Notion de liberté en statistique mathématique

Jean-Louis Soler

N° d'ordre

THESE

présentée à

LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE

" Mathématiques Appliquées "

par

Jean-Louis SOLER

Notion de liberté en statistique mathématique

Thèse soutenue le 12 Janvier 1970, devant la commission d'examen :

MM.	KUNTZMANN	Président
	COURREGE	Invité
	BARRA	Examinateur
	BERTRANDIAS	Examinateur

THESE

présentée à

LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE "MATHEMATIQUES APPLIQUEES"

par

Jean-Louis SOLER
Ingénieur I.M.A.G.

NOTION DE LIBERTE EN STATISTIQUE MATHEMATIQUE

Thèse soutenue le 12 Janvier 1970 devant la Commission d'Examen

MM.	J.	KUNTZMANN	Président
	P.	COURREGE	Invité
	J.R.	BARRA	Examinateurs
	J.P.	BERTRANDIAS	

L I S T E   D E S   P R O F E S S E U R S

Doyen honoraire : Monsieur M. MORET
Doyen : Monsieur E. BONNIER

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	NEEL Louis	Physique Expérimentale
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique Rationnelle
	CHABAUTY Claude	Calcul différentiel et intégral
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	CHENE Marcel	Chimie Papetière
	FELICI Noël	Electrostatique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques Appliquées
	BARBIER Reynold	Géologie Appliquée
	SANTON Lucien	Mécanique des Fluides
	OZENDA Paul	Botanique
	FALLOT Maurice	Physique Industrielle
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques
	GALVANI Octave	Mathématiques
	MOUSSA André	Chimie Nucléaire
	TRAYNARD Philippe	Chimie Générale
	SOUTIF Michel	Physique Générale
	CRAYA Antoine	Hydrodynamique
	REULOS RENE	Théorie des Champs
	BESSON Jean	Chimie Minérale
	AYANT Yves	Physique Approfondie
	GALLISSOT François	Mathématiques
Melle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques
	BOUCHEZ Robert	Physique Nucléaire
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie

	BONNIER Etienne	Electrochimie et Electrométallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie Animale
	PILLET Emile	Physique Industrielle Electrotechnique
	YOCCOZ Jean	Physique Nucléaire théorique
	DEBELMAS Jacques	Géologie Générale
	GERBER Robert	Mathématiques
	PAUTHENET René	Electrotechnique
	MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
	VAUQUOIS Bernard	Calcul Electronique
	BARJON Robert	Physique Nucléaire
	BARBIER Jean-Claude	Physique
	SILBER Robert	Mécanique des Fluides
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	KLEIN Joseph	Mathématiques
	VAILLANT François	Zoologie et HYdrobiologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	SENGEL Philippe	Zoologie
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BRISSONNEAU Pierre	Physique
	GAGNAIRE Didier	Chimie Physique
Mme	KOFLER Lucie	Botanique
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	PEBAY-PEROULA Jean-Claude	Physique
	RASSAT André	Chimie Systématique
	DUCROS Pierre	Cristallographie Physique
	DODU Jacques	Mécanique Appliquée I. U. T.
	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des Fluides
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	GASTINEL Noël	Analyse Numérique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	PERRET René	Servo-mécanisme
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	GIDON Paul	Géologie
Mme	BARBIER M. Jeanne	Electrochimie
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	DEPASSEL R.	Mécanique des Fluides
	GLENAT René	Chimie
	BARRA Jean	Mathématiques Appliquées
	COUMES André	Electronique
	PERRIAUX Jacques	Géologie et Minéralogie
	ROBERT André	Chimie Papetière
	BIARREZ Jean	Mécanique Physique
	BONNET Georges	Electronique
	CAUQUIS Georges	Chimie Générale
	BONNETAIN Lucien	Chimie Minérale
	DEPOMMIER Pierre	Physique Nucléaire - Génie Atomique
	HACQUES Gérard	Calcul Numérique
	POLOUJADOFF Michel	Electrotechnique
Mme	KAHANE Josette	Physique
Mme	BONNIER Jane	Chimie
	VALENTIN Jacques	Physique
	REBECQ Jacques	Biologie
	DEPORTES Charles	Chimie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques Appliquées
	AUBERT Guy	Physique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	RODRIGUES Alexandre	Mathématiques Pures
	MORITA Susumu	Physique Nucléaire
	RADHAKRISHNA	Thermodynamique

MAITRES DE CONFERENCES

MM.	LANCIA Roland	Physique Atomique
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques
MM.	KAHANE André	Physique Générale
	DOLIQUE Jean Michel	Electronique
	BRIERE Georges	Physique
	DESRE Georges	Chimie
	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LAURENT Pierre	Mathématiques Appliquées
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
	LONGEGUEUE Jean-Pierre	Physique
	SOHM Jean-Claude	Electrochimie
	ZADWORNY François	Electronique
	DURAND Francis	Chimie Physique
	CARLIER Georges	Biologie Végétale
	PFISTER Jean-Claude	Physique
	CHIBON Pierre	Biologie Animale
	IDELMAN Simon	Physiologie Animale
	BLOCH Daniel	Electrotechnique I. P.
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (C. S. U. Chambéry)
	SIBILLE Robert	Construction Mécanique (I. U. T.)
	BRUGEL Lucien	Energétique I. U. T.
	BOUVARD Maurice	Hydrologie
	RICHARD Lucien	Botanique
	PELMONT Jean	Physiologie Animale
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées (I. P. G.)
	MOREAU René	Hydraulique I. P. G.
	ARMAND Yves	Chimie I. U. T.
	BOLLIET Louis	Informatique I. U. T.
	KUHN Gérard	Energétique I. U. T.
	PEFFEN René	Chimie I. U. T.
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	JOLY Jean-René	Mathématiques Pures

Melle	PIERY Yvette	Biologie Animale
	BERNARD Alain	Mathématiques Pures
	MOHSEN Tahsin	Biologie (C. S. U. Chambéry)
	CONTE René	Mesures Physiques I. U. T.
	LE JUNTER Noël	Génie Electrique Electronique I. U. T.
	LE ROY Philippe	Génie Mécanique I. U. T.
	ROMIER Guy	Techniques Statistiques quantitatives I. U. T.
	VIALON Pierre	Géologie
	BENZAKEN Claude	Mathématiques Appliquées
	MAYNARD Roger	Physique
	DUSSAUD René	Mathématiques (C. S. U. Chambéry)
	BELORIZKY Elie	Physique (C. S. U. Chambéry)
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique (C. S. U. Chambéry)
	JULLIEN Pierre	Mathématiques Pures
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie
	BLIMAN Samuel	E. I. E.
	BEGUIN Claude	Chimie Organique
	NEGRE Robert	I. U. T.

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	YAMADA Osamu	Physique du Solide
	NAGAO Makoto	Mathématiques Appliquées
	MAREZIO Massimo	Physique du Solide
	CHEECKE John	Thermodynamique
	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	ROZMARIN Georges	Chimie Papetière.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à

Monsieur le Professeur KUNTZMANN, Directeur de l'Institut de Mathématiques Appliquées de Grenoble, qui a bien voulu me faire l'honneur de présider le Jury,

Monsieur COURREGE, Maître de Recherche au C. N. R. S., pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail en acceptant de prendre part au Jury,

Monsieur BARRA, Professeur, qui a dirigé cette thèse et dont les enseignements et les conseils m'ont été très précieux,

Monsieur BERTRANDIAS, Professeur, qui a accepté d'être membre du Jury.

Je remercie Mademoiselle Cl. PAYERNE, pour le soin et la patience qu'elle a apportés à l'impression de ce texte.

TABLE DES MATIERES

pages

INTRODUCTION

Dans une structure statistique $(\Omega,\mathcal{A},\mathcal{P})$ où $\mathcal{P}$ désigne une famille de lois de probabilité sur l'espace mesurable $(\Omega,\mathcal{A})$, un ensemble A dans $\mathcal{A}$ est dit libre (relativement à $\mathcal{P}$) si sa probabilité P(A) est constante lorsque P parcourt $\mathcal{P}$.

Une statistique X sur cette structure c'est-à-dire une application mesurable de $(\Omega,\mathcal{A})$ dans un espace mesurable $(\Sigma,\mathcal{S})$ est libre lorsque sa loi de probabilité $P\circ X^{-1}$ ne dépend pas de P dans $\mathcal{P}$.

Ce concept de liberté, qui de façon générale traduit l'indépendance par rapport à la loi P, apparait en statistique sous diverses formes (similar set, $\mathcal{P}$-invariant set, zones similaires, distribution-free statistic, etc.)

La notion d'ensemble libre a été introduite par NEYMAN et PEARSON en 1933 dans [33]. Elle apparait notamment de façon naturelle dans la théorie des tests d'hypothèses à partir de la remarque suivante :

la famille $\mathcal{P}$ étant indiciée par un paramètre θ parcourant un ensemble Θ, soient Θ_o et Θ_1 deux parties disjointes de Θ. Si l'on désire tester l'hypothèse Θ_o contre l'hypothèse Θ_1 au moyen d'un test déterministe sans biais, au niveau de signification α, la région critique A de ce test doit vérifier

$$P_\theta(A) \leq \alpha \qquad \text{pour tout } \theta \text{ dans } \Theta_o$$

$$P_\theta(A) \geq \alpha \qquad \text{pour tout } \theta \text{ dans } \Theta_1.$$

Si alors, Θ est muni d'une topologie rendant continue la fonction $P_\theta(A)$ et si la frontière commune $\bar{\Theta}_o \cap \bar{\Theta}_1$ est non vide, ces relations impliquent que :

$$P_\theta(A) = \alpha \qquad \text{pour tout } \theta \text{ dans } \bar{\Theta}_o \cap \bar{\Theta}_1$$

l'existence de tels tests sans biais est donc assujettie à celle d'ensembles libres dans $\mathcal{A}$ relativement à la famille de probabilités $\{P_\theta,\ \theta \in \bar{\Theta}_o \cap \bar{\Theta}_1\}$.

On conçoit également l'intérêt de la notion, pour l'élimination de paramètres importuns dans un problème de statistique :

lorsque Θ est une partie de $\mathbb{R}^s$, soit $\mathcal{P} = \{P_\theta,\ \theta = (\theta_1,\dots\theta_s) \in \Theta \subset \mathbb{R}^s\}$ et que la décision statistique ne concerne qu'une partie du paramètre, $\theta_1,\dots\theta_q$ $(q < s)$ par exemple, l'autre partie $\theta_{q+1},\dots\theta_s$ intervient tout de même dans les calculs et tient lieu de paramètre importun.

Dans le problème de test de l'hypothèse H_0 : $\theta_1 = \alpha_1,\dots\theta_q = \alpha_q$, la puissance d'un test ϕ, $\beta_\phi(\theta_1,\dots\theta_s) = E_\theta(\phi)$ dépend de tout le paramètre, si $\theta_{q+1},\dots\theta_s$ ne sont pas connus, elle ne peut donc pas servir à en estimer la qualité. Il est alors nécessaire de chercher un test ϕ dont la fonction puissance $\beta_\phi(\theta)$ ne dépende pas de $\theta_{q+1},\dots\theta_s$ au moins lorsque H_0 est vérifiée ; et si ϕ est déterministe de niveau de signification α, cela revient à chercher un ensemble A dans $\mathcal{A}$ qui soit libre relativement à $\theta_{q+1},\dots\theta_s$ soit

$$P_\theta(A) = \alpha \quad \text{lorsque } \theta_1 = \alpha_1,\dots, \theta_q = \alpha_q.$$

C'est le cas par exemple du test de Student.

Le plus souvent ces régions libres sont obtenues au moyen de statistiques libres puisque pour tout $S \in \mathcal{J}$, $\{X \in S\}$ est un ensemble libre dans $\mathcal{A}$:

Dans le problème du test d'identité des lois régissant deux échantillons $(x_1,\dots,x_n)$ et $(y_1,\dots y_m)$ d'une variable aléatoire réelle, la statistique de Kolmogorov-Smirnov,

$$D = \sup_x \left| F_n(x) - F_m(x) \right|$$

où F_n et F_m sont les fonctions de répartition empiriques des échantillons, ne dépend pas des lois de probabilités qui les régissent, de sorte que l'ensemble libre $\{D > \mathcal{C}\}$ définit la région critique d'un test dont on peut effectivement calculer le niveau de signification.

On remarque l'analogie de cette application avec celle de l'élimination de paramètres importuns. De façon générale le recours à des décisions basées sur des statistiques libres est d'autant plus nécessaire que la connaissance préalable du phénomène aléatoire étudié (c'est-à-dire de $\mathcal{P}$) est faible.

D'autres exemples d'utilisation se trouvent dans [22], [27], [2].

Les articles consacrés à différents aspects de la notion de liberté sont nombreux et variés notamment ceux de LEHMANN et SCHEFFE [23], BASU [4], GHOSH [14], [5]. Citons également les travaux importants de LINNIK et d'autres mathématiciens soviétiques, en statistique, dans lesquels sont étudiées entre autres ces questions, et auxquels on se réfère souvent ici ; une bibliographie détaillée se trouve dans [27].

C'est la présentation des propriétés des statistiques libres, l'étude de leur existence et de leur obtention qui font l'objet de ce travail.

Le chapitre I est consacré à la présentation du modèle statistique. Dans un souci d'unité il nous a paru important de bien situer le cadre dans lequel se fait l'étude des problèmes de statistique mathématique tels que celui abordé ici. On dégage lorsque cela est possible ses aspects d'extension du modèle probabiliste, c'est le cas des espaces L_p associés (les statistiques réelles remplaçant les variables aléatoires réelles). Mais certaines propriétés lui sont propres, principalement, celles de complétion ou d'invariance, qui sont dues au passage d'une probabilité sur un espace mesurable, à une famille de probabilités. Ces propriétés techniques n'ayant d'ailleurs pas d'interprétation statistique concrète jouent cependant un rôle important dans la suite et sont donc rappelées.

Dans le chapitre II sont définies les principales propriétés fondamentales des statistiques sur une structure, celle de liberté également définie ici en est étroitement liée dans les développements ultérieurs. Toutes les définitions sont données sur les σ-algèbres engendrées par les statistiques plutôt que sur les statistiques elles-mêmes ; outre la commodité de langage que cette attitude apporte, elle consiste à concentrer l'attention sur la structure fondamentale $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ au lieu d'envisager les structures images, ou d'étudier les propriétés des statistiques en temps que fonctions (c'est le cas de l'invariance notamment). Enfin, compte tenu des relations d'équivalence, les caractères de maximalité ou minimalité de statistiques possèdant ces propriétés, s'expriment facilement sur l'ensemble des sous σ-algèbres de $\mathcal{A}$, et comme pour l'exhaustivité et l'invariance, la notion de liberté maximale apporte des problèmes intéressants.

Une étude détaillée de la dualité des notions de liberté et d'exhaustivité, ne semble pas avoir été faite jusqu'ici, c'est l'objet du chapitre III.

- Cette dualité est d'abord illustrée par les théorèmes classiques d'indépendance que l'on rappelle.

- On appelle décomposition d'une structure statistique $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, la donnée d'un couple ($\mathcal{C}$, $\mathcal{B}$) de σ-algèbres engendrant $\mathcal{A}$, où $\mathcal{C}$ est libre et $\mathcal{B}$ exhaustive. On étudie dans quelles conditions cette décomposition est optimale c'est-à-dire $\mathcal{C}$ est libre maximale et $\mathcal{B}$ est exhaustive minimum (à une équivalence près). On sépare en quelque sorte dans un échantillon une partie qui contient pas "d'information sur la famille $\mathcal{P}$" de celle qui la contient toute.

- Il apparait que liberté et exhaustivité sont deux notions pouvant se définir comme cas particulier de celle de Liberté conditionnelle.

Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$ sont deux sous σ-algèbres de $\mathcal{A}$, on dit que $\mathcal{C}$ est libre conditionnellement à $\mathcal{B}$ (et on note $\mathcal{C} \llcorner \mathcal{B}$), si pour tout ensemble C dans $\mathcal{C}$, il existe une version de la probabilité conditionnelle $P^{\mathcal{B}}(C)$ qui ne dépende pas de P dans $\mathcal{P}$. Ainsi, $\mathcal{A} \llcorner \mathcal{B}$ signifie que $\mathcal{B}$ est exhaustive et $\mathcal{C} \llcorner \{\emptyset,\Omega\}$, que $\mathcal{C}$ est libre.

On étudie les propriétés de la relation $\llcorner$; on donne un critère de liberté conditionnelle portant sur les densités des lois de P lorsque la structure est dominée, et on retrouve le critère de factorisation dans le cas d'exhaustivité.

Une généralisation du théorème d'indépendance est donné, qui, fondé sur une forme affaiblie du théorème de Lehmann-Scheffé fournit une condition de transitivité d'une suite exhaustive de σ-algèbres en statistique séquentielle.

Enfin, la relation $\mathcal{C} \llcorner \mathcal{B}$ apparaissant comme une relation d'orthogonalité dans L_1 définie à partir des sous-espaces $L_1(\Omega,\mathcal{C},\mathcal{P})$ et $L_1(\Omega,\mathcal{B},\mathcal{P})$ de statistiques réelles $\mathcal{P}$-intégrables respectivement $\mathcal{C}$ et -mesurables, on la généralise à des sous-espaces vectoriels quelconques de L_1 précisant ainsi la notion de systèmes partiellement exhaustifs déjà introduite par LINNIK [25] et KAGAN [18], [19] a qui est empruntée l'application à l'estimation sans biais citée.

Le chapitre IV est consacré aux théorèmes d'existence d'ensembles libres non triviaux dans une structure statistique, dans le cas où l'on ne peut pas utiliser ceux que fournissent les considérations d'invariance.

Après le rappel de la méthode classique, qui ramène le problème à l'existence d'ensembles de structure de Neyman par rapport à une σ-algèbre exhaustive, on expose une formulation générale donnée dans [2] des problèmes posés par l'existence d'ensembles satisfaisant à certaines contraintes, celui des ensembles libres étant un cas type :

En effet, la recherche, par exemple, d'un test déterministe équivalent à un test $\emptyset$ donné se ramène à celle d'une indicatrice d'ensemble dans le convexe

$$K = \{X \in L_\infty(\Omega,\mathcal{A},\mathcal{P}) \; : \; 0 \leq X \leq 1 \;\; , \;\; E_P(X) = E_P(\emptyset) \;\; \text{pour tout } P \in \mathcal{P}\}$$

et celle d'un ensemble libre de probabilité α , revient à prendre $\phi \equiv \alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$.

A partir d'un théorème [2], permettant de caractériser les points extrêmaux de tels convexes, on donne de nouvelles conditions d'existence d'ensembles de structure de Neyman ; et donc d'ensembles libres ; le résultat, en utilisant la notion de non atomicité conditionnelle par rapport à une σ-algèbre, introduite par NEVEU et HANEN dans [32], se présente comme une forme conditionnelle du théorème de Liapounoff [24], et appliqué à des exemples donnés par LINNIK [27] permet de remplacer certaines hypothèses.

En conclusion, c'est l'utilisation d'un langage moderne et précis, dont on pourra trouver de plus amples développements dans le livre [2], qui a permis de dégager et de situer ce concept important de liberté en statistique mathématique, et dont les diverses formes sont habituellement étudiées séparément.

L'usage d'un tel formalisme, qui peut d'ailleurs souvent être considéré comme extension de celui de calcul des probabilités (la structure statistique jouant le même rôle fondamental que l'espace probabilisé) permet d'éviter certaines confusions. Il permet également de donner de nouvelles formulations pour certains problèmes ; il ressort en effet de ce travail et notamment du dernier chapitre, que beaucoup sont en fait des problèmes d'analyse fonctionnelle et donc peuvent être abordés à l'aide des méthodes qui lui sont propre.

CHAPITRE I

STRUCTURES STATISTIQUES

STRUCTURES STATISTIQUES

Ce chapitre est consacré à la description du cadre mathématique dans lequel se situe l'étude des problèmes de statistique.

On examine en particulier les modèles statistiques correspondant à la répétition d'une expérience (structure produit ; structure associée à une procédure de décision séquentielle).

Sous certains aspects la structure statistique se présente comme une extension du modèle probabiliste (cf. [2]) ; on définit ainsi les espaces L_p associés. On étudie l'application "image" la plus générale.

Enfin, on donne des définitions techniques générales (complétion, invariance) propres au modèle statistique, qui seront utilisées dans les chapitres suivants.

§1. MODELE ASSOCIE A UNE EXPERIENCE STATISTIQUE.

Définitions et notations.

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable où Ω représente l'espace des observations ou résultats d'un phénomène aléatoire et $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre de parties de Ω représentant les évènements "intéressants" ou "observables" du phénomène. On suppose que les points ω de Ω sont les valeurs possibles d'un élément aléatoire de loi de probabilité P dont on sait seulement qu'elle appartient à une famille $\mathcal{P}$ de lois de probabilité $(\Omega, \mathcal{A})$.

Définition I. 1.

On appelle structure (ou modèle) statistique le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$.

Pour toute sous σ-algèbre $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$, on note $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}$ la famille $\{P_{\mathcal{B}} \ ; \ P \in \mathcal{P}\}$ des restrictions de mesures P à l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{B})$. On obtient la structure statistique restreinte $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P}_{\mathcal{B}})$.

a) Par commodité d'écriture, la famille $\mathcal{P}$ est généralement indiciée par un paramètre θ parcourant un ensemble Θ.

La structure $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P} = \{P_\theta \ ; \ \theta \in \Theta\})$ sera toujours supposée séparée ou identifiable (cf. [13] p. 144) c'est-à-dire que l'application $\theta \to P_\theta$ est injective :

pour tout couple (θ, θ') de valeurs distinctes du paramètre, il existe un ensemble $A \in \mathcal{A}$ tel que $P_\theta(A) \neq P_{\theta'}(A)$. Il est intéressant de caractériser la structure statistique de la façon suivante :

Soit $\mathcal{J}$ une sous σ-algèbre de $\mathcal{A}$ engendrée par une partition mesurable π de Ω.

Définition I. 2.

La partition π est dite séparante pour $\mathcal{P}$ si la structure restreinte $(\Omega, \mathcal{J}, \mathcal{P}_{\mathcal{J}})$ est séparée.

π est une partition séparante minimale s'il n'existe pas de partition séparant $\mathcal{P}$, et de cardinal plus petit. On appelle alors le nombre $\nu(\mathcal{P}) = \text{card}(\pi)$ l'indice de séparation de $\mathcal{P}$ (ou de la structure).

$\nu(\mathcal{P})$ est au moins égal à 2 et peut être infini. Les exemples suivants sont donnés dans [21] et [35] :

Exemples I. 3.

1) Si $\eta(\theta,1) = \{N(\theta,1) \ ; \ \theta \in \mathbb{R}\}$ désigne la famille des lois normales de moyenne θ de variance 1 sur $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$(*) la structure $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \eta(\theta,1))$ est évidemment séparée et $\nu(\eta) = 2$.

(*) Dans toute la suite $\mathcal{R}$ désigne la σ-algèbre des ensembles boreliens de la droite réelle $\mathbb{R}$.

2) Si $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_N\}$ est finie, $\nu(\mathcal{P}) \leq N$.

b) Il est souvent utile pour des raisons techniques ou autres (mesures à priori), de munir l'ensemble Θ d'une σ-algèbre $\mathcal{T}$ de parties telle que la famille $\mathcal{P} = \{P_\theta \; ; \; \theta \in \Theta\}$ soit une probabilité de transition de $(\Theta, \mathcal{T})$ vers $(\Omega, \mathcal{A})$, c'est-à-dire ([30] p. 69) :

l'application : $(\theta, A) \to P_\theta(A)$ de $\Theta \times \mathcal{A}$ dans $[0,1]$ vérifie :

(i) Pour tout $\theta \in \Theta$, $P_\theta(.)$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$,

(ii) Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $P_{.}(A)$ est une fonction réelle $\mathcal{T}$ -mesurable sur Θ.

(c)

Définition I. 4.

On dira que la structure statistique $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta\})$ est dominée, s'il existe une mesure positive σ-finie μ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ dominant $\mathcal{P}$.

Pour tout $\theta \in \Theta$; P_θ est absolument continue par rapport à μ et $p_\theta = \dfrac{dP_\theta}{d\mu}$ par rapport à μ. On a alors la caractérisation suivante ([17] p. 319) :

Théorème I. 5.

Une condition nécessaire et suffisante pour que la famille $\mathcal{P} = \{P_\theta \; ; \; \theta \in \Theta\}$ soit dominée par une mesure positive σ-finie μ est qu'il existe une sous famille dénombrable $\mathcal{P}' = \{P_{\theta'} ; \; \theta' \in \Theta' \subset \Theta\}$ équivalente à $\mathcal{P}$:

$A \in \mathcal{A}$ et $P_{\theta'}(A) = 0$ pour tout $\theta' \in \Theta'$ entrainent

$P_\theta(A) = 0$ pour tout $\theta \in \Theta$.

Toute combinaison strictement convexe des $P_{\theta'}$ est une mesure de probabilité dominant $\mathcal{P}$ et absolument continue par rapport à μ.

On notera $P^* = \sum_{\theta' \in \Theta} a_{\theta'} P_{\theta'}$; $a_{\theta'} > 0$, $\sum_{\theta' \in \Theta} a_{\theta'} = 1$ une telle probabilité privilégiée dominant $\mathcal{P}$.

- Un ensemble $N \in \mathcal{A}$ est $\mathcal{P}$-négligeable, si quelque soit $P \in \mathcal{P}$ il est P-négligeable.

Une propriété est vraie $\mathcal{P}$-presque partout sur Ω, si elle est vraie sauf sur un ensemble $\mathcal{P}$-négligeable. Si la structure est dominée, la famille $\eta(\mathcal{P})$ de tous les ensembles $\mathcal{P}$-négligeables dans $\mathcal{A}$ est identique à la famille $\eta(P^*)$ des ensembles négligeables de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P^*)$.

Exemple de structure statistique : structure de type exponentiel.

Ce type de modèle est le cadre général de la plupart des problèmes pratiques de statistique. De plus il possède des propriétés remarquables et peut être introduit de façon naturelle comme vérifiant certaines propriétés relatives à l'exhaustivité notamment (cf. [2])

Définition I. 6.

