



**HAL**  
open science

**Effet de bruit utile dans les processus non linéaires :  
Contribution sur de nouveaux mécanismes en traitement  
du signal et en imagerie**

Solenna Blanchard

► **To cite this version:**

Solenna Blanchard. Effet de bruit utile dans les processus non linéaires : Contribution sur de nouveaux mécanismes en traitement du signal et en imagerie. Interface homme-machine [cs.HC]. Université d'Angers, 2008. Français. NNT : . tel-00451480

**HAL Id: tel-00451480**

**<https://theses.hal.science/tel-00451480v1>**

Submitted on 29 Jan 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Effet de bruit utile  
dans les processus non linéaires :  
Contribution sur de nouveaux mécanismes  
en traitement du signal et en imagerie**

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : **Traitement du Signal et des Images**

**ÉCOLE DOCTORALE D'ANGERS**

**Présentée et soutenue publiquement**

le 14 Novembre 2008  
à l'Université d'Angers  
par Solenna BLANCHARD

**Jury**

**Régine LE BOUQUIN-JEANNÈS** (Rapporteur), Professeur des Universités, Université de Rennes 1  
**Jean-Marie BILBAULT** (Rapporteur), Professeur des Universités, Université de Dijon  
**François GOUDAIL** (Examineur), Professeur des Universités, Institut d'Optique de Palaiseau  
**Steeve ZOZOR** (Examineur), Chargé de Recherche CNRS, GIPSA-Lab de Grenoble  
**Denis GINDRE** (Examineur), Maître de Conférences HDR, Université d'Angers

**François CHAPEAU-BLONDEAU** (Directeur de thèse), Professeur des Universités, Université d'Angers  
**David ROUSSEAU** (Co-encadrant), Maître de Conférences, Université d'Angers



## Remerciements

Les travaux de thèse présentés dans ce mémoire ont été réalisés au sein du Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés (LISA) de l'Université d'Angers. Je remercie ses directeurs Mr Jean-Louis Ferrier et Mr Jean-Louis Boimond qui lui a succédé de m'avoir accueillie dans ce laboratoire si dynamique.

Je remercie Mr Jean-Marie Bilbault, Professeur à l'Université de Dijon et Mme Régine Le Bouquin-Jeannès, Professeur à l'Université de Rennes 1, d'avoir accepté d'examiner cet ensemble d'études en qualité de rapporteurs et d'avoir ainsi contribué à l'amélioration de ce manuscrit.

Je remercie Mr Steeve Zozor, Chargé de Recherche CNRS au GIPSA-Lab de Grenoble et Mr François Goudail, Professeur à l'Institut d'Optique de Palaiseau, d'avoir accepté de juger mon travail en participant au jury.

J'ai eu le plaisir de travailler avec Mr Denis Gindre, Maître de Conférences HDR à l'Université d'Angers. Je tiens à le remercier pour ses explications dans le domaine de l'optique, sa contribution à la fois dans ces travaux et en tant qu'examinateur.

Je remercie sincèrement mon co-encadrant Mr David Rousseau, Maître de Conférences à l'Université d'Angers, pour son enthousiasme constant et la pédagogie dont il a fait preuve à mon égard durant ces trois années.

J'exprime ma reconnaissance envers mon directeur de thèse Mr François Chapeau-Blondeau, Professeur à l'Université d'Angers. Il prend soin, à différents niveaux, d'offrir une formation de qualité aux doctorants comme moi qui ont la chance de travailler sous sa direction.

J'ai beaucoup appris grâce à eux et je leur adresse ma respectueuse gratitude pour m'avoir fait confiance et m'avoir encouragée.

J'ai pu rencontrer un certain nombre de personnes en tant que doctorante mais également en tant que monitrice CIES. Je remercie notamment les membres du laboratoire LISA et les autres moniteurs pour les diverses conversations. J'ai été particulièrement soutenue par FX, Céline, Nicolas, Vincent, et je tenais à les en remercier.

J'ai également reçu un soutien permanent de la part de mon entourage et des remerciements sont le minimum que je puisse adresser à mes parents, mon jules et de véritables amis comme Olivier.



## Effet de bruit utile dans les processus non linéaires : Contribution sur de nouveaux mécanismes en traitement du signal et en imagerie

**Résumé :** Le bruit peut avoir un rôle bénéfique sur les processus non linéaires en charge du traitement de l'information. Depuis quelques années, des études dans divers domaines mettent en évidence différents mécanismes par lesquels cet effet de bruit utile se produit. Dans ce mémoire, nous montrons de nouveaux mécanismes d'amélioration par le bruit en traitement du signal et en imagerie, plus particulièrement dans les réseaux de capteurs et dans les systèmes d'imagerie cohérente. L'analyse de ces mécanismes est réalisée au moyen d'études analytiques, de simulations numériques et de mises en œuvre expérimentales. Nous prenons en compte les non-linéarités avec seuil et saturation présentes dans les processus considérés, en interaction avec différents mélanges signal-bruit. Ces travaux peuvent avoir une portée dans des domaines variés tels que l'électronique ou l'imagerie optique. Nous étudions également l'influence du bruit sur le traitement de l'information par les processus neuronaux.

**Mots-clés :** effet de bruit utile, processus non linéaires, capteurs, réseaux de capteurs, processus neuronaux, estimation de paramètres, acquisition d'image, imagerie cohérente.

## Useful noise effect in nonlinear processes : Contribution on new mechanisms in signal processing and in imaging

**Abstract :** Noise can have a beneficial impact on the nonlinear processes in charge of information processing. In the last years, studies in various areas underlined different mechanisms by which this useful effect of the noise occurs. In this work, we show new mechanisms of improvement by noise in signal processing and in imaging, more specially in arrays of sensors and in coherent imaging systems. We investigate these mechanisms by means of analytical studies, numerical simulations and experimental implementations. We consider threshold and saturating nonlinearities existing in the studied processes, in relation with different signal-noise mixtures. This work can bear significance in many areas such as electronics or optical imaging. We also study the impact of noise on the information processing by neural processes.

**Keywords :** useful noise effect, nonlinear processes, sensors, arrays of sensors, neural processes, parameter estimation, image acquisition, coherent imaging.



# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>I Effet de bruit utile dans les réseaux de non-linéarités</b>	<b>3</b>
<b>Introduction sur les réseaux de capteurs</b>	<b>5</b>
<b>1 Estimation de puissance aidée par le bruit avec des comparateurs</b>	<b>7</b>
1.1 Estimation à partir d'un comparateur isolé . . . . .	7
1.1.1 Information de Fisher en sortie du comparateur . . . . .	7
1.1.2 Évolution entrée-sortie de l'information de Fisher pour un comparateur isolé . . . . .	12
1.2 Estimation à partir d'un réseau de comparateurs . . . . .	13
1.2.1 Information de Fisher en sortie du réseau . . . . .	13
1.2.2 Évolution entrée-sortie de l'information de Fisher pour un réseau . . . . .	18
1.3 Discussion sur l'effet de bruit utile en estimation . . . . .	18
<b>2 Estimation aidée par le bruit avec des capteurs comportant une saturation</b>	<b>21</b>
2.1 Information de Fisher dans les réseaux non linéaires . . . . .	21
2.2 Information de Fisher dans les réseaux avec saturation . . . . .	23
2.2.1 Cas $N = 1$ . . . . .	24
2.2.2 Cas $N = 2$ . . . . .	25
2.2.3 Cas $N$ grand . . . . .	25
2.2.4 Comportements limites . . . . .	27
2.3 Information de Fisher améliorée par le bruit . . . . .	28
2.4 Deux mécanismes d'effet de bruit utile . . . . .	33
2.5 Estimation sur un signal non sinusoïdal . . . . .	34
2.6 Discussion sur le réseau de capteurs avec saturation considéré . . . . .	36
<b>3 Application aux réseaux parallèles de neurones</b>	<b>39</b>
3.1 Le modèle de processus neuronal . . . . .	40
3.2 Mesure de la transmission par le réseau . . . . .	41
3.2.1 Transmission d'un signal périodique . . . . .	41
3.2.2 Transmission d'un signal aperiodique . . . . .	43
3.3 Transmission aidée par le bruit dans un réseau neuronal . . . . .	43
3.3.1 Transmission au seuil . . . . .	45

3.3.2	Transmission en régime intermédiaire . . . . .	48
3.3.3	Transmission à la saturation . . . . .	50
3.4	Discussion sur les mécanismes d'effet de bruit utile . . . . .	51
<b>Conclusion sur les réseaux de capteurs</b>		<b>53</b>
 <b>II Effet de bruit utile en imagerie cohérente</b>		 <b>55</b>
<b>Introduction sur l'imagerie cohérente</b>		<b>57</b>
<b>4</b>	<b>Transmission d'image aidée par le bruit de speckle</b>	<b>59</b>
4.1	Système d'imagerie cohérente avec un capteur à seuil . . . . .	59
4.2	Amélioration de la transmission par le bruit de speckle . . . . .	62
4.3	Calcul théorique du niveau de bruit optimal . . . . .	65
4.4	Mise en œuvre expérimentale . . . . .	68
4.5	Discussion sur le modèle utilisé . . . . .	71
<b>5</b>	<b>Transmission par un capteur avec saturation</b>	<b>73</b>
5.1	Système d'acquisition dont un capteur avec saturation . . . . .	73
5.2	Évaluation des mesures de similarité entrée–sortie . . . . .	74
5.3	Optimisation avec un bruit de speckle exponentiel . . . . .	75
5.4	Discussion sur l'acquisition en présence de saturation . . . . .	78
<b>6</b>	<b>Applications en présence de speckle</b>	<b>81</b>
6.1	Application à la réduction de bruit de speckle . . . . .	81
6.1.1	Amélioration par le bruit de speckle . . . . .	84
6.1.2	Niveau optimal du bruit de speckle . . . . .	86
6.2	Application à l'imagerie de polarimétrie . . . . .	87
6.3	Discussion sur les applications considérées . . . . .	90
<b>Conclusion sur l'imagerie cohérente</b>		<b>93</b>
 <b>Conclusion générale</b>		 <b>95</b>
<b>Publications et communications dans le cadre de la thèse</b>		<b>97</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>99</b>

---

# Introduction générale

L'effet de bruit utile est un phénomène physique non linéaire de coopération entre le bruit et un système physique. Introduit par Benzi et al. [1, 2] en géophysique, et développé en physique non linéaire [3, 4, 5] sous le nom de résonance stochastique, ce phénomène a été étendu par la suite à divers domaines dont le traitement du signal. Différents mécanismes ont été mis en évidence dans des domaines tels que la détection [6, 7, 8], ainsi que des possibilités remarquables de l'effet comme des gains en rapport signal-sur-bruit [9] ou l'amélioration d'une détection optimale [10, 11]. Le Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés (LISA) a participé activement à la compréhension de cet effet de bruit utile sur les processus non linéaires d'un point de vue traitement de l'information [12, 13]. L'ensemble des situations qui peuvent donner lieu à une amélioration par le bruit est en expansion, ainsi que la diversité des domaines concernés par cette amélioration. Nous avons cherché à montrer de nouvelles situations où le bruit joue un rôle bénéfique sur le traitement de l'information.

Un certain nombre d'études se sont penchées sur les mécanismes d'effet de bruit utile dans les non-linéarités isolées [14, 15, 16]. D'autres mécanismes ont été montrés pour des systèmes plus sophistiqués, organisés selon différentes architectures comme la mise en cascade de non-linéarités ou les réseaux parallèles de capteurs [17, 18, 19, 20]. L'intérêt porté à ces structures est toujours d'actualité [21]. Au début de cette thèse, l'effet de bruit utile dans les réseaux était essentiellement analysé pour des non-linéarités à seuil. En considérant d'autres types de non-linéarités, d'autres signaux à traiter ou d'autres traitements, nous cherchons à déterminer si cet effet persiste. Dans l'affirmative, nous étudions dans quelles proportions et par quels mécanismes. Ce faisant, nous apportons notre contribution sur la robustesse de l'effet lorsqu'on complexifie les processus. Parallèlement, le domaine du traitement neuronal de l'information est très actif. L'analyse de l'influence du bruit dans les processus neuronaux permet d'avancer dans la connaissance des systèmes naturels du point de vue du traitement de l'information, comme par exemple le système auditif. De plus, ces avancées peuvent se traduire par un perfectionnement des technologies bio-inspirées. Dans le cas de l'audition, les dispositifs sophistiqués que sont les prothèses auditives et les implants cochléaires sont des exemples de technologies où il a été montré que le bruit apporte une meilleure intelligibilité pour les porteurs. Les neurones font également partie de notre système visuel et on retrouve une exploitation du bruit en vision [22], et plus particulièrement dans le fonctionnement de la rétine [23, 24, 25].

Les images constituent également une source d'information que l'on souhaite traiter au mieux [26, 27], et ce dans un grand nombre de secteurs. Nous nous sommes interrogés sur l'existence et les spécificités d'une amélioration par le bruit en imagerie.

Le manuscrit comporte deux parties principales. Dans la première partie, nous examinons l'influence du bruit dans les réseaux parallèles de capteurs. Dans la seconde partie, nous nous proposons d'étudier l'influence du bruit de speckle en imagerie cohérente. Dans ces deux domaines, nous montrons de nouveaux mécanismes d'effet de bruit utile, que nous analysons au moyen d'études analytiques, de simulations numériques et de mises en œuvre expérimentales.

## Première partie

# Effet de bruit utile dans les réseaux de non-linéarités



---

# Introduction sur les réseaux de capteurs

Un grand nombre de travaux sur l'effet de bruit utile concernent les systèmes non linéaires isolés [5, 15, 13]. Cependant, les systèmes physiques sont souvent plus sophistiqués, comportant diverses sources de bruit provenant de leur structure ou de leur environnement, comme par exemple les réseaux de capteurs. L'effet de bruit utile dans les réseaux de capteurs a essentiellement été analysé pour des capteurs avec seuil [28, 29, 30, 31]. Ces études ont mis en évidence des mécanismes différents de ceux agissant dans les non-linéarités isolées. En particulier, la possibilité d'une amélioration par le bruit dans ces réseaux n'est pas restreinte à la transmission de signaux sous le seuil ou mal positionnés par rapport aux non-linéarités. Cette propriété peut être intéressante pour diverses applications telles que les convertisseurs analogique-numérique, les antennes et la localisation de source [32], ou la détection [33].

La structure en réseau parallèle est présente dans de nombreux domaines. On trouve dans ce type d'organisation un moyen de mieux traiter l'information, en parallélisant les tâches. Dans la nature, les processus neuronaux forment une association d'éléments non linéaires très efficace pour transmettre les signaux, et sont très étudiés dans le contexte bruité [34]. Les réseaux parallèles paraissent appropriés pour modéliser les ensembles neuronaux. Une amélioration par le bruit est analysée pour de tels processus dans [35, 36, 37, 38, 39, 40] pour différents modèles de neurones. L'influence du bruit multiplicatif dans les réseaux a récemment été étudiée [41] avec une signification pour les processus neuronaux. Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction générale, les études sur l'influence du bruit dans ces processus, complémentaires aux études sur la modélisation des traitements qu'ils réalisent [42, 43, 44], permettent de mieux comprendre les systèmes naturels de traitement de l'information tels que le système auditif [45, 46, 47]. Et, dans les technologies s'inspirant de la nature, ces études apportent des alternatives pour perfectionner les dispositifs existants comme les prothèses auditives et les implants cochléaires [48, 49, 50, 51].

Dans cette première partie du manuscrit, nous nous intéressons aux réseaux parallèles de non-linéarités dans les deux domaines que sont l'estimation de paramètres et la transmission neuronale de l'information. Dans le chapitre 1, nous montrons que le bruit peut aider l'estimation d'un paramètre non déterministe, la puissance d'un bruit, à partir

des observations en sortie d'un réseau parallèle de capteurs avec seuil. Nous analysons dans le chapitre 2 les différents mécanismes d'effet de bruit utile intervenant dans un réseau de capteurs avec saturation en charge de l'estimation d'un signal quelconque. Dans le chapitre 3, nous appliquons ces études au cas des processus neuronaux présentant également un seuil et une saturation.

---

# Chapitre 1

## Estimation de puissance aidée par le bruit avec des comparateurs

La possibilité d'un effet bénéfique du bruit pour une problématique d'estimation de paramètres a été essentiellement considérée jusqu'ici sur des paramètres liés à des signaux déterministes [14, 52, 53, 54]. Ici, nous considérons l'estimation d'un paramètre (la puissance) lié à un signal de nature statistique. Dans ce chapitre, il n'y aura pas de signal déterministe, et le signal porteur d'information sera aléatoire. Pour une première démonstration d'une nouvelle forme d'effet de bruit utile portant sur l'estimation d'un paramètre lié à un bruit, comme nous le montrons également dans [55], nous allons commencer nos investigations avec un système non linéaire à seuil.

### 1.1 Estimation à partir d'un comparateur isolé

Nous allons étudier comment estimer au mieux la puissance d'un bruit à la sortie de comparateurs isolés. Afin de quantifier la performance de ces comparateurs pour une tâche d'estimation, nous utilisons l'information de Fisher à leur sortie.

#### 1.1.1 Information de Fisher en sortie du comparateur

On considère un signal aléatoire  $x(t)$  de fonction de densité de probabilité  $f_x(u)$  et de puissance ou variance  $E[x^2(t)] = \sigma^2$ . Dans ce qui suit, sans perte de généralité, le signal  $x(t)$  sera pris de moyenne nulle. Ce signal  $x(t)$  est observé au moyen d'un comparateur de seuil  $\theta$  qui délivre le signal binaire

$$y(t) = \Pi[x(t) - \theta] = 0 \text{ ou } 1, \quad (1.1)$$

où  $\Pi(\cdot)$  est la fonction de Heaviside avec  $\Pi(u) = 0$  si  $u \leq 0$  et  $\Pi(u) = 1$  sinon. À partir de la sortie  $y(t)$  du comparateur, on souhaite faire une estimation de la puissance du bruit  $\sigma^2$ . Pour ce faire, on collecte  $M$  observations  $y(t_j) = y_j$  à  $M$  instants distincts  $t_j$  avec

$j$  allant de 1 à  $M$ . Une quantité fondamentale pour cette problématique d'estimation à partir des données  $(y_1, \dots, y_M) = \vec{y}$  est l'information de Fisher  $J(\vec{y}, \sigma^2)$ , qui représente une mesure de l'information contenue dans les données  $\vec{y}$ , sur le paramètre inconnu  $\sigma^2$  à estimer [56]. La quantité  $J(\vec{y}, \sigma^2)$  sert à définir une borne qui fixe la meilleure performance que tout estimateur de  $\sigma^2$  puisse atteindre à partir de  $\vec{y}$  : l'erreur quadratique moyenne d'estimation possède toujours une borne inférieure (la borne dite de Cramér-Rao) qui est directement reliée à l'inverse de l'information de Fisher. Cette borne qui fixe la meilleure performance d'estimation peut être atteinte notamment par l'estimateur du maximum de vraisemblance, dans le régime asymptotique où le nombre  $M$  de mesures est grand. L'information de Fisher  $J(\vec{y}, \sigma^2)$  s'écrit [56] à partir de la probabilité  $\Pr\{\vec{y}\}$  d'un vecteur de données  $\vec{y}$  fixé

$$J(\vec{y}, \sigma^2) = \sum_{\vec{y}} \frac{1}{\Pr\{\vec{y}\}} \left[ \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \Pr\{\vec{y}\} \right]^2, \quad (1.2)$$

où la somme porte sur les  $2^M$  configurations possibles du vecteur de données  $\vec{y}$ . Les données  $y_j$  sont supposées statistiquement mutuellement indépendantes. C'est une hypothèse courante en métrologie qui est satisfaite en choisissant des instants d'observation suffisamment éloignés par rapport au temps caractéristique de corrélation du signal  $x(t)$ . Dans ce contexte d'indépendance des mesures, l'information de Fisher est additive et devient

$$J(\vec{y}, \sigma^2) = \sum_{j=1}^M J(y_j, \sigma^2), \quad (1.3)$$

où

$$J(y_j, \sigma^2) = \sum_{y_j \in \{0,1\}} \frac{1}{\Pr\{y_j\}} \left[ \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \Pr\{y_j\} \right]^2 \quad (1.4)$$

est l'information de Fisher contenue dans la mesure  $y_j$  au sujet de  $\sigma^2$ . De plus, lorsque les mesures  $y_j$  sont identiquement distribuées,  $J(y_j, \sigma^2)$  est identique quelle que soit  $j$  et  $J(\vec{y}, \sigma^2) = MJ(y_j, \sigma^2)$ . À partir du signal binaire observable de l'Éq. (1.1), on a

$$\Pr\{y_j = 0\} = \Pr\{x(t_j) \leq \theta\} = F_x(\theta), \quad (1.5)$$

et  $\Pr\{y_j = 1\} = 1 - \Pr\{y_j = 0\} = 1 - F_x(\theta)$ , où  $F_x(u) = \int_{-\infty}^u f_x(v)dv$  est la fonction de répartition du signal aléatoire  $x(t)$ . Pour un signal  $x(t)$  de moyenne nulle et de puissance  $\sigma^2$ , on a toujours pour la densité  $f_x(u) = f_{\text{stand}}(u/\sigma)/\sigma$  et pour la fonction de répartition  $F_x(u) = F_{\text{stand}}(u/\sigma)$  avec les fonctions standardisées, indépendantes de  $\sigma$ ,  $f_{\text{stand}}(\cdot)$  et  $F_{\text{stand}}(\cdot)$  de moyenne nulle et de puissance unité. Ceci permet d'exprimer les dérivées

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^2} F_x(u) = -\frac{u}{2\sigma^2} f_x(u), \quad (1.6)$$

menant après développement de l'Éq. (1.4) et via l'Éq. (1.5) à

$$J(y_j, \sigma^2) = \frac{\theta^2}{4\sigma^4} \frac{f_x^2(\theta)}{F_x(\theta)} + \frac{\theta^2}{4\sigma^4} \frac{f_x^2(\theta)}{[1 - F_x(\theta)]} \quad (1.7)$$

soit

$$J(y_j, \sigma^2) = \frac{f_x^2(\theta)}{[1 - F_x(\theta)]F_x(\theta)} \frac{\theta^2}{4\sigma^4}. \quad (1.8)$$

L'équation (1.8) traduit des propriétés importantes pour l'estimation de  $\sigma^2$  à partir des données  $y_j$ . En particulier, l'Éq. (1.8) montre qu'en général  $J(y_j, \sigma^2) = 0$  quand  $\theta = 0$ . Ceci signifie qu'il est impossible d'estimer la puissance  $\sigma^2$  quand le signal  $x(t)$  de moyenne nulle est observé au moyen d'un comparateur de seuil  $\theta = 0$ . Dans de nombreuses situations,  $\theta = 0$  serait le seuil optimal pour la quantification d'un signal  $x(t)$  de moyenne nulle. Ceci permettrait par exemple de minimiser la distorsion quadratique moyenne entre  $x(t)$  et sa version quantifiée  $y(t)$ . Ici, avec un réglage du seuil du comparateur à  $\theta = 0$ , le signal quantifié  $y(t)$  bascule entre 0 et 1 de façon totalement indépendante de la puissance  $\sigma^2$  du signal  $x(t)$ . Ainsi, pour l'estimation de la puissance du signal aléatoire  $x(t)$ ,  $\theta = 0$  est un réglage du comparateur complètement inefficace.

En outre l'information de Fisher  $J(y_j, \sigma^2)$  de l'Éq. (1.8) peut aussi s'écrire

$$J(y_j, \sigma^2) = \frac{1}{4\sigma^4} \frac{f_{\text{stand}}^2(\theta/\sigma)}{[1 - F_{\text{stand}}(\theta/\sigma)]F_{\text{stand}}(\theta/\sigma)} \left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^4} \rho(\theta/\sigma), \quad (1.9)$$

du fait que

$$f_x(\theta) = \frac{1}{\sigma} f_{\text{stand}}\left(\frac{\theta}{\sigma}\right) \quad (1.10)$$

Au-delà du cas  $J(y_j, \sigma^2) = 0$  à  $\theta = 0$ , la fonction  $\rho(\theta/\sigma)$  définie par l'Éq. (1.9) exprime que la dépendance de  $J(y_j, \sigma^2)$  avec  $\theta$  est universelle en  $\theta/\sigma$ , matérialisant une invariance d'échelle du processus par rapport à l'amplitude du signal, et qui se traduit dans l'expression de la performance de l'estimateur. Quand le seuil du comparateur  $\theta$  varie sur l'intervalle  $]-\infty, \infty[$ , dans l'Éq. (1.9) la fonction  $\rho(\theta/\sigma)$  reste positive, et pour tout  $\sigma > 0$  en général  $\rho(\theta = 0) = 0$  et  $\rho(\theta \rightarrow \infty) = 0$ . En conséquence, on s'attend à ce que  $\rho(\theta/\sigma)$  passe par un maximum  $\rho_{\text{max}} > 0$  pour un seuil réduit  $u_{\text{opt}} = \theta_{\text{opt}}/\sigma$  où  $\rho_{\text{max}}$  et  $u_{\text{opt}}$  sont indépendants de  $\sigma$ . Ainsi, quelle que soit la valeur de  $\sigma$ , l'information de Fisher  $J(y_j, \sigma^2)$  sera maximisée pour un seuil du comparateur  $\theta_{\text{opt}} = u_{\text{opt}}\sigma$  où elle culminera à  $\rho_{\text{max}}/\sigma^4$ . Ceci établit les conditions optimales de réglage du seuil  $\theta$  du comparateur pour maximiser la performance de l'estimation de la puissance.

Le seuil réduit optimal  $\theta_{\text{opt}}/\sigma$  dépend de la forme spécifique de la densité de probabilité de  $x(t)$ . Pour illustration, nous présentons sur la Fig. 1.1 les évolutions de l'information de Fisher  $J(y_j, \sigma^2)$  calculée à partir de l'Éq. (1.9), en fonction du seuil du comparateur  $\theta$ , dans deux cas, quand  $x(t)$  est gaussien de densité de probabilité

$$f_x(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1.11)$$

et de fonction de répartition

$$F_x(u) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{u}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right], \quad (1.12)$$

et quand  $x(t)$  est laplacien de densité de probabilité

$$f_x(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \exp\left(-\sqrt{2}\frac{|u|}{\sigma}\right) \quad (1.13)$$

et de fonction de répartition

$$F_x(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \exp\left(-\sqrt{2}\frac{|u|}{\sigma}\right) & \text{si } u \leq 0, \\ 1 - \frac{1}{2} \exp\left(-\sqrt{2}\frac{|u|}{\sigma}\right) & \text{si } u \geq 0. \end{cases} \quad (1.14)$$

Sur la Fig. 1.1, comme nous l'avions annoncé, on observe que l'information de Fisher  $J(y_j, \sigma^2)$  est toujours nulle quand le seuil du comparateur est à  $\theta = 0$ , et que  $J(y_j, \sigma^2)$  culmine à un maximum  $\rho_{\max}/\sigma^4$  pour un seuil optimal  $\theta_{\text{opt}} = u_{\text{opt}}\sigma$ . Dans le cas gaussien, on

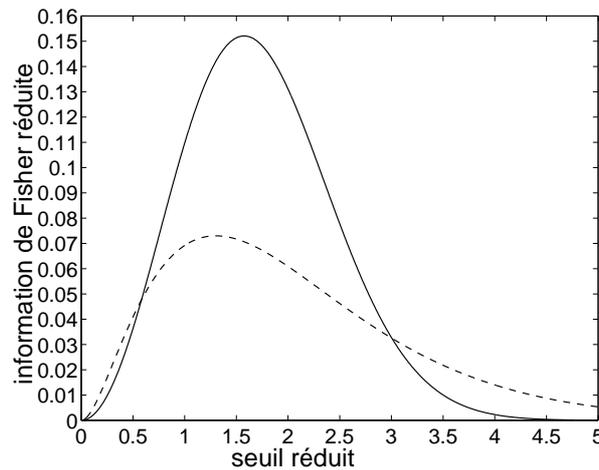


FIG. 1.1 – Information de Fisher réduite  $J(y_j, \sigma^2) \times \sigma^4 = \rho(\theta/\sigma)$  de l'Éq. (1.9), en fonction du seuil réduit  $u = \theta/\sigma$  du comparateur, quand le signal aléatoire  $x(t)$  est gaussien (trait plein) et laplacien (pointillés).

trouve  $(u_{\text{opt}}, \rho_{\max}) \approx (1.575, 0.1521)$ , et, dans le cas laplacien  $(u_{\text{opt}}, \rho_{\max}) \approx (1.302, 0.0730)$ . La valeur supérieure de l'information de Fisher dans le cas gaussien par rapport au cas laplacien signifie que l'estimation de la puissance  $\sigma^2$  à partir des données quantifiées  $y(t)$  sera plus efficace (plus précise pour une taille fixée  $M$  de données) pour un signal gaussien  $x(t)$  que pour un signal laplacien  $x(t)$ .

