur un corps F de caractéristique nulle est une $\otimes$-catégorie rigide $\mathcal{T}$ sur $F = \mathrm{End}(\mathbf{1})$, pseudo-Abélienne, et telle que tout objet M de $\mathcal{T}$ se décompose en $M^+ \oplus M^-$, où

$$\wedge^n M^+ = Sym^n M^- = 0 \quad \text{pour} \quad n \gg 0$$

Au milieu des années 1990, Kimura et O'Sullivan ont proposé, indépendamment l'un de l'autre, la conjecture selon laquelle la catégorie des motifs, après $\otimes_{\mathbb{Q}}$, serait une catégorie de Kimura–O'Sullivan sur $\mathbb{Q}$ (ils ont dû utiliser une autre terminologie), et ce pour toute équivalence adéquate $\sim$. Cette conjecture est connue pour les motifs « de type Abélien », en particulier pour les courbes. Sa validité pour les surfaces avec $p_g = 0$ entraînerait la conjecture de Bloch concernant la bijectivité du morphisme d'Abel–Jacobi pour de telles surfaces. Voici une autre conséquence importante de la conjecture de Kimura–O'Sullivan : étant données deux équivalences adéquates $\sim^1$ et $\sim^2$, donnant lieu aux catégories de motifs $M^1_{\mathbb{Q}}$ et $M^2_{\mathbb{Q}}$, et dont la première est plus fine que la seconde, alors le foncteur plein

$$M^1_{\mathbb{Q}} \longrightarrow M^2_{\mathbb{Q}}$$

est surjectif. Le point essentiel étant la possibilité de relever des idempotents modulo $\sim^2$ en des idempotents modulo $\sim^1$. Ceci aurait des conséquences très concrètes. Prenons le cas où $\sim^1=$ rat et $\sim^2=$ hom, *i.e.*, considérons le foncteur

$$\pi : CHM_{\mathbb{Q}} \longrightarrow M_{\mathrm{hom},\mathbb{Q}}$$

associant à tout motif de Chow son motif de Grothendieck. Souvenons-nous que d'après Scholl [Sc90], on sait associer à toute forme elliptique cuspidale f, qui est forme propre sous l'action de l'algèbre de Hecke, nouvelle *etc.etc.*, un motif de Grothendieck M_f tel que les valeurs propres du morphisme de Frobenius sur les réalisations de Tate de M_f soient liées aux valeurs propres de Hecke sur f. Alors si on savait que π est surjectif, on saurait qu'il est possible de relever M_f en un motif de Chow. En fait, il me semble que les résultats de [Ki04] montrent même que la conjecture de Kimura-O'Sullivan impliquent l'existence d'un relèvement *canonique*. Mais je me trompe peut-être... Le chapitre 13 est le dernier de la *Partie I*. Considérons le foncteur

$$h : P \longrightarrow M_\sim$$

associant à toute variété projective lisse son motif. Ce foncteur induit un foncteur au niveau des groupes K_0 :

$$\chi_c := K_0(h) : K_0(P) \longrightarrow K_0(M_\sim)$$

La question, posée par Grothendieck en 1964, est de savoir si (lorsque la caractéristique du corps de base k est nulle) χ_c se factorise à travers $K_0(Var)$, où on note Var la catégorie des variétés, *i.e.*, des schémas réduits, séparés et de type fini sur k. Précisons que par définition, toute représentation

$$X = U \coprod Z$$

d'une variété X comme union d'un ouvert U et de son complément fermé Z donne une relation $[X] = [U] + [Z]$ dans $K_0(Var)$; pareil pour $K_0(P)$ (en observant que dans P, toute telle union est une union disjointe de variétés). Gillet–Soulé [GS96] et Guillen–Navarro-Aznar [GNa02] ont donné une réponse plus qu'affirmative à cette question : en fait, ils attachent à toute variété un complexe borné de motifs de Chow, bien défini à homotopie près, et ce de manière *contravariante* (pour les morphismes propres). À noter que dans un travail récent [Bi04], Bittner, en se servant du théorème de « factorisation faible » [AKMW02] a réussi à identifier le noyau de l'épimorphisme $K_0(P) \twoheadrightarrow K_0(Var)$: il est engendré par les

$$[\widetilde{X}] - [X] - [E] + [Z]$$

où Z est un fermé lisse de $X \in P$, $\widetilde{X}$ l'éclaté de X en Z, et E le diviseur exceptionnel. Puisque d'après Manin, ces relations deviennent nulles dans $K_0(M_\sim)$, l'existence de

$$\chi_c : K_0(Var) \longrightarrow K_0(M_\sim)$$

devient une conséquence directe de l'analyse de Bittner.

Pour conclure la partie « pure » de ce rapport, je note la grande utilité des « tableaux synoptiques » à la fin des chapitres 5, 10, et 12, pour « hiérarchiser et...mettre en valeur la cohérence et la complémentarité des nombreuses conjectures. »