On appelle structure statistique de type exponentiel, une structure statistique

$$(\mathbb{R}^p, \mathcal{R}^p, \{P_\theta, \theta \in \Theta\}) \quad ; \quad p \geq 1 ,$$

où $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ est une famille de lois de probabilité dominée par une mesure positive σ-finie μ sur $(\mathbb{R}^p, \mathcal{R}^p)$ dont les densités par rapport à μ sont de la forme :

$$(1) \qquad \frac{dP_\theta}{d\mu}(x) = C(\theta) \exp \{\sum_{j=1}^{s} Q_j(\theta)\, T_j(x)\}\, h(x) \; ; \; x \in \mathbb{R}^p, \; \theta \in \Theta, s \geq 1$$

C, Q_j sont des fonctions réelles sur Θ, T_j, h des fonctions réelles boreliennes sur $\mathbb{R}^p$.

Le vecteur de $\mathbb{R}^s$, $\tilde{\theta} = (Q_1(\theta), \ldots, Q_s(\theta) = (\tilde{\theta}_1, \ldots, \tilde{\theta}_s) = Q(\theta)$ parcourant l'ensemble $\tilde{\Theta} = Q(\Theta) \subset \mathbb{R}^s$ est appelé paramètre naturel de la structure, la famille de densités (1) devient

$$\frac{dP_{\tilde{\theta}}}{d\mu}(x) = \tilde{C}(\tilde{\theta}) \exp \{\sum_{j=1}^{s} \tilde{\theta}_j T_j(x)\} h(x) \; ; \; x \in \mathbb{R}^p, \; \tilde{\theta} \in \tilde{\Theta}.$$

Exemple I. 7. ([3], page 97).

Soit X un vecteur aléatoire de loi normale N (m,Λ) non singulière sur $\mathbb{R}^p$; la structure statistique correspondante :

$$(\mathbb{R}^p, \mathcal{R}^p, \{N(m,\Lambda) \; ; \; (m,\Lambda) \in \mathbb{R}^p \times \mathcal{S}_p^+\})$$

où $\mathcal{S}_p^+$ est le cône des matrices - (p,p) définies positives, est de type exponentiel comme le montre la densité de la loi $N(m,\Lambda)$ par rapport à la mesure de lebesque sur $(\mathbb{R}^p, \mathcal{R}^p)$:

$$f_{m,\Lambda}(x) = (2\pi)^{-p/2}(\det \Lambda)^{-1/2} \exp \{-\frac{1}{2} {}^t(x-m)\, \Lambda\, (x-m)\}$$

qui s'écrit aussi :

$$f_{m,\Lambda}(x) = (2\pi)^{-p/2}(\det\Lambda)^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2} {}^t m \Lambda^{-1} m) \exp(-\frac{1}{2} {}^t x \Lambda^{-1} x + {}^t m \Lambda^{-1} x),$$

en désignant par x^j $(j = 1, \ldots p)$ les composantes du vecteur colonne x, par λ_{jk} le terme général de la matrice Λ^{-1}, $(j, k = 1, \ldots p)$ et par α_j $(j = 1, 2, \ldots, p)$ les composantes du vecteur ligne ${}^t m \Lambda^{-1}$ on obtient :

$$f_{m,\Lambda}(x) = (2\pi)^{-p/2}(\det \Lambda)^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2} {}^t m \Lambda^{-1} m) \cdot$$

$$\exp(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{p} \lambda_{jj}(x^j)^2 - \sum_{1 \leq j<k \leq p} \lambda_{jk} x^j x^k + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j x^j),$$

qui est bien de la forme (1).*

§ 2. PRODUITS DE STRUCTURES STATISTIQUES .- STRUCTURES PARTICULIERES. -

Définition I. 8.

Soit $\{\Sigma_i = (\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mathcal{P}_i : \{P_{\theta^i} ; \theta^i \in \Theta^i\}) ; i = 1, 2, \ldots, n\}$

une famille finie de structures statistiques. On appelle produit des Σ_i, la structure :

$$\Sigma = \prod_{i=1}^{n} \Sigma_i = (\prod_{i=1}^{n} \Omega_i, \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i, \mathcal{P} = \{P_\alpha ; \alpha \in \prod_{i=1}^{n} \Theta_i\})$$

où $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i$ est la σ-algèbre produit des $\mathcal{A}_i$ sur $\Omega_1 \times .. \times \Omega_n$ et P_α est l'unique mesure de probabilité sur $(\prod_{i=1}^{n} \Omega_i, \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i)$ vérifiant :

$$P_\alpha(\prod_{i=1}^{n} A_i) = P_{\theta^1, \ldots, \theta^n}(\prod_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P_{\theta^i}(A_i) \text{ quels que soient}$$

$A_i \in \mathcal{A}_i$ et $\theta^i \in \Theta^i$,pour $i = 1, 2, \ldots, n$.

La structure Σ est le modèle associé à une expérience comportant n résultats issus respectivement d'éléments aléatoires indépendants dans leur ensemble, chacun d'eux suivant une loi $P_{\theta^i} \in \mathcal{P}_i$ sur $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$. Lorsque les Σ_i sont toutes identiques, Σ est le modèle correspondant à n expériences indépendantes sur le même phénomène aléatoire, la loi qui le régit pouvant être différente pour chacune d'elles, (variant dans $\mathcal{P}$).

Si l'on suppose de plus qu'au cours de ces expériences le phénomène suit la même loi de probabilité dans $\mathcal{P}$ cas d'obtention d'un échantillon usuel) on considère le "produit restreint" suivant :

Définition I. 9.

On appelle structure d'échantillon de taille n, notée $(\Omega,\mathcal{A},\mathcal{P})^n$, la structure produit particulière :

$$(\Omega^n, \mathcal{A}^n, \mathcal{P}^n = \{P^n_\theta \; ; \; \theta \in \Theta\})$$

où P^n_θ est l'unique mesure de probabilité sur $(\Omega^n, \mathcal{A}^n = \overset{n}{\underset{1}{\otimes}}\mathcal{A})$ vérifiant

$$P^n_\theta \left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P_\theta(A_i) \text{ , pour tout } A_i \in \mathcal{A} \text{ , } i = 1, 2, \ldots, n \text{ et}$$

$\theta \in \Theta$.

La famille $\mathcal{P}^n$ est donc indiciée par le même paramètre que $\mathcal{P}$ dans la structure élémentaire $(\Omega,\mathcal{A},\mathcal{P})$.

Exemple I. 10.

La structure statistique dans laquelle on étudie le problème de Behrens-Fisher général se présente comme un produit au sens de la définition I. 8. de deux structures d'échantillon obtenues à partir du modèle élémentaire de l'exemple I. 7. :

$$(\mathbb{R}^p,\mathcal{R}^p, \{N(m,\Lambda)_{(m,\Lambda)} \in \mathbb{R}^p \times \mathcal{S}^+_p\})^{n_1} \times (\mathbb{R}^p,\mathcal{R}^p,\{N(m',\Lambda')_{(m',\Lambda')} \in \mathbb{R}^p \times \mathcal{S}^+_p\})^{n_2} \; ;$$

il consiste à tester l'hypothèse $m = m'$ au vu des observations $(x_1, \ldots, x_{n_1} \; ; y_1, \ldots, y_{n_2})$ où les $x_1, \ldots, x_{n_1}$ forment un échantillon de n_1 observations indépendantes d'un vecteur aléatoire X de loi $N(m,\Lambda)$ sur $\mathbb{R}^p$ et les $y_1, \ldots, y_{n_2}$ un échantillon de n_2 observations indépendantes d'un vecteur aléatoire Y indépendant de X de loi $N(m',\Lambda')$ sur $\mathbb{R}^p$. (cf. [1] p. 118) . *

Un produit de structures statistiques de type exponentiel est une structure de type exponentiel d'après les définitions I. 6. et I. 8.

On peut décrire des structures statistiques plus générales correspondant par exemple à l'étude d'un échantillon dont la taille n'est pas fixée mais décidée à chaque répétition (décision séquentielle) ou bien à l'étude statistique d'un processus stochastique, le modèle est alors constitué de l'espace mesurable associé au processus, muni d'une famille de transitions ou de lois temporelles ([30]) indiciées par un paramètre θ.

Dans le cas de l'étude séquentielle d'un élément aléatoire répété de façon indépendante et suivant la même loi inconnue, la structure correspondante peut être considérée comme un produit infini de structures élémentaires, soit

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})^I = (\Omega^I, \underset{I}{\otimes} \mathcal{A}, \mathcal{P}^I = \{P_\theta^{i_1, \dots, i_n}, \ \theta \in \Theta\})$$

où

$$P_\theta^{i_1, \dots, i_n}\left(\prod_{j=1}^{n} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{n} P_\theta^{i_j}(A_{i_j}) \quad \text{pour tout ensemble fini}$$

d'indices $i_1, \dots, i_n$ dans I et pour tout $A_{i_j} \in \mathcal{A}$.

- D'une façon plus simple on appellera <u>structure statistique séquentielle</u>, la donnée

$$(\Omega, \mathcal{A}, \{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}, \mathcal{P} = \{P_\theta \ ; \ \theta \in \Theta\})$$

où $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$ est une famille croissante de sous σ-algèbres de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{P}$ une famille de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Dans toute la suite, les propriétés seront présentées dans la structure statistique la plus générale définie au § 1 en ne mentionnant les structures d'échantillon ou séquentielle que pour celles qui leur sont propres.

§ 3. ESPACES DE STATISTIQUES REELLES.

Définition I. 11.

Une statistique [resp. une statistique réelle] X sur la structure $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ est une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans un espace mesurable $(\Sigma, \mathcal{S})$ [resp. dans $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$].

La statistique X n'est fonction que des observations et ne dépend pas de la loi de probabilité $P \in \mathcal{P}$. Pour chaque $P \in \mathcal{P}$, X est un élément aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit $\mathcal{P}X^{-1} = \{P_oX^{-1} \; ; \; P \in \mathcal{P}\}$ la famille des probabilités sur $(\Sigma, \mathcal{S})$ définies par :

$$P_oX^{-1}(S) = P\{X^{-1}(S)\} \; ; \; S \in \mathcal{S} \; , \; P \in \mathcal{P} \; ;$$

le triplet $(\Sigma, \mathcal{S}, \mathcal{P}_oX^{-1})$ constitue une nouvelle structure statistique appelée structure image de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ par la statistique X. On effectue les calculs sur l'une ou l'autre de ces deux structures compte tenu de la formule de changement de variable classique du calcul des probabilités. (*)

Dans ce paragraphe et le suivant, on n'envisage que les statistiques réelles, pour leur propriétés en temps que fonctions mesurables réelles ; les statistiques plus générales seront étudiées au chapitre II.

Espaces de statistiques réelles :

On étudie ici l'extension aux structures statistiques, des espaces L_p classiques relatifs à un espace probabilisé dont on rappelle d'abord les définitions et propriétés essentielles.

(*) Une statistique X à valeurs dans $(\mathbb{R}^n, \mathcal{R}^n)$ sera appelée statistique vectorielle de dimension n.

a) Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable.

On note : $\mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A})$ l'espace vectoriel des fonctions numériques mesurables sur $(\Omega, \mathcal{A})$

$\mathcal{L}_\infty(\Omega, \mathcal{A})$ le sous-espace de Banach de $\mathcal{L}$ des fonctions numériques mesurables sur $(\Omega, \mathcal{A})$, muni de la norme :

$$f \in \mathcal{L}_\infty, \; \|f\| = \sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega)|$$

$\mathfrak{M}(\Omega, \mathcal{A})$ l'espace des mesures réelles bornées sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Muni de la norme $\|\mu\|_1 = |\mu|(\Omega)$ où $|\mu|$ désigne la variation totale de $\mu \in \mathfrak{M}$:

$$|\mu| = \mu^+ + \mu^- \qquad \text{où} \qquad \begin{aligned} &\mu^+(A) = \operatorname{Sup}\{\mu(B)\ ,\ B \subset A\} \\ &\mu^-(A) = \operatorname{Sup}\{-\mu(B)\ ;\ B \subset A\}\ ;\quad A, B \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

$\mathfrak{M}(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace de Banach complètement réticulé ([30] p. 102).

$\mathcal{L}_\infty(\Omega, \mathcal{A})$ et $\mathfrak{M}(\Omega, \mathcal{A})$ sont mis en dualité par la forme bilinéaire

$$(f, \mu) \longrightarrow \langle f, \mu \rangle = \int_\Omega f d\mu$$

On note $\sigma(\mathcal{L}_\infty, \mathfrak{M})$ la topologie faille sur $\mathcal{L}_\infty$ induite par $\mathfrak{M}$. (la topologie la moins fine rendant continues toutes les formes linéaires $f \longrightarrow \langle f, \mu \rangle$ sur $\mathcal{L}_\infty$ lorsque μ parcourt $\mathfrak{M}$.

b) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé

Pour tout nombre réel $p \geq 1$ on désigne par :

$L_p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ l'ensemble des classes d'équivalence $(P - p.s)$ des variables aléatoires réelles X de $p^{\text{ème}}$ puissance intégrable, c'est-à-dire telles que :

$$\|X\|_p = \left(\int_\Omega |X|^p \, dP\right)^{1/p} < +\infty ,$$

$L_\infty(\Omega, \mathcal{A}, P)$ l'ensemble des classes d'équivalence $(P - p.s)$ des variables aléatoires réelles essentiellement bornées, c'est-à-dire telles que :

$$\|X\|_\infty = \underset{\omega \in \Omega}{\text{ess. sup}} \{|X(\omega)|\} < +\infty .$$

On a $L_1 \supset L_2 \supset \dots \supset L_\infty$ et pour tout $p \in [1, \infty]$, L_p est un espace de Banach complètement réticulé (muni de la norme $\|\cdot\|_p$).

On montre ([30] p. 107) que si $1 \leq p < \infty$ et p' est l'exposant conjugué de p, $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$, le dual de l'espace $L_p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est $L_{p'}(\Omega, \mathcal{A}, P)$; le dual de l'espace $L_\infty(\Omega, \mathcal{A}, P)$ contient l'espace $L_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et en est distinct en général.

On note encore $\sigma(L_\infty, L_1)$ la topologie faible sur L_∞ induite par L_1 (la topologie la moins fine sur L_∞ rendant continues toutes les formes linéaires $X \longrightarrow \langle X, Y \rangle = \int_\Omega XY dP$, lorsque Y parcourt L_1.

Soit maintenant une structure statistique $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta\})$

Définition I. 12.

Les statistiques réelles X et X' sont $\mathcal{P}$-presque sûrement équivalentes (ou $\mathcal{P}$-équivalentes) si l'ensemble $\{X \neq X'\}$ est $\mathcal{P}$-négligeable dans $\mathcal{A}$.

(On note $X \underset{\mathcal{P}-p.s}{=} X'$)

Si la structure est dominée cette équivalence est identique à l'équivalence P^* presque-partout pour la probabilité privilégiée P^* d'après la définition I. 4 et le théorème I. 5.

Définition I. 13.

Pour tout réel p , $1 \leq p < \infty$, on désigne par $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ (ou $L_p(\mathcal{P})$) l'ensemble des classes de $\mathcal{P}$-équivalence des statistiques réelles de $p^{\text{ème}}$ puissance intégrable quelque soit $P \in \mathcal{P}$, c'est-à-dire :

$$X \in L_p(\mathcal{P}) \Leftrightarrow N_p^\theta(X) = \left(\int_\Omega |X|^p dP_\theta\right)^{1/p} < +\infty \quad \text{quelque soit : } \theta \in \Theta.$$

$L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ est un espace vectoriel ordonné réticulé pour l'ordre

$$X \underset{\mathcal{P}}{\leq} Y \Leftrightarrow X(\omega) \leq Y(\omega) \quad \mathcal{P}\text{- p.s.}$$

D'après ce qui précède, pour tout θ fixé, l'application $X \longrightarrow N_p^\theta(X)$ est une norme sur $L_p(\mathcal{P})$ mais l'application $X \longrightarrow \sup\limits_{\theta \in \Theta} N_p^\theta(X)$ n'en n'est pas une en général si Θ n'est pas fini.

Exemple I. 14.

Dans la structure $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \mathcal{P} = \{\gamma(1,\frac{1}{\theta}) \ ; \ \theta \in \mathbb{R}^+\})^n$ où $\gamma(1,\frac{1}{\theta})$ désigne la loi de probabilité sur la droite, définie par la densité par rapport à la mesure de Lebesgue:

$$\theta > 0, \qquad f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & \text{si } x \geq 0 , \\ 0 & \text{si } x < 0 , \end{cases}$$

La statistique $X(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ appartient à $L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ puisque $N_1^\theta(X) = \theta < \infty$; mais $\sup N_1^\theta(X)$ n'existe pas.*

$L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ n'est donc pas un espace de Banach en général. Toutefois, muni de la topologie associée à la famille de semi-normes (en fait, de normes) $\{N_p^\theta(X)\}_{\theta \in \Theta}$, que l'on appellera $\mathcal{P}$-topologie, L_p est un espace localement convexe séparé, complet et un espace de Fréchet si Θ est dénombrable. (cf. [8], [7] ou [10]).

Pour toute statistique réelle positive X sur la structure, soit

$$N_\infty^{\mathcal{P}}(X) = \inf \{\alpha \geq 0 \quad : P_\theta(X \geq \alpha) = 0 \ , \quad \forall\ \theta \in \Theta\}$$

$N_\infty^{\mathcal{P}}(X)$ est la borne supérieure en mesure uniforme (par rapport à $\mathcal{P}$) de la fonction X, vérifiant les propriétés

a) - $N_\infty^{\mathcal{P}}(X) = M < \infty \Rightarrow P_\theta(X > M) = 0$ quelque soit $\theta \in \Theta$,

b) - $X \underset{\mathcal{P}}{\leq} Y \Rightarrow N_\infty^{\mathcal{P}}(X) \leq N_\infty^{\mathcal{P}}(Y)$

c) - $N_\infty^{\mathcal{P}}(X + Y) \leq N_\infty^{\mathcal{P}}(X) + N_\infty^{\mathcal{P}}(Y)$

d) - $N_\infty^{\mathcal{P}}(\quad X) \leq N_\infty^{\mathcal{P}}(X)$

e) - $N_\infty^{\mathcal{P}}(XY) \leq N_\infty^{\mathcal{P}}(X)\ N_\infty^{\mathcal{P}}(Y)$

f) - $N_\infty^{\mathcal{P}}(X) = 0 \Leftrightarrow X \underset{\mathcal{P}}{=} 0.$

Définition I. 15.

On désigne par $L_\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ l'ensemble des classes de $\mathcal{P}$-équivalence des statistiques réelles $\mathcal{P}$-essentiellement bornées, c'est-à-dire :

$$X \in L_\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}) \quad \Leftrightarrow \quad N_\infty^{\mathcal{P}}(|X|) < +\infty.$$

$L_\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ muni de la norme $N_\infty^{\mathcal{P}}(|.|)$ est un espace de Banach réticulé.

(il est un effet complet puisque toute suite de Cauchy pour cette norme est une suite de Cauchy $\mathcal{P}$-presque partout).

Remarques

1. - Il n'existe pas de relation entre l'espace $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ et les espaces $L_p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ pour $P \in \mathcal{P}$ et $1 \leq p < \infty$ puisque les classes d'équivalence sont distinctes. Si $\mathcal{P}'$ est une sous-famille équivalente à $\mathcal{P}$, on a évidemment $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}) \subset L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}')$.

2. - Si la structure statistique est dominée, pour toute probabilité privilégiée P^* dominant $\mathcal{P}$ on a, par les définitions I. 12 et I. 15, pour $p = \infty$,

$$L_\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}) = L_\infty(\Omega, \mathcal{A}, P^*) .$$

§ 4. IMAGE D'UNE STATISTIQUE REELLE. "APPLICATION IMAGE".

Définition et propriétés.

Dans tout ce paragraphe on considère une structure statistique $(\Omega,\mathcal{A},\mathcal{P} = \{P_\theta \; ; \; \theta \in \Theta\})$ où l'on suppose que Θ est muni d'une σ-algèbre $\mathcal{T}$ de parties, de telle sorte que $\mathcal{P}$ soit une probabilité de transition de $(\Theta,\mathcal{T})$ vers $(\Omega,\mathcal{A})$.

On appelle mesure à priori, toute mesure sur l'espace mesurable $(\Theta,\mathcal{T})$.

Définition I. 17.

On appelle image d'une statistique réelle X, $\mathcal{P}$-intégralle sur la structure, la fonction réelle β_X sur Θ définie à partir de X par :

$$\beta_X(\theta) = \int_\Omega X dP_\theta \; , \; \theta \in \Theta.$$

Deux statistiques réelles $\mathcal{P}$-équivalentes ont donc même image.

Proposition I. 18.

Pour toute statistique réelle X, $\mathcal{P}$-intégrable sur la structure, β_X est une fonction $\mathcal{T}$-mesurable de θ. De plus, pour toute mesure à priori bornée λ, la fonction d'ensembles définie par :

(1) $$\nu(A) = \int_\Theta P_\theta(A) \, d\lambda, \quad A \in \mathcal{A},$$

est une mesure bornée sur $(\Omega,\mathcal{A})$ vérifiant :

(2) $$\int_\Theta \beta_X \, d\lambda = \int_\Omega X \, d\nu.$$

Cette proposition n'est que l'application du résultat classique du calcul des probabilités (cf. [30] p. 71) sur les transitions entre espaces mesurables en remarquant que toute mesure bornée s'exprime comme combinaison linéaire de deux probabilités.

Si la famille $\mathcal{P}$ est dominée par une mesure σ-finie μ, la mesure ν est absolument continue par rapport à μ puisque $\mu(A) = 0 \Rightarrow P_\theta(A) = 0$ pour tout θ, donc $\nu(A) = 0$ d'après (1).

Définition I. 19.

On appelle "application image" pour la structure statistique, l'application linéaire :

$$\beta : L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}) \longrightarrow \mathcal{L}(\Theta, \mathcal{T})$$

qui a toute (classe de $\mathcal{P}$-équivalence de) statistique réelle $\mathcal{P}$-intégralle X sur cette structure fait correspondre son image β_X . $(\beta(X) = \beta_X(.))$.

Proposition I. 20.

L'application β est une application linéaire continue lorsque $L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ est muni de la $\mathcal{P}$-topologie (§ 3), et $\mathcal{L}(\Theta, \mathcal{T})$ de la topologie de la convergence simple.

Démonstration.

La topologie de la convergence simple sur $\mathcal{L}$ étant définie par la famille de semi-normes $\{f \longrightarrow |f(\theta)| \; ; \; \theta \in \Theta\}$, un voisinage de l'origine dans $\mathcal{L}$ s'écrit $V = \{f : |f(\theta_i)| \leq \varepsilon \; ; \theta_1, \ldots, \theta_n \in \Theta\}$. par suite la relation :

$$|\beta_X(\theta_i)| \leq \int_\Omega |X| dP_{\theta_i} \leq \varepsilon \quad , \qquad i = 1, \ldots, n$$

implique la continuité de β à l'origine.

Ce qui précède définit donc l'application image la plus générale, mais on a la restriction plus utile suivante :

Proposition I. 21.

Si la structure statistique est dominée, pour une probabilité privilégiée P^*, la restriction de l'application β au sous espace $L_\infty(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ($= L_\infty(\Omega, \mathcal{A}, P^*)$) muni de la topologie faible $\sigma(L_\infty, L_1(\Omega, \mathcal{A}, P^*))$ à valeurs dans le sous-espace $\mathcal{L}_\infty(\Theta, \mathcal{T})$ muni de la topologie faible $\sigma(\mathcal{L}_\infty, \mathfrak{M}(\Theta, \mathcal{T}))$ est continue.

Démonstration.

D'après la proposition I. 18, soit ${}^t\beta$ l'application de $\mathfrak{M}(\Theta, \mathcal{T})$ dans le sous espace $\mathfrak{M}_{P^*}(\Omega, \mathcal{A})$ de $\mathfrak{M}(\Omega, \mathcal{A})$ des mesures absolument continues par rapport à P^* sur $(\Omega, \mathcal{A})$; d'après le théorème de Radon-Nikodym, les espaces $\mathfrak{M}_{P^*}(\Omega, \mathcal{A})$ et $L_1(\Omega, \mathcal{A}, P^*)$ sont isomorphes et isométriques ($\mathfrak{M}_{P^*}$ étant muni de la norme induite par $\mathfrak{M}$) par l'application $X \longrightarrow X.P^*$ (où $X.P^*(A) = \int_A X dP^*$; cf. [30] p. 105). Par suite, la relation (2) de la proposition I. 18 implique que ${}^t\beta$ est exactement l'application linéaire transposée de l'application puissance (relativement aux dualités entre L_∞ $L_1(\Omega, \mathcal{A}, P^*)$ d'une part, $\mathcal{L}_\infty(\Theta, \mathcal{T})$ et $\mathfrak{M}(\Theta, \mathcal{T})$ de l'autre) dont l'existence est équivalente à la continuité de β pour les topologies faibles $\sigma(L_\infty, L_1)$ et $\sigma(\mathcal{L}_\infty, \mathfrak{M})$. De même ${}^t\beta$ est continue pour les topologies $\sigma(\mathfrak{M}, \mathcal{L}_\infty)$ et $\sigma(L'_\infty, L_\infty)$ ([7] Chapitre IV § 4 Proposition 1). (La topologie $\sigma(L'_\infty, L_\infty)$ induit sur $L_1 (\subset L'_\infty)$ la topologie faible $\sigma(L_1, L_\infty)$).

Application aux tests.

Définition I. 22.

Un test $\emptyset$ sur la structure statistique $(\Omega, \mathfrak{a}, \rho)$ est un élément du sous-ensemble convexe de $L_\infty(\Omega, \mathfrak{a}, \rho)$ défini par :

$$T = \{X \in L_\infty(\Omega, \mathfrak{a}, \rho) \quad : \quad \|2X - 1\|_\infty^\rho \leq 1\} \ ;$$

On appelle domaine caractéristique associé à la structure, l'image R de l'ensemble des tests par l'application β; $R = \beta(T) \subset \mathcal{L}_\infty(\Theta, \mathcal{T})$.