Cette analyse de l'information de Fisher  $J(y_j, \sigma^2)$  soulève une difficulté pratique. En effet, la valeur optimale du seuil du comparateur  $\theta_{\text{opt}} = u_{\text{opt}}\sigma$  pour l'estimation est dépendante du paramètre inconnu  $\sigma$  que l'on souhaite justement estimer. Cette difficulté peut être dépassée si on peut spécifier a priori un intervalle sur lequel la puissance  $\sigma^2$  ou l'écart-type  $\sigma$  est susceptible de prendre ses valeurs. Dans un tel cadre bayésien,

les valeurs attendues sont décrites par une densité de probabilité a priori  $p_0(u)$ . Ainsi, on peut considérer l'information de Fisher moyenne sur cette densité a priori  $p_0(u)$ , soit

$$\bar{J}(y_j) = \int_0^\infty J(y_j, \sigma^2) p_0(\sigma) d\sigma . \quad (1.15)$$

Ensuite, en sélectionnant le seuil  $\theta$  qui maximise  $\bar{J}(y_j)$  à partir des Éqs. (1.15) et (1.9), on s'assure d'obtenir en moyenne de bonnes performances, et ceci avec un comparateur dont le seuil est fixé pour l'estimation d'un grand nombre de valeurs de puissance issues de la densité de probabilité  $p_0(u)$ . La performance de ce comparateur au seuil fixé sera évidemment meilleure que dans la configuration inopérante où  $\theta = 0$ . Par contre, la performance de l'Éq. (1.15), en tant que valeur moyenne, sera un peu inférieure à la performance maximale déduite de l'Éq. (1.9). Pour illustration, la Fig. 1.2 montre l'information de Fisher moyenne  $\bar{J}(y_j)$  de l'Éq. (1.15), pour l'estimation de puissance  $\sigma^2$  d'un signal  $x(t)$  gaussien et laplacien, avec une densité de probabilité a priori  $p_0(\sigma)$  uniforme sur  $[0.5, 1.5]$ . La localisation des maxima de l'information de Fisher  $\bar{J}(y_j)$  de la Fig. 1.2 nous suggère de placer le seuil du comparateur à  $\theta = 0.97$  pour un signal gaussien, et à  $\theta = 0.83$  pour un signal laplacien, afin d'obtenir une performance moyenne optimale pour l'estimation de la puissance. Nous venons de montrer une amélioration par le bruit à la

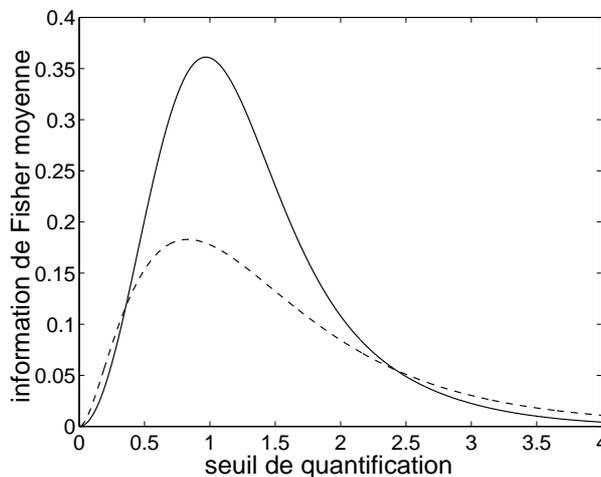


FIG. 1.2 – Information de Fisher moyenne  $\bar{J}(y_j)$  de l'Éq. (1.15), en fonction du seuil du comparateur  $\theta$ , quand le signal aléatoire  $x(t)$  est gaussien (trait plein) et laplacien (pointillés), pour une densité de probabilité a priori  $p_0(\sigma)$  uniforme sur  $[0.5, 1.5]$ .

sortie d'un comparateur isolé. Pour mieux appréhender l'effet de bruit utile sur l'estimation de la puissance  $\sigma^2$ , nous comparons dans la section suivante ces résultats avec ceux que l'on obtiendrait par une observation directe du signal analogique d'entrée  $x(t)$ .

### 1.1.2 Évolution entrée–sortie de l’information de Fisher pour un comparateur isolé

Pour aller plus loin dans l’appréciation de l’efficacité de l’estimation à partir du signal quantifié  $y(t)$ , une référence utile est de comparer  $J(y_j, \sigma^2)$  à  $J(x_j, \sigma^2)$ , où  $J(x_j, \sigma^2)$  est l’information de Fisher sur la puissance  $\sigma^2$  contenue dans un échantillon  $x_j = x(t_j)$  qui consisterait en une observation directe du signal analogique  $x(t)$  au lieu de sa version quantifiée  $y(t)$ . Cette information de Fisher  $J(x_j, \sigma^2)$  s’exprime [56] comme

$$J(x_j, \sigma^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{f_x(u)} \left[ \frac{\partial}{\partial \sigma^2} f_x(u) \right]^2 du . \quad (1.16)$$

En introduisant comme précédemment la densité de probabilité standardisée  $f_{\text{stand}}(\cdot)$  selon l’Éq. (1.10), on a

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^2} f_x(u) = -\frac{1}{2\sigma^4} [\sigma f_{\text{stand}}(u/\sigma) + u f'_{\text{stand}}(u/\sigma)] . \quad (1.17)$$

Nous obtenons alors pour l’Éq. (1.16) l’expression équivalente

$$J(x_j, \sigma^2) = \frac{1}{4\sigma^4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{f_{\text{stand}}(u)} [f_{\text{stand}}(u) + u f'_{\text{stand}}(u)]^2 du = \frac{1}{\sigma^4} \rho_{\text{ent}} , \quad (1.18)$$

avec  $\rho_{\text{ent}}$  définie par l’Éq. (1.18) qui est une constante, indépendante de la puissance  $\sigma^2$ , et fonction seulement de la forme standardisée de la densité de probabilité du signal d’entrée  $x(t)$ . Avec  $x(t)$  gaussien de densité de probabilité  $f_x(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right)$ , on trouve  $J(x_j, \sigma^2) = 1/(2\sigma^4) = 0.5/\sigma^4$  à comparer avec  $J(y_j, \sigma^2) \approx 0.1521/\sigma^4$  après quantification au seuil optimal  $\theta_{\text{opt}}$  du comparateur. Avec  $x(t)$  laplacien de densité de probabilité  $f_x(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \exp\left(-\sqrt{2}\frac{|u|}{\sigma}\right)$ , on trouve  $J(x_j, \sigma^2) = 1/(4\sigma^4) = 0.25/\sigma^4$  à comparer avec  $J(y_j, \sigma^2) \approx 0.0730/\sigma^4$  après quantification au seuil optimal  $\theta_{\text{opt}}$  du comparateur. La valeur maximale de l’information de Fisher  $J(x_j, \sigma^2)$  est supérieure pour un signal  $x(t)$  gaussien que pour un signal  $x(t)$  laplacien, ce qui montre que l’estimation de la puissance directement effectuée à partir du signal analogique  $x(t)$  pour une taille fixée  $M$  de données est également plus efficace dans le cas gaussien que dans le cas laplacien. Le rapport  $J(y_j, \sigma^2)/J(x_j, \sigma^2)$  nous donne une mesure de la perte d’efficacité liée à l’utilisation du signal quantifié  $y(t)$  en sortie du comparateur au lieu du signal analogique  $x(t)$  pour l’estimation de la puissance  $\sigma^2$ . La configuration la moins défavorable est obtenue lorsque le seuil du comparateur est réglé à sa valeur optimale pour laquelle le rapport  $J(y_j, \sigma^2)/J(x_j, \sigma^2)$  atteint sa valeur maximale  $\rho_{\text{max}}(u_{\text{opt}})/\rho_{\text{ent}}$ . Ce rapport maximal est indépendant de la puissance  $\sigma^2$ , et fonction seulement de la forme de la densité de probabilité standardisée du signal d’entrée  $x(t)$ . On trouve pour le cas gaussien  $\rho_{\text{max}}(u_{\text{opt}})/\rho_{\text{ent}} \approx 0.304$ , et pour le cas laplacien  $\rho_{\text{max}}(u_{\text{opt}})/\rho_{\text{ent}} \approx 0.292$ . La

valeur légèrement supérieure du rapport signifie qu'il y aura également moins de perte d'efficacité pour l'estimation de la puissance sur un signal  $x(t)$  gaussien que sur un signal  $x(t)$  laplacien.

Nous venons de montrer comment estimer au mieux la puissance d'un bruit au moyen d'un comparateur isolé. Nous allons voir dans la section suivante que l'effet de bruit utile est préservé lorsque ces comparateurs sont assemblés en un réseau parallèle, et que le bruit agit dans le réseau par un mécanisme différent de celui que nous venons de décrire.

## 1.2 Estimation à partir d'un réseau de comparateurs

Récemment, de nouveaux mécanismes d'effet de bruit utile ont été montrés lorsque des systèmes non linéaires isolés sont associés en réseaux parallèles [35, 29, 57]. De tels réseaux constitués de comparateurs forment les structures de ce type les plus simples. Un effet de bruit utile a été mesuré dans des réseaux parallèles de comparateurs, avec l'information mutuelle entrée–sortie dans [29], avec la corrélation entrée–sortie dans [58] et avec un rapport signal-sur-bruit dans [59]. Pour contribuer à étendre les analyses de ces nouveaux mécanismes d'effet de bruit utile dans les réseaux, nous poursuivons maintenant l'estimation de puissance à partir d'un réseau parallèle de comparateurs.

### 1.2.1 Information de Fisher en sortie du réseau

Nous considérons  $N$  comparateurs identiques décrits par  $y(t) = \Pi[x(t) - \theta] = 0$  ou 1 de l'Éq. (1.1) avec un même seuil  $\theta$ , assemblés en un réseau parallèle comme celui de [29, 31]. Ce réseau parallèle de comparateurs (non-linéarités à seuil) est représenté sur le

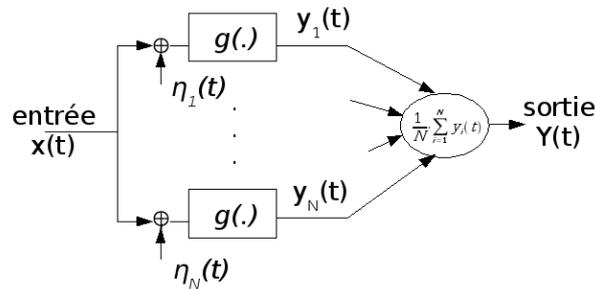


FIG. 1.3 – Réseau parallèle de non-linéarités de caractéristique  $g(\cdot)$  (donnée par l'Éq. (1.19) dans ce chapitre) que nous avons considéré dans les chapitres 1–3 du manuscrit. Les bruits de réseau  $\eta_i(t)$  sont supposés indépendants et identiquement distribués (i.i.d.), et indépendants de l'entrée  $x(t)$  du réseau commune à chaque comparateur.

schéma de la Fig. 1.3. Chaque comparateur  $i$  reçoit le même signal d'entrée  $x(t)$  auquel vient s'ajouter un bruit de réseau  $\eta_i(t)$  indépendant. Le comparateur  $i$  délivre alors le

signal binaire de sortie  $y_i(t)$  selon la relation

$$y_i(t) = \Pi[x(t) + \eta_i(t) - \theta] = 0 \text{ ou } 1, \quad (1.19)$$

pour  $i$  allant de 1 à  $N$ . Les  $N$  bruits de réseau  $\eta_i(t)$  ajoutés sont blancs, indépendants et identiquement distribués, de fonction de répartition  $F_\eta(u)$  et de densité de probabilité  $f_\eta(u) = dF_\eta(u)/du$ , et indépendants de  $x(t)$ . Les valeurs des  $N$  signaux de sortie  $y_i(t)$  à l'instant  $t$  sont ensuite moyennées pour produire la sortie  $Y(t)$  du réseau

$$Y(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i(t). \quad (1.20)$$

Comme précédemment, à  $M$  instants distincts  $t_j$  on collecte  $M$  observations  $Y(t_j) = Y_j$ , et à partir des données  $(Y_1, \dots, Y_M) = \vec{Y}$  on cherche à estimer la puissance  $\sigma^2$  du signal d'entrée  $x(t)$ . L'efficacité de l'estimation est mesurée par l'information de Fisher  $J(\vec{Y}, \sigma^2)$  contenue dans les données  $\vec{Y}$  sur le paramètre inconnu  $\sigma^2$ . Puisque les observations  $Y_j$  sont indépendantes, on a  $J(\vec{Y}, \sigma^2) = \sum_{j=1}^M J(Y_j, \sigma^2)$ . Chaque observation  $Y_j$  peut prendre  $N + 1$  valeurs différentes, soit  $Y_j = 0/N, 1/N, 2/N, \dots, N/N$  car la somme  $\sum_{i=1}^N y_i(t_j)$  de l'Éq. (1.20) compte le nombre de sorties à 1, variant de 0 à  $N$ . Il en résulte que l'information de Fisher  $J(Y_j, \sigma^2)$  contenue dans une observation  $Y_j$  est

$$J(Y_j, \sigma^2) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{\Pr\{Y_j = n/N\}} \left[ \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \Pr\left\{Y_j = \frac{n}{N}\right\} \right]^2. \quad (1.21)$$

Pour chacune des sorties binaires  $y_i(t)$ , à une valeur fixée  $x$  pour le signal d'entrée  $x(t)$  et à partir de l'Éq. (1.19), on a les probabilités conditionnelles

$$\Pr\{y_i(t) = 0|x\} = \Pr\{x + \eta_i(t) \leq \theta\} = F_\eta(\theta - x) \quad (1.22)$$

et  $\Pr\{y_i(t) = 1|x\} = 1 - \Pr\{y_i(t) = 0|x\} = 1 - F_\eta(\theta - x)$ . À partir des propriétés connues de la distribution binomiale [60], on en déduit pour la sortie  $Y_j$  du réseau la probabilité conditionnelle

$$\Pr\{Y_j = n/N|x\} = C_n^N [1 - F_\eta(\theta - x)]^n F_\eta(\theta - x)^{N-n}, \quad (1.23)$$

où  $C_n^N$  est le coefficient binomial. Comme  $x$  a une densité  $f_x(x)$ , on obtient la probabilité totale

$$\Pr\left\{Y_j = \frac{n}{N}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} C_n^N [1 - F_\eta(\theta - x)]^n F_\eta(\theta - x)^{N-n} f_x(x) dx, \quad (1.24)$$

comme également trouvée dans [31, 61, 62] pour l'estimation d'un signal d'entrée déterministe avec un réseau de comparateurs similaire. À la différence de [31], on cherche ici à estimer la puissance  $\sigma^2$  d'un signal aléatoire  $x(t)$  sans qu'il y ait de composante déterministe à

l'entrée, ce qui nous amène à évaluer la dérivée  $\partial \Pr\{Y_j = n/N\}/\partial \sigma^2$ . En utilisant la densité de probabilité standardisée  $f_{\text{stand}}(\cdot)$ , on a

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^2} f_x(x) = -\frac{1}{2\sigma^2} [f_x(x) + x f'_x(x)] , \quad (1.25)$$

avec  $f'_x(x) = df_x(x)/dx$ , on en déduit alors que

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \Pr\left\{Y_j = \frac{n}{N}\right\} = \frac{-C_n^N}{2\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - F_\eta(\theta - x)]^n F_\eta(\theta - x)^{N-n} [f_x(x) + x f'_x(x)] dx . \quad (1.26)$$

Les Éqs. (1.24) et (1.26) permettent de calculer, au besoin par intégration numérique, l'information de Fisher  $J(Y_j, \sigma^2)$  de l'Éq. (1.21). Nous pouvons maintenant étudier l'influence des bruits  $\eta_i(t)$ , ajoutés dans le réseau de comparateurs, sur la performance de l'estimation. La Fig. 1.4 présente les évolutions de l'information de Fisher  $J(Y_j, \sigma^2)$  de l'Éq. (1.21) dans un réseau de taille donnée  $N = 15$ , en fonction de l'amplitude efficace  $\sigma_\eta$  des bruits de réseau  $\eta_i(t)$  choisis gaussiens de moyenne nulle. Il est clairement visible

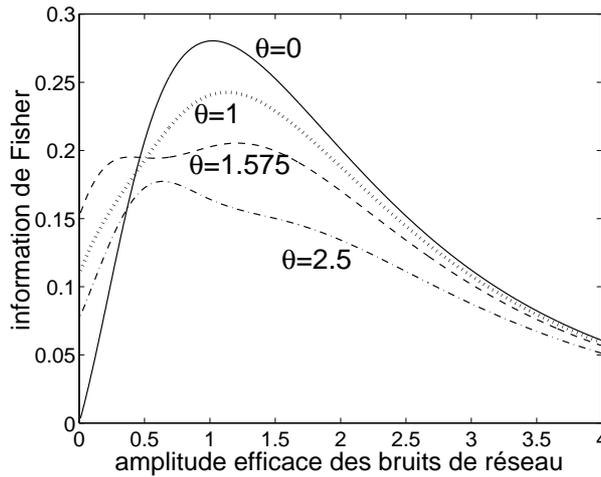


FIG. 1.4 – Information de Fisher  $J(Y_j, \sigma^2)$  de l'Éq. (1.21) dans un réseau de taille  $N = 15$ , en fonction de l'amplitude efficace  $\sigma_\eta$  des bruits de réseau  $\eta_i(t)$  choisis gaussiens de moyenne nulle, et pour différentes valeurs du seuil  $\theta$  commun à chaque comparateur. Le signal d'entrée  $x(t)$  est gaussien d'amplitude efficace  $\sigma = 1$ .

sur la Fig. 1.4 que l'ajout des bruits de réseau  $\eta_i(t)$  mène à une amélioration de l'estimation mesurée par l'information de Fisher. Sans aucun bruit de réseau  $\eta_i(t)$ , c'est-à-dire à  $\sigma_\eta = 0$  sur la Fig. 1.4, tous les comparateurs commutent ensemble à la façon d'un unique comparateur, et l'information de Fisher  $J(Y_j, \sigma^2)$  a la valeur correspondante à un comparateur isolé comme indiqué sur la Fig. 1.1. Ensuite, au fur et à mesure que le niveau  $\sigma_\eta$  des bruits de réseau augmente au-dessus de 0 sur la Fig. 1.4, l'information de Fisher  $J(Y_j, \sigma^2)$  augmente aussi, pour culminer à une valeur maximale pour un niveau non nul de  $\sigma_\eta$ . De plus, la plus grande des valeurs maximales de l'information de Fisher de la

Fig. 1.4 est obtenue avec un niveau  $\theta = 0$  du seuil. Le cas d'un comparateur isolé est différent car, comme le montre la Fig. 1.1, l'information de Fisher  $J(y_j, \sigma^2)$  est nulle à  $\theta = 0$ , et le seuil  $\theta$  du comparateur isolé demande un réglage spécifique afin de maximiser  $J(y_j, \sigma^2)$ . Pour un signal  $x(t)$  gaussien, le seuil optimal  $\theta_{\text{opt}} = 1.575$  déduit de la Fig. 1.1 pour un comparateur isolé est également testé pour le réseau de la Fig. 1.4. On peut voir sur la Fig. 1.4 que la valeur  $\theta = 1.575$  n'est plus le seuil optimal pour le réseau, mais que le meilleur réglage pour le seuil est  $\theta = 0$ . Dans le réseau, quel que soit le seuil  $\theta$ , une amélioration de l'estimation est toujours possible à l'aide des bruits de réseau  $\eta_i(t)$  ce qui n'est pas le cas sans les bruits  $\eta_i(t)$ , et la meilleure performance est atteinte au seuil  $\theta = 0$ .

Un autre point de vue sur l'amélioration par le bruit dans le réseau est fourni par la Fig. 1.5 qui montre l'information de Fisher  $J(Y_j, \sigma^2)$  au seuil  $\theta = 0$  déduite de la Fig. 1.4, pour différentes tailles  $N$  du réseau. La Fig. 1.5 montre, au moyen de l'information

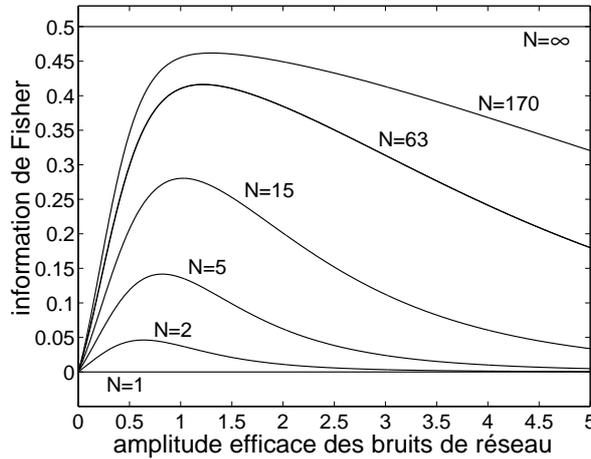


FIG. 1.5 – Information de Fisher  $J(Y_j, \sigma^2)$  de l'Éq. (1.21), en fonction de l'amplitude efficace  $\sigma_\eta$  des bruits de réseau  $\eta_i(t)$  choisis gaussiens de moyenne nulle, pour différentes tailles  $N$  de réseau, avec un seuil  $\theta = 0$ . Le signal d'entrée  $x(t)$  est gaussien d'amplitude efficace  $\sigma = 1$ .

de Fisher  $J(Y_j, \sigma^2)$ , une amélioration par le bruit de plus en plus prononcée pour une taille  $N$  du réseau de plus en plus grande. Quelle que soit la taille du réseau  $N > 1$  sur la Fig. 1.5, on trouve un niveau optimal des bruits de réseau  $\eta_i(t)$  qui maximise l'information de Fisher  $J(Y_j, \sigma^2)$ . D'autre part, la structure en réseau avec une taille  $N > 1$  offre toujours la possibilité d'atteindre, grâce aux bruits ajoutés, un maximum  $J(Y_j, \sigma^2)$  supérieur à la plus grande information de Fisher  $J(y_j, \sigma^2)$  que l'on puisse atteindre avec un comparateur isolé réglé à son niveau de seuil optimal  $\theta_{\text{opt}} \neq 0$ . Par conséquent, comparés aux comparateurs isolés, les réseaux comportant des bruits à l'intérieur de la structure apportent deux avantages : il n'y a pas besoin de réglage spécifique autre que  $\theta = 0$  pour le seuil ; l'information de Fisher maximale que l'on peut obtenir peut toujours être améliorée. Pour une configuration donnée, on tire le meilleur profit du second avantage

pour un niveau optimal des bruits de réseau  $\eta_i(t)$ , comme on l'a vu sur la Fig. 1.5. Ce niveau optimal de bruit, comme le seuil optimal  $\theta_{\text{opt}}$  d'un comparateur isolé, dépend habituellement du paramètre inconnu  $\sigma$  que l'on cherche à estimer. Cette difficulté est surmontée comme précédemment, dans le contexte bayésien où l'on spécifie, par une densité de probabilité a priori  $p_0(u)$ , un intervalle de valeurs attendues pour  $\sigma$ . Le niveau  $\sigma_\eta$  des bruits de réseau  $\eta_i(t)$  peut être réglé de manière à maximiser l'information de Fisher moyenne

$$\bar{J}(Y_j) = \int_0^\infty J(Y_j, \sigma^2) p_0(\sigma) d\sigma, \quad (1.27)$$

c'est-à-dire de manière à assurer en moyenne une bonne performance de l'estimation. Une illustration en est faite pour le réseau sur la Fig. 1.6, comme il en était pour un comparateur isolé sur la Fig. 1.2. La Fig. 1.6 présente l'information de Fisher moyenne  $\bar{J}(Y_j)$  de l'Éq. (1.27) pour l'estimation de la puissance  $\sigma^2$ , sur un signal  $x(t)$  gaussien et laplacien, avec une densité a priori  $p_0(\sigma)$  uniforme sur  $[0.5, 1.5]$ . Afin d'obtenir une

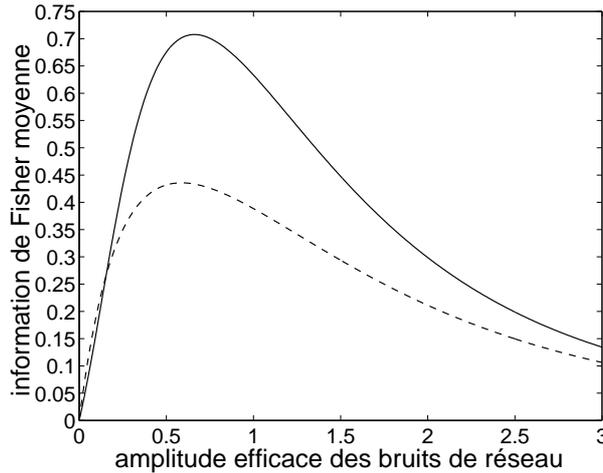


FIG. 1.6 – Information de Fisher moyenne  $\bar{J}(Y_j)$  de l'Éq. (1.27) pour un réseau de taille  $N = 15$  et un seuil des comparateurs réglé à  $\theta = 0$ , en fonction de l'amplitude efficace  $\sigma_\eta$  des bruits de réseau  $\eta_i(t)$  choisis gaussiens de moyenne nulle. Le signal aléatoire  $x(t)$  est gaussien (trait plein) et laplacien (pointillés), avec une densité a priori  $p_0(\sigma)$  uniforme sur  $[0.5, 1.5]$ .

performance moyenne optimale en estimation de puissance, le point correspondant au maximum de l'information de Fisher  $\bar{J}(Y_j)$  sur la Fig. 1.6 suggère d'ajuster l'amplitude efficace des bruits de réseau, de densité de probabilité gaussienne, à  $\sigma_\eta = 0.66$  pour un signal d'entrée gaussien et à  $\sigma_\eta = 0.59$  pour un signal laplacien. Comme nous l'avons fait dans la section 1.1.2, nous comparons maintenant ces résultats avec l'information de Fisher en entrée du réseau parallèle de comparateurs.