La *Partie II* (chapitres 14–22) s'ouvre sur la question « pourquoi des motifs mixtes » ? Le chapitre 14 esquisse « la philosophie de la mixité (due principalement à Deligne)...ainsi que le fil conducteur de la théorie de Voevodsky des motifs mixtes. » (L'existence des approches de Levine et de Hanamura, et leur équivalence avec celle de Voevodsky, sont mentionnées.) Le développement de cette dernière occupe les chapitres 15–19, soit une bonne moitié de la *Partie II*, dont il constitue donc le thème principal. On y trouve un survol de *Cycles, transfers, and motivic* *homology theories (Princeton, 2000)*. Cet ouvrage a fait l'objet d'un rapport de Bloch (2001d :14026) paru dans les *AMS Reviews*, ce qui me permettra de ne pas entrer dans les détails mathématiques des chapitres 15–19 du livre d'André. Ceci dit, vu la façon non-linéaire dont *Cycles, transfers, and motivic homology theories* a été rédigé, le survol d'André paraît plus qu'utile. Il nous montre comment il faut lire cet ouvrage : à partir de sa fin ! Après avoir posé les bases de la théorie des *correspondances finies* (chapitre 15), on se tourne donc vers la construction de $DM_{\mathrm{gm}}^{\mathrm{eff}}$, la *catégorie triangulée des motifs mixtes effectifs* (chapitre 16). L'inversion des twists de Tate permet ensuite de construire DM_{gm}, la *catégorie triangulée des motifs mixtes* (chapitre 17) ; c'est dans le cadre de ces catégories que l'on définit les groupes de *cohomologie motivique* de façon absolument naturelle, à savoir, comme étant les groupes des morphismes. Le chapitre 18 « passe en revue les propriétés fondamentales de $DM_{\mathrm{gm}}^{\mathrm{eff}}$ et DM_{gm}, et de la cohomologie motivique. Ces résultats, dus à Voevodsky, en partie en collaboration avec Friedlander et Suslin...représentent les avancées majeures de la théorie des motifs mixtes de la dernière décennie. » Donc, de celle qui précède fin 2004... L'auteur profite de l'occasion pour préciser que certains résultats, énoncés dans *Cycles, transfers, and motivic homology theories* sous l'hypothèse supplémentaire de caractéristique nulle, ont été prouvés en caractéristique arbitraire (au moins, après $\otimes\mathbb{Q}$) depuis la parution de *loc.cit.* Ceci concerne notamment le fait que la $\otimes$-catégorie $DM_{\mathrm{gm},\mathbb{Q}}$ est rigide. Les résultats du chapitre 18 « se démontrent...en plongeant $DM_{\mathrm{gm}}^{\mathrm{eff}}$ dans une certaine catégorie de 'complexes de faisceaux motiviques' et en réinterprétant la cohomologie motivique en termes de ces objets... » Le chapitre 19 est consacré à l'étude de ce plongement. Pour résumer : ceux qui n'ont pas encore lu *Cycles, transfers, and motivic homology theories*, (devraient le faire en toute urgence, mais) sont invités à faire précéder leur lecture de *loc.cit.* par celle des chapitres 15–19 du livre d'André. Ils gagneront forcément du temps. Le chapitre 20 présente brièvement deux classes importantes de motifs mixtes sur un corps de caractéristique nulle : les 1-*motifs* à la Deligne, et les *motifs de Tate*. D'après une observation de Voevodsky (voir [Or04] pour la démonstration), les premiers forment canoniquement une sous-catégorie pleine de $DM_{\mathrm{gm},\mathbb{Q}}^{\mathrm{eff}}$. La question de savoir si les extensions successives de twists de Tate dans $DM_{\mathrm{gm},\mathbb{Q}}$ forment encore une catégorie Abélienne, mène naturellement à l'énoncé de la conjecture d'annulation de Beilinson–Soulé. (Rappelons que d'après Borel, celle-ci est valable pour un corps de nombres.) Plus généralement, elle mène au problème de l'existence d'une « bonne » t-structure sur $DM_{\mathrm{gm},\mathbb{Q}}$. C'est à ce problème qu'est consacré le chapitre suivant. La Section 21.1 (« Problème de t-structures et peines de cœur ») décrit quelques propriétés « raisonnables » que devrait satisfaire cette structure. La Section 21.2 en donne une proposition conjecturale, due à Voevodsky et Beilinson. Le dernier chapitre de la *Partie II* traite les réalisations et régulateurs pour les motifs mixtes. C'est dans ce contexte que André a choisi d'énoncer les conjectures de Deligne et de Beilinson sur les valeurs spéciales des fonctions L, c'est-à-dire d'en donner les généralisations aux *motifs mixtes sur* $\mathbb{Z}$ dues à Scholl [Sc91].

Voilà donc la partie « mixte » de ce rapport. Elle est devenue moitié plus courte que la partie « pure », à peu près comme le texte sur lequel elle s'appuie. Le lecteur souhaitant aller au-delà d'« Une introduction aux motifs », concentrera ses efforts sans doute sur cette partie de la théorie, une fois qu'il aura digéré le contenu du livre d'André. La théorie $\mathbb{A}^1$-homotopique a déjà été mentionnée ; je mentionnerai également la thèse d'Ayoub (qui n'était pas encore disponible en 2004), concernant le formalisme des 6 (voire, 7...) foncteurs, ainsi que les résultats qui ont été obtenus en s'appuyant sur ses résultats.