Un test est donc une (classe de ρ-équivalence de) statistique réelle $\emptyset$ vérifiant $0 \leq \emptyset \leq 1$ ρ-presque partout sur Ω ; son image, $\beta_\emptyset$ est appelée fonction puissance du test $\emptyset$.
Le domaine caractéristique R est convexe et $R - \frac{1}{2}$ est équilibré ; de plus,

Proposition I. 23.

Si la structure est dominée, alors pour une probabilité privilégiée P^*, l'ensemble des tests T est compact pour la topologie faible $\sigma(L_\infty, L_1(\Omega, \mathfrak{a}, P^*))$. Il en est de même pour le domaine caractéristique R pour la topologie faible $\sigma(\mathcal{L}_\infty, \mathfrak{M}(\Theta, \mathcal{T}))$.

La première partie de la proposition résulte du théorème de Banach Alaoglu (cf. par ex. [22] p. 354), la deuxième, de la proposition I. 21. Cette proposition permet de prouver l'existence de tests optimaux pour certains problèmes de test d'hypothèses statistiques. (cf. [2], [22]).

§ 5. PROPRIETES PARTICULIERES.

On donne dans ce paragraphe des définitions techniques sur les structures statistiques utiles dans la suite.

1. Structures statistiques complètes.

Définition I. 24.

La structure statistique $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P} = \{P_\theta \; ; \; \theta \in (\Theta, \mathcal{T})\})$ est dite "complète" si l'application :

$$\beta : L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}) \longrightarrow \mathcal{L}(\Theta, \mathcal{T})$$ est injective, elle est "quasi-complète" si la restriction de β à $L_\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ est injective.

Cette propriété est bien caractéristique du triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ elle signifie en d'autres termes que la structure est complète [resp. quasi-complète] si quelle que soit la statistique réelle X, $\mathcal{P}$-intégrable sur $(\Omega, \mathcal{A})$ [resp. $\mathcal{P}$-essentiellement bornée] on a l'implication :

$$\int_\Omega X dP_\theta = 0 \text{ quelque soit } \theta \in \Theta \Rightarrow X \underset{\mathcal{P}}{=} 0 \quad .$$

Dans le cas où l'on ne suppose pas que P_θ est une probabilité de transition on prendra cette dernière formulation comme définition.

Remarques.

1. Si $\mathcal{P}'$ est une sous-famille équivalente à $\mathcal{P}$, la complétion de la structure $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}')$ entraîne celle de la structure $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ puisque dans ce cas $L_1 \; (\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}) \subset L_1 \; (\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}')$,
[resp. $L_\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}) = L_\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}')$].

2. Une structure complète est évidemment quasi-complète, le contre-exemple suivant, pour l'affirmation réciproque est donné dans [15] :

la structure $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \{P_\theta\ ;\ 0 < \theta < 1\})$ où $P_\theta(\{-1\}) = \theta$;

$$P_\theta(\{x\}) = \begin{cases} (1-\theta)^2\theta^x & \text{si } x \in \\ 0 & \text{si } x \notin \quad \cup \{-1\} \end{cases}$$

est quasi-complète sans être complète.

3. Les structures d'échantillon sont rarement complètes, mais on s'intéresse généralement à cette propriété pour des structures restreintes à des sous σ-algèbres de $\mathcal{A}$.

2. Structures statistiques invariantes.

Définitions et notations.

Soient $(\Omega,\mathcal{A})$ un espace mesurable, G un groupe de transformations bijectives, et mesurables de Ω sur Ω, donc un groupe opérant dans Ω pour l'opération définie par la composition des applications :

$$\omega \in \Omega,\ g \in G,\ g\omega = g(\omega) \quad \text{et}$$

si $g, g' \in G \quad gg' = gog'$ soit $(gg')\,\omega = g(g'\omega)$ et $g(g^{-1}\,\omega) = \omega$ pour tout $\omega \in \Omega$.

La relation d'équivalence sur Ω, associée au groupe G est définie par :

$\omega_1, \omega_2 \in \Omega\ ;\ \omega_1 \sim \omega_2 \Leftrightarrow$ "Il existe $g \in G$ tel que $\omega_2 = g\omega_1$".

On note : $G\omega = \{g\omega\ ;\ g \in G\}$ l'orbite de ω dans Ω, c'est-à-dire la classe d'équivalence de ω pour la relation précédente

Ω/G l'espace quotient, ou espace des orbites,

$\pi : \Omega \to \Omega/G$ l'application canonique $\pi(\omega) \to G\omega$.

On supposera dans la suite que la partition de Ω constituée des éléments de Ω/G est $\mathcal{A}$-mesurable.

On dira que G opère transitivement dans Ω si Ω/G se réduit à $\{\Omega\}$, c'est-à-dire $G\omega = \Omega$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Définition I. 25.

"Une structure statistique $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P} = \{P_\theta \; ; \; \theta \in \Theta\})$ est dite invariante par rapport au groupe G, si pour tout $g \in G$ et pour tout $\theta \in \Theta$ il existe $\theta' \in \Theta$ unique noté $\bar{g}\,\theta$ tel que :

$$P_\theta(g^{-1}(A)) = P_{\bar{g}\theta}(A)$$

quelque soit $A \in$ ".

Cela revient à dire que pour tout $g \in G$, la probabilité image $P_\theta \circ g^{-1}$ appartient à $\mathcal{P}$ pour tout $P_\theta \in \mathcal{P}$. Une définition équivalente est :

Quelle que soit la statistique réelle, $\mathcal{P}$-intégrable X sur la structure.

$$E_\theta(X \circ g) = E_{\bar{g}\theta}(X).$$

Remarque :

L'unicité de θ' est équivalente à l'injectivité de l'application $\theta \to P_\theta$. Elle est donc assurée si l'on suppose la structure séparée (§1).

Dans ces conditions, pour g fixé l'application $\theta \underset{\bar{g}}{\to} \theta'$ est une transformation biunivoque de Θ sur Θ, et les relations immédiates

$$g, g' \in G \;,\; \overline{g' \circ g} = \bar{g}' \circ \bar{g} \quad \text{et} \quad \overline{(g^{-1})} = (\bar{g})^{-1}$$

impliquent que le groupe $\bar{G} = \{\bar{g} \; ; \; g \in G\}$ opérant sur Θ est un homomorphisme de G (G et $\bar{G}$ ne sont pas isomorphes en général).

La définition I. 16. est donnée pour une structure statistique générale ; dans le cas où elle est une structure d'échantillon construite à partir d'une structure simple, invariante par rapport à un groupe G, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})^n$ est invariante par rapport au groupe $G^{(n)}$ de transformations sur Ω^n définies par :

$$g^{(n)} \in G^{(n)} \quad : \quad g^{(n)}(\omega_1, \ldots, \omega_n) = (g(\omega_1), \ldots, g(\omega_n)) \quad ; \quad g \in G.$$

Mais toutes les transformations envisagées, sur une structure d'échantillon ne sont pas de ce type.

Exemples I. 26.

1. La structure d'échantillon $(\mathbb{R}^p, \mathcal{R}^p, \{N(m,\Lambda) \; ; \; (m,\Lambda) \in \mathbb{R}^p \times \mathcal{S}_p^*\})^n$ est invariante par rapport au groupe des transformations linéaires de $\mathbb{R}^p$ représenté par l'ensemble des matrices p x p non singulières C, opérant sur chaque observation de l'échantillon

$$g_C^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = (g_C\, x_1, \ldots g_C\, x_n) = (Cx_1, \ldots, Cx_n) \quad ;$$

$$x_i \in \mathbb{R}^p \quad ; \; i = 1, \ldots, n$$

et $\bar{g}_C\,(m,\Lambda) = (Cm, C\Lambda\,{}^tC)$. ∗.

2. Une structure d'échantillon $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \mathcal{P})^n$ où $\mathcal{P}$ est une famille quelconque de lois de probabilités absolument continues sur $\mathbb{R}$ est invariante par rapport au groupe G des n! permutations des coordonnées de l'échantillon, comme conséquence directe de la définition I. 9.

$$g \in G \quad ; \quad g(x_1, \ldots, x_n) = (x_{g_1}, \ldots, x_{g_n}) \qquad x_i \in \mathbb{R} \; , \; i = 1, \ldots, n$$

où $(g_1, \ldots, g_n)$ est une permutation de $(1, \ldots, n)$. ∗.

Les considérations d'invariance jouent un rôle déterminant dans l'étude de la liberté , (Chapitre II).

CHAPITRE II

PROPRIETES FONDAMENTALES

DE SOUS σ-ALGEBRES

ET DE STATISTIQUES

PROPRIETES FONDAMENTALES

DE SOUS σ-ALGEBRES

ET DE STATISTIQUES

Soit X une statistique sur la structure $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, c'est-à-dire une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans un espace mesurable $(\Sigma, \mathcal{S})$.

Dans ce chapitre on rappelle les principales propriétés classiques que l'on peut envisager pour X, qui seront utiles pour la suite, c'est-à-dire celle d'exhaustivité, de complétion et d'invariance ; la notion de statistique libre est définie également dans ce cadre.

La plupart des définitions relatives à la statistique X peuvent se traduire sur la sous σ-algèbre de $\mathcal{A}$, $X^{-1}(\mathcal{S})$ engendrée par X ; ou sur la structure restreinte à $X^{-1}(\mathcal{S})$; il est alors commode de définir et d'étudier toutes ces notions sur l'ensemble des sous σ-algèbres de $\mathcal{A}$, à condition de préciser toutefois qu'une telle σ-algèbre n'est pas nécessairement engendrée par une quelconque statistique (ou une statistique suffisament maniable). Mais ce procédé permet une plus grande unité dans la présentation, de plus la recherche d'éléments maximaux ou minimaux pour des familles de sous σ-algèbres possédant de telles propriétés est intéressante.

Dans cet ordre d'idées, une statistique X' à valeurs dans un espace mesurable $(\Sigma', \mathcal{J}')$ sera dite <u>fortement équivalente</u> à X, si elles engendrent la même sous σ-algèbre de $(X^{-1}(\mathcal{J}) = X'^{-1}(\mathcal{J}'))$.

<u>Exemple II. 1</u>.

Soit $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \mathcal{P})^n$ la stucture d'échantillon où $\mathcal{P}$ est une famille quelconque de lois de probabilité absolument continues sur $\mathbb{R}$; les statistiques X_0 et X_1 : $(\mathbb{R}^n, \mathcal{R}^n) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{R}^n)$ définies par :

$$X_0(x_1, \ldots, x_n) = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$$

où $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ est la suite des x_i rangés dans l'ordre croissant et

$$X_1(x_1, \ldots, x_n) = (\sum_{i=1}^n x_i \ , \sum_{i=1}^n x_i^2, \ \ldots, \sum_{i=1}^n x_i^n) ,$$

sont équivalentes au sens fort. (On montre en effet ([22] p. 40) qu'elles engendrent la même sous σ-algèbre $\mathcal{R}_0^n$ de $\mathcal{R}^n$ des ensembles invariants par le groupe des permutations des coordonnées de $\mathbb{R}^n$. (On appellera X_0 et $\mathcal{R}_0^n$ respectivement la statistique et la σ-algèbre d'ordre sur $\mathbb{R}^n$). ∗

On peut envisager une relation d'équivalence plus faible que la précédente.

Soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble des sous σ-algèbres de $\mathcal{A}$, et $\eta(\mathcal{P})$ la famille des ensembles $\mathcal{P}$-négligeables dans $\mathcal{A}$.

Pour des σ-algèbres $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de $\mathfrak{S}$, on dira que $\mathcal{B}$ <u>est essentiellement contenue dans</u> $\mathcal{B}'$ [relativement à $\mathcal{P}$] (noté : $\mathcal{B} \underset{\mathcal{P}}{\subset} \mathcal{B}'$) <u>si quelque soit l'ensemble</u> $B \in \mathcal{B}$ <u>il existe un ensemble</u> $B' \in \mathcal{B}'$ <u>tel que</u> $B \,\Delta\, B' \in \eta(\mathcal{P})$.

Ce préordre partiel sur $\mathfrak{S}$ induit la relation d'<u>équivalence essentielle</u> [relativement à $\mathcal{P}$] :

$$\mathcal{B} \underset{\mathcal{P}}{=} \mathcal{B}' \quad \underline{\text{si et seulement si}} \quad \mathcal{B} \underset{\mathcal{P}}{\subset} \mathcal{B}' \quad \underline{\text{et}} \quad \mathcal{B}' \underset{\mathcal{P}}{\in} \mathcal{B}. \quad (*)$$

Les statistiques X et X' seront dites essentiellement équivalentes (ou équivalentes au sens faible ([23]) si elles engendrent des σ-algèbres essentiellement équivalentes de $\mathfrak{S}$, ($X^{-1}(\mathcal{F}) \underset{\mathcal{P}}{=} X^{-1}(\mathcal{F}')$).

Remarquons que deux statistiques <u>réelles</u> $\mathcal{P}$ équivalentes au sens de la définition I. 12 sont essentiellement équivalentes en effet, quelque soit l'ensemble $R \in \mathcal{R}$, $X^{-1}(R) \,\Delta\, X'^{-1}(R) \subset \{X \neq X'\} \in \mathcal{N}(\mathcal{P})$.

(*) On note $\mathfrak{S}/\mathcal{P}$ l'espace quotient associé.

§ 1. σ-ALGEBRES ET STATISTIQUES COMPLETES.

Définition II. 2.

Une statistique $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}) \longrightarrow (\Sigma, \mathcal{S})$ est complète [resp. quasi-complète] si la structure image par X, $(\Sigma, \mathcal{S}, \mathcal{P}\circ X^{-1})$ est complète [resp. quasi-complète].

En utilisant la formule de changement de variable classique

$$\int_{X^{-1}(S)} f[X(\omega)]\ P(d\omega) = \int_S f(x)\ P\circ X^{-1}\ (dx) \quad ; \quad S \in \mathcal{S}\ ,\ f \in L_1(\Sigma, \mathcal{S}, \mathcal{P}\circ X^{-1})$$

il est équivalent de dire que X est complète [resp. quasi- complète] si la structure restreinte $(\Omega, X^{-1}(\mathcal{S}), \mathcal{P}_{X^{-1}(\mathcal{S})})$ est complète [resp. quasi-complète].

Par abus de langage, et lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté sur la famille $\mathcal{P}$ on dira qu'une sous σ-algèbre $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ est complète ou quasi-complète si la structure restreinte $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P}_{\mathcal{B}})$ l'est.

Cette propriété n'a pas d'interprétation statistique concrète mais sera très utile par la suite.

Remarques.

1. Quelle que soit la famille $\mathcal{P}$ il existe toujours une sous σ-algèbre complète, soit $\mathcal{B}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

2. Toute σ-algèbre contenue dans une σ-algèbre complète est complète.

3. Soit $\mathfrak{S}_c$ [resp. $\mathfrak{S}\,qc$] la sous-famille de $\mathfrak{S}$ de toutes les σ-algèbres complètes [resp. quasi-complètes]. Si $\mathcal{A}$ n'est pas complète, on ne sait pas s'il existe un plus grand élément ou même des éléments

maximaux dans $_c$ pour l'ordre naturel $\subset$ dans ; une propriété de maximalité sera donnée au paragraphe suivant, associant la notion d'exhaustivité.

Dans une structure de type exponentiel on a la caractérisation suivante :

Soit $(\mathbb{R}^p, \mathcal{R}^p, \{\frac{dP_\theta}{d\mu}(x) = C(\theta) \exp\{\sum_{j=1}^{s} \theta_j T_j(x)\} h(x) \quad ; \theta \in \widetilde{\Theta} \subset \mathbb{R}^s, \ x \in \mathbb{R}^p\})$ (1)

une telle structure, où la famille $\mathcal{P}$ de lois de probabilité est donnée par leur densité écrites dans la paramétrisation naturelle (cf. définition I. 6.)

Théorème II. 3.

La statistique T sur cette structure, à valeurs dans $(\mathbb{R}^s, \mathcal{R}^s)$ définie par :

$$T(x) = (T_1(x), \dots, T_s(x)) \quad ; \quad x \in \mathbb{R}^p,$$

est complète dès que l'ensemble $\widetilde{\Theta}$ des paramètres naturels, contient un ouvert non vide de $\mathbb{R}^s$.

En effet, soit $\nu = h.\mu$ la mesure σ-finie sur $(\mathbb{R}^p, \mathcal{R}^p)$ définie par $d\nu(x) = h(x)\, d\mu(x)$. Si l'on désigne par $m = \nu \circ T^{-1}$ la mesure image de ν par la statistique T sur $(\mathbb{R}^s, \mathcal{R}^s)$, les densités des lois de probabilités de T par rapport à m sont :

$$\frac{d[P_\theta \circ T^{-1}]}{dm}(t) = C(\theta) \exp\{\sum_{j=1}^{s} \theta_j t_j\} \quad ; \quad \theta \in \widetilde{\Theta} \subset \mathbb{R}^s$$

en posant $t = (t_1, \dots, t_s) = (T_1(x), \dots, T_s(x))$; ou encore :

$$\frac{d[P_\theta \circ T^{-1}]}{dm}(t) = c(\theta) \exp\{< \theta, t >\} \quad ; \quad \theta \in \widetilde{\Theta} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}^s.$$

La structure image de (1) par T, $(\mathbb{R}^s, \mathcal{R}^s, \{P_\theta \circ T^{-1} ; \theta \in \widetilde{\Theta}\})$ est encore de type exponentiel de paramètre naturel θ.

Le théorème résulte alors des propriétés de la transformée de Laplace dans $\mathbb{R}^s$ (cf. [2]).

Exemple II. 4.

Soit $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \mathcal{P} = \{N(m,\sigma)_{(m,\sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+}\})^n$ la structure d'échantillon construite à partir de la structure de l'exemple I. 7. avec p = 1 pour simplifier; la densité de la loi du vecteur aléatoire associé à l'échantillon $(x_1,\ldots,x_n)$ s'écrit :

$$f_{m,\sigma}(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{\sigma^n (2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{n\, m^2}{\sigma^2}\right) \exp\left\{+\frac{m}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2\right\}$$

en posant $\theta_1 = \frac{m}{\sigma^2}$, $\theta_2 = -\frac{1}{2\sigma^2}$ pour paramètres naturels, d'après le théorème précédent, la statistique

$$T = (T_1, T_2) = \left(\sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n x_i^2\right)$$

à valeurs dans $(\mathbb{R}^2, \mathcal{R}^2)$ est complète puisque $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$. *

Considérons maintenant la statistique réelle $X = 2T_1^2 - (n+1)\, T_2$ qui est une fonction de T telle que :

$$E_{m,\sigma}(X) = \int_{\mathbb{R}^n} X \, dP_{m,\sigma}(x) = n(n-1)\,(m^2 - \sigma^2).$$

X est non identiquement nulle, par suite sur la structure partielle $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \mathcal{P}' = \{N(m,\sigma) ; (m,\sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ ; m^2 = \sigma^2\})^n$ la statistique T n'est pas complète. On remarque que le domaine de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ des paramètres naturels est défini par l'équation $\theta_1^2 - 2\theta_2 = 0$ et est d'intérieur vide.

L'étude générale des structures exponentielles incomplètes par liaisons (telles que celle associée à T) a été entreprise par LINNIK dans [27].

Dans un problème de test d'une hypothèse H_o sur une structure de type exponentiel, pouvant s'écrire à l'aide des paramètres naturels sous la forme

$$H_o : \begin{cases} \pi_1 (\theta_1, \dots \theta_s) = 0 \\ \\ \pi_r (\theta_1, \dots \theta_s) = 0 \qquad r < s \end{cases}$$

où les π_i sont des fonctions régulières, on est amené à considérer la structure partielle $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \{P_\theta, \theta \in \widetilde{\Theta} \cap H_o\})^n$ sur laquelle la statistique T n'est pas complète. C'est le cas du problème de Behrens - Fisher :

Dans l'exemple I. 10, pour p = 1 la densité est de la forme :

$$f(x_1, \dots x_{n_1}; y_1, \dots, y_{n_2}) =$$

$$C(m,m',\sigma,\sigma') \exp \left(\frac{m}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n_1} x_i + \frac{m'}{\sigma'^2} \sum_{i=1}^{n_2} y_i - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n_1} x_i^2 - \frac{1}{2\sigma'^2} \sum_{i=1}^{n_2} y_i^2\right)$$

la statistique $T = (T_1, \dots, T_4) = \left(\sum_{i=1}^{n_1} x_i , \sum_{i=1}^{n_2} y_i , \sum_{i=1}^{n_1} x_i^2 , \sum_{i=1}^{n_2} y_i^2\right)$ est complète

puisqu'en posant :

$$\theta_1 = \frac{m}{\sigma^2}, \ \theta_2 = \frac{m'}{\sigma'^2}, \ \theta_3 = \frac{-1}{2\sigma^2}, \ \theta_4 = \frac{-1}{2\sigma'^2} \quad ; \quad (\theta_1, \dots, \theta_4) \in \mathbb{R}^2 \times (\bar{\mathbb{R}})^2$$

mais sous l'hypothèse H $m = m'$ ou $\theta_1\theta_4 - \theta_2\theta_3 = 0$ elle devient incomplète, en effet statistique réelle fonction de T non identiquement nulle

$X = \frac{T_1}{n_1} - \frac{T_2}{n_2}$ est telle que :

$$E_{m,m',\sigma,\sigma'} (X) = 0 \quad \text{quels que soient } \sigma,\sigma' \text{ et } m = m'.$$

§ 2. σ-ALGEBRES ET STATISTIQUES EXHAUSTIVES.

On rappelle dans ce paragraphe les définitions et principales propriétés relatives aux statistiques exhaustives sans mentionner les multiples applications de cette notion fondamentale quelques unes étant étudiées au chapitre suivant pour leur validité dans les différentes formes d'exhaustivité affaiblie qui y seront données.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P} = \{P_\theta \; ; \; \theta = (\theta_1, \theta_2) \in \Theta \subset \Theta_1 \times \Theta_2\})$ une structure statistique où une partie de θ, θ_1 ou θ_2 représente un paramètre importun

Définition II. 5.

a) Une sous σ-algèbre $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ est exhaustive pour θ [resp. pour θ_1 par exemple] sur la structure, si quelque soit $A \in \mathcal{A}$, il existe une détermination de la probabilité conditionnelle $P_\theta^{\mathcal{B}}(A)$ qui soit indépendante de $\theta \in \Theta$ [resp. de $\theta_1 \in \Theta_1$ pour tout θ_2 fixé].

L'exhaustivité de $\mathcal{B}$ pour le paramètre θ_1 sur la structure générale étant équivalente à l'exhaustivité de $\mathcal{B}$ sur la structure $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}_{\theta_2} = \{P_{\theta_1,\theta_2} \, , \, \theta_1 \in \Theta_1\})$ pour tout $\theta_2 \in \Theta_2$ les restrictions apportées à ce cas dans la définition ne seront plus mentionnées dans la suite.

b) Une statistique $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Sigma, \mathcal{S})$ est exhaustive sur la structure, si la sous σ-algèbre $X^{-1}(\mathcal{S})$ de $\mathcal{A}$ engendrée par X est exhaustive.

On a la définition équivalente suivante compte tenu des propriétés de l'espérance conditionnelle:

Définition II. 6.

Une sous σ-algèbre $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ est exhaustive, si quelle que soit la statistique réelle X $\mathcal{P}$-intégrable sur la structure il existe une détermination de l'espérance conditionnelle $E_\theta^{\mathcal{B}}(X)$ indépendante de θ dans Θ.

Cela revient à dire que l'opérateur espérance conditionnelle est un projecteur de $L_1(\Omega,\mathcal{A},\mathcal{P})$ sur $L_1(\Omega,\mathcal{B},\mathcal{P}_{\mathcal{B}})$

Pour tout $X \in L_1(\Omega,\mathcal{A},\mathcal{P})$ la projection $X_{\mathcal{B}} = E^{\mathcal{B}}(X)$ est une statistique appartenant à $L_1(\Omega,\mathcal{B},\mathcal{P}_{\mathcal{B}})$ ayant même image que X ($\beta_{X_{\mathcal{B}}} = \beta_X$) lorsqu'elle est définie.

Par extension, si Y est une statistique vectorielle $\mathcal{P}$-intégrable à valeurs dans $(\mathbb{R}^p,\mathcal{R}^p)$ on appelle encore "projection" de Y sur $\mathcal{B}$ la statistique $Y_{\mathcal{B}} = E^{\mathcal{B}}(Y)$, ayant la propriété :

Théorème II. 7. (Rao - Blackwell - Kolmogorof)

Quelle que soit la fonction numérique g continue et convexe sur $\mathbb{R}^p$, la fonction $g(Y_{\mathcal{B}} - E_\theta(Y_{\mathcal{B}}))$ est intégralle pour tout θ dès que $g(Y - E_\theta(Y))$ l'est et l'on a :

$$E_\theta[g(Y_{\mathcal{B}} - E_\theta(Y_{\mathcal{B}}))] \leq E_\theta[g(Y - E_\theta(Y))] \quad ; \quad \text{Pour tout } \theta \in \Theta.$$

Ce théorème fondé sur l'inégalité de Jensen, ainsi que ces notions de projection seront détaillées au chapitre suivant dans un cadre plus général.

Les propriétés immédiates de transitivité et de limites de σ-algèbres exhaustives sont rassemblées dans [2]. Lorsque la structure statistique est dominée on a le théorème de caractérisation suivant :

Théorème II. 8.

Soit P^* une probabilité privilégiée dominant $\mathcal{P}$. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une sous σ-algèbre $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ soit exhaustive est qu'il existe, pour chaque $\theta \in \Theta$ une P^*-version $\mathcal{B}$-mesurable de la densité $p_\theta = \frac{dP_\theta}{dP^*}$.

Corollaire 1.

Si la structure est dominée, toute σ-algèbre contenant une σ-algèbre exhaustive est exhaustive.

Corollaire 2.