### 1.2.2 Évolution entrée–sortie de l’information de Fisher pour un réseau

Comme remarqué dans la section 1.1.2, dans le cas où le signal aléatoire  $x(t)$  a une densité de probabilité gaussienne, l’information de Fisher contenue dans une observation analogique  $x_j$  à l’entrée est  $J(x_j, \sigma^2) = 1/(2\sigma^4) = 0.5/\sigma^4$ . Quand la taille du réseau  $N \rightarrow \infty$  sur la Fig. 1.5, l’information de Fisher maximale  $J(Y_j, \sigma^2)$  à partir des observations quantifiées tend vers la totalité de l’information de Fisher  $J(x_j, \sigma^2)$  contenue dans les observations analogiques ( $\sigma$  valant 1). On peut affirmer que ceci n’est pas uniquement vrai dans le cas gaussien comme sur la Fig. 1.5, mais pour n’importe quelle densité de probabilité de  $x(t)$ . En effet, lorsque  $N \rightarrow \infty$ , la sortie du réseau  $Y(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i(t)$  de l’Éq. (1.20), de par la loi des grands nombres, tend à correspondre exactement à l’espérance statistique  $E_\eta[y_i(t)]$ , avec une différence s’estompant en  $1/\sqrt{N}$ , où l’espérance  $E_\eta[\cdot]$  dépend de la densité de probabilité  $f_\eta(u)$  des bruits de réseau  $\eta_i(t)$  (que nous avons choisie ici gaussienne). À la limite  $N \rightarrow \infty$ , le réseau de comparateurs devient alors un dispositif déterministe avec une caractéristique entrée–sortie  $Y(t) = E_\eta[y_i(t)] = 1 - F_\eta[\theta - x(t)]$ . Comme la fonction de répartition  $F_\eta(u)$  est généralement une fonction croissante et donc inversible, la caractéristique entrée–sortie  $Y(t) = 1 - F_\eta[\theta - x(t)]$ , remplaçant la caractéristique  $y(t) = \Pi[x(t) - \theta]$  de l’Éq. (1.1), est en général inversible. Une transformation inversible laisse l’information de Fisher inchangée, soit  $J(Y_j, \sigma^2) \rightarrow J(x_j, \sigma^2)$  pour des réseaux de grande taille. La caractéristique à seuil  $y(t) = \Pi[x(t) - \theta]$  non inversible d’un comparateur isolé entraîne une perte d’information, comme nous l’avons noté dans la section 1.1.2. Cependant, la caractéristique inversible  $Y(t) = 1 - F_\eta[\theta - x(t)]$  obtenue par un réseau de comparateurs de grande taille peut, grâce aux bruits de réseau, récupérer la totalité de l’information de Fisher contenue dans les observations analogiques. Ce résultat se reporte sur l’information de Fisher moyenne en sortie  $\bar{J}(Y_j)$  donnée par l’Éq. (1.27) laquelle tend, pour un réseau de grande taille, vers l’information de Fisher moyenne en entrée  $\bar{J}(x_j)$  contenue dans les observations analogiques  $x_j$ .

### 1.3 Discussion sur l’effet de bruit utile en estimation

Nous avons examiné la question de l’estimation de la puissance d’un bruit à partir des observations en sortie de comparateurs offrant une représentation utile et condensée des données. Nous avons montré qu’avec un comparateur isolé, il est souvent nécessaire de régler son seuil afin d’obtenir une estimation efficace. À l’aide d’une analyse de l’information de Fisher contenue dans les données, nous avons mesuré que pour l’estimation, l’utilisation des données quantifiées à la place des données analogiques initiales entraîne une réduction de l’efficacité du comparateur. Ensuite, nous avons montré qu’aucun réglage spécifique du seuil n’est nécessaire lorsque les comparateurs sont assemblés en réseau parallèle. Par un effet de bruit utile, on peut obtenir une estimation efficace en injectant

dans la structure des bruits de réseau (indépendants du signal aléatoire dont on cherche à estimer la puissance). L'estimation est réalisée avec une efficacité maximale pour un niveau non nul des bruits de réseau (choisis ici gaussiens de moyenne nulle). De plus, un réseau de comparateurs comportant des bruits peut toujours bénéficier de ces bruits afin d'être plus efficace pour l'estimation comparé à un comparateur isolé.

La forme initiale d'amélioration par le bruit dans des réseaux similaires aux Éqs. (1.19) à (1.20), comme introduite dans [28, 29], concernait un signal d'entrée aléatoire sans bruit d'entrée. La mesure de performance utilisée dans ces études était l'information mutuelle entrée–sortie quantifiant la similarité entre le signal d'entrée porteur d'information et la sortie du réseau. Pour des tâches d'estimation, l'effet de bruit utile a été montré uniquement pour l'estimation sur des signaux déterministes, et souvent des signaux déterministes constants. Ici au contraire, nous avons étudié cet effet dans le cas de l'estimation sur un bruit, sans qu'il y ait de signal déterministe. L'estimation du paramètre statistique du bruit qu'est sa puissance est facilitée lorsque plus de bruit est ajouté. Ceci démontre que l'effet de bruit utile en estimation est une possibilité générale, accessible pour l'estimation de paramètres autant sur du bruit que sur des signaux déterministes. Ce travail, d'une certaine manière, contribue à étendre les connaissances sur le traitement non linéaire du signal et le traitement de l'information aidés par le bruit.

Les résultats présentés ici peuvent avoir une portée dans le cadre des capteurs et de l'instrumentation, ou en acquisition et traitement de données [20]. En effet, les comparateurs employés ici sont des éléments non linéaires courants en électronique. En tant que convertisseurs analogique–numérique 1-bit, ils offrent une représentation très parcimonieuse du signal. Cette propriété peut s'avérer particulièrement utile pour les traitements en temps réel, ou pour les systèmes dont les ressources sont limitées en terme de puissance de calcul ou d'énergie. Dans ce contexte, l'effet de bruit utile pour l'estimation de puissance que nous venons de montrer en utilisant ces réseaux parallèles de comparateurs pourrait se révéler intéressant. Ils ont également un sens pour le traitement neuronal de l'information, beaucoup de formes d'amélioration par le bruit ont d'ailleurs été relevées dans ce domaine [63, 64, 65, 66, 67]. Les non-linéarités avec seuil et les réseaux parallèles avec bruit interne sont des éléments courants dans les processus neuronaux. Les conclusions de cette analyse suggèrent que les systèmes neuronaux sensoriels pourraient exploiter de façon constructive leur bruit interne, afin d'améliorer l'estimation du niveau de l'activité de fond de l'environnement. D'autres types de non-linéarités sont connues pour donner lieu à un effet de bruit utile, comme les non-linéarités avec saturation [68, 16]. Dans la suite de cette partie nous allons étudier ce type de non-linéarités, également caractéristique des neurones, lorsqu'elles sont associées en réseau parallèle.

## 1. ESTIMATION DE PUISSANCE AIDÉE PAR LE BRUIT AVEC DES COMPARATEURS

---

---

## Chapitre 2

# Estimation aidée par le bruit avec des capteurs comportant une saturation

Les non-linéarités avec saturation sont présentes dans un grand nombre de systèmes et sont souvent perçues comme une limitation aux performances de ces systèmes. Pourtant, un effet de bruit utile a été observé dans des non-linéarités avec saturation isolées [68]. Concernant leur mise en réseau, [69] montre une amélioration de la transmission d'un signal sinusoïdal par le bruit contenu dans le réseau de non-linéarités. Un tel réseau comportant du bruit permet même d'atteindre des gains entrée–sortie supérieurs à l'unité en terme de rapport signal-sur-bruit, comme le montre [69]. Dans ce chapitre, nous restons dans le cadre de l'estimation de paramètre mais ici l'observation se fait par un réseau constitué de capteurs avec saturation, comme nous le décrivons dans [70]. Nous commençons dans la section suivante par définir l'information de Fisher contenue dans les observations en sortie du réseau parallèle de capteurs.

### 2.1 Information de Fisher dans les réseaux non linéaires

On cherche à estimer la valeur d'un paramètre inconnu  $a$  dont dépend un signal aléatoire  $x(t)$ . Ce signal d'entrée  $x(t)$  est observé de la sortie d'un réseau parallèle de  $N$  capteurs identiques, selon la structure de la Fig. 1.3 qui a également été considérée dans [71, 35, 28]. Chaque capteur est doté de la même caractéristique entrée–sortie, modélisée par la fonction  $g(\cdot)$  statique et sans mémoire. Un bruit  $\eta_i(t)$ , indépendant de  $x(t)$ , est ajouté à l'entrée  $x(t)$  de chaque capteur  $i$ , pour produire la sortie

$$y_i(t) = g[x(t) + \eta_i(t)], \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.1)$$

Les  $N$  bruits de réseau  $\eta_i(t)$  sont blancs, indépendants et identiquement distribués (i.i.d.), de fonction de répartition  $F_\eta(u)$ , de densité de probabilité  $f_\eta(u) = dF_\eta(u)/du$  et d'écart-type  $\sigma_\eta$ . La sortie  $Y(t)$  du réseau est obtenue en moyennant les valeurs des  $N$  sorties des capteurs, soit

$$Y(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i(t). \quad (2.2)$$

Les observations sont faites de la sortie  $Y(t)$  du réseau dans le but d'estimer un paramètre  $a$ . L'information de Fisher  $J(Y, a)$  contenue dans  $Y(t)$  au sujet de  $a$  peut s'exprimer [56]

$$J(Y, a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{p_Y(y)} \left[ \frac{\partial}{\partial a} p_Y(y) \right]^2 dy, \quad (2.3)$$

où  $p_Y(y)$  est la fonction densité de probabilité de  $Y(t)$  (dépendante de  $a$ ). Pour une valeur fixée  $x$  de l'entrée, la densité de probabilité résultante pour chaque  $y_i(t)$  de l'Éq. (2.1) est notée  $p_{y_i|x}(y, x)$ . Cette densité de probabilité conditionnelle  $p_{y_i|x}(y, x)$  est généralement accessible, à partir de la densité de probabilité  $f_\eta(u)$  du bruit  $\eta_i(t)$  selon la transformation par  $g(\cdot)$ . Par exemple, lorsque la caractéristique  $g(\cdot)$  est inversible, on obtient

$$p_{y_i|x}(y, x) = \frac{f_\eta(g^{-1}(y) - x)}{g'(g^{-1}(y))}. \quad (2.4)$$

Quand  $g(\cdot)$  n'est pas inversible, elle transforme des domaines continus en valeurs discrètes. Dans la densité de probabilité conditionnelle  $p_{y_i|x}(y, x)$ , les probabilités correspondantes à ces domaines sont des fonctions de Dirac localisées aux valeurs discrètes. Il est également possible d'exprimer séparément les différents moments statistiques de la densité  $p_{y_i|x}(y, x)$ . À partir de l'Éq. (2.1), on a par exemple les espérances

$$E[y_i(t)|x] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x+u) f_\eta(u) du \quad (2.5)$$

et

$$E[y_i^2(t)|x] = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(x+u) f_\eta(u) du. \quad (2.6)$$

Nous notons ensuite  $p_{Y|x}(y, x)$  la densité de probabilité conditionnelle de  $Y(t)$  de l'Éq. (2.2) sachant  $x$ . Comme les bruits de réseau  $\eta_i(t)$  sont indépendants et identiquement distribués, les sorties  $y_i(t)$  de l'Éq. (2.1) le sont aussi, et par conséquent  $p_{Y|x}(y, x)$  peut être trouvée en réalisant  $N$  convolutions de  $p_{y_i|x}(y, x)$  sur elle-même. La densité de probabilité conditionnelle  $p_{Y|x}(y, x)$  est ensuite intégrée sur  $x$  selon la densité de probabilité  $f_x(x)$ , afin d'accéder à la densité de probabilité  $p_Y(y)$  dont on a besoin dans l'Éq. (2.3) pour exprimer l'information de Fisher  $J(Y, a)$ .

Dans l'intention d'être explicites concernant la dépendance paramétrique de  $x(t)$  en  $a$ , nous allons considérer dans la suite la vaste catégorie de processus où  $x(t)$  est le mélange additif  $x(t) = \xi(t) + s_a(t)$ . Le signal  $\xi(t)$  est un bruit blanc, indépendant des  $\eta_i$  et de  $a$ , de

fonction de répartition  $F_\xi(u)$ , de densité de probabilité  $f_\xi(u) = dF_\xi(u)/du$  et d'écart-type  $\sigma_\xi$ . Le signal  $s_a(t)$  est déterministe et contient le paramètre  $a$ . Par exemple, le paramètre  $a$  peut être la valeur d'une constante  $s_a(t) \equiv a$ , ou l'amplitude ou la fréquence d'un signal périodique  $s_a(t)$ , ou n'importe quel paramètre entrant dans la spécification du signal déterministe  $s_a(t)$ . Nous avons la densité  $f_x(x) = f_\xi[x - s_a(t)]$ , et

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{Y|x}(y, x) f_\xi[x - s_a(t)] dx, \quad (2.7)$$

et pour la dérivée par rapport au paramètre  $a$ ,

$$\frac{\partial}{\partial a} p_Y(y) = -\frac{\partial s_a(t)}{\partial a} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{Y|x}(y, x) f'_\xi[x - s_a(t)] dx. \quad (2.8)$$

Ces équations exposent la relation précise entre le paramètre inconnu  $a$  à estimer et l'information de Fisher  $J(Y, a)$  de la sortie du réseau. Ceci permet en principe d'étudier l'évolution de  $J(Y, a)$ , reflétant l'efficacité de l'estimation, dans différentes configurations du réseau parallèle de capteurs. On pourra par exemple examiner l'influence des bruits  $\eta_i(t)$  ajoutés et le choix de la caractéristique  $g(\cdot)$  des capteurs.

Dans la suite de ce chapitre, nous allons prendre  $g(\cdot)$  linéaire pour des faibles signaux d'entrée et saturante pour de forts signaux d'entrée, ce comportement étant classique pour des capteurs. Nous allons poursuivre les investigations en étudiant l'influence des bruits  $\eta_i(t)$  sur  $J(Y, a)$ , c'est-à-dire sur la performance de l'estimation du paramètre  $a$  par le réseau parallèle.

## 2.2 Information de Fisher dans les réseaux avec saturation

Nous choisissons la caractéristique  $g(\cdot)$  avec saturation, sous la forme

$$g(u) = \begin{cases} -\lambda & \text{si } u \leq -\lambda, \\ u & \text{si } -\lambda < u < \lambda, \\ \lambda & \text{si } u \geq \lambda. \end{cases} \quad (2.9)$$

La forme simple de  $g(\cdot)$  de l'Éq. (2.9) permet en particulier d'évaluer précisément les intégrales (2.5)–(2.6) qui donnent

$$E[y_i(t)|x] = \lambda \int_{\lambda-x}^{+\infty} f_\eta(u) du - \lambda \int_{-\infty}^{-\lambda-x} f_\eta(u) du + \int_{-\lambda-x}^{\lambda+x} x f_\eta(u) du + \int_{-\lambda-x}^{\lambda+x} u f_\eta(u) du \quad (2.10)$$

soit

$$E[y_i(t)|x] = \lambda + (-\lambda - x)F_\eta(-\lambda - x) - (\lambda - x)F_\eta(\lambda - x) - G_\eta(-\lambda - x) + G_\eta(\lambda - x) \quad (2.11)$$

et de façon similaire

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[y_i^2(t)|x] &= \lambda^2 + (\lambda^2 - x^2) \left[ F_\eta(-\lambda - x) - F_\eta(\lambda - x) \right] - \\ 2x &\left[ G_\eta(-\lambda - x) - G_\eta(\lambda - x) \right] - H_\eta(-\lambda - x) + H_\eta(\lambda - x), \end{aligned} \quad (2.12)$$

avec les fonctions  $G_\eta(u) = \int_{-\infty}^u v f_\eta(v) dv$  et  $H_\eta(u) = \int_{-\infty}^u v^2 f_\eta(v) dv$ . Au-delà des moments conditionnels  $\mathbb{E}[y_i(t)|x]$  et  $\mathbb{E}[y_i^2(t)|x]$  des Éqs. (2.11) à (2.12), c'est la densité de probabilité conditionnelle  $p_{y_i|x}(y, x)$  complète dont on a besoin en premier lieu pour en déduire la densité  $p_{Y|x}(y, x)$ , et ensuite la densité  $p_Y(y)$  de l'Éq. (2.7) pour trouver l'information de Fisher  $J(Y, a)$  de l'Éq. (2.3). La totalité du calcul de la densité de probabilité  $p_Y(y)$  et ensuite de  $J(Y, a)$  peut rarement être réalisée complètement analytiquement. La difficulté se pose lors du calcul analytique pour les  $N$  produits de convolution de  $p_{y_i|x}(y, x)$  nécessaires à l'obtention de  $p_{Y|x}(y, x)$ . Nous allons maintenant examiner des cas rendant cette convolution accessible analytiquement, et fournissant par la suite une idée sur le comportement de l'information de Fisher  $J(Y, a)$ . Concrètement, nous allons considérer le cas  $N = 1$  où la convolution n'est pas nécessaire, le cas  $N = 2$  où la convolution peut être faite analytiquement, et le cas  $N$  grand où  $p_{Y|x}(y, x)$  est directement accessible par le théorème de la limite centrale sans avoir à faire de convolution.

### 2.2.1 Cas $N = 1$

Dans le cas simple où  $N = 1$ , le réseau revient à un capteur isolé et la sortie  $Y(t) = y_1(t) = g[s_a(t) + \xi(t) + \eta_1(t)]$ . C'est le cas similaire à celui pris dans [16]. Nous introduisons la densité de probabilité  $p_1(u)$  de  $\xi(t) + \eta_1(t)$ , qui est la convolution  $p_1(u) = f_\xi(u) * f_\eta(u)$ , associée à la fonction de répartition  $F_1(u) = \int_{-\infty}^u p_1(v) dv$ . La densité de probabilité  $p_Y(y)$  de la sortie du réseau est alors

$$p_Y(y) = F_1[-\lambda - s_a(t)] \delta(y + \lambda) + \bar{p}_1[y - s_a(t)] + \left[ 1 - F_1[\lambda - s_a(t)] \right] \delta(y - \lambda), \quad (2.13)$$

où  $\bar{p}_1[y - s_a(t)]$  coïncide avec  $p_1[y - s_a(t)]$  pour  $y \in (-\lambda, \lambda)$  et est nulle ailleurs. L'information de Fisher  $J(Y, a)$  résultante en sortie, définie par l'Éq. (2.3) et également trouvée dans [16], est

$$J(Y, a) = \left[ \frac{\partial s_a(t)}{\partial a} \right]^2 \times \left[ \frac{p_1^2[-\lambda - s_a(t)]}{F_1[-\lambda - s_a(t)]} + \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{p_1'^2[y - s_a(t)]}{p_1[y - s_a(t)]} dy + \frac{p_1^2[\lambda - s_a(t)]}{1 - F_1[\lambda - s_a(t)]} \right]. \quad (2.14)$$

On peut par exemple noter que dans la situation où le bruit  $\xi(t)$  est gaussien de moyenne nulle et de variance  $\sigma_\xi^2$ , si le bruit de réseau  $\eta_1(t)$  est aussi gaussien de moyenne nulle et de variance  $\sigma_\eta^2$  alors la densité  $p_1(u)$  est gaussienne de moyenne nulle et de variance  $\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2$ ; pour une fonction quelconque  $f_\xi(u)$  et  $\eta_1(t)$  étant uniforme sur  $[-b, b]$ , on a  $p_1(u) = [F_\xi(u + b) - F_\xi(u - b)] / (2b)$ .

### 2.2.2 Cas $N = 2$

Pour une taille  $N = 2$  du réseau, les sorties sont  $y_1(t) = g[x + \eta_1(t)]$  et  $y_2(t) = g[x + \eta_2(t)]$  lesquelles ont toutes deux pour densité de probabilité conditionnelle

$$p_{y_i|x}(y, x) = F_\eta(-\lambda - x) \delta(y + \lambda) + \bar{f}_\eta(y - x) + [1 - F_\eta(\lambda - x)] \delta(y - \lambda), \quad (2.15)$$

où  $\bar{f}_\eta(y - x)$  coïncide avec  $f_\eta(y - x)$  pour  $y \in (-\lambda, \lambda)$  et est nulle ailleurs. La densité de probabilité conditionnelle  $p_{Y|x}(y, x)$  de la sortie  $Y(t) = [y_1(t) + y_2(t)]/2$  résulte de la convolution  $p_{y_i|x}(y, x) * p_{y_i|x}(y, x)$  de l'Éq. (2.15) suivie d'un recalage correspondant au facteur  $1/N = 1/2$ . Cette densité  $p_{Y|x}(y, x)$  est nulle pour  $y$  à l'extérieur de  $[-\lambda, \lambda]$  et a une probabilité de  $F_\eta^2(-\lambda - x)$  au point  $y = -\lambda$ , une probabilité de  $2F_\eta(-\lambda - x)[1 - F_\eta(\lambda - x)]$  à  $y = 0$  et une probabilité de  $[1 - F_\eta(\lambda - x)]^2$  au point  $y = \lambda$ . Et, pour  $y \in (-\lambda, 0)$  on a

$$p_{Y|x}(y, x) = 4F_\eta(-\lambda - x)f_\eta(2y + \lambda - x) + 2 \int_{-\lambda}^{\lambda+2y} f_\eta(u - x)f_\eta(2y - u - x)du, \quad (2.16)$$

pour  $y \in (0, \lambda)$  on a

$$p_{Y|x}(y, x) = 4[1 - F_\eta(\lambda - x)]f_\eta(2y - \lambda - x) + 2 \int_{-\lambda+2y}^{\lambda} f_\eta(u - x)f_\eta(2y - u - x)du. \quad (2.17)$$

Les intégrales à droite des Éqs. (2.16) à (2.17) peuvent être calculées analytiquement dans les cas classiques où  $f_\eta(u)$  est gaussien ou uniforme. Une fois que l'on connaît  $p_{Y|x}(y, x)$ , les intégrations sur  $x$  des Éqs. (2.7) à (2.8) sont généralement réalisées numériquement, et l'information de Fisher en sortie du réseau résulte ensuite de l'intégrale  $J(Y, a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{p_Y(y)} \left[ \frac{\partial}{\partial a} p_Y(y) \right]^2 dy$  de l'Éq. (2.3).

### 2.2.3 Cas $N$ grand

Quand  $N$  est grand et du fait du théorème de la limite centrale, la densité de probabilité conditionnelle  $p_{Y|x}(y, x)$  peut être approximée en supposant que la densité  $f_\eta(u)$  des bruits de réseau est uniforme sur  $[-b, b]$ , d'écart-type  $\sigma_\eta = b/\sqrt{3}$ . C'est un choix approprié à la fois pour la simplification des calculs et pour la signification des bruits de réseau  $\eta_i(t)$  car ils peuvent être choisis librement en tant que composante du réseau, à la différence du bruit  $\xi(t)$  en entrée que l'on doit plutôt considérer comme imposé par l'environnement physique. Pour  $x$  fixé vérifiant  $x \leq -\lambda - b$ , quel que soit  $i$  on a  $x + \eta_i(t) \leq -\lambda$  car  $\eta_i(t)$  varie dans l'intervalle  $[-b, b]$ . Dans ce cas  $y_i(t) = g[x + \eta_i(t)]$  sature à  $-\lambda$  quel que soit  $i$ , et la quantité  $Y(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i(t)$  de l'Éq. (2.2) atteint la valeur  $y = -\lambda$ . En particulier, pour un tel  $x$  on a  $E[Y|x] = -\lambda$  et  $\text{var}[Y|x] = 0$  car toutes les sorties  $y_i(t)$  restent à  $-\lambda$ . De façon similaire, à  $x$  fixé vérifiant  $x \geq \lambda + b$ , quel que soit  $i$  on a  $x + \eta_i(t) \geq \lambda$  car  $\eta_i(t)$  varie dans l'intervalle  $[-b, b]$ . Dans ce second cas, les sorties  $y_i(t) = g[x + \eta_i(t)]$  saturent à  $\lambda$  quel que soit  $i$ , et la sortie du réseau de l'Éq. (2.2) atteint  $y = \lambda$ . En particulier, pour

un tel  $x$  on a  $E[Y|x] = \lambda$  et  $\text{var}[Y|x] = 0$  car toutes les sorties  $y_i(t)$  restent à  $\lambda$ . Entre ces deux situations, lorsque  $-\lambda - b < x < \lambda + b$ , les  $y_i$  se distribuent dans l'intervalle  $[-\lambda, \lambda]$  avec pour chaque  $y_i$  une probabilité non nulle d'éviter les  $\pm\lambda$ . La sortie  $Y$  de l'Éq. (2.2), selon le théorème de la limite centrale, devient donc normalement distribuée de moyenne  $E[Y|x] \in (-\lambda, \lambda)$  et de variance  $\text{var}[Y|x] > 0$ , c'est-à-dire selon la gaussienne

$$\varphi(y, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \text{var}[Y|x]}} \exp\left(-\frac{[y - E[Y|x]]^2}{2 \text{var}[Y|x]}\right). \quad (2.18)$$

À partir de l'Éq. (2.2) on trouve aussi  $E[Y|x] = E[y_i|x]$  et  $\text{var}[Y|x] = \text{var}[y_i|x]/N$  avec  $\text{var}[y_i|x] = E[y_i^2|x] - E^2[y_i|x]$ , lesquelles sont connues par les expressions

$$E[y_i(t)|x] = \lambda + (-\lambda - x)F_\eta(-\lambda - x) - (\lambda - x)F_\eta(\lambda - x) - G_\eta(-\lambda - x) + G_\eta(\lambda - x)$$

et

$$E[y_i^2(t)|x] = \lambda^2 + (\lambda^2 - x^2) \left[ F_\eta(-\lambda - x) - F_\eta(\lambda - x) \right] - 2x \left[ G_\eta(-\lambda - x) - G_\eta(\lambda - x) \right] - H_\eta(-\lambda - x) + H_\eta(\lambda - x)$$

des Éqs. (2.11) et (2.12). La densité de probabilité conditionnelle  $p_{Y|x}(y, x)$  peut donc s'exprimer par

$$p_{Y|x}(y, x) = \begin{cases} \delta(y + \lambda) & \text{si } x \leq -\lambda - b, \\ \varphi(y, x) & \text{si } -\lambda - b < x < \lambda + b, \\ \delta(y - \lambda) & \text{si } x \geq \lambda + b. \end{cases} \quad (2.19)$$

En calculant l'Éq. (2.19) l'intégration  $p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{Y|x}(y, x) f_\xi[x - s_a(t)] dx$  de l'Éq. (2.7) mène à

$$p_Y(y) = F_\xi[-\lambda - b - s_a(t)] \delta(y + \lambda) + \Phi(y) + \left[ 1 - F_\xi[\lambda + b - s_a(t)] \right] \delta(y - \lambda), \quad (2.20)$$

avec la fonction  $\Phi(y)$  définie par

$$\Phi(y) = \int_{-\lambda-b}^{\lambda+b} \varphi(y, x) f_\xi[x - s_a(t)] dx. \quad (2.21)$$

Cette fonction  $\Phi(y)$  est non nulle surtout sur un support limité à  $y \in [-\lambda, \lambda]$  et disparaît rapidement quand  $y$  s'écarte de cet intervalle. Ceci est dû à l'intégrande gaussienne  $\varphi(y, x)$  de l'Éq. (2.21), qui se concentre quel que soit  $x \in (-\lambda - b, \lambda + b)$  sur un domaine en  $y$  centré sur  $E[Y|x] \in (-\lambda, \lambda)$  et dont la dispersion  $\text{var}[Y|x]$  est petite pour des grandes valeurs de  $N$ . L'information de Fisher  $J(Y, a)$  définie par l'Éq. (2.3) s'écrit alors

$$J(Y, a) = \left[ \frac{\partial s_a(t)}{\partial a} \right]^2 \times \left[ \frac{f_\xi^2[-\lambda - b - s_a(t)]}{F_\xi[-\lambda - b - s_a(t)]} + \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{[\partial\Phi(y)/\partial s_a]^2}{\Phi(y)} dy + \frac{f_\xi^2[\lambda + b - s_a(t)]}{1 - F_\xi[\lambda + b - s_a(t)]} \right]. \quad (2.22)$$

Avant de regarder de près les évolutions de l'information de Fisher  $J(Y, a)$  dans différents régimes de fonctionnement du réseau parallèle de capteurs, il est intéressant d'observer des comportements spécifiques de la quantité  $J(Y, a)$  provenant de certaines conditions limites.

