Журнал экспериментальной и теоретической физики

Т. 38 *1960* *Вып. 1*

О СТРУКТУРЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ФОТОНА

Д. А. Киржниц, В. Я. Файнберг, Е. С. Фрадкин

Показано, что так называемая процедура Редмонда не является однозначной. Учет требования ренормализационной инвариантности не меняет этого вывода.

В последнее время привлечено внимание к возможности применения дисперсионных соотношений (д. с.) для устранения фиктивного полюса функции Грина бозона в квантовой теории поля [1]. Простой анализ (см. раздел 1) показывает, однако, что соответствующая процедура не обладает должной однозначностью. Этот вывод, как видно из результатов раздела 2, сохраняет свою силу и при учете требования ренормализационной инвариантности.

1. О неоднозначности процедуры Редмонда

Ограничимся рассмотрением квантовой электродинамики. Нетрудно показать, что если выполнено д. с. Челлена — Лемана

$$d(z) = 1 + \frac{z}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{Im} d(\zeta)\, d\zeta}{\zeta(\zeta - z - i\varepsilon)}, \tag{1}$$

где

$$(k_\mu k_\nu - z\delta_{\mu\nu})\, d(z) = -D_{\mu\nu}(k)\, z^2, \quad z \equiv k_0^2 - \mathbf{k}^2,$$

то аналогичное д. с. справедливо и для поляризационного оператора

$$\Pi(z) = \frac{z}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{Im}\Pi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta(\zeta - z - i\varepsilon)}, \tag{2}$$

$$d^{-1}(z) = 1 + \Pi(z).$$

Для доказательства достаточно заметить, что из-за условия $\operatorname{Im} d(z) \leqslant 0$ функция $d(z)$ не имеет нулей ни в комплексной плоскости z, ни на отрицательной полуоси $\operatorname{Re} z < 0$.

Существенно, что обратное утверждение, вообще говоря, несправедливо: чтобы из д. с. (2) для $\Pi(z)$ вытекало д. с. (1), необходимо и достаточно выполнение следующего условия:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{Im}\Pi(\zeta)}{\zeta}\, d\zeta \leqslant 1. \tag{3}$$

Действительно, как это видно из (2), а также из условия $\operatorname{Im}\Pi = -\operatorname{Im} d / |d|^2 \geqslant 0$, неравенство (3) обеспечивает отсутствие полюсов функции $d(z)$ вне отрезка полуоси $\operatorname{Re} z > 0$.

Важно подчеркнуть, что условие (3) полностью совпадает с известным неравенством (8) работы Лемана, Симанзика и Циммермана [2]. Входящая в это неравенство функция $F(z)$ связана с $\Pi(z)$ соотношением $F(z) = 2z \operatorname{Im}\Pi(z)$. Асимптотическое выражение для $d(z)$, полученное в «трехгаммном» приближении (см., например, [3]), хотя и удовлетворяет д. с. (2), однако находится в противоречии с условием (3) ($\operatorname{Im}\Pi(z) = \pi\alpha$, $\alpha \equiv e^2/3\pi$).

Поэтому появляется фиктивный полюс у $d(z)$ и д. с. (1) оказывается нарушенным.

Предложенная недавно процедура [1], имеющая своей целью устранение этой трудности, состоит в том, что путем суммирования «главных» членов ряда теории возмущений вычисляется лишь величина $\mathrm{Im}\,d(z)$. Сама же функция $d(z)$ восстанавливается с помощью соотношения (1). В силу сказанного выше при этом выполняются д. с. (2) и условие (3), что может быть проверено и непосредственно. Рассматриваемая процедура не является, однако, однозначной. Действительно, любая функция $\mathrm{Im}\,\Pi$, удовлетворяющая (3) и переходящая при $\alpha \to 0$ в соответствующее выражение теории возмущений (с точностью до заданного порядка по α), может быть использована для восстановления с помощью (2) фотонной функции Грина. Последняя будет подчиняться д. с. (1) и согласоваться с теорией возмущений.