Dans les conditions du théorème, la σ-algèbre $\mathcal{B}^*$ engendrée par la famille $\{p_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ de densités (choisies dans les classes de P^*-équivalence de $\frac{dP_\theta}{dP^*}$) est une σ-algèbre exhaustive essentiellement minimum ou ($\mathcal{P}$-minimum). C'est-à-dire que toute sous σ-algèbre exhaustive $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ est telle que $\mathcal{B}^* \underset{\mathcal{P}}{\subset} \mathcal{B}$ (ou $\mathcal{B}^* \underset{P^*}{\subset} \mathcal{B}$).

Corollaire 3. (Théorème de factorisation).

Si la structure $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P} = \{P_\theta \ ; \ \theta \in \Theta\})$ est dominée par une mesure positive σ-finie μ sur $(\Omega, \mathcal{A})$, une condition nécessaire et suffisante pour que la sous σ-algèbre $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ soit exhaustive est qu'il existe une fonction numérique mesurable h, non négative sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et qu'il existe pour chaque $\theta \in \Theta$ une fonction numérique g_θ non négative et $\mathcal{B}$-mesurable sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telles que la densité de P_θ par rapport à μ s'écrive :

$$\frac{dP_\theta}{d\mu}(\omega) = g_\theta(\omega) . h(\omega) \ ; \ \theta \in \Theta.$$

Si $\mathcal{B}$ est engendrée par une statistique X la condition d'exhaustivité de X s'écrit : $\frac{dP_\theta}{d\mu}(\omega) = g'_\theta(X(\omega))\, h(\omega)$ où la fonction $g'_\theta(x)$ est la densité de la loi de probabilité de X, $P_\theta o X^{-1}$ par rapport à la mesure image $P^* o X^{-1}$, pour tout $\theta \in \Theta$.

Application aux structures de type exponentiel.

Avec les notations de la définition I. 6., le corollaire 3 appliqué à la densité

$$\frac{dP_\theta}{d\mu}(x) = C(\theta) \exp\{\sum_{j=1}^{s} \theta_j\, T_j(x)\}\, h(x) \quad ; \quad x \in \mathbb{R}^p,\ \theta = (\theta_1,\dots,\theta_s) \in \widetilde{\Theta},$$

montre que pour tout entier $1 \leq r \leq s$, la statistique $T = (T_1,\dots,T_r) : (\mathbb{R}^p, \mathcal{R}^p) \to (\mathbb{R}^r, \mathcal{R}^r)$ est exhaustive pour le paramètre partiel $(\theta_1,\dots,\theta_r)$ lorsque $(\theta_{r+1},\dots,\theta_s)$ est fixé.

Les théorèmes de Dynkin et de Darmois caractérisant les structures de type exponentiel par les propriétés de minimalité de la dimension ou de minimalité essentielle de la statistique vectorielle exhaustive T sont étudiés dans [2].

Remarque :

Une structure d'échantillon de taille n obtenu à partir d'une structure de type exponentiel simple est de type exponentiel (cf. chapitre I § 1) (ce qui justifie la présentation des propriétés précédentes dans le cas simple) ; la statistique exhaustive pour $(\theta_1,\dots,\theta_s)$ est

$$T(x_1,\dots,x_n) = (\sum_{i=1}^{n} T_1(x_i),\dots,\sum_{i=1}^{n} T_s(x_i)) \qquad x_i \in \mathbb{R}^p \qquad i=1,\dots,n$$

dont la dimension ne dépend pas de n.

Complétion et exhaustivité.

Les σ-algèbres (statistiques) à la fois exhaustives et complètes jouent un rôle particulier (comme on le verra au chapitre III). La propriété suivante de Lehmann-Scheffé [23] permet de répondre partiellement au problème de maximalité des σ-algèbres complètes posé au § 1.

Théorème II. 9.

Dans une structure statistique dominée $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ toute sous σ-algèbre $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$, exhaustive et quasi-complète est essentiellement équivalente à la σ-algèbre exhaustive $\mathcal{P}$-minimum $\mathcal{B}^*$.

Démonstration.

Si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont deux σ-algèbres exhaustives telles que pour tout $A \in \mathcal{A}$, $P^{\mathcal{B}_1}(A) = P^{\mathcal{B}_2}(A)$ $\mathcal{P}$-p.s alors $\mathcal{B}_1 \underset{\mathcal{P}}{=} \mathcal{B}_2$. Montrons qu'il en est ainsi pour $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}^*$. On a $\mathcal{B}^* \underset{\mathcal{P}}{\subset} \mathcal{B}$ par définition de $\mathcal{B}^*$; la fonction $f = P^{\mathcal{B}}(A) - P^{\mathcal{B}^*}(A)$ est bornée et $\mathcal{B}$-mesurable et $\int_\Omega f dP = 0$ quelque soit $P \in \mathcal{P}$; $\mathcal{B}$ étant quasi-complète, $f \underset{\mathcal{P}}{=} 0$, quelque soit $A \in \mathcal{A}$.*

Corollaire 1.

Soit $\mathfrak{S}_e$ le sous-ensemble de $\mathfrak{S}$ de toutes les σ-algèbres exhaustives, si l'intersection $\mathfrak{S}_e \cap \mathfrak{S}_{qc}$ est non vide, elle se réduit à (la classe d'équivalence essentielle de) $\mathcal{B}^*$.

Ce qui signifie que si la σ-algèbre exhaustive $\mathcal{P}$-minimum est quasi-complète c'est une σ-algèbre quasi-complète $\mathcal{P}$-maximale dans $\mathfrak{S}_{qc}$ (non nécessairement unique).

Corollaire 2.

Si la structure dominée $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ est quasi-complète, il n'existe pas de σ-algèbre exhaustive strictement contenue dans $\mathcal{A}$. (En effet, la σ-algèbre exhaustive $\mathcal{P}$-minimum est équivalente à $\mathcal{A}$).

§ 3. σ-ALGEBRES ET STATISTIQUES LIBRES.

Définition II. 10.

Pour une structure statistique $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P} = \{P_\theta \ ; \ \theta = (\theta_1, \theta_2) \in \Theta \subset \Theta_1 \times \Theta_2\})$ un ensemble $A \in \mathcal{A}$ est libre (par rapport à θ) [resp. (par rapport à θ_1)] si $P_\theta(A)$ ne dépend pas de θ dans Θ [resp. de θ_1 dans $\Theta_1 \cap \Theta$ pour tout θ_2 fixé].

La restriction ne sera plus mentionnée dans les définitions puisque la la liberté de A par rapport à θ_1 est identique à la liberté de A dans la structure partielle $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}' = \{P_{\theta_1, \theta_2} \ ; \ \theta_1 \in \Theta_1 \cap \Theta\})$ pour tout θ_2 fixé.

Une sous σ-algèbre $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ est libre si elle est constituée d'ensembles libres, une statistique $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Sigma, \mathcal{J})$ est libre si la σ-algèbre $X^{-1}(\mathcal{J})$ dans $\mathcal{A}$ est libre.

Si X est une statistique libre, sa loi de probabilité $P_\theta o X^{-1}$ sur $(\Sigma, \mathcal{J})$ ne dépend pas de θ puisque la structure restreinte $(\Omega, X^{-1}(\mathcal{J}), \mathcal{P}_{X^{-1}(\mathcal{J})})$ est en fait un espace probabilisé. Tout ensemble libre par rapport à la famille co($\mathcal{P}$) enveloppe convexe de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$ et si la structure statistique est dominée, pour toute probabilité privilégiée P^* la loi de probabilité de X est $P^* o\, X^{-1}$ sur $(\Sigma, \mathcal{J})$.

Si θ_1 joue le rôle de paramètre importun, une statistique X libre par rapport à θ_1 permet de l'éliminer dans la structure image $(\Sigma, \mathcal{T}, \mathcal{P} \circ X^{-1})$.

Propriétés immédiates.

1. La classe $\mathcal{L}$ de tous les ensembles libres dans $\mathcal{A}$ est non vide : elle contient $\emptyset$, Ω et tous les ensembles $\mathcal{P}$-négligeables et leurs complémentaires ; de plus elle est σ-additive, c'est-à-dire ([30] p. 19).

a. A, B $\in \mathcal{L}$ implique $A + B \in \mathcal{L}$ si $A \cap B = \emptyset$ et $A \setminus B \in \mathcal{L}$ si $A \supset B$;

b. Si $\{A_n\}_{n \in N}$ est une suite croissante d'ensembles dans $\mathcal{L}$,

$\lim\limits_n A_n \in \mathcal{L}$.

La famille $\mathcal{L}$ n'est pas en général une σ-algèbre, car elle n'est pas nécessairement stable pour l'intersection. (Dans [5] Basu et Ghosh donnent des exemples très particuliers de familles de mesures sur la droite, admettant une σ-algèbre libre maximum ($\mathcal{L}$).).

La famille $\mathfrak{S}_\ell$ de toutes les σ-algèbres libres est inductive pour l'inclusion il existe donc dans $\mathcal{L}$ des σ-algèbres libres $\mathcal{P}$-maximales.

2. Un ensemble A non équivalent à $\emptyset$ ou Ω est libre si et seulement si la σ-algèbre engendrée par A n'est pas complète. En effet, soit $\mathcal{A}_o = \{\emptyset , A , A^c , \Omega\}$; si A est libre de probabilité α , la statistique réelle étagée $X = 1_A - \alpha$ est telle que $\int_\Omega X dP_\theta = 0$ pour tout $\theta \in \Theta$ et n'est pas $\mathcal{P}$-équivalente à 0. Inversement, si $\mathcal{A}_o$ n'est pas complète, il existe une statistique réelle étagée $X = \alpha_1 1_A + \alpha_2 1_{A^c}$ telle que α_1 et α_2 sont non nuls

et $\alpha_1 P_\theta(A) + \alpha_2 P_\theta(A^c) = 0$ quelque soit θ donc $P_\theta(A) = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}$ et A est libre.

Définition II. 11.

On dira que la structure statistique $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ est faiblement complète, si toute bipartition mesurable de Ω engendre une (σ-) algèbre complète.

Il est alors équivalent de dire qu'il n'existe pas d'ensemble libre non trivial.

Si la structure statistique est quasi-complète, elle est faiblement complète. Ces propriétés sont à rapprocher des corollaires 1 et 2 du Théorème II. 9. :

Si la structure statistique est quasi-complète la σ-algèbre exhaustive $\mathcal{P}$-minimum est $\mathcal{A}$ la σ-algèbre libre $\mathcal{P}$-maximum est $\mathcal{B}_o = \{\emptyset, \Omega\}$.

Des conditions suffisantes pour qu'une structure soit faiblement incomplète seront données au chapitre IV.

§ 4. σ-ALGEBRES ET STATISTIQUES INVARIANTES.- APPLICATIONS.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P} = \{P_\theta ; \theta \in \Theta\})$ une structure statistique invariante par rapport à un groupe G de transformations sur Ω (Chapitre I, définition I. 25)

Définition II. 12.

"Un ensemble $A \in \mathcal{A}$ est invariant par rapport au groupe G si quelque soit $g \in G$ on a $g^{-1}(A) = A$.

Une sous σ-algèbre $\mathcal{F}$ de $\mathcal{A}$ est invariante par rapport à G si elle est constituée d'ensembles invariants(*). On note $\mathcal{I}_G$ la σ-algèbre invariante maximum, c'est-à-dire, la σ-algèbre de tous les ensembles invariants par rapport à G dans $\mathcal{A}$.

Une statistique $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Sigma, \mathcal{S})$ est invariante [resp. invariante maximale] si $X^{-1}(\mathcal{S})$ est une σ-algèbre invariante [resp. si $X^{-1}(\mathcal{S}) = \mathcal{I}_G$]".

Remarques :

1. Cette définition ne fait pas intervenir la famille de probabilités $\mathcal{P}$. On peut exiger la propriété plus faible d'invariance essentielle pour un ensemble $A \in \mathcal{A}$ définie par $g^{-1}(A) \Delta A \in \mathcal{N}(\mathcal{P})$, de même pour une σ-algèbre.

2. L'invariance de la σ-algèbre $\mathcal{F}$ implique l'invariance de la structure restreinte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}_{\mathcal{F}})$ mais ces deux propriétés nesont pas équivalentes car elles ne se réfèrent pas aux mêmes objets.

(*) Cette propriété est différente de l'invariance globale de $\mathcal{F}$ qui serait définie par : $g^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$; mais il n'y a pas d'ambiguïté ici à utiliser cette terminologie.

3. La σ-algèbre $\mathcal{B}_o = \{\emptyset, \Omega\}$ est invariante, d'après les hypothèses faites sur G ; elle est invariante maximum, si le groupe G opère transitivement dans Ω, et dans ce cas les seules statistiques invariantes sont les constantes.

4. Les orbites de G dans Ω étant supposées $\mathcal{A}$-mesurables, l'espace quotient Ω/G est constitué des atomes de la σ-algèbre $\mathfrak{J}_G$. ([30] p. 7)

Si $G\omega$ est une orbite, soit $B \subset G\omega$, $B \neq \emptyset$, $B \in \mathfrak{J}_G$, supposons qu'il existe $\omega' \in G\omega$ et $\omega' \notin B$. Pour tout $\omega_1 \in B$, il existe $g \in G$ tel que $\omega' = g\omega_1$, comme $gB = B$ pour tout $g \in G$ $\omega' \in B$ nécessairement, d'où la contradiction. Inversement, si A est un atome de $\mathfrak{J}_G$, en remarquant qu'il ne peut être contenu que dans une seule orbite, il est nécessairement égal à celle-ci.

Si Ω/G a un nombre fini d'éléments, $\mathfrak{J}_G$ est donc l'algèbre engendrée par les orbites de G dans Ω.

Proposition II. 13.

"Si la σ-algèbre $\mathcal{S}$ contient les parties de Σ réduites à un point, une condition nécessaire et suffisante pour que la statistique $(\Omega, \mathcal{A}) \to (\Sigma, \mathcal{S})$ soit invariante par rapport à G est que pour tout $g \in G$ on ait $X o g = X$".

Si $X o g = X$, quelque soit $S \in \mathcal{S}$ on a $X^{-1}(S) = g^{-1}(X^{-1}(S))$ donc $X^{-1}(\mathcal{S})$ est une σ-algèbre invariante dans .

Inversement, si $X^{-1}(\mathcal{S})$ est invariante par rapport à G, quels que soient $s \in \Sigma$ et $g \in G$, $\omega \in X^{-1}(\{s\})$ est équivalent à $g\omega \in X^{-1}(\{s\})$ par suite $X(g\omega) = X(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$ et pour tout $g \in G$, soit $X o g = X$. C'est-à-dire que X est constante sur les orbites de G dans Ω. Il existe donc une application $\tilde{X} : \Omega/G \to \Sigma$ telle que $X = \tilde{X} \circ \pi$.

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "X"'] & \Omega/G \arrow[dl, "\tilde{X}"] \\ \Sigma & \end{tikzcd}$$

- La condition nécessaire se démontre directement, en utilisant la remarque 4, et le fait que sous l'hypothèse faite sur $\mathcal{J}$, toute application mesurable $X : (\Omega, \mathfrak{I}_G) \to (\Sigma, \mathcal{J})$ est constante sur les atomes de $\mathfrak{I}_G$.

Corollaire 1.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une σ-algèbre $\mathfrak{F}$ dans Ω soit invariante par rapport au groupe G est que pour toute statistique réelle X, $\mathfrak{F}$-mesurable et pour tout $g \in G$ on ait $X o g = X$.

Corollaire 2.

Si X est une statistique invariante maximale, l'application χ est injective.

Il faut montrer que si X engendre $\mathfrak{I}_G$, elle prend des valeurs distinctes sur des orbites distinctes. Supposons que ω et ω' soient deux points de Ω appartenant à deux orbites distinctes O et O' et que $X(\omega) = X(\omega')$. 1_O et $1_{O'}$ sont deux statistiques réelles $_G$-mesurables, il existe une fonction réelle mesurable h sur $(\Sigma, \mathcal{J})$ telle que $1_O = hoX$ on a $1_O(\omega) = 1$ et $1_O(\omega') = 0$ d'où $hoX(\omega) = 1$ et $hoX(\omega') = 0$ or $h(X(\omega)) = h(X(\omega'))$ pour tout h d'où la contradiction *

Pour caractériser complètement les statistiques invariantes maximales, il est nécessaire d'utiliser le lemme suivant :

Lemme ([22] p. 216)

Si l'application χ associée à X est injective, toute statistique réelle invariante est fonction de X.

La condition sur χ s'écrit : $X(\omega_1) = X(\omega_2) \Rightarrow$ il existe $g \in G$ tel que $\omega_2 = g\,\omega_1$; si Y est une statistique réelle invariante, on aura par suite $Y(\omega_1) = Y(\omega_2)$ il existe donc une fonction $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ telle que $Y(\omega) = f(X(\omega))$, $\omega \in \Omega$.

Remarque : f n'est pas nécessairement $\mathcal{J}$-mesurable et on ne peut pas conclure que Y est $X^{-1}(\mathcal{J})$-mesurable.

- Cependant si $\mathcal{J}$ est la famille de tous les sous-ensembles S de Σ tels que $X^{-1}(S) \in \mathcal{A}$, f est $\mathcal{J}$-mesurable, en effet $Y = f(X)$ et Y, $\mathcal{A}$-meusurable, impliquent que pour tout borélien $B \in \mathcal{R}$, $Y^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ et $Y^{-1}(B) = X^{-1}(f^{-1}(B))$ donc $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

- Dans la plupart des cas pratiques, X est une statistique vectorielle et la σ-algèbre borélienne, si $(\Omega, \mathcal{A})$ est $(\mathbb{R}^n, \mathcal{R}^n)$ et s'il existe une statistique vectorielle X' telle que la correspondance $\omega \to (x = X(\omega),\ x' = X'(\omega))$ soit biunivoque et bi-mesurable ; si Y est une fonction mesurable de ω, il existe une fonction mesurable φ de (x,x') telle que $Y(\omega) = \varphi(X(\omega), X'(\omega))$ dont la section en x'. $\varphi_{x'}(x)$ est mesurable, par suite si Y ne dépend que de X, φ ne dépend que de x et $f = \varphi_{x'}(x)$ pour tout x', est mesurable.

Proposition II. 14.

Dans l'une des conditions précédentes, une condition nécessaire et suffisante pour que la statistique $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Sigma, \mathcal{J})$ invariante par rapport à G soit invariante maximale est que l'application $: \Omega/G \to \Sigma$ telle que $X = X o \pi$ soit injective.

- La condition nécessaire est le corollaire 2 de la proposition II. 13. Pour la condition suffisante il faut montrer que si X est injective X engendre $\mathfrak{J}_G$. On a $X^{-1}(\mathcal{J}) \subset \mathfrak{J}_G$ soit $C \in \mathfrak{J}_G$, la statistique réelle 1_C est invariante, il existe d'après le lemme et les conditions de la remarque une application $\mathcal{J}$-mesurable f telle que $1_C = f o X$ donc 1_C est $X^{-1}(\mathcal{J})$-mesurable, soit $C \in X^{-1}(\mathcal{J})$ et $X^{-1}(\mathcal{J}) = \mathfrak{J}_G$. *

Proposition II. 15. Principe de réduction par invariance.

Supposons Θ muni d'une σ-algèbre $\mathcal{T}$ rendant mesurables les transformations $\bar{g}$ du groupe $\bar{G}$ opérant dans Θ et telle que P_θ soit une probabilité de transition de $(\Theta,\mathcal{T})$ vers $(\Omega,\mathcal{A})$. Soit $\mathfrak{J}_{\bar{G}}$ la σ-algèbre invariante maximum dans $\mathcal{T}$ par rapport à $\bar{G}$, alors ,

<u>La restriction</u> $P_{\theta,\mathfrak{J}_G}$ <u>de</u> P_θ <u>à</u> $\mathfrak{J}_G$ $(P_\theta \in \mathcal{P})$ <u>est une probabilité de transition de</u> $(\Theta,\mathfrak{J}_{\bar{G}})$.

<u>Démonstration</u>.

Il faut montrer que quelque soit $F \in \mathfrak{J}_G$, la fonction de θ, $P_\theta(F)$ est $\mathfrak{J}_{\bar{G}}$ -mesurable. Or, si $F \in \mathfrak{J}_G$, pour tout $g \in G$ on a $g^{-1}(F) = F$ donc pour tout $\theta \in \Theta$ et pour tout $g \in G$, $P_\theta(g^{-1}(F)) = P_{\bar{g}(\theta)}(F) = P_\theta(F)$. Cette dernière égalité montre que la fonction réelle $P.(F)$ est invariante par rapport au groupe $\bar{G}$ sur Θ, donc $\mathfrak{J}_{\bar{G}}$-mesurable.

<u>Corollaire 1</u>.

L'image de toute statistique réelle X invariante par rapport au groupe G sur Ω est invariante par rapport au groupe $\bar{G}$ sur Θ. (Il suffit d'appliquer la proposition I. 18 au résultat de la proposition précédente).

<u>Corollaire 2</u>.

<u>Si $\bar{G}$ est transitif sur</u> Θ, $\mathfrak{J}_G$ <u>est une σ-algèbre libre pour la structure</u> en effet, sous cette condition, $\mathfrak{J}_{\bar{G}} = \{\emptyset ,\Theta\}$ donc pour tout $F \in \mathfrak{J}_G$, la fonction $P.(F)$ $\mathfrak{J}_{\bar{G}}$-mesurable d'après la proposition, est constante.

<u>Corollaire 3</u>.

<u>Si $\bar{G}$ est réduit à la transformation identique sur Θ</u> , <u>et si la structure est dominée</u> , $\mathfrak{J}_G$ <u>est une σ-algèbre exhaustive</u>.

La condition sur $\bar{G}$ signifie que pour tout $\theta \in \Theta$ et tout $\bar{g} \in G$; $\bar{g}(\theta) = \theta$, autrement dit, que les probabilités $P_\theta \in \mathcal{P}$ sont des mesures invariantes par rapport à g, sur $(\Omega, \mathcal{A})$ au sens habituel du terme :

Pour tout $\theta \in \Theta$ et $g \in G$,
$P_\theta(g^{-1}(A)) = P_{\bar{g}(\theta)}(A) = P_\theta(A)$ soit $P_\theta og = P_\theta$ pour tout θ et g

Si P^* est une probabilité privilégiée, pour tout $A \in \mathcal{A}$ et tout $g \in G$:

$$P^*(g^{-1}(A)) = \sum_{i\geq 1} c_i P_{\theta_i}(g^{-1}(A)) = \sum_{i\geq 1} c_i P_{\bar{g}(\theta_i)}(A) = \sum_{i\geq 1} c_i P_{\theta_i}(A) = P^*(A)$$

soit $P^* og = P^*$ pour tout $g \in G$, P^* est une mesure invariante par rapport à g. Par suite, pour tout $\theta \in \Theta$ il existe une version (P^*) $\mathfrak{J}_G$ -mesurable de la densité $\frac{dP_\theta}{dP^*}$ (*).

- La condition sur $\bar{G}$ signifie aussi que $\bar{\mathfrak{J}}_{\bar{G}} = \mathcal{T}$, donc maximum.

On note la correspondance $\mathfrak{J}_G - \bar{\mathfrak{J}}_{\bar{G}}$ donnée dans les corollaires 2 et 3. Si $\bar{\mathfrak{J}}_{\bar{G}}$ est maximum $(= \mathcal{T})$, $\mathfrak{J}_G$ est exhaustive ; si $\bar{\mathfrak{J}}_{\bar{G}}$ est minimum $= (\{\emptyset, \Theta\})$, $\mathfrak{J}_G$ est libre.

Exemples II. 16.

1. Une structure d'échantillon $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \mathcal{P})^n$ (**) est invariante par rapport au groupe G des n! permutations des coordonnées du vecteur des n observations. Une statistique invariante maximale par rapport à G est la statistique d'ordre X_o

(*) [31] p. 37 ou [6].

(**) de l'exemple I. 26 (2).

$$X_o(x_1,\dots x_n) = (x_1^* \leq \dots \leq x_n^*).$$

(cf. exemple II. 1). De plus, par définition $\mathcal{P}^n$ est une famille de probabilités invariantes par rapport à G, $\bar{G}$ vérifie la condition du corollaire 3, et X_o est une statistique exhaustive.

2. Dans l'exemple I. 26 (1), soient $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ et $A = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})\,{}^t(x_i - \bar{x})$ respectivement la moyenne et la matrice de covariance empiriques de l'échantillon. On montre ([1] p. 115) que la statistique $X = {}^t\bar{x}\, A^{-1}\, \bar{x}$ est invariante maximale par rapport au groupe linéaire G opérant sur chaque coordonnée (cf. ex.).

Mais le groupe $\bar{G}$ associé n'est transitif que si l'on suppose $m = 0$. En effet, quelle que soit $\Lambda \in \mathbb{S}_p^+$, il existe une matrice $\mathbb{C} \in G$ telle que $\mathbb{C}\,\Lambda\,{}^t\mathbb{C} = I$. Le corollaire 2 implique que la statistique réelle $X = {}^t\bar{x}\, A^{-1}\, \bar{x}$ est libre pour la structure

$$(\mathbb{R}^p, \mathcal{R}^p, N(\mathbb{O},\Lambda)_{\Lambda \in \mathbb{S}_p^+})^n \quad ; \quad n > p.$$

Si $p = 1$, la structure $(\mathbb{R}^p, \mathcal{R}^p, N(m,\sigma)_{(m,\sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+})^n$ est invariante par rapport au groupe linéaire G :

$$g_{a,b}(x_1,\dots,x_n) = (ax_1 + b,\dots,ax_n + b) \quad ; \quad a \in \mathbb{R}^+,\ b \in \mathbb{R}.$$

Le groupe $\bar{G}$ est défini par $\bar{g}_{a,b}(m,\sigma) = (am + b,\ a\sigma)$, il est transitif, puisque $(0,1)$ appartient à l'orbite de tout couple (m,σ).

Une statistique invariante maximale pour G -donc libre- est :

$$X(x_1,\ldots,x_n) = \left(\frac{x_1 - \bar{x}}{s} \quad , \ldots. , \frac{x_n - \bar{x}}{s}\right)$$

où $\bar{x}$ et s^2 sont la moyenne et la variance empiriques de l'échantillon.