### 2.2.4 Comportements limites

À la limite où les bruits de réseau  $\eta_i(t)$  disparaissent, soit à  $\sigma_\eta = 0$ , la dispersion  $\text{var}[Y|x]$  à  $x$  donné de la sortie  $Y$  du réseau tend également vers zéro. Alors, la sortie  $Y$  s'approche jusqu'à correspondre exactement à l'espérance conditionnelle  $E[Y|x]$  pour donner

$$Y = E[Y|x] = \begin{cases} -\lambda & \text{si } x \leq -\lambda, \\ x & \text{si } -\lambda < x < \lambda, \\ \lambda & \text{si } x \geq \lambda, \end{cases} \quad (2.23)$$

La densité de probabilité conditionnelle devient  $p_{Y|x}(y, x) = \delta(y - E[Y|x])$  et la densité de probabilité  $p_Y(y)$  de la sortie résultant de l'Éq. (2.7) devient

$$p_Y(y) = F_\xi[-\lambda - s_a(t)] \delta(y + \lambda) + \bar{f}_\xi[y - s_a(t)] + [1 - F_\xi[\lambda - s_a(t)]] \delta(y - \lambda), \quad (2.24)$$

où  $\bar{f}_\xi[y - s_a(t)]$  coïncide avec  $f_\xi[y - s_a(t)]$  pour  $y \in (-\lambda, \lambda)$  et est nulle ailleurs. On en déduit l'information de Fisher définie par l'Éq. (2.3)

$$J(Y, a) = \left[ \frac{\partial s_a(t)}{\partial a} \right]^2 \times \left[ \frac{f_\xi^2[-\lambda - s_a(t)]}{F_\xi[-\lambda - s_a(t)]} + \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{f_\xi^2[y - s_a(t)]}{f_\xi[y - s_a(t)]} dy + \frac{f_\xi^2[\lambda - s_a(t)]}{1 - F_\xi[\lambda - s_a(t)]} \right]. \quad (2.25)$$

On peut interpréter l'Éq. (2.25) à la fois comme la limite (du cas  $N$  grand) de l'Éq. (2.22) quand  $b \rightarrow 0$  ou comme la limite (du cas  $N = 1$ ) de l'Éq. (2.14) quand  $p_1(u) \rightarrow f_\xi(u)$  pour  $\sigma_\eta \rightarrow 0$ . Les bruits de réseau  $\eta_i(t)$  disparaissant, l'Éq. (2.25) est indépendante de la distribution des  $\eta_i$ . Puisque sans ajouter de bruit  $\eta_i$  tous les capteurs du réseau répondent ensemble à la manière d'un capteur unique, l'Éq. (2.25) est également indépendante de la taille  $N$  du réseau. En fait le comportement limite du réseau exposé par l'Éq. (2.25) résume l'information de Fisher de la sortie d'un capteur isolé lorsque son entrée est  $s_a(t) + \xi(t)$ .

Une autre limite intéressante se produit à  $\sigma_\eta$  non nul quand  $N \rightarrow \infty$ . Dans cette condition, la largeur  $\text{var}[Y|x] = \text{var}[y_i|x]/N$  tend vers zéro et  $\varphi(y, x)$  de l'Éq. (2.18) devient un Dirac  $\delta(y - E[Y|x])$ . Ce qui change dans  $\Phi(y)$  de l'Éq. (2.21) se traduit sur l'information de Fisher  $J(Y, a)$  par un changement de l'intégrale centrale de droite de l'Éq. (2.22) en

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{[\partial\Phi(y)/\partial s_a]^2}{\Phi(y)} dy = \int_{-\lambda-b}^{\lambda+b} \frac{f_\xi^2[u - s_a(t)]}{f_\xi[u - s_a(t)]} du, \quad (2.26)$$

le reste de l'expression de  $J(Y, a)$  dans l'Éq. (2.22) restant inchangé.

Les trois configurations spéciales que l'on vient de décrire

- $N = 1$  quel que soit  $\sigma_\eta$  où  $J(Y, a)$  est donnée par l'Éq. (2.14);
- $\sigma_\eta = 0$  quel que soit  $N$  où  $J(Y, a)$  est donnée par l'Éq. (2.25);
- $N = \infty$  quel que soit  $\sigma_\eta$  où  $J(Y, a)$  est donnée par les Éqs. (2.26) et (2.22)

sont des configurations où la dispersion  $\text{var}[Y|x]$  du réseau disparaît de manière identique. En conséquence, pour une valeur de  $x$  donnée la sortie  $Y$  du réseau devient la fonction

déterministe  $Y = E[Y|x] = E[y_i|x]$  donnée par  $E[y_i(t)|x] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x+u)f_\eta(u)du$  de l'Éq. (2.5) rendant la valeur déterministe  $y \in [-\lambda, \lambda]$  quelle que soit celle de  $x$ . D'autre part, quelle que soit la caractéristique  $g(u)$  de l'Éq. (2.5) qui sature à  $\pm\lambda$  pour  $u \rightarrow \pm\infty$ , la fonction déterministe  $E[Y|x] = E[y_i|x]$  sature aussi à  $\pm\lambda$  pour  $x \rightarrow \pm\infty$ . Du fait de la dépendance  $Y = E[Y|x]$  de la sortie du réseau avec une dispersion  $\text{var}[Y|x]$  nulle, l'ajout des bruits de réseau  $\eta_i(t)$  ne joue plus aucun rôle dans la dispersion de la sortie  $Y$ . Le réseau se comporte totalement comme un dispositif déterministe, de fonction de transfert déterministe donnée par  $Y = E[Y|x]$ , avec des saturations à  $\pm\lambda$ . Tout ceci revient au cas d'une caractéristique de capteur avec saturation comme celle considérée dans [16]. Dans une telle situation, pour les mêmes raisons que celles données dans [16] et par examen des Éqs. (2.14) et (2.25) d'une part et (2.22) et (2.26) d'autre part, ce qui importe pour l'information de Fisher  $J(Y, a)$  est la position des saturations  $\pm\lambda$  dans la caractéristique du capteur mais pas l'évolution entre ces saturations. En d'autres termes la valeur de  $J(Y, a)$  sera la même pour n'importe quelle caractéristique  $g(u)$  dont la saturation apparaît à  $\pm\lambda$  pour les mêmes valeurs de l'argument  $u$ . La partie de  $g(\cdot)$  entre les saturations, qu'elle soit linéaire comme dans ce chapitre avec l'Éq. (2.9) ou curvi-linéaire comme dans [16], n'affecte pas l'information de Fisher  $J(Y, a)$ . Par contre, dans les configurations différentes de celles citées au-dessus, la dispersion  $\text{var}[Y|x]$  ne disparaissant pas, on s'attend à ce que  $J(Y, a)$  soit dépendante de la forme de la partie entre saturations de la caractéristique, comme par exemple l'information de Fisher dans le cas  $N$  grand qui résulte de l'Éq. (2.22).

Nous pouvons maintenant étudier les évolutions de l'information de Fisher  $J(Y, a)$  de la sortie du réseau parallèle de capteurs.

### 2.3 Information de Fisher améliorée par le bruit

Considérons l'estimation de l'amplitude  $a$  d'une entrée sinusoïdale de période connue  $T_s$ , soit  $s_a(t) = a \sin(2\pi t/T_s)$ . Ce signal d'entrée  $s_a(t)$  est corrompu par un bruit d'entrée  $\xi(t)$  gaussien de moyenne nulle. La sortie  $Y(t)$  du réseau est observée à  $M$  instants  $t_j$  distincts,  $j$  allant de 1 à  $M$ . Tous les bruits  $\xi(t)$  et  $\eta_i(t)$  étant blancs, les  $M$  observations  $Y(t_j) = Y_j$  sont indépendantes. L'information de Fisher est alors additive [56], et l'information de Fisher totale sur le paramètre  $a$  contenue dans l'ensemble de données  $\vec{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_M)$ , notée  $J(\vec{Y}, a)$ , est la somme des informations de Fisher  $J(Y_j, a)$  contenues dans chaque observation  $Y_j$ , soit

$$J(\vec{Y}, a) = \sum_{j=1}^M J(Y_j, a) . \quad (2.27)$$

À l'aide de  $J(\vec{Y}, a)$  de l'Éq. (2.27), nous allons étudier l'influence des bruits de réseau  $\eta_i(t)$ , dont la densité de probabilité est choisie uniforme, sur la performance d'estimation lorsque la sinusoïde d'entrée stimule le réseau dans différentes configurations. La Fig. 2.1 présente les évolutions de l'information de Fisher  $J(\vec{Y}, a)$  pour des réseaux de différentes tailles

### 2.3. INFORMATION DE FISHER AMÉLIORÉE PAR LE BRUIT

$N$ . Dans les conditions de la Fig. 2.1, le signal d'entrée sinusoïdal  $s_a(t) = a \sin(2\pi t/T_s)$

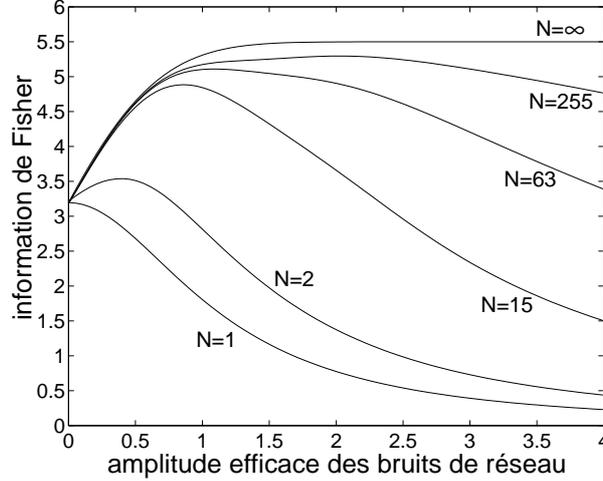


FIG. 2.1 – Information de Fisher  $J(\vec{Y}, a)$  de la sortie d'un réseau de taille  $N$  et pour  $\lambda = 1$ , en fonction de l'amplitude efficace  $\sigma_\eta$  des bruits de réseau  $\eta_i(t)$  de densité de probabilité uniforme. Le signal d'entrée est  $s_a(t) = a \sin(2\pi t/T_s)$  où  $a = 2$ , dans un bruit d'entrée  $\xi(t)$  gaussien de moyenne nulle et d'amplitude efficace  $\sigma_\xi = 1$ .  $M = 10$  observations  $Y(t_j)$  sont faites aux instants  $t_1 = \Delta t$  à  $t_{10} = 10\Delta t$  avec  $\Delta t = T_s/(M + 1)$ .

est centré dans la partie linéaire de la caractéristique  $g(\cdot)$  de l'Éq. (2.9); le signal  $s_a(t)$  ayant une grande amplitude  $a > \lambda$ , il agit par moments dans la partie saturante de  $g(\cdot)$ . Cette configuration correspond à la sinusoïde en trait plein de la Fig. 2.2. Du fait que le signal  $s_a(t)$  soit centré dans la partie linéaire de  $g(\cdot)$ , aucun bénéfice ne peut être obtenu en ajoutant du bruit pour un capteur isolé, comme le montre la décroissance monotone de l'information de Fisher  $J(\vec{Y}, a)$  quand le niveau  $\sigma_\eta$  du bruit de réseau est augmentée sur la Fig. 2.1 à  $N = 1$ . Ce comportement de l'information de Fisher a déjà été remarqué dans [16] pour des capteurs avec saturation isolés. C'est en fait une propriété standard de l'effet de bruit utile, où le bruit ajouté permet de déplacer dans un régime de la non-linéarité plus favorable un signal d'entrée mal positionné par rapport à cette non-linéarité isolée. Sur la Fig. 2.1 à  $N = 1$ , le signal d'entrée  $s_a(t)$  étant bien positionné car centré dans la partie linéaire de  $g(\cdot)$ , l'estimation ne peut pas être améliorée par le bruit. Cependant, il ne se passe pas la même chose pour un réseau de taille  $N > 1$ . Dans ce cas présenté sur la Fig. 2.1, le même signal d'entrée  $s_a(t)$  centré de manière optimale dans la partie linéaire de la caractéristique  $g(\cdot)$  peut bénéficier de l'ajout de bruit dans le réseau. Ceci se vérifie sur la Fig. 2.1 à  $N > 1$  par les évolutions non monotones de l'information de Fisher  $J(\vec{Y}, a)$  quand le niveau  $\sigma_\eta$  des bruits de réseau  $\eta_i(t)$  est augmenté, et par le maximum de  $J(\vec{Y}, a)$  atteint pour un niveau optimal non nul des bruits de réseau. Dès une taille  $N$  du réseau supérieure à 2, l'information de Fisher est toujours augmentée par ajout des bruits  $\eta_i(t)$  au-dessus de sa valeur obtenue sans bruit de réseau à  $\sigma_\eta = 0$  sur la Fig. 2.1. Comme on peut le voir sur cette figure, l'amélioration par le bruit est de plus en plus efficace

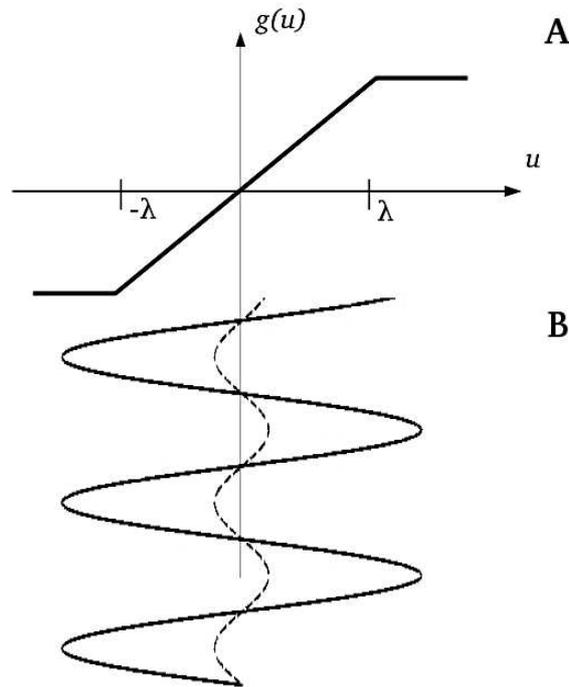


FIG. 2.2 – Stimulation du réseau parallèle de capteurs dans différentes configurations. A) Caractéristique  $g(\cdot)$  des capteurs selon l'Éq. (2.9). B) Sinusoïde d'entrée  $s_a(t) = a \sin(2\pi t/T_s)$  pour une valeur du paramètre  $a > \lambda$  (en trait plein) et  $a < \lambda$  (en tirets).

au fur et à mesure que l'on augmente la taille  $N$  du réseau. Ceci est un mécanisme d'amélioration par le bruit différent de la forme classique à  $N = 1$ , qui ne nécessite pas un signal mal positionné par rapport à la non-linéarité. Ainsi, des signaux positionnés à l'entrée de façon optimale bénéficient des bruits de réseau par un effet spécifique du réseau, et l'efficacité augmente avec la taille de celui-ci. D'un point de vue qualitatif, cet effet de réseau peut être lié à l'augmentation de la variabilité produisant une meilleure représentation lorsque les capteurs sont répliqués en réseau avec ajout de bruits. Sans les bruits  $\eta_i(t)$  dans le réseau, les capteurs délivrent des sorties  $y_i(t)$  identiques en réponse à l'entrée  $x(t)$ , ce qui rend le réseau équivalent à un capteur isolé. Les bruits de réseau  $\eta_i(t)$  que l'on ajoute forcent chaque capteur à délivrer une sortie  $y_i(t)$  distincte des autres en réponse à  $x(t)$ . Cette augmentation de variabilité se traduit comme nous le démontrons ici par une possibilité d'enrichir l'information de Fisher de la sortie du réseau.

La Fig. 2.3 illustre une situation similaire avec l'entrée sinusoïdale  $s_a(t) = a \sin(2\pi t/T_s)$  centrée dans la partie linéaire de la caractéristique  $g(\cdot)$  mais avec une amplitude  $a$  qui passe légèrement au-dessus du niveau de saturation  $\lambda$  de l'Éq. (2.9), c'est-à-dire la sinusoïde en trait plein sur la Fig. 2.2. Les comportements observés sur la Fig. 2.1 sont préservés dans les conditions de la Fig. 2.3, à savoir une amélioration par ajout des bruits de réseau  $\eta_i(t)$  n'existant pas pour un capteur isolé ( $N = 1$ ) mais ayant toujours lieu pour un

### 2.3. INFORMATION DE FISHER AMÉLIORÉE PAR LE BRUIT

réseau à  $N > 1$ . La Fig. 2.4A montre une situation qualitativement différente des figures

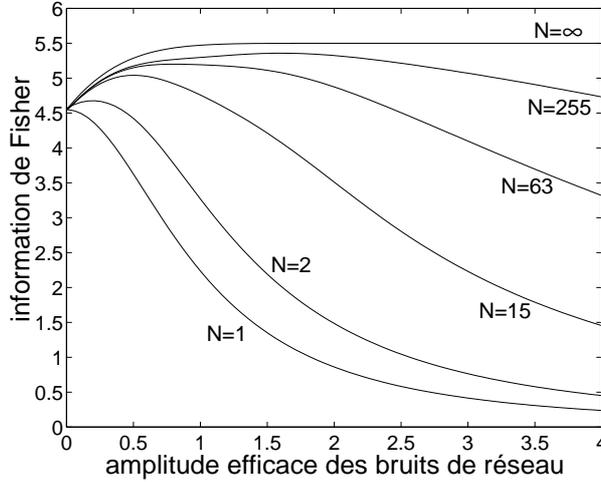


FIG. 2.3 – Même conditions que sur la Fig. 2.1 sauf pour  $a = 1.1$ .

précédentes par l'évolution permanente de la sinusoïde d'entrée  $s_a(t) = a \sin(2\pi t/T_s)$  dans la partie linéaire de  $g(\cdot)$  du fait de son amplitude  $a < \lambda$ . Dans le cas de la Fig. 2.4A, une amélioration par le bruit de l'information de Fisher  $J(\vec{Y}, a)$  est également possible pour un réseau de taille  $N > 1$ , et non accessible pour un capteur isolé à  $N = 1$ . Même si  $a < \lambda$ , le mélange d'entrée  $a \sin(2\pi t/T_s) + \xi(t)$  opère aussi la non-linéarité  $g(\cdot)$  dans sa partie saturante par moments, du fait de la présence du bruit d'entrée  $\xi(t)$ . Ce comportement non linéaire suffit pour que l'effet de bruit utile ait lieu, comme le montre la Fig. 2.4A. Néanmoins une certaine non-linéarité est nécessaire pour produire un effet de bruit utile. Des capteurs strictement linéaires, obtenus par exemple quand  $\lambda \rightarrow \infty$  dans l'Éq. (2.9), mèneraient à la sortie  $Y(t) = s_a(t) + \xi(t) + N^{-1} \sum_{i=1}^N \eta_i(t)$  du réseau ; un mélange signal-bruit purement additif ne permettrait donc pas d'amélioration par le bruit de l'information de Fisher  $J(\vec{Y}, a)$ . Au fur et à mesure que l'amplitude  $a$  de la sinusoïde d'entrée  $s_a(t)$  est encore plus réduite au-dessous de  $\lambda$ , la Fig. 2.4B montre que le même type d'effet de bruit utile reste présent, avec une information de Fisher  $J(\vec{Y}, a)$  améliorée par le bruit pour  $N > 1$  et pas pour  $N = 1$ . L'effet de saturation des capteurs est de moins en moins prononcé en diminuant  $a$  par rapport à  $\lambda$ . Par conséquent, l'effet non linéaire de bruit utile est également de moins en moins prononcé, comme on peut le voir sur les Figs. 2.1–2.4.

Pour le mélange d'entrée signal-bruit  $x(t) = s_a(t) + \xi(t)$ , il est possible de calculer l'information de Fisher  $J(x, a)$  en entrée contenue dans  $x(t)$  sur le paramètre  $a$ . Il faut passer par une définition similaire à l'Éq. (2.3) avec la densité de probabilité  $p_Y(y)$  remplacée par la densité  $p_x(x) = f_\xi[x - s_a(t)]$ , ce qui donne

$$J(x, a) = \left[ \frac{\partial s_a(t)}{\partial a} \right]^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_\xi'^2[u - s_a(t)]}{f_\xi[u - s_a(t)]} du. \quad (2.28)$$

Dans les conditions des Figs. 2.1–2.4, avec un bruit d'entrée  $\xi(t)$  gaussien et  $s_a(t) =$

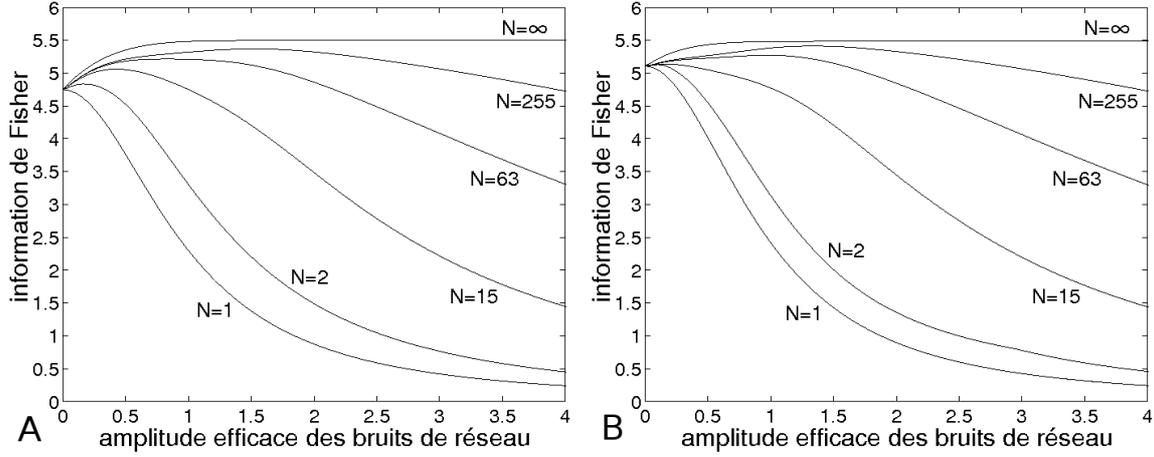


FIG. 2.4 – Même conditions que sur la Fig. 2.1 sauf pour (A) le paramètre  $a = 0.9$  et (B) le paramètre  $a = 0.3$ .

$a \sin(2\pi t/T_s)$ , l'Éq. (2.28) atteint  $J(x, a) = \sin^2(2\pi t/T_s)/\sigma_\xi^2$  pour une seule observation sur  $x(t)$  à l'instant  $t$ . Pour les  $M$  observations indépendantes  $x(t_j) = x_j$ , l'information de Fisher totale contenue dans les données  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_M)$  est la somme  $J(\vec{x}, a) = \sum_{j=1}^M J(x_j, a) = \sum_{j=1}^M \sin^2(2\pi t_j/T_s)/\sigma_\xi^2$ . En ce qui concerne l'application numérique, on a  $J(\vec{x}, a) = 5.5$  dans les conditions des Figs. 2.1–2.4. Cette valeur  $J(\vec{x}, a)$  est l'information de Fisher qui serait accessible si l'entrée  $x(t) = s_a(t) + \xi(t)$  était directement (linéairement) observable, ou si elle était observable de la sortie d'un capteur de caractéristique inversible (éventuellement non linéaire) car une caractéristique inversible conserve l'information de Fisher comme il est par exemple montré dans [16]. Cependant nous supposons que  $x(t)$  doit être observé de la sortie de capteurs avec saturation modélisés par la caractéristique  $g(\cdot)$  non inversible de l'Éq. (2.9). Alors, un capteur isolé sans bruit de réseau fournit l'information de Fisher  $J(\vec{Y}, a)$  en sortie qui est toujours inférieure à l'information de Fisher  $J(\vec{x}, a)$  en entrée, comme il est visible sur les Figs. 2.1–2.4 à  $\sigma_\eta = 0$ . Ceci est dû au caractère non inversible de  $g(\cdot)$  impliquant une perte d'information de Fisher. Cette perte d'information que l'on peut voir sur les Figs. 2.1–2.4 à  $\sigma_\eta = 0$ , devient de plus en plus importante pour un signal d'entrée  $s_a(t) = a \sin(2\pi t/T_s)$  opérant de plus en plus dans la partie saturante de la non-linéarité, ce qui arrive en augmentant  $a$ . La propriété à remarquer est que le réseau parallèle avec ses bruits  $\eta_i(t)$  rend possible la récupération de cette perte d'information de Fisher. Pour de grandes tailles de réseau soit pour  $N$  grand sur les Figs. 2.1–2.4, il est même possible de récupérer complètement l'information de Fisher  $J(\vec{x}, a)$  d'entrée. Dans le cas limite  $N \rightarrow \infty$ , l'information de Fisher  $J(Y, a)$  en sortie se comporte selon

$$J(Y, a) = \left[ \frac{\partial s_a(t)}{\partial a} \right]^2 \times \left[ \frac{f_\xi^2[-\lambda - b - s_a(t)]}{F_\xi[-\lambda - b - s_a(t)]} + \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{[\partial \Phi(y)/\partial s_a]^2}{\Phi(y)} dy + \frac{f_\xi^2[\lambda + b - s_a(t)]}{1 - F_\xi[\lambda + b - s_a(t)]} \right]$$

de l'Éq. (2.22), ce qui veut dire que pour un niveau suffisant des bruits de réseau  $\eta_i(t)$  (pour

$b$  grand dans l'Éq. (2.22) pour la densité de probabilité uniforme que nous avons choisie ici), l'information de Fisher en sortie  $J(Y, a)$  en sortie de réseau à partir des Éqs. (2.22) et (2.26) tend vers l'information de Fisher  $J(x, a)$  en entrée donnée par l'Éq. (2.28).

En résumé, lorsque des capteurs tels que celui de l'Éq. (2.9) sont utilisés pour observer un signal, isolés ils entraînent une perte d'information de Fisher mais répliqués en réseau parallèle, ils peuvent récupérer une partie voire la totalité de cette perte d'information de Fisher, ceci étant possible grâce à l'ajout des bruits de réseau.