La *Partie III* occupe les trois derniers chapitres de ce livre. Le chapitre 23 revient sur la conjecture des périodes de Grothendieck. On précise d'abord son lien avec les conjectures de plénitude et de semi-simplicité de la réalisation de DeRham–Betti. Puis, un exemple concret est traité en détail : celui d'une variété Abélienne A définie sur un sous-corps k des nombres complexes. Si en plus k est algébrique sur $\mathbb{Q}$, la conjecture entraîne que les deux nombres suivants sont égaux : (a) le degré de transcendance du « module » τ de A sur $\mathbb{Q}$, (b) la dimension complexe de la variété de Shimura engendrée par le morphisme $\mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}}$ du tore de Deligne associé au « point » A, et des conjugués de ce morphisme (Proposition 23.2.4.1). D'autres exemples, très instructifs, de conséquences concrètes de la conjecture sont donnés, notamment celui d'un 1-motif dont la partie Abélienne est une courbe elliptique. Dans ce contexte, certaines de ces conséquences ont pu être établies inconditionnellement par Nesterenko [N96]. Le chapitre 24 a pour objectif « d'élucider le réseau de relations algébriques que satisfont les nombres réels $\Gamma(a)$, $a \in \mathbb{Q} \setminus -\mathbb{N}$, et de les interpréter dans le contexte des motifs. » Il s'avère que pour cela, on est conduit « à étudier les relations entre périodes de variétés Abéliennes à multiplication complexe, et à prouver que toutes celles connues s'expliquent...par la présence de cycles algébriques. » Voilà donc la structure de ce chapitre. On établit d'abord le lien entre les $\Gamma(a)$ (ou au moins, de certaines de leurs puissances) et de certaines « périodes de Shimura », à savoir, celles qui sont associées aux variétés Abéliennes (toujours à multiplication complexe) définies sur une extension Abélienne de $\mathbb{Q}$ (Sections 24.1–24.3, 24.5). Les périodes de Shimura satisfont certaines relations « évidentes » (Section 24.4) ; que ces relations, dites *de Shimura* soient motiviques, résulte du fait que « Hodge implique motivé sur les variétés Abéliennes », passé en revue au chapitre 10. La conjecture des périodes (ou plus précisément, sa restriction à la catégorie Tannakienne engendrée par les motifs des variétés Abéliennes à multiplication complexe) est équivalente à l'énoncé suivant : les relations de Shimura engendrent toutes les relations polynomiales à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$ entre périodes de Shimura (Proposition 24.6.3.1). Des variantes de ce dernier existent quand on restreint le corps de définition k des variétés Abéliennes. Vu l'interprétation des valeurs $\Gamma(a)$, cette variante, pour k égale à l'extension Abélienne maximale de $\mathbb{Q}$, équivaut à la conjecture de Lang sur les relations possibles entre les valeurs $\Gamma(a)$, $a \in \mathbb{Q} \setminus -\mathbb{N}$. La même interprétation permet de lier la conjecture de plénitude de la réalisation de DeRham–Betti à la conjecture de Rohrlich. Le chapitre 25 suit à peu près le même schéma, cette fois pour les motifs de Tate mixtes sur $\mathbb{Z}$ au lieu des motifs (purs) des variétés Abéliennes à multiplication complexe. Les périodes de certains motifs de Tate, à savoir ceux qui apparaissent comme sous-quotient du π_1 unipotent motivique de la droite projective moins trois points rationnels, sont identifiées aux *nombres polyzêta*, définis sous forme de séries, ou encore, comme intégrales itérées. Vu la forme de ces séries et de ces intégrales, les nombres polyzêta satisfont un système de relations, dites *de double mélange régularisé* (DMR). D'après Goncharov [Go'], celles-ci sont motiviques. La conjecture des périodes (ou plus précisément, sa restriction à la catégorie Tannakienne engendrée par le π_1 de $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$) est équivalente à l'énoncé suivant : toute relation polynomiale à coefficients dans $\mathbb{Q}$ entre nombres polyzêta est d'origine motivique. Conjecturer, comme le font certains, que toutes les relations polynomiales entre nombres polyzêta sont engendrées par DMR, signifie donc aller au-delà de la conjecture des périodes de Grothendieck.

Vu les développements spectaculaires que la théorie des motifs a connus depuis 1990, le manque d'une synthèse de ces progrès commençait à se faire remarquer de plus en plus cruellement. Le livre « Une introduction aux motifs » de Yves André constitue non seulement, comme son titre le promet, une introduction à cette théorie ; il fournit une synthèse d'une partie importante de ces progrès. Personellement, j'ai bien apprécié sa lecture, et je suis convaincu que tout lecteur de ce livre arrivera à la même conclusion. Je ne peux donc qu'encourager vivement son achat. À mon avis, la théorie $\mathbb{A}^1$-homotopique des motifs est à la fois suffisamment importante, et dans un état suffisamment mature, pour mériter à elle seule un tome de la série « Panoramas et Synthèses ». La SMF, si elle le souhaite, n'aura aucun mal à trouver parmi les anciens habitants de Jussieu–Chevaleret, un auteur capable de se charger de cette tâche.

Jörg Wildeshaus,
Institut Galilée, Villetaneuse

Lectures on Quasiconformal Mappings

L.V. Ahlfors, with additional chapters by C. J. Earle and I. Kra, M. Shishikura, J. H. Hubbard