- Les considérations d'invariance dans une structure statistique sont donc très utiles pour la construction de statistiques libres.

CHAPITRE III

DUALITE DES NOTIONS DE LIBERTE ET D'EXHAUSTIVITE,

LIBERTE CONDITIONNELLE - APPLICATIONS.

DUALITE DES NOTIONS DE LIBERTE ET D'EXHAUSTIVITE,

LIBERTE CONDITIONNELLE - APPLICATIONS.

Dans ce chapitre nous étudions différents aspects de la dualité des notions de statistique libre et de statistique exhaustive. Le premier paragraphe est consacré aux théorèmes classiques d'indépendance stochastique de telles statistiques sur une même structure. Au paragraphe 2, on étudie la décomposition optimale de l'information sur le paramètre, contenue dans un échantillon empirique, en donnant quelques exemples. Puis on présente la notion de liberté conditionnelle pour une statistique, dont la liberté et l'exhaustivité apparaissent comme une extrapolation ; une caractérisation en est donnée ainsi qu'une extension des théorèmes d'indépendance utilisant la notion de complétion conditionnelle, fournissant ainsi une condition de transitivité pour une suite exhaustive de statistiques dans une structure séquentielle.

Enfin, on présente la notion plus générale de sous-espaces de statistiques partiellement exhaustifs introduits par LINNIK et KAGAN et quelques applications à la théorie de l'estimation sans biais.

Dans tout ce chapitre, la structure statistique générale $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P} = \{P_\theta, \theta = (\theta_1, \theta_2) \in \Theta \subset \Theta_1 \times \Theta_2\})$ est donnée une fois pour toutes. $\mathfrak{S}$ désigne la famille des sous σ-algèbres de $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_0$ la plus petite : $\{\emptyset, \Omega\}$.

§ 1. THEOREMES D'INDEPENDANCE ENTRE LES σ - ALGEBRES (STATISTIQUES) LIBRES ET EXHAUSTIVES.

Pour toute mesure cohérante de la quantité d'information statistique sur le paramètre θ il est clair que celle contenue dans une σ-algèbre ou une statistique exhaustive doit être maximum c'est-à-dire identique à celle de $\mathcal{A}$ ou de l'échantillon tandis que celle contenue dans une σ-algèbre ou une statistique libre doit être nulle. (C'est le cas pour l'information de R. A. FISHER). Ceci est illustré par les théorèmes d'indépendance rappelés dans ce paragraphe.

On utilisera la terminologie suivante :

Une statistique réelle $X \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ est libre <u>en moyenne conditionnelle à une sous σ-algèbre $\mathfrak{F}$ de $\mathcal{A}$</u> - ou se "<u>projette sur $\mathfrak{F}$</u>"- s'il existe une détermination de l'espérance conditionnelle $E_\theta^{\mathfrak{F}}(X)$ qui ne dépende pas de θ. Elle est de <u>structure de Neyman par rapport à $\mathfrak{F}$</u> si cette version est $\mathcal{A}_0$-mesurable $(E_\theta^{\mathfrak{F}}(X) = \alpha$ quelque soit $\theta \in \Theta)$. (*)

Un ensemble $A \in \mathcal{A}$ est <u>libre conditionnellement à $\mathfrak{F}$</u> [resp. <u>de Structure de Neyman par rapport à $\mathfrak{F}$</u>] si la statistique réelle 1_A se

(*) Cette définition est généralement donnée pour une σ-algèbre $\mathfrak{F}$ exhaustive, mais elle peut être utile aussi lorsque $\mathfrak{F}$ est quelconque.

projette sur $\mathfrak{F}$ [resp. est de structure de Neyman par rapport à $\mathfrak{F}$].

Si $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}_o$, X [resp. A] est libre en moyenne [resp. libre].

Lemme de Lehmann - Scheffé ([23])

Une sous σ-algèbre $\mathfrak{F}$ de $\mathfrak{A}$ est complète [resp. quasi-complète] dans la structure $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathcal{P})$ si et seulement si toute statistique réelle, $\mathcal{P}$-intégrable [resp. bornée], libre en moyenne et se projetant sur $\mathfrak{F}$ est de structure de Neyman par rapport à $\mathfrak{F}$.

La démonstration de cette propriété importante est facile, elle sera donnée au § 3 dans un cadre plus général. Outre son utilisation dans le théorème suivant, elle sert à caractériser tous les ensembles libres, puisqu'elle entraîne en particulier que :

Tout ensemble libre est de struture de Neyman par rapport à une σ-algèbre exhaustive quasi-complète et inversement.

Théorème III. 1.

Soit $\mathcal{B} \in \mathfrak{S}$ une σ-algèbre exhaustive quasi-complète. Toute σ-algèbre libre $\mathcal{C} \in \mathfrak{S}$ est indépendante de $\mathcal{B}$ dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{A}, P_\theta)$ quelque soit $\theta \in \Theta$.

Soit $C \in \mathcal{C}$, d'après la propriété précédente $P_\theta^{\mathcal{B}}(C) = P_\theta(C) = \alpha$ quelque soit $\theta \in \Theta$ et pour tout $B \in \mathcal{B}$, et tout θ,

$$P_\theta(B \cap C) = \int_B P_\theta^{\mathcal{B}}(C)\, dP_\theta = \alpha\, P_\theta(B) = P_\theta(B).\, P_\theta(C).$$

Théorème III. 2.

Soit $\mathcal{B} \in \mathfrak{S}$ une σ-algèbre exhaustive. Si les probabilités de la famille $\mathcal{P}$ ne sont pas étrangères deux à deux sur $\mathcal{B}$, toute σ-algèbre indépendante de $\mathcal{B}$ dans tous les espaces probabilisés $(\Omega, \mathcal{a}, P_\theta)$, $\theta \in \Theta$ est libre.

Soit $\mathcal{C} \in \mathfrak{S}$ une σ-algèbre indépendante de $\mathcal{B}$ pour tout $P_\theta \in \mathcal{P}$, soit

$$B \in \mathcal{B},\ C \in \mathcal{C},\ P_\theta(B \cap C) = P_\theta(B).P_\theta(C) = \int_B P^{\mathcal{B}}(C)\, dP_\theta \quad \text{alors,}$$

$$\int_B [P^{\mathcal{B}}(C) - P_\theta(C)]dP_\theta = 0 \quad \text{quelsque soient } B \in \mathcal{B} \text{ et } \theta \in \Theta.$$

Donc : $P^{\mathcal{B}}(C) = P_\theta(C)$, P_θ - p. s pour tout θ.

L'hypothèse faite sur la famille $\mathcal{P}$ implique que

$$\theta,\ \theta' \in \Theta, \{P^{\mathcal{B}}(C) = P_\theta(C)\} \cap \{P^{\mathcal{B}}(C) - P_{\theta'}(C)\} \neq \emptyset \quad \text{et C est libre.}$$

On note que cette hypothèse est essentielle, comme le montre le contre exemple classique de Basu.

Dans la structure $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \mathcal{U}(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}) ; \theta \in 2\mathbb{Z} + \frac{1}{2})^2$ les statistiques $X_1(x_1,x_2) \to x_1$ et $X_2(x_1,x_2) \to x_2$ sont exhaustives et indépendantes, ce qui contredit le théorème.

Exemple III. 3.

Dans la structure

$$(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \{N(m,\sigma) ; (m,\sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\})^n \times (\mathbb{R}, \mathcal{R}, \{N(m',\sigma') ; (m',\sigma') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\})^n$$

correspondant à l'échantillon $(x_1,..x_n \; ; \; y_1,...y_n)$ soient

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \quad , \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i \quad , \quad S_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) \quad ;$$

$$S_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y}).$$

Pour des raisons évidentes d'invariance (cf. Exemple II. 16), la statistique :

$$X = \left(\frac{x_1 - \bar{x}}{S_x}, \ldots, \frac{x_n - \bar{x}}{S_x} \; ; \; \frac{y_1 - \bar{y}}{S_y}, \ldots, \frac{y_n - \bar{y}}{S_y}\right)$$

est libre par rapport à $\theta = (m, m', \sigma, \sigma')$.

La statistique $Y = (\bar{x}, \bar{y}, S_x^2, S_y^2)$ est exhaustive complète (cf. Exemple II. 4.), pour θ. Elles sont donc indépendantes quels que soient m, m', σ, et σ', de même que les statistiques f(X) et g(Y) où f et g sont des fonctions mesurables respectivement sur $\mathbb{R}^{2n}$ et $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^2$, en particulier, le coefficient de corrélation empirique

$$R = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \; / \; S_x S_y$$

est une statistique indépendante de Y, ce qui est long à montrer directement.

§ 2. DECOMPOSITION D'UNE STRUCTURE STATISTIQUE.

Etant donnés les liens de complémentarité entre les notions de liberté et d'exhaustivité et l'utilité dans certains cas de disposer de statistiques libres, il est intéressant d'étudier dans quelles conditions, il est possible de "décomposer l'information" contenue dans un échantillon empirique ; nous proposons ici une approche du problème. Il est bien entendu nécessaire ici de supposer que la structure statistique $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ est faiblement incomplète (définition II. 11) c'est-à-dire possédant des ensembles libres non triviaux dans $\mathcal{A}$.

Définition III. 4.

On appelle décomposition de la structure faiblement incomplète et dominée $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ tout couple $(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ de sous σ-algèbres engendrant $\mathcal{A}$, où $\mathcal{C}$ est libre et $\mathcal{B}$ exhaustive.

On adopte la même définition pour une statistique $D = (X, Y) : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Lambda \times \Sigma, \mathcal{L} \otimes \mathcal{S})$ lorsque les σ-algèbres $X^{-1}(\mathcal{L})$ et $Y^{-1}(\mathcal{S})$ forment une décomposition de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$.

Une décomposition est intéressante si elle est optimale au sens ou $\mathcal{C}$ est une σ-algèbre libre $\mathcal{P}$-maximale et $\mathcal{B}$ est exhaustive $\mathcal{P}$-minimum.

Proposition III. 5.

Une condition suffisante pour qu'une décomposition $(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ soit une décomposition optimale est que $\mathcal{B}$ soit quasi-complète. $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$ sont alors indépendantes pour tout $P \in \mathcal{P}$ et $\mathcal{C} \underset{\Lambda}{} \mathcal{B} \underset{\mathcal{P}}{=} \mathcal{A}_o$

a) Soit $\mathcal{B}^*$ la σ-algèbre exhaustive $\mathcal{P}$-minimum pour la structure dominée $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$. $\mathcal{B}$ est exhaustive par définition, le théorème II. 9. implique $\mathcal{B} \underset{\mathcal{P}}{=} \mathcal{B}^*$.

b) Supposons qu'il existe une σ-algèbre $\mathcal{C}'$ libre et contenant strictement $\mathcal{C}$.

On a encore $\mathcal{C}' \wedge \mathcal{B} \underset{\mathcal{P}}{=} \mathcal{A}_0$ puisque $\mathcal{B}$ est quasi-complète. Donc $\mathcal{C} \vee \mathcal{B}$ $(= \mathcal{A})$ est strictement contenue dans $\mathcal{C}' \vee \mathcal{B}$ ce qui est impossible puisque $\mathcal{C}' \vee \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. $*$

Si $D = (X,Y)$ est une décomposition où Y est une statistique quasi-complète la structure image par D, de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ est une structure produit (au sens de la définition I. 8.).

$$(\Lambda \times \Sigma, \ \mathcal{L} \otimes \mathcal{S}, \ \mathcal{P} \circ D^{-1}) = (\Lambda, \mathcal{L}, \ P^*_0 X^{-1}) \times (\Sigma, \mathcal{S}, \ \mathcal{P} \circ Y^{-1})$$

puisque X et Y sont indépendantes pour tout $P \in \mathcal{P}$. (P^* est une probabilité privilégiée dominant $\mathcal{P}$).

Remarquons que cette proposition permet de voir si une σ-algèbre libre est $\mathcal{P}$-maximale.

<u>Exemples III. 6.</u>

1. La structure d'échantillon $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \mathcal{P}\{N(\theta,1) \ ; \ \theta \in \mathbb{R}\})^n$ admet la décomposition optimale : $D = (X, Y) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$

$$(x_1,\dots,x_n) \to D(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} X = \left(x_2 - \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i, \dots, x_n - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \\[2ex] Y = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \ . \end{cases}$$

L'application D : $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est biunivoque et bimesurable. Donc (X,Y) engendre bien $\mathbb{R}^n$. Y est exhaustive complète, $\mathcal{P}$-minimum ; X est libre par invariance (Proposition II. 15 Corollaire 2 et Exemple II. 16). X est donc une statistique libre $\mathcal{P}$-maximale.

Il en est de même pour la décomposition :

D' = (X', Y) où $X' = (x_2 - x_1, \ldots , x_n - x_1)$

2. Soit $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \mathcal{P})^n$ où $\mathcal{P}$ désigne la famille de toutes les lois de probabilité absolument continues sur $\mathbb{R}$. Une décomposition optimale de cette structure est

$$(x_1,\ldots,x_n) \rightarrow (X = (r_1,\ldots,r_n) \quad ; \quad Y = (x_1^*,\ldots,x_n^*))$$

où $(r_1, \ldots,r_n)$ est une permutation de $\{1, 2, \ldots n\}$ définie à partir de l'échantillon par r_i = rang de x_i dans la suite $Y = x_1^* < \ldots < x_n^*$. Y étant la statistique d'ordre exhaustive déjà envisagée. (cf. exemple II. 16) Y est complète comme il est démontré dans [22] p. 133 ; donc $\mathcal{P}$-minimum.

X est une statistique maximale invariante par rapport au groupe des transformations opérant sur chaque observation :

$g \in G$, $(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow (g(x_1) , \ldots, g(x_n))$ où g est une fonction continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On montre que le groupe $\bar{G}$ associé, sur $\mathcal{P}$ est transitif ([22] p. 254). X est donc une statistique libre $\mathcal{P}$-maximale.

La σ-algèbre engendrée par X dans $\mathcal{R}^n$, est la σ-algèbre finie engendrée par la partition de $\mathbb{R}^n$ des n! cônes de sommet O dont les génératrices sont les droites $x_{i_1} = x_{i_2} = \ldots = x_{i_p}$; $1 \leq i_1 < \ldots i_p \leq n$, $p = 1, \ldots, n$.

La σ-algèbre engendrée par Y dans $\mathcal{R}^n$ est la σ-algèbre des ensembles boréliens symétriques par rapport à la droite $x_1 = \ldots = x_n$; déjà envisagée dans l'exemple II. 1.

§ 3. LIBERTE CONDITIONNELLE ET THEOREME D'INDEPENDANCE CONDITIONNELLE.

Il apparaît que la définition de l'exhaustivité s'exprime en termes de liberté par rapport à une "loi" de probabilité conditionnelle ; on étend ici la notion de liberté à celle de liberté conditionnelle. Cette démarche n'est pas ici motivée par la résolution d'un problème pratique particulier, mais elle amène à considérer une relation sur l'ensemble $\mathfrak{S}$ des sous σ-algèbres de $\mathcal{A}$ qui illustre bien la dualité des deux notions.

1. Définitions et notation.

On considère la structure statistique générale donnée au début du chapitre. Soient $\mathcal{H}$ une famille de parties, et $\mathcal{B}$ une σ-algèbre dans $\mathcal{A}$.

Définition III. 7.

On dira que $\mathcal{H}$ est libre conditionnellement à $\mathcal{B}$ par rapport à θ [resp. θ_1] si tout ensemble H dans $\mathcal{H}$ est libre conditionnellement à $\mathcal{B}$ par rapport à θ [resp. θ_1]. C'est-à-dire qu'il existe une détermination de $P_\theta^{\mathcal{B}}(H)$ qui soit indépendante de θ [resp. de θ_1].

On note $\mathcal{H} \,\llcorner\, \mathcal{B}$. [resp. $\mathcal{H} \,\underset{\theta_1}{\llcorner}\, \mathcal{B}$].

La restriction à θ_1 revient à se placer dans une structure partielle (θ_2 fixé), elle ne sera donc pas mentionnée dans les autres définitions ou propriétés générales.

Propriété III. 8.

Soit $\sigma(\mathcal{H})$ la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{H}$. Si $\mathcal{H} \sqcup \mathcal{B}$ et si toute intersection finie d'ensembles de $\mathcal{H}$ est libre conditionnellement à $\mathcal{B}$ alors $\sigma(\mathcal{H}) \sqcup \mathcal{B}$.

La classe $\mathcal{H}_1$ constituée de $\emptyset, \Omega$ et des ensembles tels que H ou H^c appartienne à $\mathcal{H}$ est telle que $\mathcal{H}_1 \sqcup \mathcal{B}$. La classe $\mathcal{H}_2$ des intersections finies d'ensembles de $\mathcal{H}_1$ est telle que $\mathcal{H}_2 \sqcup \mathcal{B}$ par hypothèse; la classe $\mathcal{H}_3$ des sommes finies d'ensembles de $\mathcal{H}_2$ deux à deux disjoints qui est l'algèbre de Boole engendrée par $\mathcal{H}$ vérifie $\mathcal{H}_3 \sqcup \mathcal{B}$. Enfin la propriété se conserve pour la classe monotone $\sigma(\mathcal{H})$ engendrée par $\mathcal{H}_3$ en vertu des propriétés de continuité de l'espérance conditionnelle. *

On étudie maintenant le cas où $\mathcal{H}$ est une σ-algèbre.

Proposition III. 9.

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$ deux σ-algèbres dans $\mathcal{A}$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{C} \sqcup \mathcal{B}$ est que $(\mathcal{C} \vee \mathcal{B}) \sqcup \mathcal{B}$.

La condition suffisante est évidente ; inversement, il suffit de remarquer que la famille $\mathcal{C} \cup \mathcal{B}$ vérifie les conditions de la propriété III. 8 : $(\mathcal{C} \cup \mathcal{B}) \sqcup \mathcal{B}$ et pour tout $C \in \mathcal{C}$ et tout $B \in \mathcal{B}$, $P_\theta^{\mathcal{B}}(B \cap C) = 1_B . P(C) = P^{\mathcal{B}}(B \cap C)$ donc $(C \cap B) \sqcup \mathcal{B}$. *

Dire que $\mathcal{B}$ est exhaustive relativement à $\mathcal{C}$ n'a pas de sens si $\mathcal{C}$ ne contient pas $\mathcal{B}$, mais la proposition précédente montre que $\mathcal{C} \sqcup \mathcal{B}$ est équivalent à : " $\mathcal{B}$ est exhaustive dans la structure restreinte $(\Omega, \mathcal{C} \vee \mathcal{B}, P_{\mathcal{C} \vee \mathcal{B}})$".

Cas particuliers :

$\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}$ est équivalent à : " $\mathcal{B}$ est exhaustive",

$\mathcal{C} \sqcup \mathcal{A}_0$ est équivalent à : " $\mathcal{C}$ est libre".

- Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$ sont engendrées respectivement par des statistiques X et Y sur la structure, à valeurs dans $(\Sigma_x, \mathcal{J}_x)$ et $(\Sigma_y, \mathcal{J}_y)$ on dit que <u>X est libre</u> conditionnellement à Y par rapport à θ [resp. θ_1] et on note encore $X \perp Y$ [resp. $X \perp_{\theta_1} Y$].

Lorsque X et Y sont des statistiques vectorielles par exemple, $X \perp Y$ signifie que pour tout $Y = y$ fixé, la loi de probabilité conditionnelle de X à $Y = y$ est indépendant du paramètre. La proposition III. 9. exprime que $X \perp Y$ est équivalente à $(X,Y) \perp Y$; si l'on pose $T = (X,Y)$ cela signifie aussi que sur la structure image de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ par T, soit $(\Sigma_x \times \Sigma_y, \mathcal{J}_x \otimes \mathcal{J}_y, \mathcal{P}_0 T^{-1})$ la statistique Y définie par $(x,y) \to y$ est exhaustive.

<u>Exemple III. 9.</u>

Soit la structure statistique de type exponentiel (définition I. 6.)

$$(\mathbb{R}^p, \mathcal{R}^p, \{\frac{dP_\theta}{d\mu}, \theta \in \Theta\}) \quad (1)$$

$$\frac{dP_\theta}{d\mu}(x) = C(\theta) \exp \{\sum_{j=1}^{s} \theta_j T_j(x)\} h(x) \quad ; x \in \mathbb{R}^p, \theta = (\theta_1, \dots, \theta_s) \in \widetilde{\Theta} \subset \mathbb{R}^s.$$

Pour un entier r tel que $1 \leq r < s$ posons :

$\theta^1 = (\theta_1, \dots, \theta_r)$, $\theta^2 = (\theta_{r+1}, \dots, \theta_s)$; $U(x) = (T_1(x), \dots, T_r(x))$;

$V(x) = (T_{r+1}(x), \dots, T_s(x))$ de sorte que $T = (U,V)$.

Sur cette structure U est libre conditionnellement à V par rapport à θ^2. $[U \perp_{\theta^2} V]$ de même V est libre conditionnellement à U par rapport à θ^1.

$[V \perp_{\theta^1} U]$.

En effet, en se reportant à la démonstration du théorème II. 3, la structure image de (1) par T est $(\mathbb{R}^s, \mathcal{R}^s, \{P_\theta \circ T^{-1} \ ; \ \theta \in \widetilde{\Theta}\})$ où les lois $P_\theta \circ T^{-1}$ ont pour densité par rapport à la mesure $m = \nu \circ T^{-1}$ sur $\mathbb{R}^s$, $(\nu = h.\mu)$:

$$f_T(t) = \frac{d\,[P_\theta \circ T^{-1}]}{dm}(t) = C(\theta) \exp(<\theta, t>) \ ; \ \theta \in \widetilde{\Theta} \subset \mathbb{R}^s \ ; \ t \in \mathbb{R}^s.$$

qui s'écrit aussi,

$$f_{U,V}(u,v) = C(\theta) \exp(<\theta^1, u> + <\theta^2, v>).$$

En intégrant cette densité en u par rapport à la désintégration m_v (u) de m par rapport à v on obtient la densité de V :

$$f_V(v) = C(\theta)\, e^{<\theta^2, v>} \int_{\mathbb{R}^r} e^{<\theta^1, u>}\, dm_v(u)$$

d'où la densité de la loi de probabilité de U conditionnelle à V = v, par rapport à la mesure $m_v(u)$:

$$\frac{f_{U,V}(u,v)}{f_V(v)} = \frac{e^{<\theta^1, u>}}{\int_{\mathbb{R}^r} e^{<\theta^1, u>}\, dm_v(u)} \qquad u \in \mathbb{R}^r, \ \theta^1 \in \widetilde{\Theta} \cap \mathbb{R}^r$$

La loi de probabilité de U conditionnelle à V = v est indépendante de θ^2. C'est encore une loi de type exponentiel de paramètre naturel $\theta^1 \in \widetilde{\Theta} \cap \mathbb{R}^r$. *

Comme au chapitre II § 2 on obtient une <u>définition équivalente</u> et des propriétés de projection :

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{C} \perp \mathcal{B}$ est que pour toute statistique réelle positive X, $\mathcal{C}$-mesurable, $\mathcal{P}$-intégrable il existe une statistique réelle positive, $\mathcal{B}$-mesurable $\widetilde{X}$ telle que :

$$\int_{\Omega} (X - \widetilde{X}) . Z \, dP_\theta = 0 \quad \text{pour tout} \quad \theta \in \Theta,$$

pour toute statistique réelle positive Z, $\mathcal{B}$-mesurable et $\mathcal{P}$-intégrable.

Cette condition qui se déduit de la définition ci-dessus et des propriétés de l'espérance conditionnelle exprime une relation d'orthogonalité dans $L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$. Celle - ci sera définie au § 4, et permettra de généraliser ces notions de liberté conditionnelle aux "systèmes partiellement exhaustifs" de KAGAN.

2. Propriétés de la relation L sur $\mathcal{G}$.

- Si $\mathcal{B}$ est une σ-algèbre fixée dans $\mathcal{A}$, la classe $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ de tous les ensembles libres conditionnellement à $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{A}$ est non vide et σ-additive elle possède en fait les mêmes propriétés que la classe $\mathcal{L}$ (= $\mathcal{L}_{\mathcal{A}_0}$) de tous les ensembles libres, envisagée au chapitre II § 3, en particulier il existe dans $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ des σ-algèbres libres conditionnellement à $\mathcal{B}$, $\mathcal{P}$-maximales.

- Si maintenant $\mathcal{C}$ est fixée, la relation $\mathcal{C} \perp \mathcal{B}$ n'entraine pas nécessairement $\mathcal{C} \perp \mathcal{B}'$ pour $\mathcal{B}'$ contenant $\mathcal{B}$ sauf si la structure $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ est dominée et si $\mathcal{B}' \subset \mathcal{C} \vee \mathcal{B}$ d'après la proposition III. 9) l'existence d'une σ-algèbre $\mathcal{B}^*$ $\mathcal{P}$-minimum vérifiant $\mathcal{C} \perp \mathcal{B}^*$ n'est donc pas assurée dans le cas général).

On peut illustrer ce fait par le contre-exemple suivant :

Soit la structure statistique $(\mathbb{R}^2, \mathcal{R}^2, \{N(0, \Lambda(\theta)) \; ; \; |\theta| < 1\})^n$

correspondant à l'échantillon $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ où les (x_i, y_i) sont des couples indépendants de variables aléatoires normales rentrées réduites de coefficient de corrélation θ inconnu. $\Lambda(\theta)$ est la matrice de covariance $\begin{pmatrix} 1 & \theta \\ \theta & 1 \end{pmatrix}$

Les statistiques X $[(x_1,y_1), \ldots, (x_n,y_n)] \to (x_1, \ldots, x_n)$,

et Y $[(x_1,y_1), \ldots, (x_n,y_n)] \to (y_1, \ldots y_n)$

sont libres. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$ les σ-algèbres libres qu'elles engendrent respectivement dans $\mathbb{R}^{2n}$. C'est-à-dire $\mathbb{R}^n$. On a donc $\mathcal{C} \llcorner \mathcal{A}_o$ et $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}_o$ mais non $\mathcal{C} \llcorner \mathcal{B}$ car $\mathcal{C} \vee \mathcal{B} = \mathbb{R}^{2n}$ et $\mathcal{B}$ serait exhaustive. *

On remarque que le couple (X,Y) de statistiques libres sur cette structure constitue une statistique exhaustive, d'où l'importance des propriétés d'indépendance :

plus précisément on peut énoncer les propriétés suivantes :

Soient $\mathcal{C}$ une σ-algèbre libre et $\mathcal{B}$ une σ-algèbre quelconque, alors,

1°. $\mathcal{B}$ quasi-complète et $\mathcal{C} \llcorner \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$ indépendantes pour toute loi $P \in \mathcal{P}$.