## 2.4 Deux mécanismes d'effet de bruit utile

La section précédente s'intéressait au cas d'un signal d'entrée  $s_a(t)$  périodique centré exactement (optimalement) dans la partie linéaire de la caractéristique  $g(\cdot)$  de l'Éq. (2.9), parfois avec une excursion dans ses saturations à  $\pm\lambda$  comme sur les Figs. 2.1–2.3, et parfois maintenu à l'intérieur de la partie linéaire de  $g(\cdot)$  comme sur la Fig. 2.4. Nous considérons maintenant le cas d'un signal d'entrée  $s_a(t)$  périodique évoluant en permanence dans le régime de saturation de la caractéristique  $g(\cdot)$  de l'Éq. (2.9). Ceci se produit par exemple pour un signal  $s_a(t) = S_0 + a \sin(2\pi t/T_s)$  avec un offset  $S_0$  qui est assez grand pour que  $S_0 - a > \lambda$ . Alors, la modulation périodique de  $s_a(t)$  autour de  $S_0$  (l'amplitude  $a$  que l'on cherche à estimer) est totalement invisible de la sortie d'un capteur seul et dans ce cas, l'information de Fisher  $J(Y, a)$  contenue dans la sortie du capteur sur le paramètre  $a$  est nulle. Pour un capteur isolé, le bruit que l'on peut ajouter à  $s_a(t)$  pourra donc faire revenir le mélange signal-bruit dans la partie linéaire du capteur. La modulation périodique sera alors visible de la sortie du capteur grâce à la présence de bruit, ce qui se traduira par une information de Fisher non nulle. Cette forme d'effet de bruit utile dans les capteurs avec saturation isolés a été montrée et analysée dans [16, 67] et est également visible ici sur la Fig. 2.5 à  $N = 1$ . Sans ajouter de bruit  $\eta_1(t)$ , c'est-à-dire à  $\sigma_\eta = 0$  sur la Fig. 2.5 toujours à  $N = 1$ , c'est la présence du bruit d'entrée  $\xi(t)$  qui rend le signal  $s_a(t)$  visible de la sortie du capteur menant à une information de Fisher  $J(\vec{Y}, a)$  en sortie non nulle. Lorsque le bruit d'entrée  $\xi(t)$  n'est pas à son niveau optimal pour l'efficacité de l'estimation, le bruit de réseau  $\eta_1(t)$  coopère avec  $\xi(t)$  pour augmenter encore l'effet de bruit utile. Ceci s'observe sur la Fig. 2.5 à  $N = 1$  par une augmentation de l'information de Fisher  $J(\vec{Y}, a)$  en sortie quand  $\sigma_\eta$  devient non nul, jusqu'à un maximum de  $J(\vec{Y}, a)$  quand on continue d'augmenter la quantité de bruit  $\xi(t) + \eta_1(t)$  jusqu'à sa valeur optimale. Ce type d'amélioration par le bruit observé sur la Fig. 2.5 à  $N = 1$  relève de la forme classique d'effet de bruit utile où un signal mal positionné par rapport à une non-linéarité est aidé par le bruit pour que la transmission par un capteur isolé soit plus efficace. Finalement, cette forme d'effet de bruit utile dans les capteurs isolés peut être complétée d'une autre forme, quand les capteurs sont assemblés en réseau parallèle, comme le montre la Fig. 2.5 à  $N > 1$ . L'information de Fisher  $J(\vec{Y}, a)$  en sortie peut être encore accentuée dans un réseau par ajout des bruits de réseau  $\eta_i(t)$ . Il s'agit d'une forme distincte d'effet de bruit utile à  $N > 1$ , qui a également été montrée dans la section 2.3, mais qui coexiste ici avec

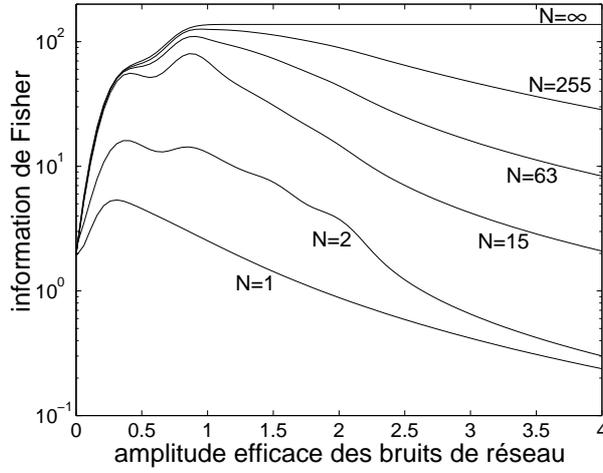


FIG. 2.5 – Information de Fisher  $J(\vec{Y}, a)$  de la sortie d'un réseau de taille  $N$  avec  $\lambda = 1$ , en fonction de l'amplitude efficace  $\sigma_\eta$  des bruits de réseau  $\eta_i(t)$  de densité de probabilité uniforme. Le signal d'entrée est  $s_a(t) = 2 + a \sin(2\pi t/T_s)$  où  $a = 0.5$ , dans un bruit d'entrée  $\xi(t)$  gaussien de moyenne nulle d'amplitude efficace  $\sigma_\xi = 0.2$ .  $M = 10$  observations  $Y(t_j)$  ont été réalisées aux instants  $t_1 = \Delta t$  à  $t_{10} = 10\Delta t$  avec  $\Delta t = T_s/(M + 1)$ .

la forme classique à  $N = 1$ . Deux mécanismes différents sont donc présents sur la Fig. 2.5, caractérisant deux formes possibles d'effet de bruit utile.

Baucoup d'exemples d'effet de bruit utile sont montrés en impliquant une sinusoïde dans du bruit, ce qui a motivé l'analyse ci-dessus du comportement de l'information de Fisher dans cette situation. Cependant l'analyse théorique développée dans les sections 2.1 et 2.2 s'applique quel que soit le type du signal d'entrée  $s_a(t)$  dépendant du paramètre  $a$ . Ainsi notre étude théorique n'est pas restreinte aux signaux sinusoïdaux, comme nous le montrons dans la section suivante.

## 2.5 Estimation sur un signal non sinusoïdal

Pour illustration du caractère général de l'étude théorique présentée dans les sections 2.1 et 2.2 ainsi que de l'effet de bruit utile en estimation de paramètre, nous examinons ici l'estimation d'un paramètre d'une impulsion exponentielle par un réseau de capteurs avec saturation. Les résultats sont montrés Fig. 2.6 pour l'estimation de l'amplitude  $a$  de l'impulsion exponentielle  $s_a(t) = a \exp(-t/T_s)$  pour  $t \geq 0$  de constante de temps  $T_s$ . Les résultats de la Fig. 2.7 correspondent à l'estimation du coefficient d'amortissement  $a$  de l'impulsion exponentielle  $s_a(t) = A \exp(-at)$  pour  $t \geq 0$  avec une amplitude  $A$  connue. Dans ces deux configurations, les Figs. 2.6 et 2.7 confirment le fait que la performance de l'estimation, mesurée par l'information de Fisher  $J(\vec{Y}, a)$ , peut toujours être améliorée par ajout de bruits de réseau dans des réseaux de taille  $N > 1$ . L'amélioration par le bruit de  $J(\vec{Y}, a)$  a lieu à la fois pour une amplitude de l'impulsion au-dessus ou au-dessous de  $\lambda$

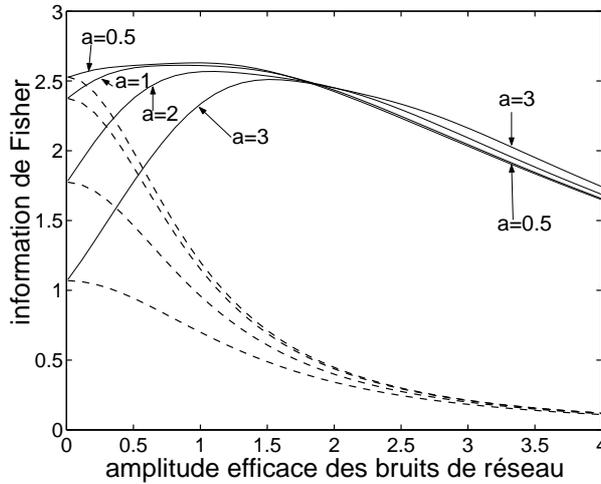


FIG. 2.6 – Information de Fisher  $J(\vec{Y}, a)$  de la sortie d'un réseau de taille  $N$  avec  $\lambda = 1$ , en fonction de l'amplitude efficace  $\sigma_\eta$  des bruits de réseau  $\eta_i(t)$  de densité de probabilité uniforme. Le signal d'entrée est  $s_a(t) = a \exp(-t/T_s)$  dans un bruit d'entrée  $\xi(t)$  gaussien de moyenne nulle et d'amplitude efficace  $\sigma_\xi = 1$ .  $M = 10$  observations  $Y(t_j)$  sont réalisées aux instants  $t_j = 2T_s(j-1)/(M-1)$  pour  $j$  allant de 1 à  $M$ . Les pointillés représentent le cas  $N = 1$  et les traits pleins le cas  $N = 63$ . Pour chacune des valeurs de  $a$  les deux courbes associées à  $N = 1$  et à  $N = 63$  coïncident à  $\sigma_\eta = 0$ . L'information de Fisher en entrée est  $J(\vec{x}, a) = \sum_{j=1}^M \exp(-2t_j/T_s)/\sigma_\xi^2 \approx 2.75$ .

comme le montrent les Figs. 2.6 et 2.7, c'est-à-dire qu'un effet de bruit utile est possible pour une impulsion exponentielle tombant dans la partie linéaire ou la partie saturante des capteurs. D'autre part, à  $N = 63$  dans les Figs. 2.6 et 2.7 pour un niveau optimal des bruits de réseau  $\eta_i(t)$ , la valeur maximale de l'information de Fisher  $J(\vec{Y}, a)$  en sortie est proche de celle en entrée  $J(\vec{x}, a)$ , ce qui signifie que l'on peut en principe se rapprocher plus de  $J(\vec{x}, a)$  en augmentant la taille  $N$  du réseau comme on l'a vu dans les Figs. 2.1–2.5.

Ces différentes applications de la théorie développée dans la section 2.1 mettent en évidence que l'effet de bruit utile dans les réseaux avec saturation est préservé pour n'importe quel type d'estimation de paramètre sur un signal  $s_a(t)$ . Cette propriété peut être attribuée à la forme de l'information de Fisher  $J(Y, a)$  donnée par exemple dans l'Éq. (2.22). À partir de l'Éq. (2.22), l'influence que peut avoir un type de signal  $s_a(t)$  spécifique s'exprime essentiellement dans le facteur  $[\partial s_a(t)/\partial a]^2$  et l'influence provenant des bruits de réseau  $\eta_i(t)$  que l'on ajoute s'exprime dans le second facteur à droite de l'Éq. (2.22) dans lequel la quantité  $s_a(t)$  a un rôle réduit à une constante. C'est pourquoi l'amélioration de l'information de Fisher par les bruits de réseau est régie par ce second facteur, on peut donc s'attendre à ce que cette amélioration ait lieu de manière comparable pour n'importe quel type de signal  $s_a(t)$ . Au vu des résultats des Figs. 2.6 et 2.7, l'estimation de multiples paramètres par un réseau de capteurs avec saturation doit probablement pouvoir tirer profit des bruits de réseau  $\eta_i(t)$  pour être améliorée. Le sujet

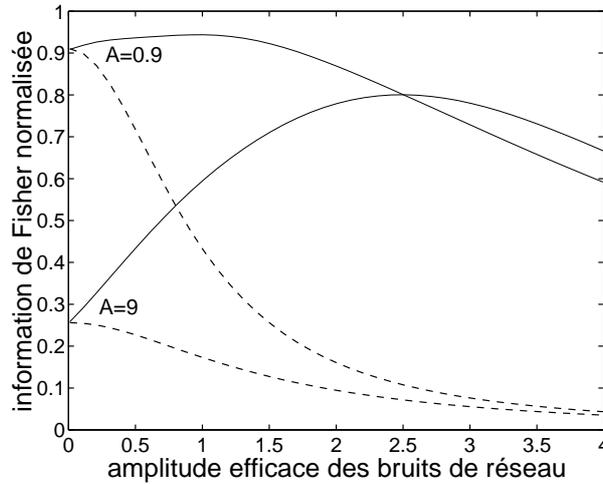


FIG. 2.7 – Information de Fisher normalisée  $J(\vec{Y}, a)/A^2$  de la sortie d'un réseau de taille  $N$  avec  $\lambda = 1$ , en fonction de l'amplitude efficace  $\sigma_\eta$  des bruits de réseau  $\eta_i(t)$  de densité de probabilité uniforme. Le signal d'entrée est  $s_a(t) = A \exp(-at)$  avec  $a = 1$ , dans un bruit d'entrée  $\xi(t)$  gaussien de moyenne nulle et d'amplitude efficace  $\sigma_\xi = 1$ .  $M = 10$  observations  $Y(t_j)$  sont réalisées aux instants  $t_j = 2(j-1)/(M-1)$  pour  $j$  allant de 1 à  $M$ . Les pointillés représentent le cas  $N = 1$  et les traits pleins le cas  $N = 63$ . Pour chacune des valeurs de  $A$  les deux courbes associées à  $N = 1$  et à  $N = 63$  coïncident à  $\sigma_\eta = 0$ . L'information de Fisher en entrée est  $J(\vec{x}, a) = A^2 \sum_{j=1}^M t_j^2 \exp(-2at_j)/\sigma_\xi^2 \approx 0.99A^2$ .

peut être traité en calculant la matrice de l'information de Fisher pour une mesure de l'efficacité de l'estimation [56, 72], dans une extension de dimension multiple des calculs des sections 2.1 et 2.2.

## 2.6 Discussion sur le réseau de capteurs avec saturation considéré

L'étude que nous venons de présenter sur l'estimation de paramètre au moyen de l'information de Fisher peut être comparée aux travaux de [69] sur le comportement du rapport signal-sur-bruit (RSB) d'un signal sinusoïdal transmis par le même type de réseau de capteurs avec saturation, lorsqu'on lui ajoute des bruits de réseau. Pour un signal sinusoïdal, le RSB de [69] caractérise l'efficacité de la détection de la sinusoïde qui pourrait par exemple être faite dans le domaine fréquentiel par un filtre passe-bande; l'information de Fisher ici, caractérise de façon fondamentale l'efficacité de l'estimation de l'amplitude de la sinusoïde. Il s'agit de deux tâches différentes, mesurées par des quantités différentes. Cependant, lorsque les signaux sont transmis par des capteurs avec saturation tels que  $g(\cdot)$  de l'Éq. (2.9), les deux mesures peuvent toujours être augmentées par réplication des capteurs en réseau dans lequel on ajoute des bruits. Ceci confirme le caractère général de

l'effet de bruit utile dans les réseaux. Une différence existe néanmoins entre les présents résultats et ceux de [69]. Le RSB d'une sinusoïde dans un bruit gaussien dans [69] peut être augmenté au-dessus du RSB qui serait obtenu par une observation directe (linéaire) du mélange signal-bruit d'entrée, au lieu de l'observation contrainte de se faire par les capteurs avec saturation. L'amplification maximale du rapport signal-sur-bruit atteinte dans [69] nécessite toutefois un réseau réglable, avec une valeur de  $\lambda$  spécifique correspondant à l'amplitude de l'entrée sinusoïdale. Par contre ici, l'information de Fisher  $J(Y, a)$  de la sortie du réseau de saturations peut toujours être augmentée au-dessus de l'information de Fisher de la sortie d'un capteur avec saturation isolé, mais  $J(Y, a)$  ne peut pas atteindre une valeur supérieure à celle de l'information de Fisher  $J(x, a)$  de l'entrée obtenue lors de l'observation directe du mélange  $x(t) = s_a(t) + \xi(t)$ . Au mieux, comme nous l'avons remarqué sur les Figs. 2.1–2.5,  $J(Y, a)$  atteint la valeur de  $J(x, a)$  pour des réseaux de grande taille sans jamais la dépasser. Cette meilleure performance ne nécessite pas de réglage spécifique du réseau et peut être obtenue pour tout  $\lambda$  donné en prenant une taille de réseau suffisamment grande ainsi qu'un niveau des bruits de réseau suffisamment grand. Pour l'information de Fisher, l'action des bruits dans le réseau peut être interprétée comme une transformation des capteurs dont les saturations sont inhérentes, en un dispositif équivalent qui serait purement linéaire et de gamme d'entrée infinie.

Un autre point de discussion réside dans le caractère non inversible de la caractéristique  $g(\cdot)$  que nous avons considérée. La non inversibilité est un ingrédient nécessaire à la présence d'effet de bruit utile dans les réseaux mesuré par l'information de Fisher, effet qui disparaît pour des dispositifs inversibles. Comme déjà remarqué dans [16], c'est également le cas pour des capteurs isolés. La raison vient de l'invariance par changement inversible de variable de l'intégrale définissant l'information de Fisher, de la forme

$$J(Y, a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{p_Y(y)} \left[ \frac{\partial}{\partial a} p_Y(y) \right]^2 dy$$

de l'Éq. (2.3). Pour des capteurs présentant des saturations (habituel en pratique), la modélisation par une saturation inversible est pourtant une hypothèse formelle ne reflétant pas toujours correctement le comportement physique du capteur. Envisageons une saturation inversible de la forme  $g(u) = \lambda \tanh(u/\lambda)$  à la place du modèle non inversible de l'Éq. (2.9), dont l'entrée est la sinusoïde  $s_a(t) = S_0 + a \sin(2\pi t/T_s)$  d'offset  $S_0$  comme sur la Fig. 2.5. Pour  $S_0 \gg \lambda > a$ , la sinusoïde est à la sortie complètement écrasée sur le voisinage de  $\lambda$ . À la sortie, la modulation de la sinusoïde d'entrée est alors comprimée sur  $\lambda$ , sur un petit intervalle qui réduit au fur et à mesure que l'offset  $S_0$  grandit. Pour une valeur donnée de  $S_0$  la modulation sinusoïdale devient invisible en sortie, alors que pour une modélisation inversible de la saturation, l'information de Fisher sur l'amplitude  $a$  de la modulation n'est pas affectée par le traitement et garde la même valeur en entrée et en sortie quelle que soit la position de l'offset  $S_0$ . En pratique, il y aura toujours une limite physique à la résolution de la sortie, permettant de distinguer ou pas une petite modulation sinusoïdale à l'environ du niveau  $\lambda$  de saturation. Le modèle inversible est

donc incapable de représenter cette limite et la perte incontournable d'information qui lui est associée. Le modèle non inversible de l'Éq. (2.9) offre quant à lui une représentation naturelle de cette limite et constitue ainsi un modèle plus approprié pour les capteurs avec saturation, et avec ce choix, la perte d'information de Fisher lorsque les capteurs opèrent en régime de saturation est prise en compte.

Les résultats présentés dans cette étude montrent que l'amélioration de l'efficacité d'estimation par le bruit peut arriver dans le réseau pour n'importe quelle position du signal d'entrée par rapport à la non-linéarité. En particulier, un signal d'entrée centré de manière optimale peut bénéficier de la mise en réseau avec bruits. Ceci marque un fort contraste avec le mécanisme d'effet de bruit utile correspondant à un signal mal positionné par rapport à un seuil comme dans [73] ou par rapport à une saturation comme dans [16]. Ainsi, nous avons vu que deux mécanismes distincts peuvent être observés; l'un concernant des entrées mal positionnées et l'autre concernant un effet de réseau basé sur une représentation enrichie et ce pour n'importe quel signal, les deux pouvant coexister dans certaines configurations (comme illustré par la Fig. 2.5).

À travers le contexte des capteurs physiques, les résultats de cette étude comme ceux sur les réseaux de comparateurs peuvent avoir une signification dans le domaine du traitement neuronal de l'information. Les neurones exhibent une saturation et les réseaux parallèles constituent une structure habituelle de leur organisation, comportant diverses sources de bruit d'origine interne ou externe. Dans la partie suivante, nous allons appliquer ces mécanismes d'effet de bruit utile dans les non-linéarités que sont les neurones. On pourra également étudier l'influence du bruit lorsque le signal est positionné dans les différents régimes d'activités des neurones.

---

## Chapitre 3

# Application aux réseaux parallèles de neurones

Plusieurs types d'effet de bruit utile ont été enregistrés dans le domaine du traitement neuronal de l'information, par analyse théorique [74, 75] ou par observation expérimentale [64, 65]. Une synthèse est présentée dans [34]. Ces études se penchent essentiellement sur le mécanisme classique d'amélioration par le bruit où la non-linéarité présente un seuil infranchissable par un signal d'amplitude trop faible, le bruit coopérant constructivement avec le signal pour déclencher une réponse efficace à la sortie du neurone isolé [76]. Un mécanisme d'effet de bruit utile en réseau pour un signal sous le seuil, similaire à celui décrit dans le chapitre 1 pour des comparateurs, est également observé en transmission neuronale [77, 28, 29, 38, 78, 40]. Ces deux mécanismes ont été étudiés pour différents modèles de neurones, que ce soit pour leur réponse à un courant d'entrée analogique [79, 39] ou à des trains d'impulsions (spikes) comme le modèle de FitzHugh-Nagumo [35, 38], représentant différentes caractéristiques physiques. Parmi ces caractéristiques, les neurones présentent une saturation pour de fortes intensités à leur entrée. Un mécanisme d'effet de bruit utile en régime de saturation est montré avec des neurones isolés dans [67] où le bruit est capable de réduire la distorsion, comme nous l'avons montré pour des capteurs isolés dans le chapitre 2. Dans la suite, nous poursuivons l'étude sur le comportement de ce type de neurones dans le cadre de l'amélioration par le bruit, lorsqu'ils sont répliqués en un réseau parallèle. Les résultats principaux de cette étude sont présentés dans [80].

### 3.1 Le modèle de processus neuronal

Le modèle classique « intègre et tire » d'un neurone isolé peut être représenté par une caractéristique  $g(\cdot)$  d'entrée–sortie sous la forme de la fonction de Lapicque [81, 82]

$$f(t) = g[I(t)] = \begin{cases} 0 & \text{pour } I(t) \leq I_{\text{seuil}} , \\ \frac{1/T_r}{1 - (\tau_m/T_r) \ln[1 - I_{\text{seuil}}/I(t)]} & \text{pour } I(t) > I_{\text{seuil}} . \end{cases} \quad (3.1)$$

Nous choisissons donc le même modèle de neurone que dans [67], qui sera répliqué pour former un réseau parallèle dans notre étude. Le signal à l'entrée du neurone isolé est le courant  $I(t)$  à l'instant  $t$  résultant de la somme des courants arrivant sur le neurone. Ce courant d'entrée  $I(t)$  peut résulter des activités neuronales pré-synaptiques, ou d'un stimulus externe provenant de l'environnement des neurones, une situation où l'étude de l'effet de bruit utile est pertinente. La sortie du neurone est le taux de décharge à court-terme  $f(t)$  auquel les potentiels d'action sont émis en réponse à  $I(t)$ . Dans la fonction de l'Éq. (3.1), un courant de seuil survient à  $I_{\text{seuil}} = V_{\text{seuil}}/R_m$ , avec  $V_{\text{seuil}}$  le potentiel de décharge standard du neurone, et  $R_m$  la résistance totale de sa membrane. Les autres paramètres de l'Éq. (3.1) sont la constante de temps  $\tau_m$  de la membrane et la période  $T_r$  de réfraction du neurone. Nous prenons les valeurs typiques également prises dans [67] :  $V_{\text{seuil}} = 10$  mV et  $R_m = 100$  M $\Omega$ , ce qui donne  $I_{\text{seuil}} = 0.1$  nA, ainsi que  $\tau_m = 10$  ms et  $T_r = 1$  ms. Le taux de décharge de l'Éq. (3.1) prenant en compte ces paramètres est décrit sur la Fig. 3.1. Bien que fondé sur une description très simplifiée de la dynamique du

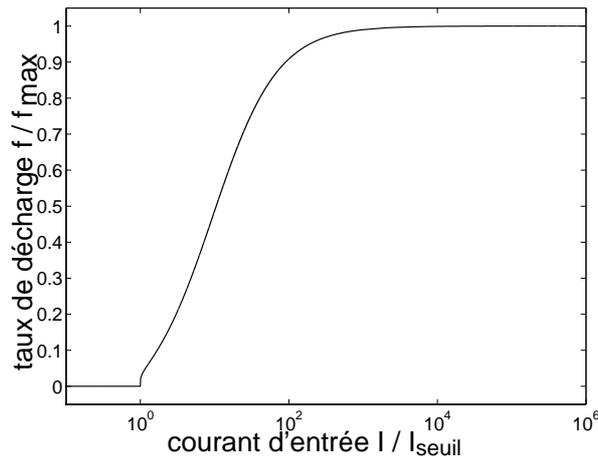


FIG. 3.1 – Taux de décharge  $f(t)$  de sortie en unités de  $f_{\text{max}} = 1/T_r$ , en fonction du courant d'entrée  $I(t)$  en unités de  $I_{\text{seuil}}$ , dans les conditions typiques  $\tau_m = 10$  ms,  $T_r = 1$  ms et  $I_{\text{seuil}} = 0.1$  nA, selon la fonction de Lapicque de l'Éq. (3.1).

neurone, la fonction de l'Éq. (3.1) décrit des caractéristiques essentielles de la réponse

d'un neurone [81, 82] à savoir la présence d'un seuil, d'une saturation et d'une partie curvilinéaire entre ces deux parties.

Le réseau que nous allons étudier maintenant est la mise en parallèle, selon une structure similaire à celle considérée dans les chapitres précédents, de  $N$  neurones identiques indexés de  $i = 1$  à  $N$  et modélisés par la caractéristique de l'Éq. (3.1). Chaque neurone  $i$  du réseau reçoit le signal d'entrée  $I(t)$  auquel on ajoute un bruit de réseau  $\eta_i(t)$  indépendant de  $I(t)$ . La réponse d'un neurone  $i$  est alors

$$f_i(t) = g[I(t) + \eta_i(t)], \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.2)$$

Les  $N$  bruits  $\eta_i(t)$  sont supposés blancs, indépendants et identiquement distribués (i.i.d.), de densité de probabilité  $p_\eta(u)$ . La réponse  $y(t)$  du réseau peut être prise comme la somme  $\sum_{i=1}^N f_i(t)$  ou comme la moyenne  $N^{-1} \sum_{i=1}^N f_i(t)$  des  $N$  sorties, ces quantités se comportant de la même façon dans cette étude. Dans la suite, nous prenons la moyenne

$$y(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i(t), \quad (3.3)$$

et nous mesurons l'influence des bruits de réseau  $\eta_i(t)$  sur la transmission de signaux périodiques et apériodiques par le réseau neuronal.

## 3.2 Mesure de la transmission par le réseau

Afin d'étudier l'influence du bruit sur la transmission neuronale, nous supposons que le courant d'entrée  $I(t)$  est

$$I(t) = s(t) + \xi(t). \quad (3.4)$$

Dans l'Éq. (3.4), le signal  $s(t)$  est le signal porteur d'information qui sera successivement une composante périodique puis apériodique dans ce qui suit. Le signal  $s(t)$  représente l'information provenant des neurones pré-synaptiques ou de l'environnement des cellules sensorielles. La quantité  $\xi(t)$  dans l'Éq. (3.4) est un bruit blanc, indépendant de  $s(t)$  et des bruits  $\eta_i(t)$ , de densité de probabilité  $p_\xi(u)$ , pouvant être issu des fluctuations spontanées des neurones pré-synaptiques ou de l'environnement extérieur. Le mélange signal-bruit  $I(t) = s(t) + \xi(t)$  est transmis par le réseau neuronal, lequel produit la sortie  $y(t)$  correspondante via les Éqs. (3.2) et (3.3). Nous allons maintenant étudier l'influence des bruits de réseau  $\eta_i(t)$  sur l'efficacité de la transmission du signal  $s(t)$  à travers le réseau.

### 3.2.1 Transmission d'un signal périodique

Une mesure standard pour quantifier l'efficacité de la transmission, lorsque  $s(t)$  est un signal périodique de période  $T_s$ , est le rapport signal-sur-bruit (RSB) défini dans le domaine fréquentiel [12, 5]. À la sortie du réseau, le RSB mesure dans  $y(t)$  la puissance

contenue dans la ligne de spectre cohérent existant à  $1/T_s$  divisé par la puissance contenue dans un fond de bruit de petite bande de fréquence  $\Delta B$  autour de  $1/T_s$ , ce qui donne

$$\mathcal{R}_{\text{sor}} = \frac{|\langle \text{E}[y(t)] \exp(-i2\pi t/T_s) \rangle|^2}{\langle \text{var}[y(t)] \rangle \Delta t \Delta B} . \quad (3.5)$$

Dans l'Éq. (3.5), une moyenne temporelle est définie par

$$\langle \dots \rangle = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} \dots dt , \quad (3.6)$$

$\text{E}[y(t)]$  et  $\text{var}[y(t)] = \text{E}[y^2(t)] - \text{E}^2[y(t)]$  représentant respectivement l'espérance et la variance de  $y(t)$  à un instant  $t$  donné;  $\Delta t$  est la résolution temporelle de la mesure, c'est-à-dire la période d'échantillonnage du signal en discret. Dans cette étude nous prendrons  $\Delta t \Delta B = 10^{-3}$ . Pour une valeur donnée  $I$  du courant d'entrée  $I(t)$  à l'instant  $t$  et selon l'Éq. (3.3), on a les espérances conditionnelles

$$\text{E}[y(t)|I] = \text{E}[f_i(t)|I] \quad (3.7)$$

et

$$\text{E}[y^2(t)|I] = \frac{1}{N} \text{E}[f_i^2(t)|I] + \frac{N-1}{N} \text{E}^2[f_i(t)|I] . \quad (3.8)$$

Ces deux quantités sont indépendantes de  $i$  car les bruits  $\eta_i(t)$  ainsi que leur densité  $f_i(t)$  sont indépendants et identiquement distribués, pour chaque  $i$

$$\text{E}[f_i(t)|I] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(I+u) p_\eta(u) du \quad (3.9)$$

et

$$\text{E}[f_i^2(t)|I] = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(I+u) p_\eta(u) du . \quad (3.10)$$

Le courant d'entrée s'exprimant  $I(t) = s(t) + \xi(t)$ , la densité de probabilité est  $p_\xi(I - s(t))$ , et on obtient

$$\text{E}[y(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{E}[y(t)|I] p_\xi(I - s(t)) dI , \quad (3.11)$$

et

$$\text{E}[y^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{E}[y^2(t)|I] p_\xi(I - s(t)) dI . \quad (3.12)$$

toutes ces relations permettent l'évaluation du rapport signal-sur-bruit en sortie  $\mathcal{R}_{\text{sor}}$  de l'Éq. (3.5).