American Mathematical Society, 2006. 162 p. ISBN : 978-0-8218-3644-6. $35

Ce livre est la réédition de notes mises en forme par C. Earle d'un cours donné par Lars Ahlfors à Harvard en 1964. Ces notes furent publiées en 1966 par Van Nostrand, mais, depuis quelques années, cet ouvrage de référence était indisponible en librairie. L'étude des applications quasiconformes a été initiée dans les années 1920-1930 par, entre autres, Grötzsch, Lavrentiev, Teichmüller, Ahlfors. Elles apparaissent pour la première fois sous ce nom dans l'article *Zur theorie der überlagerungsfläschen* d'Ahlfors qui fut publié en 1935 dans Acta Mathematica et qui vaudra à son auteur (d'après ses commentaires dans le premier volume de ses œuvres complètes) de partager avec J. Douglas la première médaille Fields en 1936. Décrivons maintenant le livre d'Ahlfors qui fut un des premiers sur le sujet et pour cela, commençons comme Ahlfors dans son chapitre 1 par le début de la théorie, à savoir le problème de Grötzsch (1928). Considérons un carré C et un rectangle R dans le plan complexe $\mathbb{C}$. Si R n'est pas un carré, il est impossible de trouver une application conforme de C dans R qui envoie les côtés de C sur ceux de R. H. Grötzsch se demandait quelle est l'application la plus conforme possible qui peut réaliser cette représentation. Le lecteur aura deviné que la réponse est : une application quasiconforme. Avant d'exhiber des définitions plus précises, essayons de donner une idée intuitive de ce qu'est une telle application. Une application quasiconforme (entre deux domaines de $\mathbb{C}$) envoie infinitésimalement un faisceau de cercles concentriques sur un faisceau d'ellipses concentriques (qui ne sont pas forcément de la même taille que les cercles initiaux) dont on contrôle uniformément (au sens où cela ne dépend pas du centre des cercles initiaux) l'excentricité (alors que les applications conformes envoient infinitésimalement des cercles sur des cercles). Comme l'écrit Ahlfors dans l'introduction de son livre, les applications quasiconformes sont moins rigides que les applications conformes et plus faciles à manipuler (d'où de nombreuses applications à divers domaines des mathématiques) tout en ayant des propriétés similaires. De plus, leur généralisation à la dimension supérieure (et aussi dans des cas généraux abstraits) se fait très bien comme nous allons le voir plus tard, ce qui n'est pas le cas pour les applications conformes. Notons que le livre d'Ahlfors ne traite que des applications quasiconformes entre domaines de $\mathbb{C}$ dans la mesure où la théorie dans les espaces euclidiens de dimension supérieure n'en est alors qu'à ses balbutiements.

Nous allons maintenant donner une première définition des applications quasiconformes (QC) qui ne se trouve pas dans le livre d'Ahlfors, mais qui traduit bien l'idée intuitive précédente. Elle a aussi l'intérêt de pouvoir s'énoncer dans le cadre général des espaces métriques.

La définition métrique. Considérons un homéomorphisme $f : X \to Y$ entre deux espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y). En tout point $x \in X$, nous définissons

$$L_f(x,r) = \sup\{d_Y(f(y), f(x)); d_X(x,y) \leqslant r\}$$

et $l_f(x,r) = \inf\{d_Y(f(y), f(x)); d_X(x,y) \geqslant r\}$, puis nous considérons l'excentricité $H_f(x) = \limsup_{r\to 0} \dfrac{L_f(x,r)}{l_f(x,r)}$. Nous dirons que f est K-quasiconforme si $H_f(x) \leqslant K$ pour tout $x \in X$. Il faut noter que si X et Y sont des domaines de $\mathbb{R}^n$, nous pouvons remplacer $\limsup$ par $\liminf$ dans la définition de H_f ou demander qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que $L_f(x,r)/l_f(x,r) \leqslant M$ pour tout x et tout r (on parle alors d'application quasisymétrique, voir plus bas), et nous obtenons des définitions équivalentes de la quasiconformité. Il existe une autre notion, globale et a priori plus forte, que nous avons déjà évoquée un peu plus haut. Nous allons la définir dans un cadre général. Soit $f : X \to Y$ un homéomorphisme entre deux espaces métriques. Nous dirons que f est quasisymétrique s'il existe un homéomorphisme $\eta : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ tel que si x, y $z \in X$ et $t > 0$, alors

$$d_X(x,y) \leqslant t d_X(x,z) \Longrightarrow d_Y(f(x), f(y)) \leqslant \eta(t) d_Y(f(x), f(z)).$$

Si X et Y sont deux domaines de $\mathbb{R}^n$, cette définition est (encore une fois !) équivalente à la quasiconformité.

Dans les deux premiers chapitres de son livre, L. Ahlfors donne trois définitions de ce qu'est une application quasiconforme entre domaines du plan complexe. Un point important est que les applications quasiconformes admettent des définitions équivalentes de nature très différente (analytique, géométrique ou métrique). Ce fut un long travail d'étendre ces définitions (et de démontrer leur équivalence) à $\mathbb{R}^n$, puis aux groupes de Carnot et enfin aux espaces métriques à géométrie bornée (espaces de Loewner). Nous en discuterons dans la suite même si cela n'est pas évoqué dans le livre d'Ahlfors.

La définition de Grötzsch. Soit f une application de classe C^1 entre deux domaines de $\mathbb{C}$. On définit sa dilatation en un point par la formule :

$$D_f = \frac{|f_z| + |f_{\overline{z}}|}{|f_z| - |f_{\overline{z}}|}$$

où, $f_z = 1/2\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ et $f_{\overline{z}} = 1/2\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$. Notons que D_f est toujours supérieur à 1 et que si f est conforme, $D_f = 1$ en tout point. La dilatation D_f correspond à l'excentricité H_f définie plus haut. L'application f est dite K-quasiconforme si $D_f \leqslant K$ en tout point. Une application est ainsi conforme si et seulement si elle est 1-quasiconforme. Ahlfors donne ensuite quelques propriétés des applications quasiconformes, en particulier liées à la notion de longueur extrémale que nous allons introduire maintenant. Soit Γ une famille de courbes. Une fonction mesurable $\rho : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+$ est dite admissible si $A(\rho) = \int\int \rho^2 dxdy$ n'est ni nulle, ni infinie. Pour une courbe γ, posons $L_\gamma(\rho) = \int_\gamma \rho|dz|$. Enfin, considérons $L(\rho) = \inf_{\gamma\in\Gamma} L_\gamma(\rho)$. Alors, la longueur extrémale de Γ est