2°. $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$ indépendantes pour toute loi $P \in \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{C} \llcorner \mathcal{B}$

Ces deux propriétés sont en fait des conséquences directes des démonstrations des théorèmes III. 1 et III. 2. La deuxième a pour corollaire compte tenu de la proposition III. 9 :

Si $\mathcal{C}$ est une σ-algèbre libre, toute σ-algèbre $\mathcal{B}$ indépendante de $\mathcal{C}$ pour toute loi $P \in \mathcal{P}$ et telle que $\mathcal{C} \vee \mathcal{B} = \mathcal{A}$, est exhaustive. (et fournit donc une décomposition de la structure).

3. Caractérisation de la liberté conditionnelle.

- La proposition III. 9. et son interprétation suggèrent d'appliquer ici le théorème de factorisation de FISHER-NEYMAN pour obtenir une caractérisation de la liberté conditionnelle.

Si la structure statistique $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P} = \{P_\theta \; ; \; \theta \in \Theta\})$ est dominée, soient P^* une probabilité privilégiée, et $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$ des sous σ-algèbres de $\mathcal{A}$. On peut supposer $\mathcal{C} \supset \mathcal{B}$ sans restreindre la généralité.

Proposition III. 10.

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{C} \,\llcorner\, \mathcal{B}$ dans la structure $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ est qu'il existe pour chaque $\theta \in \Theta$ une P^*-version $\mathcal{B}$-mesurable de la fonction $E^{\mathcal{C}}_{P^*}\left(\frac{dP_\theta}{dP^*}\right)$.

Pour tout $\theta \in \Theta$, P_θ est absolument continue par rapport à P^* entraine que la restriction $P_{\theta,\mathcal{C}}$ est absolument continue par rapport à la restriction $P^*_{\mathcal{C}}$. $E^{\mathcal{C}}_{P^*}\left(\frac{dP_\theta}{dP^*}\right)$ est par définition la (classe de P^*-équivalence) variable aléatoire $\frac{dP_{\theta,\mathcal{C}}}{dP^*_{\mathcal{C}}}$ ([30] p. 114).

On applique alors le théorème II. 2. à la structure restreinte $(\Omega, \mathcal{C}, \mathcal{P}_{\mathcal{C}})$. *

Corollaire 1.

Quelle que soit la σ-algèbre $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{A}$, il existe une σ-algèbre $\mathcal{B}^*$ $\mathcal{P}$-minimum contenue dans $\mathcal{C}$ telle que $\mathcal{C} \,\llcorner\, \mathcal{B}^*$.

Corollaire 2.

Si la famille $\mathcal{P} = \{P_\theta \; ; \; \theta \in \Theta\}$ est dominée par une mesure positive σ-finie μ sur $(\Omega, \mathcal{A})$, une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{C} \,\llcorner\, \mathcal{B}$ $(\mathcal{C} \subset \mathcal{B})$ dans la structure $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ est qu'il existe :

1°) - Une fonction numérique, mesurable h, non négative sur $(\Omega, \mathcal{A})$,

2°) - Pour tout $\theta \in \Theta$, une fonction numérique g_θ, non négative et $\mathcal{B}$-mesurable,

3°) - Pour tout $\theta \in \Theta$, une fonction numérique f_θ mesurable sur $(\Omega, \mathcal{A})$ vérifiant :

$$E_\mu^{\mathscr{C}}(f_\theta .\ h) = 0 \quad \mu\text{-p.s} \quad \text{pour tout } \theta \in \Theta$$

<u>telles que</u> :

$$\frac{dP_\theta}{d\mu}(\omega) = [g_\theta(\omega) + f_\theta(\omega)].\ h\ (\omega) \qquad \omega \in \Omega,\ \theta \in \Theta. \ *$$

- Si $\mathscr{C}$ et $\mathscr{B}$ sont engendrées par des statistiques vectorielles X et Y sur la structure (Y fonction de X), la condition ci-dessus pour $X \mathrel{\llcorner} Y$

s'écrit: $\dfrac{dP_\theta}{d\mu}(\omega) = [g'_\theta\ (Y(\omega) + f_\theta(\omega)].h(\omega)$, où g'_θ est une fonction réelle

sur l'espace des valeurs de Y telle que $g_\theta = g'_\theta \circ Y$ et f_θ vérifie

$$E_\mu\ (f_\theta .h\ /\ X) = 0 \quad \mu.\text{p.s} \quad \text{pour tout } \theta.$$

Démontrons le corollaire en termes de statistiques.

D'après la proposition, $E_{P^*}(\dfrac{dP_\theta}{dP^*}\ /\ X)$ soit être $Y^{-1}(.)$-mesurable,

donc il existe une fonction g'_θ non négative, mesurable sur l'espace des valeurs de Y telle que

$$E_{P^*}\ (\frac{dP_\theta}{dP^*}\ /\ X) = g'_\theta \circ Y$$

ce qui équivaut à :

$$\frac{dP_\theta}{dP^*}(\omega) = g'_\theta(Y(\omega)) + f_\theta(\omega), \qquad \omega \in \Omega \ , \quad \theta \in \Theta.$$

avec $E_{P^*}\ (f_\theta\ /\ X) = 0$ pour tout θ ;

mais $\dfrac{dP_\theta}{d\mu} = \dfrac{dP_\theta}{dP^*} . \dfrac{dP^*}{d\mu}$; en posant $h(\omega) = \dfrac{dP^*}{d\mu}(\omega)$, on obtient :

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dP_\theta}{d\mu}(\omega) = [g'_\theta(Y(\omega)) + f_\theta(\omega)]\ h(\omega) \\[2ex] E\mu\ (f_\theta . h \mid X) = 0 \quad \text{pour tout} \quad \theta \in \Theta. \ * \\ \quad \mu\text{-p.s} \end{cases}$$

Si $\mathscr{C} = \mathscr{A}$, on retrouve le critère d'exhaustivité de $\mathscr{B}$ en prenant $f_\theta = c$ pour tout θ.

Si $\mathscr{B} = \{\emptyset, \Omega\}$, ces relations constituent un critère de liberté de ; on obtient :

$$\frac{dP_\theta}{d\mu}(\omega) = [c(\theta) + f_\theta(\omega)]\ h(\omega)$$

la fonction $c(\theta)$ indépendante de ω ne peut être égale qu'a 1 car

$$c(\theta) = E_{P^*}^{\mathscr{C}}\left(\frac{dP_\theta}{dP^*}\right) \quad \text{et} \quad E_{P^*}\left[E_{P^*}^{\mathscr{C}}\left(\frac{dP_\theta}{dP^*}\right)\right] = E_{P^*}\left(\frac{dP_\theta}{dP^*}\right) = 1.$$

d'où, $\mathscr{C}$ est une σ-algèbre libre si et seulement si

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dP_\theta}{d\mu}(\omega) = [1 + f_\theta(\omega)]\ h(\omega) \\[2ex] E_{P^*}^{\mathscr{C}}(f_\theta) = 0 \quad \text{pour tout } \theta \in \Theta. \end{cases}$$

On retrouve ici le fait que la restriction à $\mathscr{C}$ de P_θ est $P^*_{\mathscr{C}}$ puisque

$$E_{P^*}^{\mathscr{C}}\left(\frac{dP_\theta}{dP^*} - 1\right) = 0 \text{ pour tout } \theta \in \Theta$$

Ce qui s'écrit :

$$\int_C \frac{dP_\theta}{dP^*}\, dP^* = \int_C dP^* \qquad \text{pour tout } C \in \mathcal{C} .$$

Mais ce critère de liberté, à partir des densités de probabilité de la structure, au contraire du critère d'exhaustivité, est très peu commode à vérifier du fait que dans les relations (2) la statistique libre n'apparaît pas explicitement, et il est plus simple en pratique de vérifier directement que sa loi de probabilité ne dépend pas du paramètre.

Il en est de même dans le cas général pour la vérification de $\mathcal{C} \perp \mathcal{B}$; à titre d'exemple explicitons les relations (1) dans un cas très simple :

Soit $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \{p_\theta \ ; \ \theta \in \tilde{\Theta}\})^n$ une structure exponentielle d'échantillon, où la densité par rapport à la mesure de Lebesgue est de la forme :

$$p_\theta(x) = C(\theta)\, e^{\theta x}\, h(x) \quad ; \quad \theta \in \tilde{\Theta} \subset \mathbb{R} .$$

La densité de l'échantillon est $p_\theta^n(x_1,\ldots,x_n) =$

$$[C(\theta)]^n \exp\{\theta . \sum_{i=1}^n x_i\} \prod_{i=1}^n h(x_i)$$; il est clair que

sur cette structure, la statistique Y définie par $(x_1,\ldots x_n) \to \sum_{i=1}^{n-1} x_i$

est exhaustive relativement à la statistique X définie par $(x_1,\ldots x_n) \to (x_1,\ldots x_{n-1})$

Soit $X \perp Y$; on a évidement $E\,(p_\theta^n(x_1,\ldots x_n)\,|X) = p_\theta^{n-1}(x_1,\ldots x_{n-1})$

et la fonction $f_\theta(x)\ h(x)$ est donc $p^n_\theta\ (x_1,\dots x_n) - p^{n-1}_\theta(x_i,\dots x_{n-1})$

On peut en effet écrire la densité de l'échantillon

$$p^n_\theta(x_1,\dots x_n) = [C(\theta)]^{n-1} e^{\theta.Y} \prod_{i=1}^{n-1} h(x_i) + [C(\theta)]^{n-1} e^{\theta \sum_{i=1}^{n-1}} [C(\theta)\ e^{\theta x_n} h(x_n) -1] \prod_{i=1}^{n-1} h(x_i)$$

et on a bien $E[C(\theta)\ e^{\theta x_n}\ h(x_n) -1 | X] = 0$.

4. Propriété d'indépendance conditionnelle.

On remarque qu'il est possible de généraliser le lemme de Lehmann - Scheffé (§ 1) pour obtenir un théorème d'indépendance conditionnelle entre des σ-algèbres (statistiques) conditionnellement libres et exhaustives généralement ainsi le théorème III. 1.

Définition III. 12.

Soient $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}'$ deux sous σ-algèbres de $\mathfrak{A}$. On dit que $\mathfrak{F}'$ est complète [resp. quasi-complète] conditionnellement à $\mathfrak{F}$ dans la structure statistique $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathcal{P} = \{P_\theta \; ; \; \theta \in \Theta\}$ si pour toute statistique réelle $X \in L_1(\Omega, \mathfrak{F}', \mathcal{P}_{\mathfrak{F}'})$ [resp. $X \in L_\infty(\Omega, \mathfrak{F}', \mathcal{P}_{\mathfrak{F}'})$] telle que :

$$\text{quelque soit } F \in \mathfrak{F} \;, \int_\Omega X \, 1_F \, dP_\theta = 0 \quad \text{pour tout } \theta \in \Theta.$$

alors $X \underset{\mathcal{P}_{\mathfrak{F}'}}{=} 0$.

Il est équivalent de dire : Pour toute statistique réelle X, $\mathcal{P}$-intégrable [resp. essentiellement borné] et $\mathfrak{F}'$-mesurable la relation $[E_{P_\theta}^{\mathfrak{F}}(X) \underset{\mathcal{P}}{=} 0$ pour tout $\theta]$ entraine $X \underset{\mathcal{P}_{\mathfrak{F}'}}{=} 0$ ce qui justifie la terminologie.

On retrouve la notion habituelle de complétion de $\mathfrak{F}'$, en prenant $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}_0$. Si $\mathfrak{F}' = \mathfrak{A}$ on dira que la structure $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathcal{P})$ est complète conditionnellement à la σ-algèbre $\mathfrak{F}$.

Remarquons que si la structure est complète, elle est complète conditionnellement à toute sous σ-algèbre de $\mathfrak{A}$ puisque :

$$E_\theta^{\mathfrak{F}}(X) = 0 \Rightarrow \int_\Omega X \, dP_\theta \quad \text{pour tout} \quad \theta \Rightarrow X \underset{\mathcal{P}}{=} 0.$$

On donne la même définition pour deux statistiques vectorielles X et X' sur la structure, engendrant des σ-algèbres dans $\mathcal{A}$ possédant cette propriété.

Si $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^k, \mathcal{R}^k)$ et $X' : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^{k'}, \mathcal{R}^{k'})$

Soit $P_{\theta,X'}^{X=x}$ la loi de probabilité conditionnelle de X' quand X = x, sur

$(\mathbb{R}^{k'}, \mathcal{R}^{k'})$ dire que X' est complète conditionnellement à X est équivalent à dire que la "structure conditionnelle" :

$$(\mathbb{R}^{k'}, \mathcal{R}^{k'}, \{P_{\theta,X'}^{X=x}, \quad \theta \in \Theta, \ x \in \mathbb{R}^k\}) \text{ est complète.}$$

Exemple III. 12.

En se reportant à l'exemple III. 9, on constate que le couple (U,V) de statistiques sur la structure exponentielle vérifie ces conditions ; l'une est complète conditionnellement à l'autre en vertu du théorème II. 3; puisque les "structures conditionnelles" sont de type exponentiel.

Lemme III. 13.

Soient $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}'$ des sous σ-algèbres de $\mathcal{A}$ telles que $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}'$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathfrak{F}'$ soit complète [resp. quasi-complète] conditionnellement à $\mathfrak{F}$ dans la structure $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P} = \{P_\theta\})$ est que pour toute statistique réelle [resp. bornée] $X \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ qui se projette sur $\mathfrak{F}$ et sur $\mathfrak{F}'$ on ait $E^{\mathfrak{F}}(X) = E^{\mathfrak{F}'}(X)$, $\mathcal{P}$-p.s.

(C'est-à-dire : il existe une version $(\mathcal{P})$ $\mathfrak{F}$-mesurable de $E^{\mathfrak{F}'}(X)$).

Démonstration.

C. N. Soit X une statistique réelle $\mathcal{P}$-intégrable [resp. bornée] libre en moyenne conditionnelle par rapport à $\mathfrak{F}$ et à $\mathfrak{F}'$. La statistique réelle $Y = E^{\mathfrak{F}'}(X) - E^{\mathfrak{F}}(X)$ est $\mathfrak{F}'$-mesurable et telle que :

$E_{\theta}^{\mathcal{F}}(Y) \underset{\mathcal{P}}{=} 0$ pour tout θ donc $Y \underset{\mathcal{P}}{=} 0$.

C. S. Supposons que $\mathcal{F}'$ ne soit pas complète [resp. quasi-complète] conditionnellement à $\mathcal{F}$ il existe une statistique réelle, $\mathcal{P}$-intégrable [resp. bornée], $\mathcal{F}'$-mesurable, non nulle $\mathcal{P}$-p.s. telle que pour tout θ, $E_{\theta}^{\mathcal{F}}(X) \underset{\mathcal{P}}{=} 0$; X est libre en moyenne conditionnelle à $\mathcal{F}$ et à $\mathcal{F}'$ et $E^{\mathcal{F}}(X) \underset{\mathcal{P}}{=} E^{\mathcal{F}'}(X)$ entraine $E^{\mathcal{F}'}(X) = X \underset{\mathcal{P}}{=} 0$ d'où la contradiction. *

- Le lemme de Lehman - Scheffé s'obtient en prenant $\mathcal{F} = \mathcal{A}_0$.
On en déduit que si la structure $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ est quasi-complète conditionnellement à une sous σ-algèbre $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$, la plus grande σ-algèbre $\mathcal{C}$ telle $\mathcal{C} \sqsubset \mathcal{B}$ est $\mathcal{P}$-équivalente à $\mathcal{B}$.

<u>Définition III. 14.</u>

<u>Dans un espace probabilisé</u> $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ <u>deux sous σ-algèbres</u> $\mathcal{F}$ <u>et</u> $\mathcal{F}'$ <u>de</u> $\mathcal{A}$ <u>sont dites indépendantes conditionnellement à une troisième</u> $\mathcal{F}''$ <u>si pour tout</u> $F \in \mathcal{F}$ et $F' \in \mathcal{F}'$

$$P^{\mathcal{F}''}(F \cap F') = P^{\mathcal{F}''}(F) . P^{\mathcal{F}''}(F') \text{ , p.s.}$$

On démontre ([29] p. 52) que pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que pour tout $F' \in \mathcal{F}'$ on ait :

$$P^{\mathcal{F} \vee \mathcal{F}''}(F') = P^{\mathcal{F}''}(F') \text{ , p.s.}$$

On a alors la propriété d'indépendance généralisant celle du théorème III. 1:

Proposition III. 15.

Soit, $\mathcal{B}$ une σ-algèbre contenue dans une σ-algèbre $\mathcal{B}'$ exhaustive quasi-complète conditionnellement à $\mathcal{B}$ dans la structure $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$. Toute σ-algèbre $\mathcal{C}$ libre conditionnellement à $\mathcal{B}$, est indépendante de $\mathcal{B}'$ conditionnellement à $\mathcal{B}$ pour toute loi $P \in \mathcal{P}$.

D'après le lemme III. 13, $P^{\mathcal{B}'}(C) = P^{\mathcal{B}}(C)$, p.s. pour tout $P \in \mathcal{P}$ et pour tout $C \in \mathcal{C}$.

C'est-à-dire, $P^{\mathcal{B}' \vee \mathcal{B}}(C) = P^{\mathcal{B}}(C)$ il suffit d'appliquer la définition III. 14.

Application.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \mathcal{P} = \{P_\theta \; ; \; \theta \in \Theta\})$ une structure séquentielle (chapitre I. §2).

Une famille $\{\mathcal{B}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de sous σ-algèbres de $\mathcal{A}$ est dite séquentiellement exhaustive si :

a) $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{A}_n$ pour tout n ;

b) $\mathcal{A}_n \llcorner \mathcal{B}_n$ pour tout n dans la structure $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$.

Elle est séquentiellment exhaustive transitive, si de plus :

c) Pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{B}_{n+1}$ et $\mathcal{A}_n$ sont indépendantes conditionnellement à $\mathcal{B}_n$, pour tout $P_\theta \in \mathcal{P}$.

(cf. [13] p. 334).

Proposition III. 16.

Une condition suffisante pour que la famille $\{\mathcal{B}_n\}_{n\geq 1}$ *séquentiellement exhaustive, soit transitive est que* $\mathcal{B}_n \vee \mathcal{B}_{n+1}$ *soit quasi-complète conditionnellement à* $\mathcal{B}_n$ *pour tout* $n \geq 1$ *dans la structure* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$.

Pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$ et $\mathcal{A}_{n+1} \perp \mathcal{B}_{n+1}$ entrainent $\mathcal{A}_{n+1} \perp \mathcal{B}_n \vee \mathcal{B}_{n+1}$ en particulier $\mathcal{A}_n \perp \mathcal{B}_n \vee \mathcal{B}_{n+1}$ donc pour tout $A \in \mathcal{A}_n$, $P_\theta^{\mathcal{B}_n \vee \mathcal{B}_{n+1}}(A)$ ne dépend pas de θ du même que $P_\theta^{\mathcal{B}_n}(A)$ puisque $\mathcal{A}_n \perp \mathcal{B}_n$, le lemme III. 13. implique que :

$$P^{\mathcal{B}_n \vee \mathcal{B}_{n+1}}(A) \underset{\mathcal{P}}{=} P^{\mathcal{B}_n}(A)$$

ce qui exprime l'indépendance de $\mathcal{B}_{n+1}$ et $\mathcal{A}_n$ conditionnellement à $\mathcal{B}_n$.

§ 4. SYSTEMES PARTIELLEMENT EXHAUSTIFS. - ET QUELQUES APPLICATIONS.-

Soit $\mathcal{B}$ une sous σ-algèbre quelconque de $\mathcal{A}$; pour la structure statistique $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P} = \{P_\theta \; ; \; \theta \in \Theta\})$, l'ensembles des statistiques réelles, $\mathcal{P}$-intégrables qui sont libres en moyenne conditionnelle à $\mathcal{B}$ -c'est-à-dire qui se projettent sur $\mathcal{B}$ - n'est pas vide et est un sous espace vectoriel V de $L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ qui lui est identique si $\mathcal{B}$ est exhaustive. De plus, il n'existe pas nécessairement une σ-algèbre $\mathcal{C}$ ($\supset \mathcal{B}$) tel que V soit exactement l'espace vectoriel des statistiques réelles $\mathcal{C}$-mesurables (auquel cas on a $\mathcal{C} \,\llcorner\, \mathcal{B}$), si V ne vérifie pas certaines conditions supplémentaires ([30] p. 117).

On notera encore $V \,\llcorner\, \mathcal{B}$ cette définition de V. Il est clair que les propriétés liées à celle de "projection" (§ 3) se conservent pour les éléments de V en particulier le théorème de Rao-Blackwell :

Quelque soit $X \in V$ la projection $\widetilde{X} = E^{\mathcal{B}}(X)$ à même image que X et pour toute fonction borélienne convexe, si ces intégrales existent, on a :

$$E_{\theta}[g(\widetilde{X} - E_\theta(\widetilde{X}))] \leq E_\theta[g(X - E_\theta(X)] \text{ pour tout } \theta, \text{ en particulier}$$

si X -qui est un estimateur sans biais de son image- appartient à V, sa projection $\widetilde{X}$ sur $\mathcal{B}$ est aussi un estimateur sans biais de variance uniformément plus petite que celle de X.

On peut utiliser ceci, de plusieurs façons :

a) - $\mathcal{B}$ est donnée, chercher V (existe-t-il des estimateurs dont on peut réduire la variance ?)

b) - V donné, chercher $\mathcal{B}$ (peut-on réduire la variance d'un estimateur, en l'absence de σ-algèbre exhaustive ?)

c) - V et $\mathcal{B}$ donnés -peut-on trouver une famille de lois de probabilité $\mathcal{P}$ (dans une certaine classe de lois) telle que $V \perp \mathcal{B}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$.

A. M. KAGAN a résolu ce dernier problème pour certaines classes de lois de probabilités. sur la droite, obtenant une nouvelle caractérisation des lois Normale et Gamma. ([18] ou [20] par exemple).

Théorème

Soit $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \mathcal{F} = \{F_\theta \ ; \ \theta \in \mathbb{R}\})^n$ une structure d'échantillon, où $\mathcal{F}$ est la famille des lois de probabilité absolument continues sur la droite dont la fonction de répartition $F_\theta(x)$ dépend du paramètre de décentrage θ: $F_\theta(x) = F(x - \theta)$. F est donnée.

On sait que l'exhaustivité de la statistique $(x_1, \ldots, x_n) \to \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ caractérise la famille des lois Normales $\{N(\theta, \sigma_o)\}$, σ_o fixé ([12]).

Le résultat de KAGAN montre qu'on ne peut pas élargir cette famille en affaiblissant l'exhaustivité de $\bar{x}$:

Soient $S^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$, $V = \{\alpha S^2 \ ; \ \alpha \in \mathbb{R}\}$. Alors :

Sur la structure considérée, la relation $V \perp \bar{x}$ implique que F_θ est la fonction de répartition d'une loi Normale $N(\theta, .)$ et $\bar{x}$ est exhaustive.

Nous en donnons la démonstration de Kagan et Shalaevskïi [20] :
Supposons $E_\theta(S^2/\bar{x}) = \Psi(\bar{x})$ indépendant de θ alors,

(1) $\qquad E_\theta(e^{it\bar{x}} . S^2) = E_\theta(e^{it\bar{x}} \, E_\theta(S^2 | \bar{x})) = E_\theta(e^{it\bar{x}} \, \Psi(\bar{x}))$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

ce qui est équivalent à :

$$E_{\theta=0}\ (e^{it(\bar{x}-\theta)}.S^2) = E_{\theta=0}(e^{it(\bar{x}-\theta)}\ \Psi(\bar{x}-\theta))\ ,$$

soit

$$E_{\theta=0}\ (e^{it\bar{x}}\ S^2) \quad = E_{\theta=0}\ (e^{it\bar{x}}\ \Psi(\bar{x}-\theta)).$$

en écrivant (1) pour $\theta = 0$, on a

$$E_{\theta=0}(e^{it\bar{x}}\ S^2) = E_{\theta=0}\ (e^{it\bar{x}}\ \Psi(\bar{x}))$$

donc,

$$E_{\theta=0}\ (e^{it\bar{x}}\ \Psi(\bar{x})) = E_{\theta=0}(e^{it\bar{x}}\ \Psi(\bar{x}-\theta)) \quad \text{pour tout } \theta.$$

en calculant ces quantités par rapport à la loi $P_{\bar{x}}$ de la variable aléatoire $U = \bar{x}$ lorsque $\theta = 0$; on obtient :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itu}\ [\Psi(u) - \Psi(u-\theta)]\ dP_{\bar{x}}\ (u) = 0 \qquad \text{pour tout } \theta.$$

En vertu de l'unicité de la transformée de Fourier, $\Psi\ (u) = \Psi\ (u-\theta)$ $P_{\bar{x}}$ -p.s pour tout θ ; ce qui entraine $\Psi\ (u)$ = constante. La statistique S^2 est donc de structure de Neyman par rapport à $\bar{x}$; posons $E_{\theta=0}(S^2 \mid \bar{x}) = c$

$$(2) \qquad E_{\theta=0}(S^2 \exp\{it \sum_{i=1}^{n} x_i\}) = c.E_{\theta=0}\ (\exp\{it \sum_{i=1}^{n} x_i\})$$

en posant, $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{it\ x\}dF(x)$, (2) s'écrit :

$$(1-n)\ f''(t)\ [f(t)]^{n-1} + (n-1)\ [f'(t)].[f(t)]^{n-2} = c\ [f(t)]^n,$$

pour $|t| < \varepsilon$ suffisament petit, $f(t) > 0$ et, on peut écrire cette égalité

$$(3) \qquad (1-n)\ \frac{f''(t)}{f(t)} + (n-1)\ \frac{[f'(t)]^2}{[f(t)]^2} = c$$

En posant $g(t) = \dfrac{f'(t)}{f(t)}$, (3) s'écrit : $g' = \dfrac{C}{1 - n}$ pour $|t| < \varepsilon$

par suite $g(t) = c_1 t + c_2$ et $f(t) = \exp\left(c_1 \dfrac{t^2}{2} + c_2 t\right)$; $|t| < \varepsilon$ cq.f.d. *

Lorsque $\mathfrak{F}$ est une famille de lois à paramètre d'échelle σ $F_\sigma(x) = F\left(\dfrac{x}{\sigma}\right)$ les mêmes hypothèses impliquent que F est la fonction de répartition d'une loi Gamma (cf. [19]).*

On remarque qu'il n'est pas nécessaire de se restreindre à une σ-algèbre $\mathcal{B}$ pour la notion d'exhaustivité partielle, si l'on peut définir une projection ayant les mêmes propriétés énoncées plus haut, que l'espérance conditionnelle.