В качестве примера рассмотрим следующее выражение:

$$\mathrm{Im}\,\Pi(z) = \pi\alpha/(1 + z/z_0), \tag{4}$$

причем из условия (3) $z_0 \leqslant m^2 \exp(1/\alpha)$. Простые выкладки дают

$$d^{-1}(z) = 1 - \frac{\alpha}{z + z_0}\left\{z_0 \ln\left(1 - \frac{z}{m^2}\right) + z \ln \frac{z_0}{m^2}\right\}; \quad z_0 \gg m^2. \tag{5}$$

Для соответствия с теорией возмущений достаточно потребовать, чтобы z_0 росло с уменьшением α быстрее любой конечной степени α^{-1}. Если, в частности, положить $z_0 = m^2 \exp(1/\sqrt{\alpha})$, мы прийдем к выражению, не обладающему резонансными свойствами и не приводящему к сильной связи ($d^{-1}(\infty) = 1 - \sqrt{\alpha}$).

В устранении указанной неоднозначности большую роль могли бы сыграть общие требования причинности и унитарности теории. В связи с этим важно подчеркнуть, что условия, выражаемые д. с. (1), являются лишь необходимыми, но отнюдь не достаточными для выполнения причинности и унитарности.

Рассмотрение этого круга вопросов невозможно, однако, на языке одночастичных функций Грина; необходимо привлечь к рассмотрению функции Грина высшего порядка, через которые выражается $\mathrm{Im}\,\Pi(z)$. Не исключено, что полученное в [1] выражение для функции Грина, имеющее неаналитическую по α действительную и аналитическую по α мнимую части, окажется в противоречии с условиями унитарности и причинности, тесно связывающими действительные и мнимые части матричных элементов.

2. О ренормализационной инвариантности функции Грина фотона

Условие ренормализационной инвариантности (сокращенно р. и.) фотонной функции Грина $d(z, \lambda, \alpha_\lambda)$ имеет вид [4]

$$\alpha_\lambda d(z, \lambda, \alpha_\lambda) = \alpha_{\lambda'} d(z, \lambda', \alpha_{\lambda'}), \tag{6}$$

где λ — квадрат нормировочного импульса ($d(\lambda, \lambda, \alpha_\lambda) = 1$), $z = k_0^2 - (\mathrm{k})^2$, $\alpha_\lambda = e_\lambda^2/3\pi$ — соответствующая константа связи.

Исходя из (6) и предполагая, что при $z \gg m^2$ функция d зависит лишь от z/λ и α_λ (таким свойством обладает ряд теории возмущений), было установлено [5,4], что перенормированная, т. е. отвечающая $\lambda = 0$, d-функция должна иметь вид

$$d(z, \alpha_0) = \alpha_0^{-1} F(\ln(z/m^2) + \varphi(\alpha_0)). \tag{7}$$

Здесь F и φ — взаимно-обратные функции. Отсюда был сделан целый ряд существенных выводов о независимости от α_0 формы распределения эффективного заряда электрона, о независимости от α_0 величины затравочного заряда и обязательном появлении сильной связи (в случае конечной перенормировки заряда) и т. п. Мы хотели бы подчеркнуть, что эти выводы не имеют обязательной силы, будучи связаны не только с требованием р. и., но и с определенными предположениями о структуре функции Грина.

Сами по себе эти предположения отнюдь не являются обязательными (в особенности в случае конечной перенормировки заряда). Так, привлечение дисперсионных соотношений к нахождению функции Грина фотона [1,6] приводит к появлению неаналитичных по α членов, существенно меняющих поведение d-функции в области высоких импульсов. Хотя ряд теории возмущений и в этом случае зависит при $z \gg m^2$ лишь от комбинации z/λ, точное выражение $d(z, \lambda, a_\lambda)$ этим свойством не обладает.