### 3.2.2 Transmission d'un signal apériodique

Lorsque le signal d'entrée  $s(t)$  porteur d'information est apériodique, une mesure standard dans les études d'effet de bruit utile est l'intercovariance entrée-sortie normalisée, quantifiant la similarité entre l'entrée  $s(t)$  et la sortie  $y(t)$  du réseau sans être sensible aux changements d'échelle ou d'offset dans l'amplitude du signal [83, 68]. Pour un signal  $s(t)$  déterministe et apériodique sur une durée  $T_s$ , on introduit les signaux centrés sur leur espérance statistique moyenne

$$\tilde{s}(t) = s(t) - \langle s(t) \rangle \quad (3.13)$$

et

$$\tilde{y}(t) = y(t) - \langle E[y(t)] \rangle, \quad (3.14)$$

avec la moyenne temporelle définie par l'Éq. (3.6). L'intercovariance moyenne normalisée est alors

$$C_{sy} = \frac{\langle E[\tilde{s}(t)\tilde{y}(t)] \rangle}{\sqrt{\langle E[\tilde{s}^2(t)] \rangle \langle E[\tilde{y}^2(t)] \rangle}}. \quad (3.15)$$

Puisque  $s(t)$  est déterministe, on peut écrire de façon équivalente

$$C_{sy} = \frac{\langle s(t) E[y(t)] \rangle - \langle s(t) \rangle \langle E[y(t)] \rangle}{\sqrt{[\langle s(t)^2 \rangle - \langle s(t) \rangle^2] [\langle E[y^2(t)] \rangle - \langle E[y(t)] \rangle^2]}} , \quad (3.16)$$

avec  $E[y(t)]$  et  $E[y^2(t)]$  données par les Éqs. (3.11) et (3.12). Nous pouvons à présent quantifier l'influence des bruits de réseau  $\eta_i(t)$  sur l'efficacité de la transmission d'un signal périodique ou apériodique  $s(t)$  par un réseau neuronal, au moyen des mesures de performance  $\mathcal{R}_{\text{sor}}$  de l'Éq. (3.5) et  $C_{sy}$  de l'Éq. (3.16).

## 3.3 Transmission aidée par le bruit dans un réseau neuronal

Les évaluations numériques de  $\mathcal{R}_{\text{sor}}$  et  $C_{sy}$  peuvent être réalisées par une intégration numérique dans les Éqs. (3.9) à (3.12). On peut également choisir un traitement analytique en utilisant l'approximation suivante. La fonction de Lapicque prise pour la caractéristique  $g(\cdot)$  de l'Éq. (3.1) peut s'approximer, pour  $I(t)$  suffisamment au-dessus du seuil  $I_{\text{seuil}}$ , en prenant  $\ln(1 - I_{\text{seuil}}/I) \approx -I_{\text{seuil}}/I$  ce qui mène à

$$f(t) = g[I(t)] = \begin{cases} 0 & \text{pour } I(t) \leq I_{\text{seuil}} , \\ \frac{1/T_r}{1 + \frac{\tau_m I_{\text{seuil}}}{T_r I(t)}} & \text{pour } I(t) > I_{\text{seuil}} , \end{cases} \quad (3.17)$$

illustrée en pointillés sur la Fig. 3.2. L'approximation de l'Éq. (3.17) est intéressante car

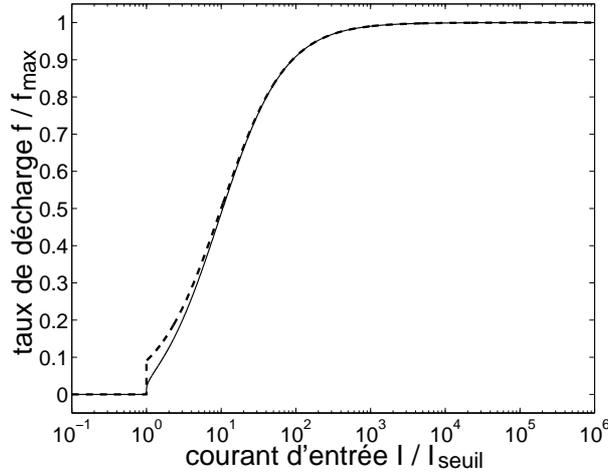


FIG. 3.2 – Taux de décharge  $f(t)$  de sortie en unités de  $f_{\max} = 1/T_r$ , en fonction du courant d'entrée  $I(t)$  en unités de  $I_{\text{seuil}}$ , dans les mêmes conditions que la Fig. 3.1 pour la fonction de Lapique de l'Éq. (3.1) (trait plein) et son approximation donnée par l'Éq. (3.17) (pointillés).

elle diffère peu de la fonction de l'Éq. (3.1), seulement légèrement pour  $I(t)$  juste au-dessus du seuil  $I_{\text{seuil}}$ . Ainsi, elle préserve les propriétés qualitatives des neurones que sont la présence de seuil, de saturation et d'une partie intermédiaire curvilinéaire dans leur réponse. L'approximation que l'on vient de faire, associée à la densité de probabilité  $p_\eta(u)$  choisie uniforme sur  $[-a, a]$  permet l'évaluation analytique des intégrales des Éqs. (3.9) à (3.10). À partir des primitives

$$\int g(u)du = \frac{u}{T_r} - \frac{\tau_m I_{\text{seuil}}}{T_r^2} \ln \left( \frac{\tau_m I_{\text{seuil}}}{T_r} + u \right) \quad (3.18)$$

et

$$\int g^2(u)du = \frac{u}{T_r^2} - \frac{2\tau_m I_{\text{seuil}}}{T_r^3} \ln \left( \frac{\tau_m I_{\text{seuil}}}{T_r} + u \right) + \frac{\tau_m^2 I_{\text{seuil}}}{T_r^4 u + \tau_m I_{\text{seuil}} T_r^3}, \quad (3.19)$$

nous obtenons les espérances conditionnelles

$$E[f_i(t)|I] = \begin{cases} 0 & \text{pour } I \leq I_{\text{seuil}} - a, \\ \frac{1}{T_r} \frac{I_{\text{seuil}}}{2a} [\Phi_1(I+a) - \Phi_1(I_{\text{seuil}})] & \text{pour } I_{\text{seuil}} - a < I < I_{\text{seuil}} + a, \\ \frac{1}{T_r} \frac{I_{\text{seuil}}}{2a} [\Phi_1(I+a) - \Phi_1(I-a)] & \text{pour } I \geq I_{\text{seuil}} + a, \end{cases} \quad (3.20)$$

et

$$E[f_i^2(t)|I] = \begin{cases} 0 & \text{pour } I \leq I_{\text{seuil}} - a , \\ \left(\frac{1}{T_r}\right)^2 \frac{I_{\text{seuil}}}{2a} [\Phi_2(I+a) - \Phi_2(I_{\text{seuil}})] & \text{pour } I_{\text{seuil}} - a < I < I_{\text{seuil}} + a , \\ \left(\frac{1}{T_r}\right)^2 \frac{I_{\text{seuil}}}{2a} [\Phi_2(I+a) - \Phi_2(I-a)] & \text{pour } I \geq I_{\text{seuil}} + a , \end{cases} \quad (3.21)$$

avec les deux fonctions

$$\Phi_1(u) = \frac{u}{I_{\text{seuil}}} - \frac{\tau_m}{T_r} \ln \left( \frac{u}{I_{\text{seuil}}} + \frac{\tau_m}{T_r} \right) \quad (3.22)$$

et

$$\Phi_2(u) = \frac{u}{I_{\text{seuil}}} - 2 \frac{\tau_m}{T_r} \ln \left( \frac{u}{I_{\text{seuil}}} + \frac{\tau_m}{T_r} \right) - \frac{(\tau_m/T_r)^2}{\frac{u}{I_{\text{seuil}}} + \frac{\tau_m}{T_r}} . \quad (3.23)$$

Dans le but d'analyser l'influence du bruit dans le réseau neuronal, nous choisissons comme entrée périodique celle de [67]

$$s(t) = I_0 + I_1 \sin(2\pi t/T_s) \quad \forall t, \quad (3.24)$$

pour laquelle la mesure de performance est le RSB  $\mathcal{R}_{\text{sor}}$  de l'Éq. (3.5), et comme entrée aperiodique

$$s(t) = \begin{cases} I_0 + I_1 \sin(2\pi t/T_s) & \text{pour } t \in [0, T_s] , \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases} \quad (3.25)$$

pour laquelle la mesure de performance est l'intercovariance  $C_{sy}$  de l'Éq. (3.16). Nous pourrons varier les paramètres  $I_0$  (offset) et  $I_1$  (amplitude) de l'entrée  $s(t)$  des Éqs. (3.24) ou (3.25) afin de stimuler le réseau dans les différents régimes présentés sur la Fig. 3.1, soit successivement le seuil, la partie curvilinéaire et la saturation.

### 3.3.1 Transmission au seuil

Dans la situation au seuil, le signal  $s(t)$  porteur d'information évolue à chaque instant  $t$  au-dessous du courant de seuil  $I_{\text{seuil}}$ . Le bruit d'entrée  $\xi(t)$  ajouté au signal  $s(t)$  est également faible, si bien que le mélange d'entrée signal-bruit  $I(t) = s(t) + \xi(t)$  n'atteint pratiquement jamais le seuil de décharge  $I_{\text{seuil}}$  des neurones. Le courant  $I(t)$  n'est donc pas capable à lui seul de déclencher une réponse efficace de la sortie du réseau, et par conséquent les mesures  $\mathcal{R}_{\text{sor}}$  et  $C_{sy}$  de l'efficacité de la transmission restent essentiellement nulles. La Fig. 3.3 montre que dans cette configuration, les bruits de réseau  $\eta_i(t)$  ont un rôle constructif sur la transmission. Dans le cas d'un neurone isolé c'est-à-dire à  $N = 1$  sur la Fig. 3.3, le bruit  $\eta_1(t)$  ajouté coopère avec le signal d'entrée  $I(t)$  sous le seuil,

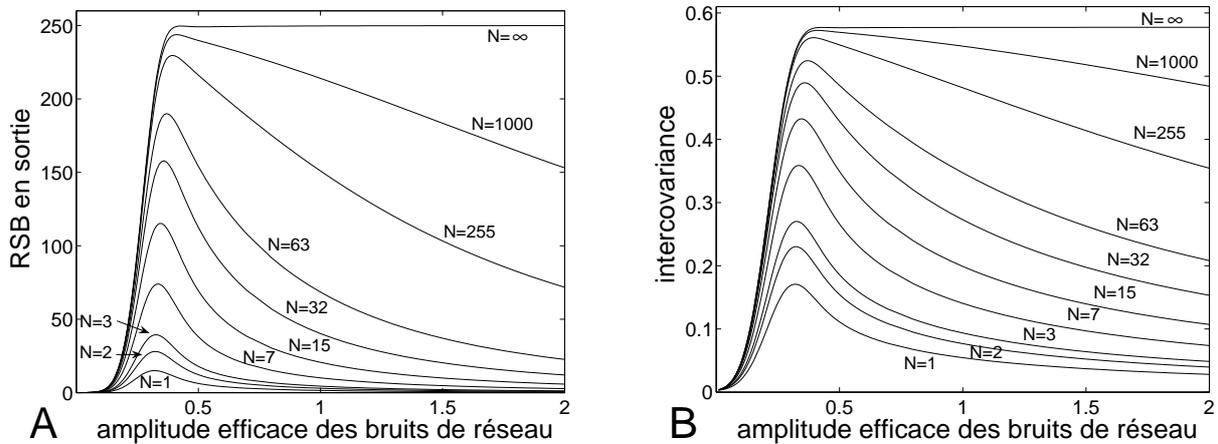


FIG. 3.3 – Transmission au seuil par un réseau neuronal de taille  $N$ , en fonction de l’amplitude efficace  $\sigma_\eta/I_{\text{seuil}}$  des bruits de réseau  $\eta_i(t)$  de densité de probabilité uniforme, avec un bruit d’entrée  $\xi(t)$  gaussien de moyenne nulle et d’amplitude efficace  $\sigma_\xi = 0.1I_{\text{seuil}}$ . Les paramètres du signal d’entrée sont  $I_0 = 0.5I_{\text{seuil}}$  et  $I_1 = 0.1I_{\text{seuil}}$ . A) RSB en sortie  $\mathcal{R}_{\text{sor}}$  de l’Éq. (3.5) pour  $s(t)$  un signal  $T_s$ -périodique d’Éq. (3.24). B) Intercovariance entrée–sortie  $C_{sy}$  de l’Éq. (3.16) pour  $s(t)$  un signal apériodique d’Éq. (3.25).

pour atteindre ce seuil de décharge  $I_{\text{seuil}}$  et induire ainsi des variations de la sortie du neurone qui sont corrélées au signal  $s(t)$  porteur d’information. Cet effet coopératif a lieu que l’entrée  $s(t)$  soit périodique (Fig. 3.3A) comme apériodique (Fig. 3.3B). L’effet de bruit utile, se manifestant par une évolution non monotone culminant à un maximum des mesures pour un niveau non nul du bruit  $\eta_1(t)$ , est l’effet standard dans une non-linéarité à seuil comme il a été mesuré avec l’information de Fisher dans le chapitre 1. Nous montrons ici que la transmission aidée par le bruit présente dans le cas d’un neurone isolé est accentuée lorsque les neurones sont associés en réseau parallèle, comme le montre la Fig. 3.3 à  $N > 1$  où les deux mesures de performance sont toujours augmentées par l’action bénéfique des bruits de réseau  $\eta_i(t)$  choisis ici uniformes. Sans ajouter aucun bruit  $\eta_i(t)$  dans le réseau, soit à  $\sigma_\eta = 0$  sur la Fig. 3.3, tous les neurones répondent ensemble à la manière d’un seul donnant la même performance à  $\sigma_\eta = 0$  quelle que soit la taille  $N$  du réseau. Comparé à l’efficacité d’un neurone isolé, l’ajout des bruits de réseau  $\eta_i(t)$  implique toujours un effet bénéfique à l’efficacité de la transmission par le réseau neuronal. De plus, on peut déduire de la Fig. 3.3 que cet effet devient plus important quand la taille  $N$  du réseau est augmentée. Dans la configuration limite de grands réseaux  $N = \infty$ , les deux mesures  $\mathcal{R}_{\text{sor}}$  et  $C_{sy}$  atteignent un plateau pour de grandes valeurs de l’amplitude efficace  $\sigma_\eta$  des bruits  $\eta_i(t)$ . Le comportement du réseau en fonction des bruits  $\eta_i(t)$ , et en particulier la présence de ce plateau pour de grandes valeurs de leur amplitude efficace, est en accord avec le comportement similaire des travaux de [35] sur les réseaux neuronaux pour le modèle de FitzHugh-Nagumo et pour la corrélation entrée–sortie de la transmission d’un signal apériodique (sans bruit d’entrée). Dans notre

### 3.3. TRANSMISSION AIDÉE PAR LE BRUIT DANS UN RÉSEAU NEURONAL

cas de mélange signal-bruit  $I(t) = s(t) + \xi(t)$ , le rapport signal-sur-bruit en entrée défini par les Éqs. (3.5) et (3.24) est la quantité  $\mathcal{R}_{\text{ent}} = I_1^2 / (4\sigma_\xi^2 \Delta t \Delta B)$ ; pour l'intercovariance normalisée définie par les Éqs. (3.16) et (3.25) c'est la quantité  $C_{sI} = 1 / [1 + 2\sigma_\xi^2 / I_1^2]^{1/2}$ . Pour les paramètres de la Fig. 3.3, ces quantités valent  $\mathcal{R}_{\text{ent}} = 250$  et  $C_{sI} = 1/\sqrt{3}$  (valeurs identiques pour toutes les figures de ce chapitre). Le plateau atteint par le RSB à  $N = \infty$  et de grandes valeurs de  $\sigma_\eta$  sur la Fig. 3.3 est justement  $\mathcal{R}_{\text{ent}}$ , de même que le plateau atteint par l'intercovariance dans ces conditions est  $C_{sI}$ . En d'autres termes, le réseau à l'aide des bruits  $\eta_i(t)$  ajoutés, est capable pour de grandes tailles  $N$  du réseau de restituer l'efficacité de la transmission que l'on obtiendrait par une observation directe de l'entrée  $I(t) = s(t) + \xi(t)$  au lieu de son observation par les neurones possédant un seuil.

Un point de vue complémentaire sur l'effet de bruit utile dans le réseau neuronal est donné dans le domaine temporel par la Fig. 3.4. Dans cette figure on considère la même

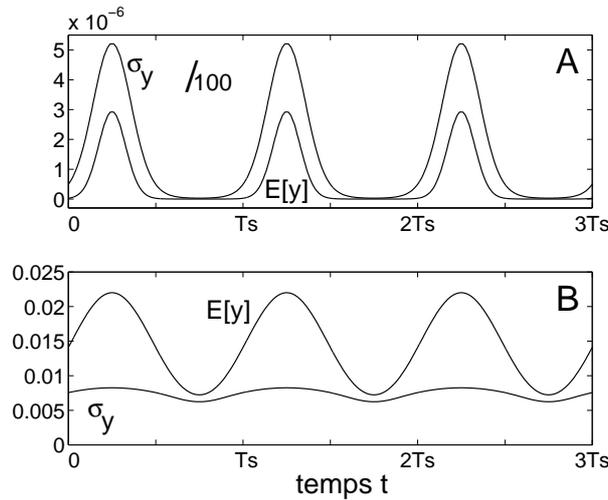


FIG. 3.4 – Pour la sortie  $y(t)$  d'un réseau de taille  $N \rightarrow \infty$  : sa moyenne  $E[y(t)]$  et son écart-type  $\sigma_y$ , en unités de  $f_{\text{max}} = 1/T_r$ . Le signal d'entrée est la sinusoïde bruitée de l'Éq. (3.24) dont les valeurs des paramètres sont celles de la Fig. 3.3. A) à  $\sigma_\eta = 0$  (sans ajouter de bruit de réseau  $\eta_i(t)$ ). B) à  $\sigma_\eta = 0.4I_{\text{seuil}}$  (avec des bruits de réseau dont le niveau est non nul et proche de sa valeur optimale). Dans le panneau A la quantité  $\sigma_y$  est divisée par 100 pour correspondre à l'échelle de  $E[y(t)]$ .

sinusoïde bruitée et sous le seuil que pour la Fig. 3.3. On peut déduire des espérance  $E[y(t)]$  et écart-type  $\sigma_y$  que l'effet de bruit utile est double. Par ajout de bruits  $\eta_i(t)$ , correspondant au passage de la Fig. 3.4A à la Fig. 3.4B, la sortie  $y(t)$  du réseau ressemble plus en moyenne à la sinusoïde d'entrée, et la fluctuation  $\sigma_y$  par rapport à  $E[y(t)]$  est réduite. Ces aspects examinés qualitativement sur la Fig. 3.4 sont quantifiés par les mesures de la Fig. 3.3.

### 3.3.2 Transmission en régime intermédiaire

Un autre régime intéressant à étudier dans le cadre de l'amélioration par le bruit correspond à la transmission d'un signal  $s(t)$  dont l'amplitude est assez grande pour que le signal évolue à chaque instant  $t$  au-dessus du seuil de décharge  $I_{\text{seuil}}$  des neurones, sans pour autant solliciter la saturation de la caractéristique du neurone que l'on peut voir sur la Fig. 3.1. Le comportement du réseau dans ce régime intermédiaire est présenté sur la Fig. 3.5. Dans le cas d'un neurone isolé soit à  $N = 1$  sur la Fig. 3.5, l'effet de

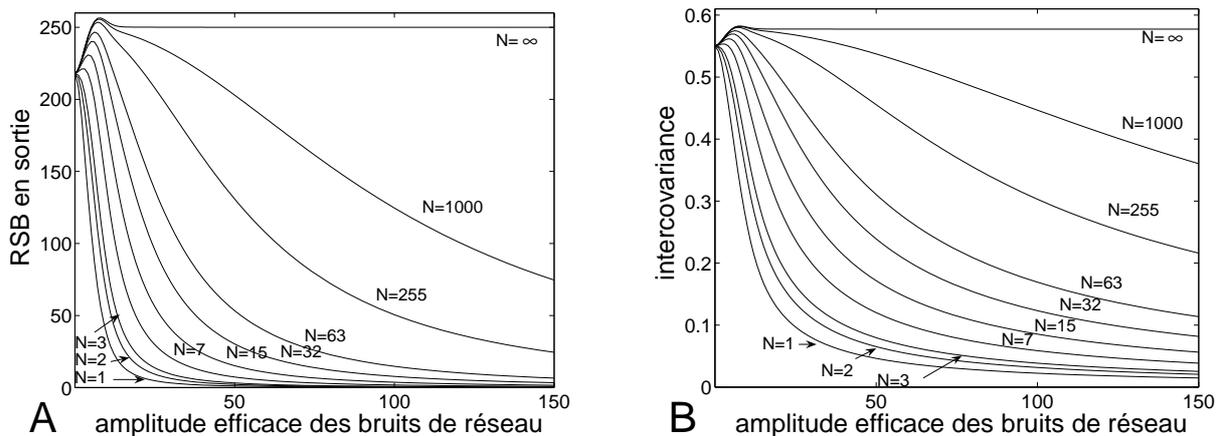


FIG. 3.5 – Transmission en régime intermédiaire du réseau neuronal de taille  $N$ , en fonction de l'amplitude efficace  $\sigma_\eta/I_{\text{seuil}}$  des bruits de réseau  $\eta_i(t)$  de densité de probabilité uniforme. Le bruit d'entrée  $\xi(t)$  est gaussien de moyenne nulle et amplitude efficace  $\sigma_\xi = 5I_{\text{seuil}}$ , les paramètres du signal d'entrée sont  $I_0 = 10I_{\text{seuil}}$  et  $I_1 = 5I_{\text{seuil}}$ . A) RSB en sortie  $\mathcal{R}_{\text{sor}}$  de l'Éq. (3.5) pour  $s(t)$  une entrée  $T_s$ -périodique d'Éq. (3.24). B) Intercovariance entrée–sortie  $C_{sy}$  de l'Éq. (3.16) pour  $s(t)$  une entrée aperiodique d'Éq. (3.25).

bruit utile n'intervient pas, comme le montre la décroissance monotone du RSB  $\mathcal{R}_{\text{sor}}$  et de l'intercovariance  $C_{sy}$  lorsque le niveau de bruit  $\sigma_\eta$  augmente. Ceci est dû au fait que  $s(t)$ , en permanence au-dessus du seuil et au-dessous de la saturation, peut par lui-même déclencher une réponse efficace de la sortie du neurone isolé. Un signal  $s(t)$  évoluant dans le régime intermédiaire d'un capteur n'a pas besoin de l'aide du bruit, que ce soit pour dépasser un seuil ou pour être déplacé en dehors d'une saturation. L'ajout de bruit dans cette condition ne peut alors que dégrader l'efficacité de la transmission d'un neurone isolé, propriété également notée pour le même modèle de neurone isolé dans [67]. Nous montrons ici que les résultats sont différents lorsque les neurones sont assemblés en un réseau parallèle. Pour des tailles  $N$  de réseau suffisamment au-dessus de 1, la Fig. 3.5 illustre que les bruits de réseau  $\eta_i(t)$  peuvent toujours améliorer l'efficacité de la transmission par rapport à celle d'un neurone isolé sans bruit  $\eta_1(t)$ , dans le cas d'un signal  $s(t)$  en régime intermédiaire. L'action constructive des bruits de réseau  $\eta_i(t)$  s'exprime comme auparavant par une augmentation de  $\mathcal{R}_{\text{sor}}$  sur la Fig. 3.5A et  $C_{sy}$  sur la Fig. 3.5B quand le niveau  $\sigma_\eta$  de bruit est augmenté. Comme dans la section précédente pour un signal

au-dessus du seuil, l'effet de bruit utile est de plus en plus prononcé quand la taille  $N$  du réseau devient plus grande. Dans la limite d'un réseau infini  $N = \infty$  sur la Fig. 3.5, les mesures en entrée  $\mathcal{R}_{\text{sor}} = \mathcal{R}_{\text{ent}}$  et  $C_{sy} = C_{sI}$  sont aussi récupérées pour de grandes valeurs de  $\sigma_\eta$ , comme si le réseau de neurones non linéaires se transformait en un dispositif linéaire sous l'action du bruit.

D'autre part, une propriété importante apparaît sur la Fig. 3.5 pour des réseaux de taille suffisamment grande : la possibilité d'améliorer les mesures efficacité  $\mathcal{R}_{\text{sor}}$  et  $C_{sy}$  au-dessus de leur valeur en entrée  $\mathcal{R}_{\text{ent}}$  et  $C_{sI}$ , dans un intervalle réduit de valeurs du niveau de bruit  $\sigma_\eta$ . Cet effet, où  $\mathcal{R}_{\text{sor}}$  et  $C_{sy}$  montent légèrement au-dessus des plateaux pour de grandes valeurs de  $\sigma_\eta$ , est ici faible ; mais il prouve en principe que certains capteurs non linéaires, éventuellement aidés par le bruit, peuvent surpasser les compétences d'un hypothétique système purement linéaire ayant un accès direct au signal d'entrée. Une telle observation linéaire directe n'est pas accessible aux neurones isolés qui doivent faire avec leur caractéristique de seuil et saturation, mais elle devient possible pour un assemblage de neurones avec des bruits, comme nous le montrons dans cette étude. C'est une propriété remarquable montrée sur la Fig. 3.5, que d'observer un réseau de non-linéarités avec seuil et saturation pouvant amplifier les efficacités  $\mathcal{R}_{\text{sor}}$  et  $C_{sy}$  au-dessus de leur valeur d'entrée  $\mathcal{R}_{\text{ent}}$  et  $C_{sI}$ , car cette propriété est présente dans très peu de systèmes. Il est clair que les systèmes linéaires y compris les systèmes linéaires dynamiques de n'importe quel ordre ne peuvent pas amplifier le RSB en sortie de l'Éq. (3.5) au-dessus du RSB en entrée, car dans le spectre de sortie d'un système linéaire le pic cohérent à  $1/T_s$  et le fond de bruit autour de  $1/T_s$  sont multipliés par le même facteur qui est le module de sa transmittance au carré, laissant le RSB inchangé entre l'entrée et la sortie. Très peu de systèmes non linéaires sont capables d'amplifier le RSB d'une sinusoïde dans un bruit blanc gaussien comme il est montré sur la Fig. 3.5. L'amplification du RSB est une problématique qui a été posée très tôt en traitement du signal et pour les conditions les moins difficiles d'un bruit à bande étroite [84, 85], des gains maximaux de 2 ont été atteints avec des non-linéarités avec seuil ou de Heaviside. Dans les conditions plus difficiles d'un bruit blanc large bande, les gains en RSB sont tout aussi modestes : un gain de RSB maximal de 1.2 est obtenu dans [86] pour un système dynamique bistable isolé, un gain de RSB maximal de 1.25 dans [87] par réseau couplé de systèmes dynamiques bistables, et il est rapporté dans [9] qu'un gain de RSB maximal de 1.4 peut être obtenu par une non-linéarité statique réglée de façon optimale. Il semble que dans une amplification du RSB par des non-linéarités, une certaine quantité de saturation soit un ingrédient important pour le gain, du fait de son aptitude à couper le mélange d'entrée signal-bruit qui permettrait de réduire le bruit plus que le signal d'intérêt, comme c'est le cas dans [9] ou comme ici pour les non-linéarités neuronales.