$$\lambda(\Gamma) = \sup \frac{L(\rho)^2}{A(\rho)}$$

où le supremum est pris sur toutes les fonctions admissibles ρ. Cette définition peut sembler bien mystérieuse. Supposons que Γ soit l'ensemble des courbes joignant deux côtés opposés de longueur a dans un rectangle fermé dont la longueur de l'autre côté est b. Alors, $\lambda(\Gamma) = a/b$. Supposons maintenant que Γ soit l'ensemble des courbes joignant deux cercles concentriques de rayons $R_1 < R_2$. Alors, $\lambda(\Gamma) = (1/2\pi)\log(R_2/R_1)$. D'un autre côté, si Γ est l'ensemble des courbes séparant deux cercles concentriques de rayons $R_1 < R_2$ (en ne faisant qu'un seul tour), c'est-à-dire une famille « transverse » à la précédente, alors $\lambda(\Gamma) = 2\pi/\log(R_2/R_1)$. Cette quantité s'appelle le module de Γ et aussi de l'anneau $\{z \in \mathbb{C}; R_1 < |z| < R_2\}$. Nous reviendrons sur ceci plus tard. Si toutes les courbes de la famille Γ restent dans un domaine Ω et si $f : \Omega \to \Omega'$ est K-quasiconforme, alors

$$K^{-1}\lambda(\Gamma) \leqslant \lambda(f(\Gamma)) \leqslant K\lambda(\Gamma).$$

Fred Gehring, qui avant d'être un expert en applications quasiconformes fut un ingénieur, adore faire l'analogie suivante avec la physique. Si Γ est une famille de fils électriques homogènes, la longueur extrémale de Γ est la résistance du système. Celle-ci est grande si les fils sont longs ou peu nombreux, petite si les fils sont courts ou nombreux.

Les deux prochaines définitions vont être valables pour des applications qui ne sont pas de classe C^1. Ceci est un point important, car en se débarrassant de cette régularité a priori, nous pouvons obtenir des propriétés de compacité des applications quasiconformes.

La définition géométrique. Un quadrilatère Q dans un domaine Ω est un domaine de Jordan bordé par 4 points distincts et dont l'adhérence $\overline{Q}$ est dans Ω. Nous pouvons envoyer Q de façon conforme sur un rectangle de longueur de côté $a < b$. Le module $m(Q)$ de Q est alors b/a. Un homéomorphisme préservant l'orientation f

entre deux domaines Ω et Ω' de $\mathbb{C}$ est K-quasiconforme si pour tout quadrilatère Q de Ω, nous avons

$$K^{-1}m(Q) \leqslant m(f(Q)) \leqslant Km(Q). \tag{1}$$

Si f est C^1, cette définition est équivalente à celle de Grötzsch. Il est aussi facile de voir que si f est QC, il en est de même de f^{-1} et que la composée de deux applications QC est QC. En fait, cette définition (qui est suggérée dans un article de Pfluger en 1950) est due à Ahlfors en 1954 et dans cet article, il donne toutes les propriétés élémentaires des applications QC (par exemple un principe de réflexion de Schwarz qui est discuté aussi dans son livre) en seulement 9 pages ...

Comment étendre cette définition pour des applications entre domaines de $\mathbb{R}^n$? Nous devons donner une autre définition du module. Étant donnée une famille de courbes Γ dans $\mathbb{R}^n$, le module de Γ est $\mathrm{mod}(\Gamma) = \inf_\rho \int_{\mathbb{R}^n} \rho^n dx$ où l'infimum est pris sur toutes les fonctions mesurables $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ qui vérifient $\int_\gamma \rho ds \geqslant 1$ pour toute courbe rectifiable γ dans Γ. Par exemple, le module de la famille des courbes joignant deux cercles concentriques de rayons $R_1 < R_2$ est $1/2\pi \log(R_2/R_1)$, c'est-à-dire l'inverse de la longueur extrémale. Par analogie, la longueur extrémale d'une famille Γ de courbes de $\mathbb{R}^n$ peut être définie par $\lambda(\Gamma) = \mathrm{mod}(\Gamma)^{1/(1-n)}$. Un homéomorphisme $f : \Omega \to \Omega'$ entre deux domaines de $\mathbb{R}^n$ est dit quasiconforme s'il quasi-préserve uniformément le module des familles de courbes de Ω comme dans (1). Notons que le module définit une mesure extérieure sur l'ensemble des courbes. Un condenseur est la donnée de deux continua (c'est-à-dire des ensembles compacts, connexes du plan) disjoints et non dégénérés. La capacité $\mathrm{cap}(E, F)$ de ce condenseur est le module de la famille de courbes joignant E à F. D'après ce que nous avons écrit plus haut sur la longueur extrémale, la capacité $\mathrm{cap}(E, F)$ se comporte comme une fonction décroissante de la distance relative $d(E, F)/\min(\mathrm{diam}E, \mathrm{diam}F)$. Il est possible de définir la capacité d'un condenseur dans un espace métrique et cet espace sera un espace de Loewner si le comportement de la capacité est le même que celui décrit précédemment. Les espaces de Loewner semblent être le bon cadre, depuis les travaux de J. Heinonen et P. Koskela, pour développer une théorie des applications quasiconformes entre espaces métriques.