Важно поэтому выяснить, налагает ли одно только требование р. и. какие-либо ограничения на структуру d-функции. С этой целью обратимся к общему решению функционального уравнения (6). Легко убедиться, что оно может быть записано в виде

$$\alpha_\lambda d(z, \lambda, \alpha_\lambda) = \alpha_0(\alpha_\lambda, \lambda)\, d(z, \alpha_0(\alpha_\lambda, \lambda)), \tag{8}$$

где ренормализационно-инвариантная (не меняющаяся с изменением λ) функция $\alpha_0(\alpha_\lambda, \lambda)$ дается соотношением [1)]

$$\alpha_\lambda = \alpha_0 d(\lambda, \alpha_0). \tag{9}$$

Очевидно, что входящая сюда функция $d(z, \alpha_0)$ совпадает с перенормированной функцией Грина.

Таким образом, по любому заданному выражению для перенормированной функции Грина можно восстановить ренормализационно-инвариантное выражение $d(z, \lambda, \alpha_\lambda)$, переходящее при $\lambda \to 0$ в исходное. Согласно (8), (9) дело сводится просто к введению фактора α_0/α_λ и замене α_0 на инвариантную комбинацию [2)] из α_λ и λ.

Получим, в частности, ренормализационно-инвариантное выражение для рассмотренной выше функции Грина (5). Ограничиваясь для простоты областью $m^2 \ll |\lambda| \ll z_0$, будем иметь из (9)

$$\alpha_0^{-1} = \alpha_\lambda^{-1} + \ln(-\lambda / m^2). \tag{10}$$

Используя (8), получаем (всюду $z \gg m^2$)

$$d^{-1}(z, \lambda, \alpha_\lambda) = 1 - \frac{\alpha_\lambda}{z + z_0}\left(z_0 \ln\left(\frac{z}{\lambda}\right) + z \ln\left(-\frac{z_0}{\lambda}\right)\right), \tag{11}$$

Здесь и ниже нужно выразить z_0 и α_0 с помощью (10) через α_λ и λ. Полагая, в частности, $z_0 = m^2 \exp(1/\sqrt{\alpha_0})$, найдем

$$d^{-1}(z, \lambda, \alpha_\lambda) = \frac{1 - \alpha_\lambda \ln(z/\lambda) + (\alpha_\lambda/\alpha_0)(1 - \sqrt{\alpha_0})(z/z_0)}{1 + z/z_0}. \tag{12}$$

Это выражение находится в противоречии с (7), удовлетворяя вместе с тем требованию р. и. и уравнению Челлена — Лемана и переходя при $\alpha \to 0$ в ряд теории возмущений. Только при специальном выборе $z_0 = Cm^2 \exp(1/\alpha_0)$ $(C \leqslant 1)$ получается выражение, совместимое с (7).

Резюмируя, можно сказать, что требование р. и. само по себе не налагает никаких ограничений на перенормированную функцию Грина. Даже привлечение дополнительного требования о переходе ее при $\alpha \to 0$ в ряд теории возмущений не приводит с необходимостью к соотношению (7).

Институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
22 июля 1959 г.

1) Соотношения (8), (9) находятся в полном соответствии с результатами Овсянникова [7].

2) Требование р. и. налагает в общем случае одну связь на аргументы $d(z, \lambda, \alpha_\lambda)$. Поэтому функция $d(z, \alpha_0)$ является, вообще говоря, произвольной функцией двух аргументов.

Литература

[1] P. Redmond, Phys. Rev., **112**, 1404, 1958. Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, Д. В. Ширков. ЖЭТФ, **37**, 805, 1959.
[2] H. Lehmann, K. Symanzik, W. Zimmerman. Nuovo Cim., **2**, 425, 1955.
[3] Л. Д. Ландау. Сб. Нильс Бор и развитие физики, ИИЛ, 1958, стр. 75.
[4] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей, Гостехиздат, 1957.
[5] M. Gell-Mann, F. Low. Phys. Rev., **95**, 1300, 1954.
[6] В. Я. Файнберг. ЖЭТФ, **37**, 1361, 1959.
[7] Л. В. Овсянников. ДАН СССР, **109**, 1112, 1956.

CONCERNING THE STRUCTURE OF THE GREEN'S FUNCTION OF A PHOTON

D. A. Kirzhnits, V. Ya. Fainberg, E. S. Fradkin

It is shown that the so-called Redmond procedure is not unambiguous. This conclusion does not change when the requirements of renormalization invariance are taken into account.