Soit W un sous-espace vectoriel de $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, on note "l'orthogonal" de W dans L_2

$$W^o = \{X \in L_2 \ : E_P(XZ) = 0 \text{ pour tout } P \in \mathcal{P} \text{ et tout } Z \in W\}$$

Définition III. 17.

Si V et W sont des sous-espaces vectoriels de $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$; (avec $1 \in W$) on dit que W est partiellement exhaustif par rapport à V si

$$V \subset W + W^o.$$

On note encore $V \llcorner W$ cette propriété qui est une généralisation de la propriété $\llcorner$ entre σ-algèbres. Cela revient à dire : pour tout $X \in V$, il existe $\tilde{X} \in W$ tel que $X - \tilde{X} \in W^o$, soit $E_P[(X - \tilde{X}).Z] = 0$ pour tout $P \in \mathcal{P}$ et pour tout $Z \in W$.

On appelle $\tilde{X}$ la projection de X sur W, et si $1 \in W$, X et $\tilde{X}$ ont même image et l'inégalité de Rao-Blackwell est encore vérifiée.

Exemple III. 18. ([18] p. 746).

Pour la structure statistique $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \{N(\theta,1) ; \theta \in \mathbb{R}\})^n$, soient V_k l'espace vectoriel dans L_{2k} des polynômes $\pi(x_1,\dots,x_n)$ de degré $\leq k$, $(k > 0)$ et W_k le sous-espace de V_k des polynômes de la forme :

$$a_0 \bar{x}^k + \dots + a_k \qquad ; \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

alors $V_k \perp W_k$.

On peut donc reduire par projection sur W_k la variance de tout polynôme $\pi(x_1,\dots,x_n) \in V_k \setminus W_k$ considéré comme estimateur sans biais du polynôme en θ, $\bar{\pi}(\theta) = E_\theta(\pi)$.

La démonstration consiste à remarquer que pour $\pi \in V_k$ l'espérance conditionnelle (qui ne dépend pas de θ puisque $\bar{x}$ est exhaustive) $E(\pi|\bar{x})$ peut s'écrire sous la forme $\alpha_0 \bar{x}^k + \dots + \alpha_k$ et donc appartient à W_k. On peut encore dans ce cas prendre $\tilde{\pi} = E(\pi|\bar{x})$.

CONCLUSION.

S'il est intéressant de présenter exhaustivité et liberté comme des cas limites de la notion de liberté conditionnelle, pour illustrer leur dualité, la relation $\llcorner$ qu'on est amené à considérer sur l'ensemble des sous σ-algèbres de $\mathcal{A}$ dans la structure statistique, n'est pas en général transitive et ne constitue donc pas un préordre, ce qui en limite sa portée, notamment en vue de définir une relation d'équivalence quand à l'information sur le paramètre contenue dans les σ-algèbres (ou les statistiques) d'une structure.

Le critère de liberté conditionnelle, donné à partir des densités de probabilité est peu maniable en pratique (sauf pour le cas d'exhaustivité évidement) et il est préférable de vérifier la propriété directement.

Cependant, la notion généralisée à des sous espaces-vectoriels quelconques de statistiques réelles de L_1 semble présenter plus d'intérêt quant aux applications concrètes, comme le montre l'étude de KAGAN.

CHAPITRE IV

STRUCTURES SATISTIQUES

FAIBLEMENT INCOMPLETES.

STRUCTURES STATISTIQUES

FAIBLEMENT INCOMPLETES.

Ce chapitre est consacré à la présentation de quelques conditions générales d'existence de statistiques libres non triviales sur une structure statistique ou ce qui est équivalent (d'après les définitions du chapitre II § 3) des conditions pour que cette structure soit faiblement incomplète. Le problème de la construction effective d'ensembles libres par des moyens non issus des propriétés d'invariance n'est pas résolu.

Dans le premier paragraphe on rappelle les théorèmes classiques d'existence dérivés notamment des théorèmes de Liapounoff ou de Lehmann-Scheffé.

Au paragraphe suivant on utilise la notion d'atome conditionnel d'un espace probabilisé pour donner une condition d'application de ce dernier.

Dans le paragraphe 3 on expose une formulation générale (cf. [2]) des problèmes posés par la recherche d'ensembles libres, conduisant à un théorème de caractérisation.

Cette méthode, appliquée dans le paragraphe suivant aux cas classiques, fournit une autre démonstration des théorèmes proposés au début. Elle permet aussi de donner une forme généralisée du théorème de Liapounoff et d'étendre les conditions d'application du théorème de Lehmann-Scheffé exposé, au § 2.

§ 1. THEOREMES GENERAUX D'EXISTENCE.

Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta\})$ une structure statistique dominée. Si elle n'est pas quasi-complète, on cherche des conditions sous lesquelles elle est faiblement incomplète, c'est-à-dire, des conditions sous lesquelles il existe dans $\mathcal{A}$ des ensembles A non $\mathcal{P}$-équivalents à $\emptyset$ ou Ω tels que $P_\theta(A)$ ne dépende pas de $\theta \in \Theta$ ce qui implique l'existence de statistiques réelles libres non $\mathcal{P}$-équivalentes à des constantes.

Lorsqu'on ne peut pas utiliser des propriétés d'invariance de la structure (notamment le corollaire 2 de la proposition II. 15 qui fournit directement une statistique libre), les théorèmes généraux d'existence d'ensembles libres sont très peu nombreux et non constructifs.

1. Le plus connu constitue un corollaire du théorème de Liapounoff :

<u>Théorème IV. 1.</u>

<u>Si la famille $\mathcal{P}$ est finie</u>, $\mathcal{P} = \{P_1,\dots,P_N\}$ <u>et si les espaces probabilisés</u> $(\Omega,\mathcal{A},P_i)$, $i = 1,\dots N$ <u>ne contiennent aucun atome</u>, <u>alors quel que soit le nombre réel</u> $\alpha \in [0,1]$ <u>il existe un ensemble</u> $A_\alpha \in$ <u>tel que</u> $P_i(A_\alpha) = \alpha$; $i = 1,\dots N$.

Ceci est une conséquence directe du fait que, dans ces conditions l'image de $\mathcal{A}$ par la mesure vectorielle $(P_1,\dots,P_N)$ est un convexe fermé dans $\mathbb{R}^N$ qui contient des points $(0,\dots 0)$ et $(1,\dots 1)$ (cf. [24], [16] ou [9]) une autre démonstration est donnée au § 4. *

2. L'existence d'ensembles libres peut être reliée à l'exhaustivité par le biais du Lemme de Lehmann-Schéffé (chapitre III. § 1) : Si $\mathcal{B}$ est une σ-algèbre dans $\mathcal{A}$ exhaustive et quasi-complète pour la structure, un ensemble $A \in \mathcal{A}$ est libre si et seulement si il est de structure de

Neyman par rapport à $\mathcal{B}$, il suffit donc de montrer l'existence de tels ensembles.

La structure étant supposée dominée, le problème se trouve simplifié:

Proposition IV. 2.

Soient, P^* une probabilité privilégiée dominant $\mathcal{P}$, $\mathcal{B}$ une σ-algèbre exhaustive pour la structure $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$. S'il existe dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P^*)$ un ensemble $A \in \mathcal{A}$ tel que $P^*(A) = \alpha$, P^* -p.s alors A est un ensemble libre pour la structure, de probabilité α.

$\mathcal{B}$ étant exhaustive, quelque soit $A \in \mathcal{A}$, $P^{*\mathcal{B}}(A)$ est une version de $P_\theta^{\mathcal{B}}(A)$ pour tout $\theta \in \Theta$. Donc, pour A tel que $P^{*\mathcal{B}}(A) = \alpha$,

$$P_\theta(A) = \int_\Omega P_\theta^{\mathcal{B}}(A)\, dP_\theta = \int_\Omega \alpha\, dP_\theta = \alpha \qquad \text{pour tout } \theta \in \Theta. \; *$$

On note que lorsque $P^{*\mathcal{B}}(.)$ est une probabilité conditionnelle régulière, cette dernière méthode consiste à effectuer un changement de paramètre et à chercher un ensemble libre pour la "structure conditionnelle" $(\Omega, \mathcal{A}, \{P^{*\mathcal{B}} \; ; \; \omega \in \Omega\})$.

LINNIK dans [26] et [27] à proposé une solution combinant ces deux méthodes qui conduit à des conditions analytiques sur la statistique exhaustive :

Soit $T = (T_1(x), \dots, T_s(x))$ une statistique vectorielle exhaustive sur la structure $(\mathbb{R}^p, \mathcal{R}^p, \mathcal{P} = \{P_\theta \; ; \; \theta \in \Theta\})$ dominée par la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^p$, avec $s < p$. On note $P^*(. | T)$ la probabilité conditionnelle à T, (pour une probabilité privilégiée P^*) et d'après les hypothèses faites, pour tout $T = t$ fixé l'espace probabilisé $(\mathbb{R}^p, \mathcal{R}^p, P^*(. | T = t)$ ne contient aucun atome. En appliquant, le théorème de Liapounoff pour N = 1,

pour tout t, pour tout $\alpha \in [0,1]$, il existe $A_{t,\alpha} \in \mathcal{R}^p$ tel que

$$P^*(A_{t,\alpha} | T = t) = \alpha.$$

Les conditions sont alors :

1° - Si les surfaces de niveau T = cte dans $\mathbb{R}^s$ sont suffisamment régulières et permettent l'introduction de coordonnées locales (t,ξ) dans $\mathbb{R}^k$, alors pour presque tout t on peut définir des ensembles $C_{t,\alpha}$ (les traces de $A_{t,\alpha}$ sur les surfaces T = t) tels que :

$$P^*(A_{t,\alpha} | T = t) = P^*(C_{t,\alpha} | T = t)$$

2° - Si l'ensemble $A_\alpha = \bigcup_t C_{t,\alpha}$ est mesurable, il vérifie :

$$P^*(A_\alpha | T) = \alpha \quad \text{p.s}$$

Un tel ensemble est de structure de Neyman par rapport à T, donc libre.

On peut éviter toutes ces hypothèses et donner une solution directe en utilisant la notion d'atome conditionnel introduite par Neveu et Hanen [32].

§ 2. ATOMES CONDITIONNELS D'UNE STRUCTURE STATISTIQUE.- APPLICATION. -

Définition IV. 3.

Dans une structure statistique $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ on appelle atome conditionnel par rapport à une sous σ-algèbre $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ (en agrégé $\mathcal{B}$ -atome) tout ensemble A dans $\mathcal{A}$ tel que

$$A \cap \mathcal{A} \underset{\mathcal{P}}{=} A \cap \mathcal{B} .$$

On appelle partie $\mathcal{B}$-atomique de Ω, la borne supérieure $\mathcal{P}$-essentielle des $\mathcal{B}$ -atomes.

La σ-algèbre trace $A \cap \mathcal{B}$ est définie comme la classe $\{A \cap B \; ; \; B \in \mathcal{B}\}$, et $A \cap \mathcal{A} = \{A' : A' \in \mathcal{A} \; ; \; A' \subset A \}$. Un ensemble A est un $\mathcal{B}$ -atome si et seulement si pour tout $A' \in \mathcal{A}$, $A' \subset A$, il existe un ensemble $B \in \mathcal{B}$ tel que $P(A' \Delta (A \cap B)) = P(A \cap (A' \Delta B)) = 0$ pour tout $P \in \mathcal{P}$.

Si la structure statistique est dominée, les $\mathcal{B}$ -atomes de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ sont identiques aux $\mathcal{B}$ -atomes dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P^*)$, pour une probabilité privilégiée P^*. (*)

On utilisera par la suite les propriétés suivantes :

Proposition IV. 4.

Pour qu'un ensemble $A \in \mathcal{A}$ soit un $\mathcal{B}$-atome dans l'espace proba-

---

(*) Si $\mathcal{B}$ se réduit à $\{\emptyset, \Omega\}$, on retrouve la notion habituelle d'atome d'un espace de probabilité. ($\emptyset$ est considéré comme un atome).

bilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ il faut et il suffit que pour toute fonction $f \in L_1(\Omega,\mathcal{A},P)$ on ait :

$$f.P^{\mathcal{B}}(A) = E^{\mathcal{B}}(f.1_A) \quad P\text{-p.s} \quad \underline{\text{sur}}\ A.$$

Théorème IV. 5.

Pour toute application $\mathcal{B}$-mesurable de Ω dans $[0,1]$, il existe dans l'espace probalisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un ensemble $A \in \mathcal{A}$ et un $\mathcal{B}$-atome A' disjoint de A tels que $P^{\mathcal{B}}(A) \leq f \leq P^{\mathcal{B}}(A + A')$, p.s. En particulier, si $(\Omega,\mathcal{A},P)$ n'admet pas de $\mathcal{B}$-atomes non négligeables il existe un ensemble $A \in \mathcal{A}$ tel que $P^{\mathcal{B}}(A) = f$, p.s.

Nous reproduisons la démonstration de ce théorème essentiel donnée dans [31] où [32].

La classe $\mathcal{C} = \{C : C \in \mathcal{A},\ P^{\mathcal{B}}(C) \leq f,\ \text{p.s}\}$ n'est pas vide (elle contient $\emptyset$) et est inductive pour l'inclusion $\subset$; par le lemme de Zorn, elle contient au moins un élément maximal, A.

La classe $\mathcal{D} = \{D : D \in \mathcal{A}\ ;\ A \cap D = \emptyset \text{ et } P^{\mathcal{B}}(A + D) \geq f \ \text{p.s}\}$ n'est pas vide puisque $A^c \in \mathcal{D}$ et elle est inductive pour l'inclusion $\supset$; elle contient donc un élément minimal A'. Par définition, $A \cap A' = \emptyset$ et $P^{\mathcal{B}}(A) \leq f \leq P^{\mathcal{B}}(A + A')$, p.s ; Montrons que A' est un $\mathcal{B}$-atome.

Soit F un sous ensemble de A' dans $\mathcal{A}$ et posons $B = \{P^{\mathcal{B}}(A + F) \leq f\}$; $F \cap A = \emptyset$. On remarque que $A + B \cap F \in \mathcal{C}$ et la propriété de maximalité de A entraine que $B \cap F = \emptyset$ de plus, le sous ensemble $F + B \cap (A' - F)$ de A' appartient à $\mathcal{D}$, et la propriété de minimalité de A' entraine que $B \supset A' - F$. Il résulte alors de $F \subset A'$, $F \cap B = \emptyset$ et $A' - F \subset B$ que $F = A' \cap B^c$ p.s et A' est bien un $\mathcal{B}$-atome. (Les relations d'inclusion, d'inégalités et d'égalités sont valables presque partout).

Corollaire

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $\mathcal{B}$ une sous σ-algèbre de $\mathcal{A}$ et A_o un élément de $\mathcal{A}$, de probabilité strictement positive et ne contenant aucun $\mathcal{B}$-atome.

Si f est une fonction $\mathcal{B}$-mesurable de Ω dans $[0,1]$, il existe $A_1 \in \mathcal{A}$, $A_1 \subset A_o$ tel que $P^{\mathcal{B}}(A_1) = f.P^{\mathcal{B}}(A_o)$ p.s.

Si $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$ est une suite de nombres > 0 de somme totale 1, il existe une partition de A_o, $\{A_n\}_{n\geq 1}$, $A_n \in A_o \cap \mathcal{A}$ pour tout $n \geq 1$ telle que

$$P^{\mathcal{B}}(A_n) = \alpha_n . P^{\mathcal{B}}(A_o).$$

Application à l'existence d'ensembles libres dans une structure statistique dominée.

Proposition IV. 6.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P} = \{P_\theta \ ; \ \theta \in \Theta\})$ une structure statistique dominée par une probabilité privilégiée P^*, $\mathcal{B}$ une sous σ-algèbre de $\mathcal{A}$ exhaustive. Si l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P^*)$ n'admet aucun $\mathcal{B}$-atome non négligeable, pour tout nombre réel $\alpha \in [0;1]$ il existe un ensemble libre A_α de probabilité α c'est-à-dire tel que :

$$P_\theta(A_\alpha) = \alpha \quad \text{pour tout } \theta \in \Theta.$$

Démonstration.

En appliquant le théorème IV. 5. à l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P^*)$ et à la fonction $f \equiv \alpha$ sur Ω, on obtient les conditions de la proposition IV. 2.*

Il est clair que l'on cherchera à vérifier cette condition sur la σ-algèbre exhaustive $\mathcal{P}$-minimum.

Les conditions de la proposition impliquent que la classe $\mathcal{L}$ de tous les ensembles libres dans $\mathcal{A}$ est assez riche puisqu'elle contient une famille $\{A_\alpha\}_{0 \leq \alpha \leq 1}$ d'ensembles libres de tous niveaux α. Mais ceci n'implique pas que $\mathcal{L}$ soit une σ-algèbre. On ne sait pas non plus si dans ces conditions un élément maximal de $\mathcal{L}$ fournit une décomposition de la structure au sens de la définition III. 4.

Dans certaines applications pratiques Ω est $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{A}$ est $\mathcal{R}^n$ et $\mathcal{P}$ une famille de lois de probabilité absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue λ^n sur $\mathbb{R}^n$
Si $T(x) = (T_1(x),\ldots,T_s(x))$, $x \in \mathbb{R}^n$ est une statistique vectorielle exhaustive $\mathcal{P}$-minimum sur la structure il s'agit de vérifier que $(\mathbb{R}^n,\mathcal{R}^n,P^*)$ n'admet pas de $T^{-1}(\mathcal{R}^s)$ - atome, avec $P^* \ll \lambda^n$. On peut remarquer :

1°) La σ-algèbre $\mathcal{R}_0^n$ (ou la statistique $X_{()}$) d'ordre sur $\mathbb{R}^n$ ne vérifie pas ces conditions, la partie $\mathcal{R}_0^n$-atomique est $\mathbb{R}^n$.
Ceci prouve d'ailleurs que les conditions suffisantes de la proposition ne sont pas nécessaires pour l'existence d'ensembles libres, comme le montre la situation de l'exemple III. 6. (2°).

2°) Il est clair que $(\mathbb{R}^n,\mathcal{R}^n,P^*)$ n'admet pas de $\mathcal{R}^k$-atome si $k < n$. On cherchera donc à montrer que $T^{-1}(\mathcal{R}^s)$ est "isomorphe" à $\mathcal{R}^k$.

<u>Exemple</u>

Soit la structure exponentielle d'échantillon $(\mathbb{R},\mathcal{R},\{P_\theta\ ;\ \theta \in \widetilde{\Theta} \subset \mathbb{R}^s\})^n$

où :

$$\frac{dP_\theta}{d\lambda} = C(\theta)\ \exp\{\theta_1 . x + \sum_{j=2}^{s} \theta_j\ T_j(x)\}\ h(x) > 0\ ,\quad x \in \mathbb{R}\ .\quad \theta \in \widetilde{\Theta}.$$

Si $\theta_2,\ldots,\theta_s$ sont connus, la statistique exhaustive minimum pour θ_1 est $T(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

Si $n \geq 2$ $(\mathbb{R}^n, \mathcal{R}^n, P^*)$ n'admet pas de $T^{-1}(\mathcal{R}^n)$-atome de mesure P^*- ou λ^n-non nulle.

Pour tous $\theta_2, \dots \theta_s$ fixés, il existe donc des ensembles libres par rapport à θ_1, de tous niveaux.

§ 3. ENSEMBLES MINCES DANS L_1.-

THEOREME DE CARACTERISATION.

On remarque que la recherche d'ensembles libres, ou libres conditionnellement à une σ-algèbre dans une structure statistique $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ revient à trouver des indicatrices d'ensembles de $\mathcal{A}$, dans des ensembles convexes de statistiques (c'est-à-dire vérifiant certaines contraintes). Par exemples, si T est l'ensemble des tests sur la structure (cf. chapitre I, définition I. 22)l'existence d'un ensemble libre A de probabilité α dans $\mathcal{A}$ revient à caractériser la statistique 1_A dans l'ensemble

$$T \cap \{X \in L_\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}) \quad : \quad E_P(X) = \alpha ; \forall P \in \mathcal{P}\}.$$

La question de l'existence de statistiques quisoient des indicatrices d'ensembles de $\mathcal{A}$ dans un domaine où une variété linéaire V de $L_\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ peut d'ailleurs se poser pour d'autres problèmes de statistique, de test ou d'estimation ; c'est le cas en particulier lorsqu'on veut remplacer un test quelconque par un test déterministe de même puissance. Ce qui a conduit à la formulation générale et au théorème de caractérisation suivants :

<u>Définition IV. 7</u>. ([2])

<u>Soit</u> $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ <u>une structure statistique dominée par une probabilité privilégiée</u> P^*. <u>Un ensemble W dans</u> $L_1(\Omega, \mathcal{A}, P^*)$ <u>est "mince", si quelque soit</u>

l'ensemble $A \in \mathcal{A}$, $P^*(A) > 0$ il existe une statistique réelle X telle que

$$P^*\{X \neq 0\} > 0 \,,\quad X = X.1_A \;,\; P^*\text{-p.s} \quad \text{et} \quad \int_\Omega XZ\, dP^* = 0 \quad \text{pour tout } Z \in W$$

Pour tout ensemble W on note :

$$W^\perp : \{X \in L_\infty(\Omega, \mathcal{A}, P^*) \;:\; \int_\Omega XZ\, dP^* = 0 \;,\quad \forall Z \in W\}.$$

<u>Théorème IV. 8</u>. ([2]).

<u>Soit</u> T <u>le sous ensemble de</u> $L_\infty(\Omega, \mathcal{A}, P^*)$ <u>défini par</u> $T = \{X \in L_\infty \;:\; \|X - \frac{1}{2}\|_\infty \leq \frac{1}{2}\}$. <u>Un ensemble</u> W <u>dans</u> $L_1(\Omega, \mathcal{A}, P^*)$ <u>est mince si et seulement si</u>, <u>quelque soit</u> X_o <u>dans</u> T <u>tous les points extrêmaux du convexe</u> $K_o = T \cap (X_o + W^\perp)$ <u>sont des (classes de</u> P^*<u>-équivalence d') indicatrices d'ensembles de</u> $\mathcal{A}$.

<u>Démonstration</u>.

Notons que l'ensemble non vide K est convexe compact pour la topologie faible $\sigma(L_\infty, L_1)$ comme intersection dans la boule T ayant ces propriétés (proposition I. 5) avec la variété linéaire fermée $X_o + W^\perp$; il contient donc des points extrêmaux d'après le théorème de Krein-Millman.

<u>Condition nécessaire</u> : Soit X_e un point extrêmal de K_o et supposons qu'il ne soit pas une (classe d') indicatrice d'ensemble, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $P^*\{X_e(1 - X_e) > \varepsilon\} > 0$. Soit $A_\varepsilon = \{X_e(1 - X_e) > \varepsilon\}$; comme W est mince il existe une statistique $\widetilde{X} = \widetilde{X}.1_{A_\varepsilon}$ P^*-p.s non nulle P^*-p.s appartenant à $W^\perp$, posons alors

$$X_1 = X_e + \varepsilon \frac{\widetilde{X}}{\|\widetilde{X}\|_\infty} \quad \text{et} \quad X_2 = X_e - \varepsilon \frac{\widetilde{X}}{\|\widetilde{X}\|_\infty}$$

X_1 et X_2 appartiennent à K_e (car $0 \leq X_i \leq 1$ et $X_i \in X_e + W^{\perp}$; $i = 1, 2$), sont distinctes de X_e et $X_e = (X_1 + X_2) / 2$ ce qui est impossible.

Condition suffisante : Supposons que W ne soit pas mince ; il existe alors un ensemble $A \in \mathcal{A}$ tel que $P^*(A) > 0$ et tel que tout $X \in W^{\perp}$ on ait $P^*(X - X1_A \neq 0) > 0$. Montrons que $X_o = \frac{1}{2} \cdot 1_A$ est un point extrêmal de K_o ; comme X_o n'est pas une indicatrice d'ensemble cela entraine la contradiction. Si X_o n'était pas un point extrêmal de K_o, il existerait X_1 et X_2 dans K_o tels que $X_o = \dfrac{X_1 + X_2}{2}$ et on aurait X_1 et X_2 de support A et la statistique $\tilde{X} = X_o - X_1 = X_2 - X_o$ appartiendrait à $W^{\perp}$ et serait nulle sur A^c, ce qui contredit l'hypothèse. *

Proposition IV. 9.

Si l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P^*)$ n'admet aucun atome non négligeable, tout ensemble fini W dans $L_1(\Omega, \mathcal{A}, P^*)$ est mince.

Soit $W = \{X_1, \ldots, X_N\}$ un tel ensemble, A un sous-ensemble de Ω dans $\mathcal{A}$, tel que $P^*(A) > 0$; A n'étant pas un atome, il existe une partition $\{A_1, \ldots, A_{N+1}\}$ de A en sous ensembles A_i dans $\mathcal{A}$ tels que $P^*(A_i) > 0$ pour $i = 1, \ldots, N + 1$.