Dans le domaine temporel, la Fig. 3.6 offre un autre aperçu de l'effet de bruit utile dans le réseau. Pour la même sinusoïde d'entrée bruitée que sur la Fig. 3.5, la Fig. 3.6 montre de nouveau la double action constructive du bruit. En passant de la Fig. 3.6A à la Fig. 3.6B par ajout des bruits  $\eta_i(t)$ , la sortie  $y(t)$  ressemble en moyenne plus (légèrement

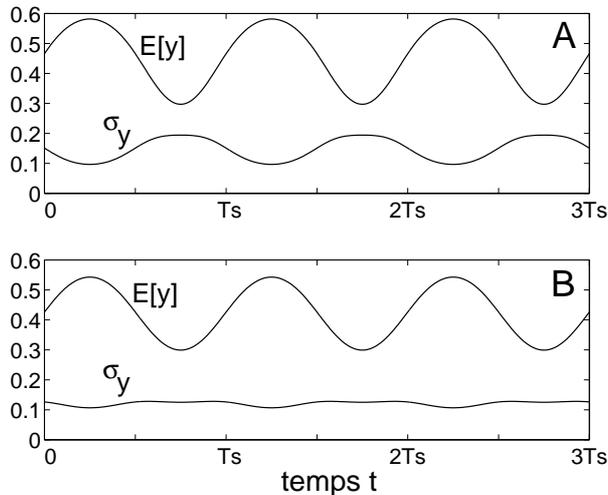


FIG. 3.6 – Pour la sortie  $y(t)$  d'un réseau de taille  $N \rightarrow \infty$  : sa moyenne  $E[y(t)]$  et son écart-type  $\sigma_y$ , en unités de  $f_{\max} = 1/T_r$ . Le signal d'entrée est la sinusoïde bruitée de l'Éq. (3.24) dont les valeurs des paramètres sont celles de la Fig. 3.5. A) à  $\sigma_\eta = 0$  (sans ajouter de bruit de réseau  $\eta_i(t)$ ). B) à  $\sigma_\eta = 7I_{\text{seuil}}$  (avec des bruits de réseau dont le niveau est non nul et proche de sa valeur optimale).

pour ces valeurs de paramètres) à la sinusoïde d'entrée, et la fluctuation  $\sigma_y$  est réduite.

### 3.3.3 Transmission à la saturation

Les conditions de la Fig. 3.7 concernent un réseau soumis à un régime de forte saturation. Dans le cas d'un neurone isolé correspondant à la courbe  $N = 1$  sur la Fig. 3.7, le bruit  $\eta_1(t)$  ajouté est déjà capable d'un effet de bruit utile sur l'efficacité de la transmission d'un signal périodique ou apériodique. Une amélioration similaire à celle pour  $N = 1$  avait déjà lieu dans le régime sous le seuil sur la Fig. 3.3, mais pas dans le régime intermédiaire de la caractéristique du neurone sur la Fig. 3.5. Ce qui se passe en saturation à  $N = 1$ , également observé dans [67], illustre que l'ajout de bruit apporte au besoin un décalage à la réponse neuronale, qui la déplace d'un régime fortement non linéaire (seuil ou ici saturation) vers un régime plus favorable à la transmission (partie curvilinéaire de la caractéristique). Nous illustrons ensuite une transmission aidée par le bruit en régime de saturation qui est fortement améliorée lorsque les neurones sont associés en réseau à  $N > 1$  sur la Fig. 3.7. Cet effet de bruit utile est valable pour des signaux périodiques (Fig. 3.7A) comme pour des signaux apériodiques (Fig. 3.7B), et il est de plus en plus important au fur et à mesure que la taille  $N$  du réseau est augmentée. Pour des tailles de réseau  $N \rightarrow \infty$  et une quantité suffisante des bruits  $\eta_i(t)$ , la sortie du réseau non linéaire récupère la performance que l'on aurait à l'entrée. La double action bénéfique des bruits de réseau est également illustrée dans le domaine temporel sur la Fig. 3.8. En effet, pour des grandes amplitudes de la sinusoïde d'entrée bruitée sur la Fig. 3.7, la sortie  $y(t)$

### 3.4. DISCUSSION SUR LES MÉCANISMES D'EFFET DE BRUIT UTILE

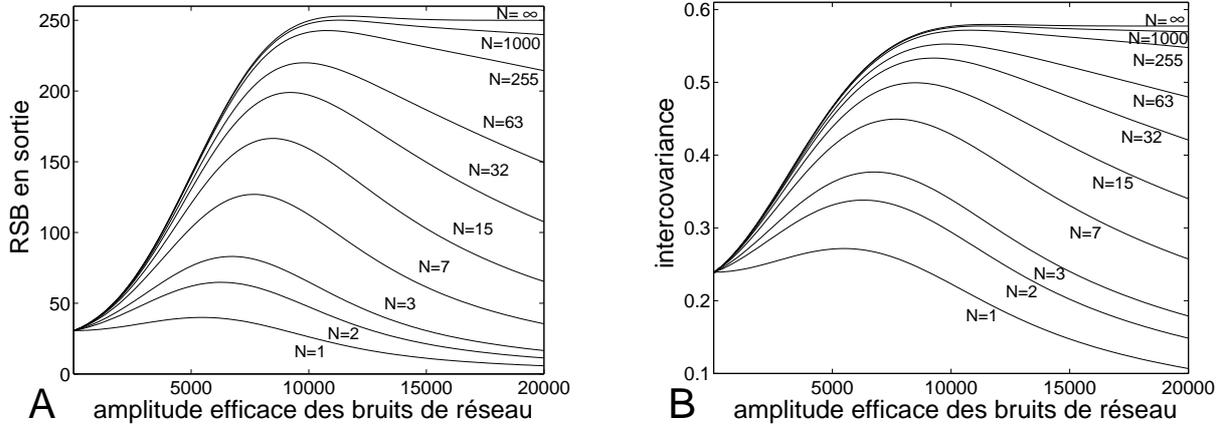


FIG. 3.7 – Transmission à la saturation par un réseau neuronal de taille  $N$ , en fonction de l'amplitude efficace  $\sigma_\eta/I_{\text{seuil}}$  des bruits de réseau  $\eta_i(t)$  de densité de probabilité uniforme, avec un bruit d'entrée  $\xi(t)$  gaussien de moyenne nulle et d'amplitude efficace  $\sigma_\xi = 5 \times 10^3 I_{\text{seuil}}$ , les paramètres du signal étant  $I_0 = 10^4 I_{\text{seuil}}$  et  $I_1 = 5 \times 10^3 I_{\text{seuil}}$ . A) RSB en sortie  $\mathcal{R}_{\text{sor}}$  de l'Éq. (3.5) pour  $s(t)$  un signal  $T_s$ -périodique d'Éq. (3.24). B) Intercovariance entrée-sortie  $C_{sy}$  de l'Éq. (3.16) pour  $s(t)$  une entrée apériodique d'Éq. (3.25).

en moyenne ressemble plus, avec une saturation réduite, à l'entrée et la fluctuation est diminuée.

## 3.4 Discussion sur les mécanismes d'effet de bruit utile

Nous venons de montrer dans les réseaux de non-linéarités appliqués aux processus neuronaux qu'un effet de bruit utile est toujours renforcé par un niveau suffisant des bruits de réseau, comparé à la situation d'un neurone isolé, dans les régimes de seuil et saturation de la caractéristique des neurones. Dans la partie curvilinéaire où le bruit est subi comme une nuisance par le neurone isolé, l'effet de bruit utile devient possible par la mise en réseau avec ajout de bruits de réseau (pris ici de densité de probabilité uniforme). Il est donc possible d'améliorer la transduction du signal dans les processus neuronaux pour n'importe quelle position du signal, qu'il soit sous le seuil ou dans la saturation ou même dans la partie curvilinéaire de la réponse neuronale. Ces régimes correspondent à des signaux mal positionnés ainsi que bien positionnés par rapport à la non-linéarité. Dans ces différentes configurations, un effet de bruit utile a été vérifié tout aussi bien pour des signaux périodiques que des signaux apériodiques, illustrant le nombre important de formes d'amélioration par le bruit dans les structures neuronales. Ces améliorations sont permises par un mécanisme distinct dans les réseaux, où l'ajout de bruits de réseau force les neurones à répondre différemment à un même signal d'entrée.

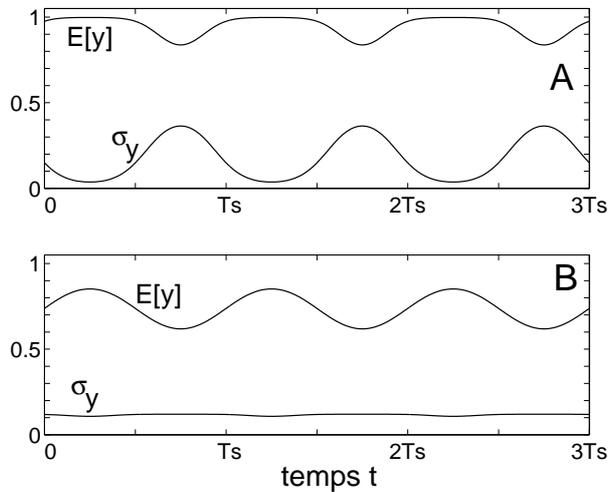


FIG. 3.8 – Pour la sortie  $y(t)$  d’un réseau de taille  $N \rightarrow \infty$  : sa moyenne  $E[y(t)]$  et son écart-type  $\sigma_y$ , en unités de  $f_{\max} = 1/T_r$ . Le signal d’entrée est la sinusoïde bruitée de l’Éq. (3.24) dont les valeurs des paramètres sont celles de la Fig. 3.7. A) à  $\sigma_\eta = 0$  (sans ajouter de bruit de réseau  $\eta_i(t)$ ). B) à  $\sigma_\eta = 12 \times 10^3 I_{\text{seuil}}$  (avec des bruits de réseau dont le niveau est non nul et proche de sa valeur optimale).

De nos études, il apparaît que ceci est la source d’une représentation plus riche en sortie du réseau et ainsi d’une transduction améliorée du signal d’entrée. Nous avons vu que l’effet de bruit utile est aussi disponible dans le régime intermédiaire, ce qui signifie que cet effet ne requiert pas de position particulière du signal. Dans le cas des neurones isolés et pour d’autres types de capteurs comme ceux vus dans les chapitres 1 et 2 précédents, au contraire des réseaux, le mécanisme d’effet de bruit utile s’appuie sur les non-linéarités avec seuil ou saturation. Nous retrouvons donc, ici pour la transduction neuronale de l’information, deux mécanismes opérant ensemble sur les Figs. 3.3 et 3.7 respectivement en régime de seuil et de saturation, tandis qu’un seul mécanisme (celui de réseau) a lieu en régime intermédiaire sur la Fig. 3.5.

L’effet de bruit utile dans la transduction neuronale en réseau a été montré ici avec le modèle très simple de neurone décrit par la fonction de Lapique de l’Éq. (3.1). Comme le souligne beaucoup d’études sur les neurones [82], ce modèle de la fonction de Lapique transcrit des propriétés essentielles de la transmission neuronale, à savoir la présence à la fois d’un seuil, d’une saturation et d’une réponse intermédiaire curvilinéaire. En même temps, l’effet de bruit utile est connu pour être robuste à des changements dans les non-linéarités considérées. Des modèles de neurones plus élaborés, avec des couplages possibles dans le réseau, pourraient être testés afin d’étudier comment les propriétés basiques exposées ici sont préservées ou évoluent. Il serait aussi intéressant de connaître le rôle de ces propriétés basiques dans le traitement de l’information accompli par les systèmes neuronaux, traitement très efficace et dont le mode et les mécanismes sont toujours intensément étudiés.

---

# Conclusion sur les réseaux de capteurs

Dans les études de cette partie, nous avons étudié des réseaux parallèles de capteurs dans leurs différents régimes de fonctionnement. Nous avons pris en compte la présence d'un seuil, d'une saturation, et d'une partie intermédiaire linéaire ou curvilinéaire. Dans les non-linéarités isolées et pour le couplage signal-bruit additif supposé ici, la possibilité d'un effet de bruit utile dépend de la position du signal porteur d'information par rapport à la non-linéarité. Le signal doit être mal positionné pour bénéficier du bruit, le ramenant alors dans une partie plus favorable au traitement par le capteur isolé. Cet effet de bruit utile n'est pas disponible en régime intermédiaire pour un capteur isolé, comme la partie curvilinéaire de la fonction de Lapique choisie pour modéliser le comportement des neurones naturels. Nous avons montré que la mise en réseau parallèle de ces capteurs avec bruits de réseau permet toujours d'améliorer le traitement de l'information. Dans le cas d'un signal mal positionné (seuil ou saturation), les mesures de performance sont encore meilleures quand le nombre de capteurs assemblés augmente. En régime intermédiaire nous avons vu que le réseau avec bruits est capable de tirer parti de ces bruits pour une meilleure performance que dans le cas isolé. Dans certaines conditions, le réseau de capteurs avec bruits permet même de récupérer à sa sortie plus d'information que dans le cas d'une observation directe du mélange signal-bruit d'entrée. Dans la situation d'un signal bien positionné, nous retrouvons une augmentation de la performance pour un grand nombre de capteurs composant le réseau. Ceci est une propriété remarquable illustrant la possibilité d'un effet bénéfique du bruit dans une situation adaptée pour le traitement du signal. À travers ces résultats, nous présentons différents mécanismes d'effet de bruit utile opérant dans les réseaux, qui peuvent éventuellement apparaître conjointement comme nous le discutons dans la section 2.4.

Nous avons considéré deux domaines du traitement de l'information que sont l'estimation de paramètres et la transmission neuronale. En estimation, l'analyse est faite pour un signal quelconque ce qui nous permet de souligner le caractère général de l'amélioration par le bruit dans ce domaine. En transmission neuronale, les présents résultats apportent une contribution vers la compréhension des mécanismes plus complexes de la transduction neuronale par des structures présentant des non-linéarités dès les plus bas niveaux. Des perspectives directes des travaux développés dans cette partie I ont été abordées

dans les discussions des trois chapitres. On pourrait aussi envisager d'autres couplages signal-bruit, comme le fait par exemple l'étude de [41], voire des structures de réseaux où les capteurs sont liés. Les non-linéarités traitées ici se retrouvent dans de nombreux domaines, comme par exemple l'imagerie cohérente à laquelle nous nous intéressons dans la seconde partie de ce manuscrit.

## Deuxième partie

### Effet de bruit utile en imagerie cohérente



---

# Introduction sur l'imagerie cohérente

Nous nous sommes intéressés jusqu'ici à l'effet de bruit utile sur le traitement de signaux monodimensionnels. Quelques études ont montré cet effet dans le cas des images [88, 89, 27]. Beaucoup d'entre elles concernent la perception des images par le système visuel, au moyen d'évaluations psychophysiques [90] (voir [34] pour une synthèse). Une amélioration par le bruit a également été observée dans des systèmes optiques, que ce soit en théorie [91, 92, 93, 94] ou expérimentalement [95, 96].

Nous considérons ici le domaine de l'imagerie cohérente qui concerne un grand nombre de systèmes (sonar, échographie, SAR, laser...). Dans ces systèmes, une onde monochromatique éclaire la scène à imager avec une phase uniforme ou quasi-uniforme dans l'espace. En se réfléchissant, l'onde incidente voit sa phase perturbée par les variations microscopiques (contributions élémentaires d'amplitude et/ou phase aléatoires) dues à la rugosité inhérente de la scène à l'échelle de la longueur d'onde. Sur le capteur d'image, certaines variations s'additionnent constructivement donnant de fortes intensités, d'autres interfèrent destructivement en donnant de faibles intensités. Il en résulte dans l'image cohérente des variations d'intensité d'apparence granuleuse que l'on appelle bruit de speckle. Le bruit de speckle est également observé en transmission par des diffuseurs statiques, car les longueurs des chemins optiques parcourus à travers l'objet varient de manière significative par rapport à la longueur d'onde [97]. La plupart des matériaux étant rugueux à l'échelle de la longueur d'onde optique, le bruit de speckle est fréquemment rencontré en imagerie cohérente. Dans cette seconde partie du manuscrit, nous montrons un effet de bruit utile pour la première fois dans ce domaine. Dans ce cadre, il est également intéressant d'étudier l'imagerie cohérente du fait que le speckle qu'elle implique peut être modélisé comme un bruit multiplicatif. En effet, nous mettons en évidence de nouveaux mécanismes d'amélioration par le bruit provenant notamment de cette propriété. De plus, le couplage signal-bruit multiplicatif a reçu relativement peu d'attention jusqu'à présent, dans des systèmes variés statiques [98, 41] ou dynamiques [99, 100, 101, 102, 103, 104], ces études concernant exclusivement des signaux monodimensionnels.

Cette partie du manuscrit sur l'effet de bruit utile en imagerie cohérente s'organise comme suit. Dans le chapitre 4 nous montrons, par des études analytiques et numériques, que le bruit de speckle peut être favorable à la transmission d'une image par un système comportant un capteur d'image à seuil. Nous avons présenté ces résultats lors d'un

séminaire. À cette occasion, nous avons initié une collaboration avec le laboratoire des Propriétés Optiques des Matériaux et Applications (POMA) de l'Université d'Angers, qui a donné lieu à plusieurs publications [105, 106, 107] avec D. Gindre [108, 109] (POMA). Un dispositif optique est présenté dans le même chapitre, permettant une évaluation expérimentale de l'effet bénéfique du speckle ainsi qu'une comparaison avec l'étude théorique. Nous étudions dans le chapitre 5 le cas d'un capteur d'image dont la caractéristique comporte une partie linéaire et avec une saturation. Avec ce type de capteur, nous montrons qu'il est possible d'optimiser l'acquisition avec le bruit de speckle. Enfin, nous considérons dans le chapitre 6 des applications de cet effet de bruit utile pour des méthodes de réduction de bruit de speckle et pour d'autres méthodes d'imagerie cohérente non conventionnelles telles que la polarimétrie.

---

## Chapitre 4

# Transmission d'image aidée par le bruit de speckle

Nous montrons dans ce premier chapitre que le bruit de speckle peut favoriser, dans certaines conditions, la transmission d'une image par un système d'imagerie cohérente. Pour une première étude sur l'effet de bruit utile dans ce domaine, nous commençons par prendre en compte le seuil du capteur d'image intégré dans un tel système. L'étude prend d'abord la forme d'une analyse théorique illustrant un nouveau mécanisme d'amélioration par le bruit que nous avons présenté dans [110]. Afin d'observer un effet de bruit utile, le bruit est généralement injecté de manière intentionnelle et son influence sur le système non linéaire est examinée. Le bruit de speckle auquel nous nous intéressons ici est au contraire inhérent à l'acquisition. En effet, comme nous le verrons en détail à la fin de ce chapitre, le niveau du speckle peut être contrôlé par l'intensité de l'onde incidente. Nous utilisons cette propriété pour réaliser un dispositif optique, nous permettant également d'étudier de façon expérimentale le mécanisme d'effet de bruit utile présenté théoriquement comme nous l'exposons dans [105]. Dans la section suivante, nous commençons par décrire le modèle considéré pour le système imageur ainsi que les mesures pour évaluer la performance de ce système.

### 4.1 Système d'imagerie cohérente avec un capteur à seuil

Nous considérons l'image  $S(u, v)$  en niveaux de gris dont les pixels sont indexés par les coordonnées entières  $(u, v)$  et ont une intensité  $S(u, v) \in [0, 1]$ . Nous supposons que l'image  $S(u, v)$  est suffisamment grande pour qu'une approche statistique de la transmission soit significative : l'image  $S(u, v)$  possède un histogramme d'intensité empirique dont la version normalisée donne une estimation de la densité de probabilité  $p_S(\cdot)$  pour l'intensité de l'image  $S(u, v)$  [111]. Le bruit de speckle  $N(u, v)$  est supposé ergodique et statistiquement indépendant de  $S(u, v)$ . Les valeurs des pixels du bruit sont supposées indépendantes d'un

pixel à l'autre, et sont prises identiquement distribuées selon la densité de probabilité  $p_N(\cdot)$  (que ce soit sur des réalisations successives de  $N(u, v)$  pour un pixel donné, ou sur l'ensemble des pixels de  $N(u, v)$  pour une réalisation donnée). Afin de décrire l'action du bruit de speckle sur l'image d'entrée  $S(u, v)$  représentant la scène imagée [112, 113], considérons la transmission d'une onde monochromatique de fréquence  $w$

$$A_i(t) = \frac{A_0}{|D|} \exp(iwt) \quad (4.1)$$

à travers un diffuseur  $D$  de transmittivité/réfectivité  $R$  constante. Un capteur situé derrière le diffuseur reçoit alors l'onde

$$A_r(t) = \iint \frac{A_0}{|D|} R \exp(iwt - i\Phi_{x,y}) dx dy \quad (4.2)$$

avec un déphasage  $\Phi_{x,y}$  dû au retard de transmission. On peut choisir  $\Phi_{x,y}$  uniformément distribué sur  $[0, 2\pi[$  pour représenter les fluctuations induites par la rugosité du diffuseur à l'échelle de la longueur d'onde. L'Éq. (4.2) peut aussi s'écrire sous la forme

$$A_r(t) = A_0 R \exp(iwt) Z \quad (4.3)$$

avec  $Z$  une fonction de  $\Phi_{x,y}$ . L'intensité du champ reçu au niveau du capteur est alors

$$I_r = |A_r(t)|^2 = |A_0|^2 R^2 |Z|^2 = I_0 R^2 N. \quad (4.4)$$

Le bruit de speckle  $N = |Z|^2$  peut donc être modélisé comme un bruit  $N(u, v)$  multiplicatif, agissant sur chaque pixel de l'image d'entrée  $S(u, v)$  pour donner le mélange non linéaire

$$X(u, v) = S(u, v) \times N(u, v) \quad (4.5)$$

que nous appelons l'image intermédiaire  $X(u, v)$ . Le modèle de capteur du système imageur qui est choisi est un comparateur à seuil  $\theta$ , de caractéristique entrée-sortie  $g(\cdot)$  non linéaire

$$g[X(u, v)] = \begin{cases} 0 & \text{si } X(u, v) \leq \theta \\ 1 & \text{si } X(u, v) > \theta \end{cases} \quad (4.6)$$

Ce comparateur constitue un modèle très basique pour les systèmes d'imagerie lorsqu'ils opèrent, dans le domaine des faibles flux, proche de leur seuil de détectabilité. Le comparateur de l'Éq. (4.6) peut également représenter une étape dans un processus plus complexe telle que le pas d'un quantificateur, ou le seuil présent dans divers processus de haut niveau de traitement des images comme par exemple la détection ou la segmentation. De plus, ce modèle non linéaire présente l'avantage de faciliter les calculs analytiques. Le capteur du système imageur non linéaire délivre alors en sortie l'image observable  $Y(u, v)$  suivant la relation

$$Y(u, v) = g[X(u, v)]. \quad (4.7)$$

Afin d'étudier quantitativement le rôle du bruit de speckle sur la transmission de l'image d'entrée  $S(u, v)$ , nous mesurons la performance du système imageur décrit par les Éqs. (4.5) à (4.7). Une mesure standard de traitement de l'information est l'intercovariance entrée–sortie. Pour que la mesure de performance utilisée soit adaptée à l'information qui est transmise, nous prenons sa version pour les images qui est l'intercovariance normalisée

$$C_{SY} = \frac{\langle (S - \langle S \rangle)(Y - \langle Y \rangle) \rangle}{\sqrt{\langle (S - \langle S \rangle)^2 \rangle \langle (Y - \langle Y \rangle)^2 \rangle}}, \quad (4.8)$$

où  $\langle \cdot \rangle$  désigne une moyenne spatiale sur les images. Cette mesure quantifie pixel à pixel la similarité contenue dans les fluctuations autour des moyennes.  $C_{SY}$  est proche de 1 lorsque les images  $S(u, v)$  et  $Y(u, v)$  ont des structures fortement similaires, et proche de 0 lorsque les images ne sont pas liées (décorrélées). Une autre possibilité est de définir l'information mutuelle  $I_{SY}$  au sens de Shannon entre les pixels des images  $S(u, v)$  et  $Y(u, v)$ , qui elle quantifie l'indépendance entre l'entrée et la sortie d'un point de vue informationnel en prenant pour base l'incertitude de l'entrée pour une observation de la sortie. L'information mutuelle est définie par

$$I_{SY} = H(Y) - H(Y|S), \quad (4.9)$$

avec les définitions standard [114] pour les entropies  $H(\cdot)$  qui sont

$$H(Y) = \int_j -p_Y(j) \log_2[p_Y(j)] dj, \quad (4.10)$$

et

$$H(Y|S) = \int_s p_S(s) ds \int_j -p_{Y|S}(j) \log_2[p_{Y|S}(j)] dj. \quad (4.11)$$

On a  $I_{SY} = 0$  lorsque  $S(u, v)$  et  $Y(u, v)$  sont indépendantes, et  $I_{SY} = H(S)$  lorsque les images sont identiques. Dans les Éqs. (4.10) et (4.11), la densité de probabilité conditionnelle est définie par  $p_{Y|S}(j) dj = \Pr\{Y \in [j, j + dj] | S = s\}$  et la densité marginale est  $p_Y(j) = \int_s ds p_S(s) p_{Y|S}(j)$ . Dans le cas où  $Y(u, v)$  prend des valeurs discrètes au lieu des valeurs continûment distribuées considérées ici, des formules standard alternatives pour les entropies ayant des probabilités à la place des densités remplacent les Éqs. (4.10) et (4.11).

En principe, quand  $p_S(\cdot)$ ,  $p_N(\cdot)$  et  $g(\cdot)$  sont connues, il est possible de prédire théoriquement les mesures de similarité entrée–sortie que sont  $C_{SY}$  et  $I_{SY}$ . Une fois ces prédictions obtenues, nous pourrions étudier dans la prochaine section l'influence du bruit de speckle  $N(u, v)$  sur la transmission en observant l'évolution de ces mesures. En plus de l'évaluation numérique des mesures de similarité entre les pixels des images  $S(u, v)$  et  $Y(u, v)$ , leurs prédictions permettent une base de comparaison et d'évaluation de la méthode.

## 4.2 Amélioration de la transmission par le bruit de speckle

Des prédictions analytiques sur l'évolution des mesures  $C_{SY}$  et  $I_{SY}$  des Éqs. (4.8) et (4.9) peuvent être obtenues en choisissant des modèles simples pour les quantités physiques. Afin d'obtenir une description simple des propriétés statistiques de l'image d'entrée  $S(u, v)$  transcrite par la distribution  $p_S(\cdot)$  en niveaux de gris, nous considérons d'abord une image binaire d'intensités  $S(u, v) \in \{R_0, R_1\}$  avec  $R_0 < R_1$ .  $S(u, v)$  représente la transmittivité/réfectivité de la scène avec deux régions spatialement uniformes que sont l'objet et le fond caractérisés par les coefficients  $\{R_0, R_1\}$ . Cette catégorie d'images représente par exemple un modèle basique pour les images caractérisées uniquement par deux régions avec une densité de probabilité très étroite dans chaque région. On peut penser à un objet avec un niveau de gris quasiment uniforme centré autour de  $R_1 \geq 0$  sur un fond dont le niveau de gris est quasiment uniforme centré autour de  $R_0 \geq 0$ . Une telle scène serait plutôt bien approximée par sa version binaire contenant simplement les niveaux  $R_1$  et  $R_0$ . De plus, le choix simple d'une image d'entrée  $S(u, v)$  binaire permet d'aller plus loin dans le traitement analytique de notre modèle théorique. Pour illustration nous avons pris pour les Figs. 4.1 et 4.2 une image de taille  $273 \times 300$  pixels représentant la silhouette d'un avion sur un fond, image pour laquelle la probabilité des pixels blancs est  $\Pr\{S = R_1\} = p_1 = 0.28$  et celle des pixels noirs est  $\Pr\{S = R_0\} = 1 - p_1$ . Concernant le bruit de speckle  $N(u, v)$ , nous choisissons la densité de probabilité

$$p_N(j) = \frac{1}{\sigma_N} \exp\left(-\frac{j}{\sigma_N}\right) \quad \text{pour } j \geq 0. \quad (4.12)$$

La moyenne et l'écart-type du bruit de speckle  $N(u, v)$  valent tous les deux  $\sigma_N$  et l'amplitude efficace du bruit de speckle pour ce modèle est  $\sqrt{2}\sigma_N$ . Les Éqs. (4.5) et (4.12) constituent un modèle avec sa limite de validité fixée par les hypothèses simplificatrices faites pour ce modèle. Les Éqs. (4.5) et (4.12) établissent un modèle de bruit de speckle valide si la taille des pixels du capteur est plus petite que la taille du grain de speckle [113], permettant de débiter nos investigations dans le domaine de l'imagerie cohérente par une situation simple. De plus, ce modèle offre la possibilité d'obtenir une expression théorique explicite des mesures  $C_{SY}$  et  $I_{SY}$  à travers la description du capteur d'image de l'Éq. (4.6).