La définition analytique. Nous dirons qu'une application est ACL (absolutely continuous on lines) dans un domaine Ω de $\mathbb{C}$ si pour tout rectangle fermé $R \subset \Omega$ dont les côtés sont parallèles aux axes, f est absolument continue le long de presque tout segment horizontal ou vertical contenu dans R. Un homéomorphisme f entre deux domaines Ω et Ω' de $\mathbb{C}$ est K-quasiconforme si f est ACL dans Ω et $|f_{\bar{z}}| \leqslant k|f_z|$ (où $k = (K-1)/(K+1)$) presque partout dans Ω. Ahlfors démontre que cette définition coïncide avec la définition géométrique précédente. La condition ACL peut paraître surprenante, mais si f a des dérivées partielles (au sens des distributions) qui sont localement intégrables, alors f est ACL. Voyons comment étendre cette définition aux applications entre domaines de $\mathbb{R}^n$. Un homéomorphisme $f : \Omega \to \Omega'$ entre deux domaines de $\mathbb{R}^n$ est K-quasiconforme si les dérivées premières partielles de f (au sens des distributions) sont dans l'espace L^n (c'est-à-dire f est dans l'espace de Sobolev $W^{1,n}$) et la matrice jacobienne $Df = (\partial_{x_i})f_j$ vérifie $\sup_{||h||=1} |Df(x)(h)|^n \leqslant K det Df(x)$ pour presque tout

$x \in D$. Nous laissons le soin au lecteur de se convaincre que toutes les définitions données suivent la même philosophie : une application est quasiconforme si nous pouvons contrôler uniformément sa distorsion (de façon métrique, géométrique ou analytique). Cependant, nous insistons sur le fait que démontrer l'équivalence de ces définitions est très difficile et a été un des grands challenges de la théorie.

Le chapitre 3 traite de problèmes géométriques extrémaux. Ahlfors démontre le théorème de Mori : si f est une application K-quasiconforme du disque unité $\mathbb{D}$ de $\mathbb{C}$ dans lui-même (normalisée par $f(0) = 0$), alors, pour tout couple de points distincts z_1, z_2 de $\mathbb{D}$, $|f(z_1)-f(z_2)| < 16|z_1-z_2|^{1/K}$, la constante 16 étant optimale. Il en déduit un théorème de compacité pour les applications quasiconformes du disque unité sur lui-même et que si $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est K-quasiconforme, alors f s'étend en un homéomorphisme du disque unité fermé. Le problème d'extension des applications QC est d'ailleurs le sujet principal du chapitre 4. Quitte à composer par des applications conformes, nous pouvons nous ramener au cas des applications QC du demi-plan supérieur $\mathbb{H}$ sur lui-même. Nous dirons qu'une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie la condition M si pour tout $x \in \mathbb{R}$, tout $t > 0$,

$$M^{-1} \leqslant \frac{h(x+t) - h(x)}{h(x) - h(x-t)} \leqslant M.$$

Cette condition est de type « quasisymétrique » comme expliquée plus haut. Si $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ est K-quasiconforme, alors f s'étend au bord de $\mathbb{H}$ en une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifie la condition M pour un M explicite, dépendant de K. Réciproquement, toute fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifie la condition M est l'extension au bord de $\mathbb{H}$ d'une application K-quasiconforme $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ où K dépend de M. En fait, f est une quasi-isométrie du demi-plan supérieur $\mathbb{H}$ muni de sa métrique hyperbolique. Ce résultat reste vrai en dimensions supérieures et il est un des points clés de la démonstration de G. D. Mostow de son célèbre théorème de rigidité. A la suite, des versions ont même été données dans des espaces hyperboliques au sens de Gromov. Ce qui a permis d'obtenir des théorèmes de rigidité dans des cadres variés (espaces symétriques non compacts de rang 1 ou immeubles hyperboliques par exemple). Si $f : \Omega \to \Omega$ est K-quasiconforme (au sens géométrique par exemple), alors f est différentiable presque partout et sa dilatation complexe $\mu_f = \frac{f_{\bar{z}}}{f_z}$ est mesurable et satisfait $|\mu_f| \leqslant k = (K-1)/(K+1)$ presque partout dans Ω. Dans le chapitre 5, Ahlfors démontre ce qui est connu sous le nom de théorème de Riemann mesurable. Si μ est une fonction mesurable (complexe) avec $|\mu| \leqslant k < 1$ presque partout, alors il existe une solution de l'équation de Beltrami $f_{\bar{z}} = \mu f_z$ qui est quasiconforme. Cette démonstration (inspirée de Bojarski) utilise la théorie (en plein développement à l'époque) des intégrales singulières de Calderòn et Zygmund. Ensuite, Ahlfors explicite la dépendance de la solution f^{μ} de la solution de l'équation de Beltrami en fonction de μ. Enfin, le chapitre 6 est une introduction à la théorie de Teichmüller, qui semble être la motivation d'Ahlfors pour étudier les applications QC. Rappelons de quoi il est question. Soit S_0 une surface de Riemann dont le revêtement universel est conformément isomorphe au demi-plan supérieur $\mathbb{H}$ de $\mathbb{C}$. Une telle surface est hyperbolique. Nous dirons qu'une application quasiconforme $f : S_0 \to S_0$ est triviale si elle admet un relevé $\tilde{f} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ qui fixe point par point la droite réelle achevée. Soit S_i $(i = 1, 2)$ une surface de Riemann et $f_i : S_0 \to S_i$ $(i = 1, 2)$ une application quasiconforme. Nous dirons que deux paires (S_1, f_1) et (S_2, f_2) sont équivalentes s'il existe une application conforme $g : S_1 \to S_2$ telle que $f_2^{-1} \circ g \circ f_1$ est triviale au sens précédent. L'espace de Teichmüller $T(S_0)$ de la surface de Riemann S_0 est alors l'espace des classes d'équivalence de toutes ces paires. Cette définition, due à Bers, est plus générale que celle donnée par Ahlfors. On peut la trouver dans le chapitre écrit par Earle et Kra, dans lequel ils expliquent comment modifier les arguments du livre d'Ahlfors. On définit ensuite sur cet espace la distance de Teichmüller par :