La variable aléatoire réelle étagée $Y = \sum_{i=1}^{N+1} y_i \, 1_{A_i}$ est telle que $Y = Y.1_A$,

elle appartient à $W^{\perp}$ si $\sum_{i=1}^{N+1} y_i \int_{A_i} X_j \, dP^* = 0$ pour $j = 1, \ldots, N$

Ce système linéaire de N équations à N + 1 inconnues admet toujours une solution non nulle $y_1, \ldots, y_N$. La fonction Y ainsi construite, implique que W est mince.

Application au théorème de Liapounoff.

Théorème IV. 10.

Soit $\mathcal{P} = \{P_1, \dots P_N\}$ *une famille finie de probabilités sur* $(\Omega, \mathcal{A})$, *telles que chaque espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, P_i)$ $i = 1, \dots, N$ *ne contienne aucun atome non négligeable. Pour toute fonction réelle mesurable* X_o *à valeurs dans* $[0,1]$ *il existe un ensemble* $A \in \mathcal{A}$ *tel que* $P_i(A) = E_{P_i}(X_o)$ *pour tout* $i = 1, \dots, N$.

Ce théorème exprime, que pour tout test X_o sur la structure statistique $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, il existe un test déterministe : 1_A ayant même puissance. On retrouve le théorème IV. 1 en se restreignant aux tests $X_o \equiv \alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Soit $P^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} P_i$ une probabilité privilégiée équivalente à la famille finie $\mathcal{P}$. Il faut montrer l'existence d'une indicatrice d'ensemble dans la variété linéaire :

$$V = \{X \in L_\infty \,;\, E_{P_i}(X) = E_{P_i}(X_o) \quad \text{pour } i = 1, \dots, N\}.$$

D'après la proposition IV. 9, l'ensemble fini W =

$\{\frac{dP_i}{dP^*} \;;\; i = 1, \dots N\} \subset L_1(\Omega, \quad, P^*)$ est mince.

$$W^\perp = \{Y \in L_\infty : \int_\Omega Y \frac{dP_i}{dP^*} \, dP^* = 0 \quad i = 1, \dots N\} =$$

$$\{Y \in L_\infty : E_{P_i}(Y) = 0 \;;\; i = 1, \dots N\} \qquad \text{et}$$

$$K_o = T \cap \{X_o + W^\perp\} = \{X \in \;_\infty : X \in T \text{ et } X = X_o + Y \;;\; Y \in W^\perp\}$$

Soit :

$$K_o = \{X \in T : E_{P_i}(X) = E_{P_i}(X_o) \quad ; \ i = 1,\dots N\} = T \cap V.$$

Comme K_o n'est pas vide (il contient X_o) il contient au moins un point extrêmal, donc une indicatrice d'ensemble puisque W est mince (d'après le théorème IV. 8.); par suite il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que :

$$P_i(A) = E_{P_i}(X_o) \qquad i = 1,\dots N.$$

§ 4. APPLICATIONS A LA RECHERCHE D'ENSEMBLES LIBRES.

1. Le théorème de caractérisation des ensembles minces a permis au paragraphe précédent de retrouver le théorème de Liapounoff. On peut également retrouver le théorème de Neveu et Hanen (Théorème IV. 5) (qui a directement servi dans la proposition IV. 6 sur l'existence d'ensembles libres dans une structure statistique), à partir de la caractérisation suivante de la non atomicité conditionnelle.

Proposition IV. 11.

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ d'admette aucun atome conditionnel non négligeable par rapport à une sous σ-algèbre $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ est que l'ensemble $W = \{1_B \; ; B \in \mathcal{B}\}$ soit mince dans L_1.

Démonstration.

C. N. Soit $A \in \mathcal{A}$ tel que $P^*(A) > 0$; $\mathcal{B}' = \{A \cap B, A^c \cup B \; ; B \in \mathcal{B}\}$ est une sous σ-algèbre de $\mathcal{A}$ par hypothèse A n'est pas un $\mathcal{B}$-atome donc il existe $A_1 \in \mathcal{A}$ tel que $A_1 \subset A$, $P(A_1) > 0$ et $A_1 \notin \mathcal{B}'$; par suite la fonction $f = P^{\mathcal{B}'}(A_1) - 1_{A_1}$ est non identiquement nulle et telle que

$f = f.1_A$ et $E^{\mathcal{B}'}(f) = 0$ p.s ce qui entraine que $E^{\mathcal{B}}(f) = 0$ p.s car

$$\int_{B'} f dP = 0 \text{ pour tout } B' \in \mathcal{B}' \Rightarrow \int_B f 1_A dP = 0 \text{ pour tout } B \in \mathcal{B} .$$

donc :

$$f \in W^{\perp} = \{X \in L_\infty : \int X 1_B dP = 0 \; ; \forall B \in \mathcal{B}\} = \{X \in L_\infty : E^{\mathcal{B}}(X) = 0 \text{ p.s}\}$$

et W est mince.

C. S. Inversement, si W est mince, supposons qu'il existe un $\mathcal{B}$-atome $A \in \mathcal{A}$ tel que $P(A) > 0$. Il existe une fonction f non nulle telle que $f = f\,1_A$ et $E^{\mathcal{B}}(f) = 0$ p.s d'après la proposition IV. 4 : on a

$$E^{\mathcal{B}}(f\,1_A) = f.P^{\mathcal{B}}(A) \quad \text{p.s} \quad \text{sur } A.$$

donc $P^{\mathcal{B}}(A) = 0$ p.s ; par suite $P(A) = 0$ ce qui contredit l'hypothèse. *

Corollaire.

Si l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ne contient aucun $\mathcal{B}$-atome non négligeable, pour toute variable aléatoire réelle $\mathcal{A}$-intégrable X_o à valeurs dans $[0,1]$, il existe un ensemble $A \in \mathcal{A}$ tel que :
$P^{\mathcal{B}}(A) = E^{\mathcal{B}}(X_o)$, p.s.

D'après la proposition l'ensemble $W = \{1_B \; ; \; B \in \mathcal{B}\}$ est mince et le théorème IV. 8 implique qu'il existe effectivement une indicatrice d'ensemble dans la variété linéaire $V = \{X \in L_\infty : E^{\mathcal{B}}(X) = E^{\mathcal{B}}(X_o) \text{ p.s}\}$, puisque $W^\perp = \{Y \in L_\infty \; : E^{\mathcal{B}}(Y) = 0 \text{ p.s}\}$ et $K_o = T \cap V$.

On retrouve le théorème IV. 5 en prenant X_o de plus $\mathcal{B}$-mesurable.

2. Forme "conditionnelle" du théorème de Liapounoff et application statistique.

Proposition IV. 12.

Soit $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_N\}$ une famille finie de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{A})$, $\mathcal{B}$ une sous σ-algèbre de $\mathcal{A}$ telle que chaque espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P_i)$ n'admette aucun $\mathcal{B}$-atome non négligeable. Pour toute fonction réelle $\mathcal{A}$-mesurable, $\mathcal{P}$-intégrable X_o à valeurs dans $[0,1]$ il existe un ensemble $A \in \mathcal{A}$ tel que $P_i^{\mathcal{B}}(A) = E_{P_i}^{\mathcal{B}}(X_o)$ P_i-p.s pour tout $i = 1, \ldots, N$.

Cette proposition implique le résultat du théorème IV. 10 puisque si les $(\Omega, \mathcal{A}, P_i)$ n'admettent pas de $\mathcal{B}$-atomes il n'admettent pas d'atomes. Elle lui est équivalente si on prend $\mathcal{B} = \{\emptyset, \Omega\}$.

Soit $P^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} P_i$, il suffit de montrer que l'ensemble :

$W = \{\frac{dP_i}{dP^*} 1_B \; ; B \in \mathcal{B}, \; i = 1,\ldots N\}$ est mince dans $L_1(\Omega, \mathcal{A}, P^*)$ puisque

$$K_o = T \cap \{X_o + W^{\perp}\} = \{X \in T \; : \; X = X_o + Y \; ; \; Y \in W^{\perp}\} =$$

$\{X \in T \; : \; E^{\mathcal{B}}_{P_i}(X) = E^{\mathcal{B}}_{P_i}(X_o)\}$, auquel on applique le théorème IV. 8.

P^* est une probabilité équivalente à $\mathcal{P}$, donc l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P^*)$ n'admet pas de $\mathcal{B}$-atome non négligeable. Pour tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $P^*(A) > 0$ on construit une fonction $f = f.1_A$ non nulle p.s telle que $E^{\mathcal{B}}_{P_i}(f) = 0$ p.s pour tout $i = 1 \ldots N$.

D'après le corollaire du théorème IV. 5. Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_{N+1}$ sont des nombres réels > 0 de somme 1. Il existe une partition $A_1, \ldots, A_{N+1}$ de A avec $A_i \in \mathcal{A}$ et $P^{*\mathcal{B}}(A_i) = \alpha_i . P^{*\mathcal{B}}(A)$ et $P^{*\mathcal{B}}(A_i) > 0$ sur A pour tout $i = 1, \ldots N + 1$, puisque $\{P^{*\mathcal{B}}(A) > 0\}$ est le plus petit ensemble de $\mathcal{B}$ contenant A. Pour tout ω fixé considérons le système linéaire :

$$\sum_{i=1}^{N+1} x_i \, P_j^{\mathcal{B}}(A_i) = 0 \; , \quad j = 1, \ldots, N \; ;$$

il admet au moins une solution $x_1(\omega), \ldots, x_{N+1}(\omega)$ que l'on peut choisir

$\mathcal{B}$ -mesurable (cf. [28] p. 8) . La fonction f définie par

$$f(\omega) = \sum_{i=1}^{N+1} x_i(\omega)\, 1_{A_i} \quad \text{est telle que } f = f.1_A \text{ et appartient à } W^{\perp} \ . \ *$$

Remarque :

Soit $\{\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_M\}$ une famille finie de sous σ-algèbres de $\mathcal{A}$, telles que chaque espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P_i)$ n'admette pas de $\mathcal{B}_j$-atome non négligeable ($j = 1,\ldots M$).

Le problème de savoir alors, s'il existe pour toute fonction réelle $\mathcal{A}$ -mesurable, $\mathcal{P}$-intégrable X_o à valeurs dans $[0,1]$, un ensemble $A \in \mathcal{A}$ tel que

$$P_i^{\mathcal{B}_j}(A) = E_{P_i}^{\mathcal{B}_j}(X_o) \quad P_i\text{-p.s pour tout } i = 1,\ldots N \text{ et pour tout } j = 1,\ldots M$$

n'est pas résolu lorsque $M > 1$, de façon générale.

Le théorème de Romanovskïi et Sudakoff (cf. [34], [26] ou [28]) donne une réponse affirmative dans le cas particulier ou $(\Omega,\mathcal{A})$ est le sous-ensemble $[0,1]^M$ muni de la σ-algèbre borélienne de $\mathbb{R}^M$, $P_1,\ldots,P_N$ sont des probabilités absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue sur cet espace mesurable et $\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_M$ sont les sous σ-algèbres de $\mathbb{R}^M$ engendrées par les cylindres à base dans $\mathcal{R}$, correspondant à chaque coordonnée.

Application à l'existence d'ensembles libres.

Dans son livre, [27] LINNIK propose une extension des conditions d'application de la méthode des ensembles de structure de Neyman, pour la recherche d'ensembles libres dans une structure n'admettant pas de statistique exhaustive non triviale.

Comme au § 2 la proposition IV. 12 permet de remplacer des hypothèses de type analytique par des hypothèses de non atomicité conditionnelle.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P} = \{P_\theta\ ;\ \theta \in \Theta\})$ une structure statistique n'admettant pas de σ-algèbre exhaustive non $\mathcal{P}$-équivalente à $\mathcal{A}$ ou pour laquelle les hypothèses de la proposition IV. 6 ne sont pas vérifiées. Supposons que pour tout θ, P_θ puisse s'écrire sous la forme :

$$(1) \qquad P_\theta = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i C_i(\theta)\, P_{i,\theta}$$

avec $\varepsilon_i = \pm 1$, $C_i(\theta) > 0$

et $\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i C_i(\theta) = 1$ pour tout $\theta \in \Theta$.

Supposons de plus que pour tout $i = 1,\ldots,N$ la structure statistique $(\Omega, \mathcal{A}, \{P_{i,\theta}\ ;\ \theta \in \Theta\})$ soit dominée par une probabilité privilégiée P_i^* , et admette une sous σ-algèbre $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{A}$ exhaustive et indépendante de i.

<u>Lemme IV. 13.</u>

S'il existe un ensemble $A \in \mathcal{A}$ (non trivial) qui soit de structure de Neyman par rapport à $\mathcal{B}$ dans la structure finie $(\Omega, \mathcal{A}, \{P_i^*\ ;\ i = 1,\ldots N\})$, alors A est un ensemble libre dans la structure statistique $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P} = \{P_\theta\ ;\ \theta \in \Theta\})$.

Soit $A \in \mathcal{A}$ tel que $P_i^{*\mathcal{B}}(A) = \alpha$, P_i^*-p.s pour tout $i = 1,\ldots,N$. $\mathcal{B}$ étant une σ-algèbre exhaustive pour la structure $(\Omega, \mathcal{A}, \{P_{i,\theta}\ ;\ \theta \in \Theta\})$ on a $P_{i,\theta}(.) = P_i^*(.)$ P_i^*-p.s pour tout i, par suite

$$P_{i,\theta}(A) = \int_\Omega P_{i,\theta}^{\mathcal{B}}(A)\, dP_{i,\theta} = \alpha \quad \text{pour tout } i = 1,..,N \text{ et pour tout } \theta \in \Theta.$$

et,

$$P_\theta(A) = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i C_i(\theta)\, P_{i,\theta}(A) = \alpha \quad \text{pour tout } \theta \in \Theta. \ *$$

Proposition IV. 14

Dans les hypothèses énoncées, si chacun des espaces probabilisés $(\Omega, \mathcal{A}, P_i^*)$, $i = 1, \ldots N$ n'admet aucun $\mathcal{B}$ -atome non négligeable, pour tout nombre réel $\alpha \in [0,1]$, il existe un ensemble A_α dans $\mathcal{A}$,libre pour la structure statistique $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, de probabilité α.

Il suffit d'appliquer la proposition IV. 12 en prenant $X_o \equiv \alpha$ et le lemme IV. 13. - ✱

Citons des exemples donnés par LINNIK de lois de probabilité pouvant s'écrire sous la forme (1) :

1°) - Soit $\{P_\theta \; ; \; \theta \in \Theta\}$ une famille de lois de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{A})$ admettant une densité par rapport à une mesure μ σ-finie, de la forme

$$(2) \qquad \frac{dP_\theta}{d\mu}(\omega) = p_\theta(\omega) = \sum_{i=1}^{q} R_i \; (T(\omega), \theta) \; r_i(\omega)$$

R_i, r_i sont des fonctions mesurables réelles, T est une statistique : $(\Omega, \mathcal{A}) \to (\Sigma, \mathcal{J})$ qui n'est donc pas exhaustive si $q > 1$.

En décomposant R_i et r_i en parties positives et négatives on peut toujours écrire $p_\theta(\omega)$ comme somme de N termes de signe constant sur Ω :

$$p_\theta(\omega) = \sum_{i=1}^{N} \tilde{R}_i(T(\omega), \theta) \; \tilde{r}_i(\omega) \quad ; \quad 1 \leq N \leq 4q.$$

On pose :

$$C_i(\theta) = \int_\Omega |\tilde{R}_i \; (T(\omega), \theta) \; \tilde{r}_i(\omega)| \; d\mu$$

On peut supposer $C_i(\theta) > 0$ pour tout i et tout $\theta \in \Theta$. De sorte que les fonctions mesurables réelles

$$(3) \qquad p_{i,\theta}(\omega) = \frac{1}{C_i(\theta)} \left| \tilde{R}_i \, (T(\omega),\theta) \, \tilde{r}_i(\omega) \right| \qquad i = 1,\dots N$$

sont des densités de probabilité par rapport à μ et en notant $P_{i,\theta} = p_{i,\theta}.\mu$
On obtient bien la forme (1) pour P_θ.

D'après (3), il est clair que T est une statistique exhaustive sur la structure $(\Omega, \mathcal{A}, \{P_{i,\theta} \; ; \; \theta \in \Theta\})$ pour tout $i = 1,\dots,N$.

2°) - Soit la structure d'échantillon

$(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \{\gamma(m \; ; \; a,p) \; ; \; m \in \mathbb{R}, \; a \in \mathbb{N}^+, \; p \in \mathbb{R}^+\})^n$ où $\gamma(m \; ; \; a,p)$ est la loi Gamma dont la densité par rapport à la mesure de Lebesque sur $\mathbb{R}$ est :

$$f(x \; ; \; m \; ; \; a,p) = \frac{p^a}{\Gamma(a)} . \; e^{-p(x-m)} . (x-m)^{a-1} . 1_{\{x \geq m\}} . \qquad x \in \mathbb{R} \; .$$

Supposons a connu. Si l'on désire tester l'hypothèse $H_o : p = p_o \; (p > 0)$ au moyen d'un test déterministe ne dépendant pas de m inconnu ; il est nécessaire qu'il existe dans $\mathcal{R}^n$ des régions libres par rapport à m lorsque $p = p_o$.

La densité correspondant à l'échantillon sur $(R^n, \mathcal{R}^n)$ s'écrit :

$$(4) \quad f^{(n)}(x_1,\dots,x_n \; ; \; m.a,p) = \frac{p^{na}}{[\Gamma(a)]^n} \exp\{- p \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)\}.$$

$$\prod_{i=1}^{n} (x_i - m)^{a-1} . 1_{\{\min x_i \geq m\}} \; ;$$

Lorsque l'entier a est différent de 1, il n'existe pas de statistique exhaustive non triviale sur la structure d'échantillon que a soit connu ou non (cf. [3] p. 93). Cependant

Si $a \neq 1$, $\prod_{i=1}^{n} (x_i - m)^{a-1}$ est de la forme

$$(x_1 x_2 \ldots x_n)^{a-1} + \Sigma\,(km^{\beta} x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n}) + m^{n(a-1)} \quad ;$$

il est clair alors que (4) peut s'écrire comme (2) avec

$$T(x_1,\ldots,x_n) = (\sum_{i=1}^{n} x_i,\ \min_i x_i)$$

il suffit de vérifier, pour assurer l'existence d'ensembles libres par rapport à m, de probabilité α pour tout $\alpha \in [0,1]$ que $\mathbb{R}^n$ n'admet pas de $T^{-1}(\mathbb{R}^2)$-atomes de mesure de Lebesgue non nulle. Il faut pour cela supposer $n > 2$, (si $n = 2$, T engendre la même σ-algèbre que la statistique d'ordre dans $\mathbb{R}^2$).

CONCLUSION.

On remarque que la principale méthode pour montrer l'existence de statistiques libres non triviales sur une structure statistique dominée, et qui est fournie par la proposition IV. 2, conduit à des conditions portant sur la statistique exhaustive minimale.

Ceci, et notamment le résultat de la proposition IV. 6, illustre encore la complémentarité des deux notions.

La condition de non atomicité conditionnelle, relative à la σ-algèbre exhaustive donnée dans cette proposition est assez forte, mais elle implique l'existence d'une famille assez riche d'ensembles libres de tous niveaux, et il serait intéressant de savoir si elle implique également l'existence d'une décomposition de la structure (au sens du chapitre III. § 2).

Mais cette condition, d'ailleurs très naturelle, ne se vérifie pas facilement, si la statistique exhaustive utilisée n'est pas une fonction simple des observations.

Parmi les problèmes dont l'application pratique est évident et qui ne sont pas résolus citons celui de la caractérisation des structures statistiques pour lesquelles la famille de tous les ensembles libres est une σ-algèbre, et celui de la construction effective des ensembles libres.

Nous retiendrons de ce chapitre, et notamment des méthodes employées, que les problèmes posés par l'étude des structures faiblement incomplètes relèvent de l'analyse fonctionnelle et sont d'un certain intérêt théorique.

Dans leur récent article [5] BASU et GHOSH posent, en autres, le problème inverse : étant donnés un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ et un ensemble $A \in \mathcal{A}$, que peut on dire du sous-ensemble convexe $\mathcal{P}(A)$ de $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$ des mesures de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ par rapport auquel A est un ensemble libre, et en particulier de ses points extrêmaux.

B I B L I O G R A P H I E

[1] ANDERSON, T. W. An introduction to multivariate statistical analysis.
(1958) - John Wiley & son. Sixième éditeur 1966. N. Y.

[2] BARRA, J. R. Notions fondamentales de statistique mathématique.
(A paraitre) - Dunod éditeur Paris 1970.

[3] BARRA, J. R.
BAILLE, A. Problèmes de statistique mathématique.
(1969) - Dunod éditeur Paris.

[4] BASU, D., Recovery of ancillary information.
(1964) - Sankhyā, 26, 3 - 16.

[5] BASU, D.,
GHOSH, J. K. Invariant sets for translation parameter families of measures.
(1969) - The Ann. of Math. Stat. Vol. 40, 162 - 174.

[6] BLUM, J. R.,
HANSON, D. L. On invariant probability measures I.
(1960) - Pacific journal of mathematics, 10, 1125 - 1129.

[7] BOURBAKI, N. Eléments de mathématique. Espaces vectoriels topologiques.
(1964) - Livre V chapitre I à V. Hermann, éditeur Paris.

[8] CHOQUET, G. Cours de topologie générale.
(1963) - Masson & Cie, éditeurs Paris.

[9] DINCULEANU, N. Vector measures.
(1967) - Pergamon Press, Volume 95.

[10] DUNFORD, N. and SCHWARTZ, J. T. Linear operators. Part I : General theory.
(1958) - Inter science Publishers, Inc., N. Y. and London.

[11] DVORETZKY, A., WALD, A; and WOLFOWITZ, J. Elimination of randomization in certain statistical decision procedures and zero sum two-person games.
(1951) - The Ann. of Math. Stat. vol. 22, 1 - 21.

[12] FERGUSON, T. S. Location and scale parameters in exponential families of distributions.
(1962) - The Ann. of Math. Stat. vol. 33, 986 - 1001.

[13] FERGUSON, T. S. Mathematical Statistics. A decision theoretic approach.
(1967) - Academic Press, N. Y. & London.

[14] GHOSH, M. N. On the problem of similar regions.
(1948) - Sankhyā, 8, 329 - 338.

[15] GIRSHICK, M. A., MOSTELLER, F. and SAVAGE, L. J; Unbiased estimates for certain binomial sampling problems with applications.
(1946) - The Ann. of Math. Stat. vol. 17, 13 - 23.

[16] HALMOS, P. A. The range of a vector measure.
(1948) - Bull. Ann. Math. Soc., 54, 416 - 421.

[17] HENNEQUIN, P. L. TORTRAT, A. Théorie des probabilités et quelques applications.
(1965) - Masson & Cie éditeurs Paris.

[18] KAGAN, A. M. Partial sufficiency and inbiased estimation of polynomials in a translation parameter.
(1967) - Dok. Akad. Nank SSR., 174, 3, 745 - 747.

[19] KAGAN, A. M. Caractérisation de la loi gamma par des propriétés statistiques de la moyenne empirique (En russe).
(1967) - Izvestiya Akademii Nank Uzbek. SSR, 4.

[20] KAGAN, A. M. SHALAEVSKII, O. V. A characterisation of the normal law by the property of partial sufficiency.
(1967) - Teoriya Veroyatn. i primeneniya. XII, 3.

[21] KAGAN, A. M. SUDAKOFF, V. N. Partitions séparantes pour certaines familles de mesures. (En russe).
(1964) - Vestnik Leningrad Univ. N° 13, 147 - 150.

[22] LEHMANN, E. L. Testing statistical hypothesis.
(1959) - John Wiley & son. N. Y.

[23] LEHMANN, E. L.
and SCHEFFE, H. Completness, similar regions and unbiased estimation.
(1950) - Sankhyā, 10, 305 - 340

[24] LIAPOUNOFF, A. A. Sur les fonctions vecteurs complètement additives.
(1940) - Bull. Acad. Sci. URSS. Sér. Math..
Vol. 4, 465 - 478.

[25] LINNIK, Yu. V. Leçons sur les problèmes de statistique analytique.
(1968) - Gauthier - Villard, édition Paris.

[26] LINNIK Yu. V. Sur certaines questions de statistique analytique.
(1962) - Ann. Fac. Sci. Univ. de Clermond-Ferrand,
Math. 8, 53 - 61.

[27] LINNIK, Yu. V. Statistical problems with nuisance parameters.
(1969) AMS.

[28] LOBRY, C. Sur le théorème de J. V. Romanovskii et
V. N. Sudakoff.
(1969) - Séminaire de statistique Fac. des Sciences
Université de Grenoble (Multigraphié).

[29] MEYER, P. A. Probabilités et potentiel.
(1966) - Hermann édition Paris.

[30] NEVEU, J. Bases mathématiques du calcul des probabilités.
(1964) - Masson & Cie éditeurs Paris.

[31] NEVEU, J. Théorie ergodique.
(1967) - Cours multigraphié. Faculté des Sciences Université de Paris.

[32] NEVEU, J., HANEN, A. Atomes conditionnels d'un espace de probabilité.
(1966) - Acta. Math. Acad. Sci. Hungaricae 17, 443 - 449.

[33] NEYMAN, J., PEARSON, E. S. On the problem of the most efficient tests of statistical hypotheses.
(1933) - Phil. Trans. Roy. Soc. London, Series A, 231, 289 - 337.

[34] ROMANIVSKII, J. V., SUDAKOFF, V. N. Sur l'existence des décompositions indépendantes (En russe)
(1965) - Trudy MIAN SSSR, t. 70, 5 - 10.

[35] VISIK, S. M., COBRINKSII, A. A., ROSENTHAL, A. L. A separating partition for a finite family of measures.
(1964) - Teoriya Veroyatn. i primeneniya. Vol. 9, 165 - 167.

VU

Grenoble, le

Le Président de la thèse

J. KUNTZMANN.

VU, et permis d'imprimer,

Grenoble, le

Le Doyen de la Faculté des Sciences

E. BONNIER.