$$d_T(t_1, t_2) = 1/2 \log K$$

où K est le plus petit nombre tel que $f_2^{-1} \circ f_1$ soit K-quasiconforme pour des paires $(S_1, f_1) \in t_1$ et $(S_2, f_2) \in t_2$. Alors, $(T(s_0), d_T)$ est un espace métrique complet. En utilisant des résultats des chapitres précédents, Ahlfors étudie les propriétés de $T(S_0)$ et en particulier, il démontre que $T(S_0)$ possède une structure de variété complexe.

Nous sommes nombreux à avoir appris la théorie des applications quasiconformes par la lecture de la première édition du livre d'Ahlfors. Le succès de ce livre vient peut-être du fait que, tout en étant court, il traite de façon rigoureuse des diverses facettes des applications QC. Depuis 1964, cette théorie a connu de nombreux développements, et ce dans des domaines très divers des mathématiques. Les trois chapitres ajoutés décrivent certains de ces prolongements. Le premier, par Earle et Kra, discute des progrès récents concernant essentiellement la théorie de Teichmüller (les cinq premières pages concernent plutôt des extensions de résultats donnés au début du livre d'Ahlfors). Le second par M. Shishikura explique l'apport, depuis les travaux de D. Sullivan, des applications quasiconformes en dynamique holomorphe. Enfin, le troisième par J.H. Hubbard décrit comment les applications quasiconformes peuvent jouer un rôle dans l'étude de la géométrie des variétés de dimension 3. Les deux premiers de ces chapitres sont plutôt des survols avec une longue bibliographie. Dans le troisième, Hubbard esquisse une preuve du théorème d'hyperbolisation de Thurston pour les variétés fibrées. Ce livre d'Ahlfors reste un livre de référence, même s'il ne traite que des applications QC dans le plan complexe. Dans la mesure où il permet de bien comprendre la théorie dans ce cadre, il est une excellente introduction à la théorie des applications quasiconformes et de ses utilisations (grâce aux appendices), et s'adresse à tous ceux, étudiants ou chercheurs confirmés, qui souhaitent s'initier à cette théorie. La lecture de ce livre permet d'aborder plus facilement des ouvrages plus récents comme par exemple *Quasiconformal Mappings in the Plane*, O. Lehto et K.I. Virtanen, Springer (1973), *Lectures on n-Dimensionnal Quasiconformal Mappings*, J. Väisälä, Springer (1971), *Quasiregular Mappings*, S. Rickman, Springer (1993), *Lectures on analysis on metric spaces*, J. Heinonen, Springer (2001). Le lecteur attentif aura noté que tous ces auteurs, comme Ahlfors, sont finlandais et donc que les applications quasiconformes sont bien, depuis Ahlfors, une spécialité finlandaise.

Je dédie modestement ces quelques lignes à Adrien Douady. Il aurait bien mieux parlé que moi du livre d'Ahlfors (et des finlandais !). Mais, malheureusement, il n'est plus là pour le faire.

Hervé Pajot,
Institut Fourier, Grenoble

Les impasses de la démocratisation scolaire. Sur une prétendue crise des vocations scientifiques
Bernard Convert
Raison d'Agir, 2006. 93 p. ISBN : 2912107334. 6 €

Le mode d'esprit scientifique n'est pas naturel ; plutôt que de chercher à déconstruire les apparences, il est plus simple et plus réconfortant d'admettre les évidences qui se présentent à nous, et de penser que la terre est plate, puisque ça se voit. C'est particulièrement visible quand les scientifiques sortent de leur domaine, et, agressés par des changements qui les touchent directement, tentent d'analyser l'univers qui les entourent. On les voit alors perdre la rigueur critique qu'ils manifestent dans leur profession, et accepter des raccourcis simples et évidents : puisque les inscriptions pour les études de sciences baissent en France, en Allemagne et aux USA, c'est qu'il y a une crise mondiale des sciences ; et si les étudiants ne s'inscrivent plus en sciences, c'est parce qu'ils n'aiment plus la science. Pourquoi n'aiment-ils plus la science ? pour plein de raisons : Tchernobyl, la vache folle, la pollution ; parce que ça eût payé, mais que ça ne paye plus ; parce que c'est trop difficile... Que faire pour qu'ils aiment la science à nouveau ? La réponse est dans la question : il suffit de la rendre aimable. Mettons la main à la pâte, et les étudiants se précipiteront en foule dans les amphis. Faisons une option de physique au lycée, et nous remplirons les licences de physique. Et si ça ne marche pas, c'est qu'on n'en a pas fait assez ; demandons moins de maths, ajoutons une épreuve de calcul sur machine pour s'adapter au monde moderne, formons mieux les profs, et ça finira forcément par marcher. Chaque année, un nouveau rapport (Ourisson, Porchet, Dercourt, Rolland, OCDE...) s'ajoute à la pile, et conforte les arguments : qui oserait contredire un raisonnement repris par des gens aussi prestigieux ? Et qu'importe qu'ils soient physiciens ou géologues, mais jamais spécialistes (ou compétents) sur le sujet dont ils parlent, c'est-à-dire les comportements des élèves et leurs motivations ?

Malheureusement, on fait cela depuis dix ans, et les remèdes ne connaissent aucun succès, au contraire. Le premier effondrement du DEUG de physique est exactement contemporain de la création de la spécialité physique en terminale qui devait l'alimenter.

Bernard Convert est sociologue ; il a commencé à travailler sur le sujet il y a 10 ans, pour comprendre la soudaine chute des inscriptions en sciences dans son université. Il publie cet automne un petit livre (moins de 100 pages) où il reprend l'essentiel de son travail sur ce thème. Il met en pièce l'argumentation développée dans le premier paragraphe, en s'appuyant sur des enquêtes auprès des lycéens, et sur une étude minutieuse des réalités sociologiques. Non, il n'y a pas de crise des vocations scientifiques en France : il y a une crise des formations universitaires générales non professionnalisées, qui prend un tour plus aigu en sciences pour des raisons bien précises. Non, il n'y a pas de crise mondiale : la situation est complètement différente entre la France, l'Allemagne et l'Italie, et c'est une coïncidence particulière à la fin des années 90 qui a pu laisser croire le contraire ; d'ailleurs, les inscriptions remontent en Allemagne. Ailleurs dans le monde, c'est encore plus varié, et cela dépend à la fois des pays et des disciplines. Non, les lycéens de terminale scientifique n'ont pas une mauvaise image de la science : ils en ont une image bien plus positive que celle que j'ai ! Quand on leur demande, dans une liste de 12 professions, celles qui les intéressent, la profession qui les intéressent le plus est celle de chercheur (62,9%), suivie par médecin (57,6%), ingénieur en informatique (43,9%) ; l'avant-dernière est expert financier (18,9%) ; comment peut-on espérer améliorer encore une opinion aussi positive, quand les élèves pensent à plus de 90% que la science améliore le monde et contribue au développement ?

Et pourtant, ils ne viennent pas en fac. de science, et Bernard Convert explique bien pourquoi. Il montre pourquoi l'afflux des années 80 était dû bien plus à l'incapacité des filières sélectives à accueillir l'accroissement énorme du nombre de bacheliers qu'à un choix positif. Il montre aussi comment la tentative de démocratiser la filière C a échoué, en reconstruisant une filière d'élite, la spécialité maths, aussi sélective, mais deux fois plus petite, et plus dissimulée (sauf de ceux qui savent). Il donne une analyse remarquable de l'effet de la création de la filière physique, qui a donné le résultat exactement inverse de celui voulu par ses créateurs.

Je recommande très vivement ce livre à tous ceux qui essaient de réfléchir sur l'avenir des filières universitaires, il y trouveront des faits et des considérations qui sont généralement absents de tous les rapports habituels, et des journaux dits d'information, et qui me semblent expliquer beaucoup plus de choses que les platitudes habituelles sur l'image de la science et la perte du sens de l'effort. Une telle quantité d'idées reçues dynamitées en moins de 100 pages, et pour 6 euros, c'est une occasion à saisir de suite !

La conclusion du livre est intitulée « l'impuissance des remèdes pédagogiques ». Cela ne condamne bien sûr pas nos efforts : c'est notre devoir, en tant qu'enseignants, d'améliorer nos cours, de réfléchir à la pédagogie (et j'ajouterai, en tant qu'ancien élève qui s'est ennuyé comme un rat mort au fond de bien des cours de maths ou d'autres matières, que c'est une question de simple respect humain envers nos élèves de rendre nos cours plus intéressants), et nous devons faire le possible pour améliorer l'efficacité de nos enseignements et de notre transmission du savoir. Mais il ne faut pas croire qu'en faisant cela, nous résoudrons la crise provoquée par la chute des inscriptions en université : comme le montre Bernard Convert, cette chute dépend d'autres facteurs, de nature profondément politique.

Une dernière remarque, en forme de regret : comme le montre très bien Convert, les formations qui tirent leur épingle du jeu aujourd'hui sont les formations professionnalisées, qui conduisent à un métier : médecin, ingénieur. Or il y a un métier pour lequel la seule voie d'accès est l'université, c'est celui d'enseignant. Comment se fait-il que nous n'arrivions pas, ou mal, à faire reconnaître le caractère professionnel des formations dans ce domaine ? Je hasarderai une réponse, que le lecteur pourra facilement mettre à l'épreuve : quand on émet l'idée, dans une réunion d'organisation de licence ou de master, qu'on pourrait envisager que ce diplôme forme entre autres des enseignants, il se trouve toujours quelqu'un pour répondre, avec l'assentiment général, qu'il ne faut pas restreindre le diplôme à la formation des enseignants, et qu'il faut avoir d'autres ambitions (implicitement considérées comme plus prestigieuses). Vouloir devenir prof, c'est considéré comme un manque d'ambition, et un quasi-échec ; croyez-vous que les étudiants ne le sentent pas ?

Pierre Arnoux,
IML, Marseille