Nous introduisons la probabilité conditionnelle  $p_{1k} = \Pr\{Y = 1 | S = R_k\}$  valant  $\Pr\{N > \theta/R_k\} = 1 - F_N(\theta/R_k)$  avec  $k \in \{0, 1\}$ , où  $F_N(j) = \int_{-\infty}^j p_N(j') dj'$  est la fonction de répartition du bruit  $N(u, v)$ . Quand la densité de probabilité  $p_N(\cdot)$  est donnée par l'Éq. (4.12), on a

$$F_N(j) = 1 - \exp\left(-\frac{j}{\sigma_N}\right) \quad \text{pour } j \geq 0. \quad (4.13)$$

De la même façon, nous définissons  $\Pr\{Y = 1\} = q_1$  avec la probabilité  $q_1$  pouvant s'écrire  $q_1 = p_1 p_{11} + (1 - p_1) p_{10}$ . Au moyen des Éqs. (4.8) à (4.11), on peut quantifier la similarité

entre l'image de sortie  $Y(u, v)$  et une image binaire de référence  $S'(u, v)$  similaire à  $S(u, v)$  mais avec  $R_0 = 0$  (pour le fond) et  $R_1 = 1$  (pour l'objet). En théorie pour une image binaire  $S'(u, v)$  on a la moyenne  $\langle S' \rangle = 1 \times \Pr\{S' = 1\} + 0 \times \Pr\{S' = 0\}$ , et donc  $\langle S' \rangle$  est tout simplement  $p_1 = \Pr\{S' = 1\}$ . De même, on a  $\langle S'Y \rangle = 1 \times 1 \times \Pr\{Y = 1; S' = 1\} = p_1 p_{11}$ . Pour l'intercovariance normalisée de l'Éq. (4.8), le numérateur s'exprime par  $\langle S'Y \rangle - \langle S' \rangle \langle Y \rangle$ , et le dénominateur est le produit des écarts-types  $\sigma_{S'} \times \sigma_Y$  avec  $\text{var}[S'] = \langle S'^2 \rangle - \langle S' \rangle^2$  et  $\langle S'^2 \rangle = 1^2 \times \Pr\{S' = 1\} + 0^2 \times \Pr\{S' = 0\} = p_1$ . On a également  $\text{var}[Y] = \langle Y^2 \rangle - \langle Y \rangle^2$  avec  $\langle Y^2 \rangle = q_1$ . En réunissant tous ces résultats, nous obtenons

$$C_{S'Y} = \frac{p_1 p_{11} - p_1 q_1}{\sqrt{(p_1 - p_1^2)(q_1 - q_1^2)}} . \quad (4.14)$$

En ce qui concerne l'information mutuelle à travers les entropies des Éqs. (4.10) et (4.11), les intégrales deviennent des sommes (du fait que  $Y(u, v)$  prend des valeurs discrètes). Nous obtenons pour ces entropies, en utilisant la fonction  $h(u) = -u \log_2(u)$ , les expressions

$$H(Y) = h[p_1 p_{11} + (1 - p_1) p_{10}] + h[p_1(1 - p_{11}) + (1 - p_1)(1 - p_{10})] \quad (4.15)$$

et

$$H(Y|S') = (1 - p_1)[h(p_{10}) + h(1 - p_{10})] + p_1[h(p_{11}) + h(1 - p_{11})] , \quad (4.16)$$

ce qui permet l'accès à l'information mutuelle  $I_{S'Y}$  de l'Éq. (4.9). Comme on peut le voir sur la Fig. 4.1, les deux mesures de similarité  $C_{S'Y}$  et  $I_{S'Y}$  ont une évolution non monotone lorsque le niveau du bruit de speckle est augmenté, culminant à une valeur maximale pour un niveau de bruit optimal. Ces mesures de performance quantifient de manière différente la similarité entre les images  $S'(u, v)$  et  $Y(u, v)$ . Pour une valeur optimale du niveau de bruit permettant de maximiser la similarité entre les fluctuations contenues dans  $S'(u, v)$  et celles contenues dans  $Y(u, v)$  quantifiée par  $C_{S'Y}$ , on ne maximisera pas forcément la similarité d'un point de vue informationnel quantifiée par  $I_{S'Y}$ . Cependant, pour ces deux mesures la Fig. 4.1 illustre que le bruit de speckle peut améliorer la transmission d'une image par un système d'imagerie cohérente. Les prédictions théoriques des mesures  $C_{S'Y}$  et  $I_{S'Y}$  montrées sur la Fig. 4.1 sont très proches des évaluations numériques et reproduisent la caractéristique non monotone de l'effet de bruit utile. Cette amélioration par le bruit de speckle quantitativement présentée sur la Fig. 4.1 peut aussi être appréciée visuellement sur la Fig. 4.2. La Fig. 4.2 illustre l'image de sortie  $Y(u, v)$  pour un niveau de speckle à une valeur insuffisante, à sa valeur optimale et à une valeur trop élevée pour transmettre l'image d'entrée  $S(u, v)$  le mieux possible. On peut noter sur la Fig. 4.1 que l'effet de bruit utile est préservé pour toutes les valeurs du seuil  $\theta$  du comparateur. Il s'agit d'une propriété nouvelle par rapport au mécanisme classique agissant pour des bruits additifs sur des systèmes non linéaires avec seuil où le signal porteur d'information doit être positionné sous le seuil pour bénéficier du bruit.

En pratique, les scènes réelles sont en général plus complexes que des images binaires. Nous poursuivons donc avec le cas où les transmittivités/réfectivités du fond et de l'objet

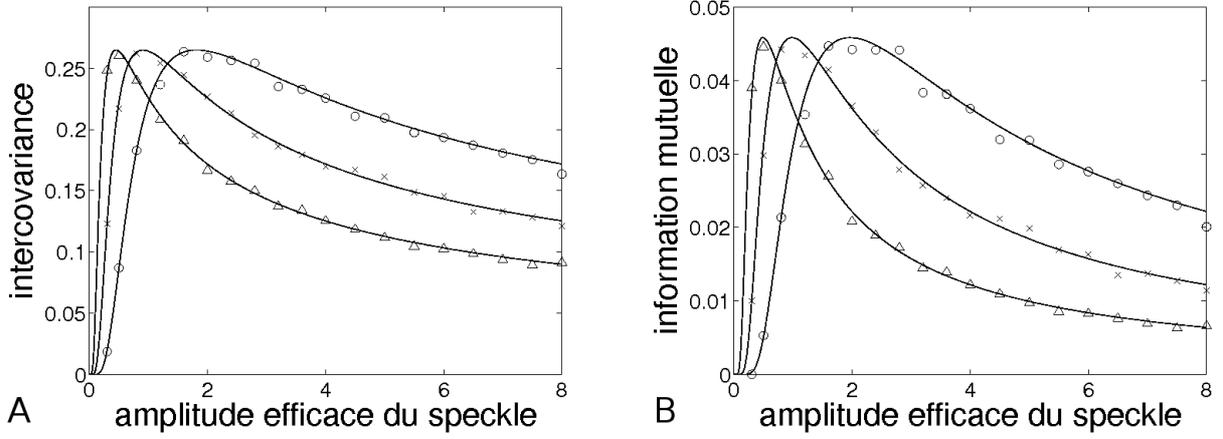


FIG. 4.1 – Mesures de similarité entrée–sortie en fonction de l’amplitude efficace  $\sqrt{2}\sigma_N$  du bruit de speckle  $N(u, v)$  de l’Éq. (4.12) pour (A) l’intercovariance normalisée  $C_{S'Y}$  de l’Éq. (4.8) et (B) l’information mutuelle  $I_{S'Y}$  de l’Éq. (4.9). Les prédictions théoriques sont représentées en trait plein et les évaluations numériques sur les pixels des images sont représentées en points, pour différentes valeurs du seuil  $\theta$  du comparateur avec  $\Delta, \times, \circ$  respectivement pour  $\theta = 0.4, 0.8, 1.6$ . Les niveaux de l’image  $S(u, v)$  sont  $\{R_0 = 1/2, R_1 = 1\}$ .

dans la scène  $S(u, v)$ , au lieu d’être représentées par deux niveaux de gris  $\{R_0, R_1\}$ , sont toutes deux distribuées sur un intervalle de niveaux possibles. Dans ce cas, la fonction de densité de probabilité du bruit dans ces régions ne correspondra plus à l’Éq. (4.12). Considérons  $\mathcal{R}$  la variable aléatoire représentant la distribution des niveaux dans chaque région de l’image  $S(u, v)$ , la densité de probabilité du speckle dans l’image intermédiaire  $X(u, v)$  est alors donnée par

$$p_X(j) = \int \frac{1}{r} p_N\left(\frac{j}{r}\right) p_{\mathcal{R}}(r) dr, \quad (4.17)$$

avec  $p_N(\cdot)$  la densité de probabilité de l’Éq. (4.12) [113]. Quand  $\mathcal{R}$  a une distribution uniforme autour des valeurs minimale et maximale ( $R_m, R_M$ ) c’est-à-dire respectivement sur  $[R_m - \Delta_R, R_m + \Delta_R]$  et  $[R_M - \Delta_R, R_M + \Delta_R]$ , il est possible d’obtenir une expression analytique exacte pour la densité de probabilité de l’image intermédiaire  $X(u, v)$ . Celle-ci s’exprime alors

$$p_X(j) = \frac{1}{\sigma_N \Delta_R} \int_{j/(\sigma_N R_M)}^{j/(\sigma_N R_m)} \frac{1}{r} \exp(-r) dr, \quad (4.18)$$

et en utilisant la fonction intégrale exponentielle  $E_1(j) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{j'} \exp(-jj') dj'$ , on a

$$p_X(j) = \frac{1}{\sigma_N \Delta_R} \left[ E_1\left(\frac{j}{\sigma_N R_M}\right) - E_1\left(\frac{j}{\sigma_N R_m}\right) \right]. \quad (4.19)$$

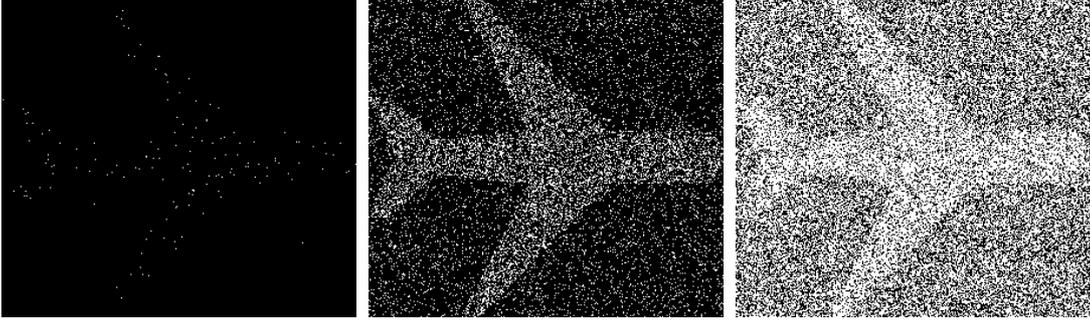


FIG. 4.2 – Image de sortie  $Y(u, v)$  du comparateur pour des amplitudes efficaces  $\sqrt{2}\sigma_N$  du bruit de speckle  $N(u, v)$  croissantes. De gauche à droite  $\sqrt{2}\sigma_N = 0.6, 1.8$  (valeur optimale), 6 avec le seuil  $\theta = 1.6$ . Les niveaux sont  $R_0 = 1/2$  et  $R_1 = 1$  comme sur la Fig. 4.1.

Une primitive  $\Phi(\cdot)$  de la fonction  $E_1(\cdot)$  peut s'exprimer par  $\Phi(j) = jE_1(j) - \exp(-j)$  [115] et la fonction de répartition  $F_X(\cdot)$  de l'image intermédiaire  $X(u, v)$  est alors

$$F_X(j) = \frac{1}{\Delta_R} \left\{ \frac{j}{\sigma_N} \left[ E_1 \left( \frac{j}{\sigma_N R_M} \right) - E_1 \left( \frac{j}{\sigma_N R_m} \right) \right] - R_M \left[ \exp \left( -\frac{j}{\sigma_N R_M} \right) - 1 \right] + R_m \left[ \exp \left( -\frac{j}{\sigma_N R_m} \right) - 1 \right] \right\}. \quad (4.20)$$

La Fig. 4.3 montre les évolutions de l'intercovariance  $C_{SY}$  et de l'information mutuelle  $I_{SY}$  (au sens de Shannon). Comme illustré sur la Fig. 4.3, l'évolution non monotone des mesures de similarité est préservée par rapport à la Fig. 4.1, lorsque la transmissivité/réfectivité du fond et de l'objet de la scène  $S(u, v)$  sont distribuées. Cette transmission d'image aidée par le bruit de speckle apparaît sur la Fig. 4.3, même quand les distributions se chevauchent.

Nous venons de montrer la possibilité d'une transmission aidée par le bruit de speckle. Nous cherchons dans la section suivante à approfondir l'examen des expressions analytiques et obtenir une expression du niveau optimal du bruit de speckle ainsi que la performance maximale qui en résulte.

### 4.3 Calcul théorique du niveau de bruit optimal

L'obtention d'une expression pour le niveau optimal du bruit de speckle est difficile avec les mesures  $C_{SY}$  et  $I_{SY}$  utilisées précédemment car l'équation obtenue en annulant la dérivée de ces mesures par rapport à la variable  $\sigma_N$  rend l'extraction de cette variable difficile. Une autre mesure cependant, plus simple mais usuelle dans le domaine du traitement des images, permet d'obtenir ces expressions. Il s'agit de l'écart quadratique moyen, défini par

$$Q_{SY} = \sqrt{\langle (S - Y)^2 \rangle} = \sqrt{\langle S^2 \rangle - 2\langle SY \rangle + \langle Y^2 \rangle}, \quad (4.21)$$

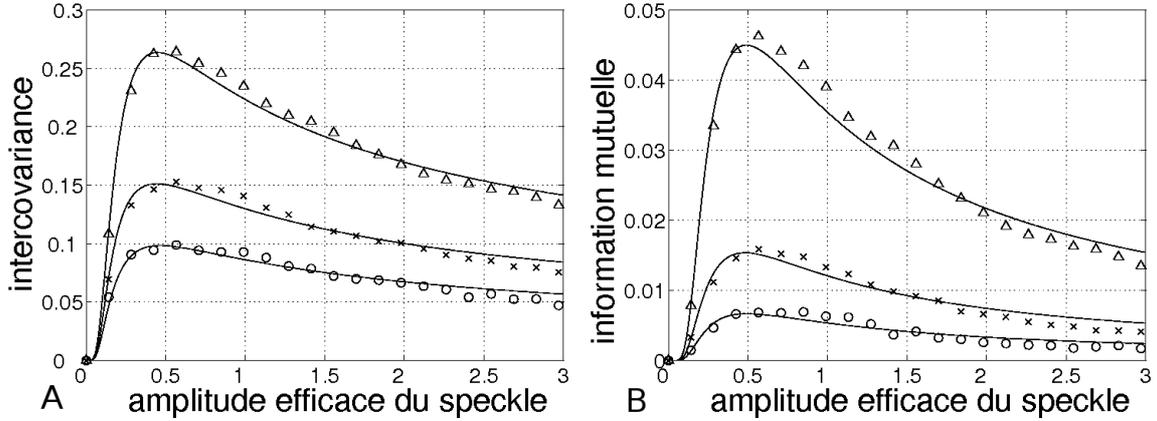


FIG. 4.3 – Mesures de similarité entrée–sortie en fonction de l’amplitude efficace  $\sqrt{2}\sigma_N$  du bruit de speckle  $N(u, v)$  pour (A) l’intercovariance normalisée  $C_{S'Y}$  de l’Éq. (4.8) et (B) l’information mutuelle  $I_{S'Y}$  de l’Éq. (4.9). Les prédictions théoriques sont représentées en trait plein et les points correspondent aux évaluations numériques pour différentes valeurs de la distribution en niveaux de gris avec  $\Delta, \times, \circ$  respectivement pour  $\Delta_R = 0, 0.2, 0.3$  étant identique dans les régions du fond et de l’objet. Nous prenons  $R_m = 1/2$  dans le fond et  $R_M = 1$  dans l’objet. Les distributions dans ces deux régions ne se chevauchent pas quand  $\Delta_R = 0.2$  et se chevauchent quand  $\Delta_R = 0.3$ . Le seuil du comparateur est fixé à  $\theta = 0.4$ .

où comme précédemment  $\langle \cdot \rangle$  représente une moyenne spatiale sur l’ensemble des pixels de l’image. Avec les mêmes définitions pour les probabilités que celles prises dans la section précédente, on obtient pour l’écart quadratique moyen de l’Éq. (4.21)

$$Q_{S'Y} = \sqrt{p_1 + q_1 - 2p_1p_{11}} , \quad (4.22)$$

avec pour rappel les probabilités conditionnelles  $p_{1k} = \Pr\{Y = 1 | S = R_k\}$  et  $q_1 = \Pr\{Y = 1\} = p_1p_{11} + (1 - p_1)p_{10}$ . La Fig. 4.4 illustre la possibilité d’un effet bénéfique du bruit de speckle dans la transmission de l’image cohérente. Cette possibilité se manifeste de nouveau par une évolution non monotone de l’écart quadratique moyen entrée–sortie de l’Éq. (4.22), qui passe par un minimum lorsque l’amplitude efficace du bruit croît. Ceci se produit avec toutes les valeurs du seuil  $\theta$ , comme nous l’avons noté pour l’intercovariance  $C_{S'Y}$  et l’information mutuelle  $I_{S'Y}$ . Ainsi, la Fig. 4.4 montre qu’il existe des conditions pour lesquelles l’écart quadratique moyen passe par un minimum pour un niveau de bruit optimal  $\sigma_{\text{opt}}$  non nul. Dans la plupart des études sur l’effet de bruit utile, il est difficile de pousser l’analyse théorique au-delà du calcul numérique de l’évolution de la performance en fonction du niveau de bruit, comme représenté sur la Fig. 4.4. Grâce aux choix opérés ici, nous montrons qu’il est possible d’aller plus loin, en déterminant de manière explicite les expressions théoriques exactes pour le niveau de bruit optimal  $\sigma_{\text{opt}}$  et pour le minimum de l’écart quadratique moyen qu’il permet d’atteindre. Les minima de l’écart quadratique

### 4.3. CALCUL THÉORIQUE DU NIVEAU DE BRUIT OPTIMAL

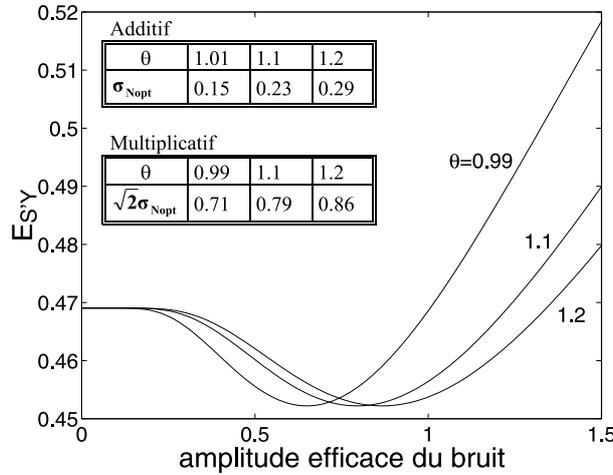


FIG. 4.4 – Écart quadratique moyen de l'Éq. (4.22) en fonction de l'amplitude efficace  $\sqrt{2}\sigma_N$  du bruit de speckle  $N(u, v)$ , pour différentes valeurs du seuil  $\theta$  du capteur d'image de l'Éq. (4.6). Les autres paramètres sont  $R_0 = 1/2$ ,  $R_1 = 1$  et  $p_1 = 0.22$ . Le tableau en encart donne les valeurs optimales du niveau de bruit de l'Éq. (4.24).

moyen de l'Éq. (4.22) vérifient  $\frac{\partial Q_{S'Y}}{\partial \sigma_N} = 0$ , ce qui revient à résoudre

$$(1 - p_1) \frac{\partial p_{10}}{\partial \sigma_N} - p_1 \frac{\partial p_{11}}{\partial \sigma_N} = 0. \quad (4.23)$$

La solution de cette équation s'écrit

$$\sigma_{\text{opt}} = \frac{R_1 - R_0}{R_0 R_1} \frac{\theta}{\ln(K_a)} \quad \text{avec} \quad K_a = \frac{R_1}{R_0} \frac{1 - p_1}{p_1}. \quad (4.24)$$

On observe qu'il existe, dans l'Éq. (4.24), des domaines où le niveau optimal  $\sigma_{\text{opt}}$  du bruit  $N(u, v)$  est positif et non nul quand  $\theta \neq 0$ ,  $p_1 \neq 1$ ,  $R_0 < R_1$  si  $K_a > 1$ . Comme on peut le constater sur le tableau en encart de la Fig. 4.4, les positions du niveau de bruit optimal  $\sigma_{\text{opt}}$  prédites par l'Éq. (4.24) montrent un accord exact avec les calculs numériques. L'expression de l'Éq. (4.24) permet d'appréhender complètement le phénomène de transmission d'image aidée par le bruit de speckle, en fonction des paramètres physiques du système imageur. L'Éq. (4.24) permet en particulier de connaître à l'avance si le speckle peut être bénéfique à la transmission. Dans les conditions où l'effet de bruit utile est possible, l'écart quadratique minimal  $Q_{\text{min}}$  quantifie la performance optimale du système atteinte pour un niveau de bruit optimal  $\sigma_{\text{opt}}$  du speckle. Il est également possible d'exprimer analytiquement de façon explicite  $Q_{\text{min}}$ , en injectant l'expression de  $\sigma_{\text{opt}}$  de l'Éq. (4.24) dans l'expression de l'Éq. (4.22). Nous obtenons

$$Q_{\text{min}} = \left[ p_1 + (1 - p_1) K_a \frac{R_1}{R_0 - R_1} - p_1 K_a \frac{R_0}{R_0 - R_1} \right]^{1/2} \quad (4.25)$$

avec  $K_a$  donné par l'Éq. (4.24). Cette expression permet de connaître à l'avance la performance optimale que l'on peut obtenir en utilisant avantageusement le bruit de speckle, en fonction des différents paramètres du système imageur considéré. On peut aussi noter que l'écart quadratique minimal de l'Éq. (4.25) est indépendant du seuil  $\theta$  du capteur d'image. Ainsi, il n'est pas nécessaire que le signal porteur d'information soit sous le seuil pour bénéficier du bruit multiplicatif de speckle. Cette propriété d'indépendance de l'effet par rapport au seuil, que nous avons remarqué sur les Figs. 4.1 et 4.4, s'exprime par l'absence de la variable  $\theta$  dans l'expression de l'écart quadratique minimal de l'Éq. (4.25). Une interprétation est fournie en considérant le couplage multiplicatif par rapport au seuil  $S(u, v) \times N(u, v) \geq \theta$ . Si  $\theta$  est multiplié par un quelconque facteur pour une image d'entrée  $S(u, v)$  donnée, alors la distribution du bruit  $N(u, v)$  doit être déplacée par le même facteur pour rester dans des conditions optimales de transmission. Le niveau  $\sigma_N$  du speckle est à la fois la moyenne et l'écart-type du speckle, comme l'indique la densité de probabilité exponentielle  $p_N(j) = \frac{1}{\sigma_N} \exp\left(-\frac{j}{\sigma_N}\right)$  pour  $j \geq 0$  de l'Éq. (4.12). Par conséquent, lorsque l'écart-type du speckle est augmenté, sa moyenne est augmentée de la même façon. De ce fait, la distribution de  $N(u, v)$  est déplacée en variant  $\sigma_N$  et la valeur optimale de la performance reste inchangée.

Nous venons de montrer théoriquement la possibilité d'une transmission aidée par le bruit de speckle en imagerie cohérente. Dans la section suivante nous montrons au moyen d'un dispositif expérimental que l'effet de bruit utile peut être observé en variant l'intensité de l'onde cohérente incidente.

## 4.4 Mise en œuvre expérimentale

Nous cherchons à réaliser un dispositif optique qui permette d'étudier l'influence du bruit de speckle sur le traitement d'image réalisé par le capteur à seuil de l'Éq. (4.6). Nous voulons également pouvoir comparer le comportement expérimental avec la théorie développée dans les sections 4.1 à 4.3. Dans la conception du dispositif optique, il faut donc pouvoir contrôler les différents éléments du dispositif en relation avec les différents paramètres du système imageur que nous avons considéré. Un premier élément du dispositif est le réglage du niveau  $\sigma_N$  du bruit de speckle, lié à l'intensité de l'onde cohérente transmise avec [113]

$$\sigma_N = I_i \times R_k \quad \text{avec } k \in \{0, 1\}, \quad (4.26)$$

où  $I_i$  est l'intensité de l'onde incidente et  $R_k$  le coefficient de réflexion/transmission de la surface diffusante. Le coefficient  $R_k$  dépend souvent de la longueur d'onde de l'onde incidente. Il est donc possible d'ajuster le niveau du bruit de speckle en réglant deux paramètres déterministes : la longueur d'onde et l'intensité de l'onde incidente. Dans le dispositif expérimental que nous avons réalisé et qui est présenté sur la Fig. 4.5, le niveau du bruit de speckle est contrôlé par l'intensité d'un faisceau laser. Pour régler l'intensité de l'onde cohérente incidente provenant de ce laser, et ainsi faire varier le

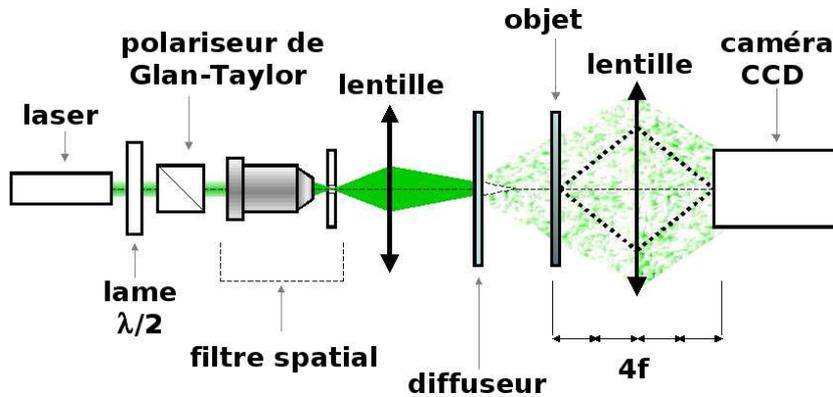


FIG. 4.5 – Dispositif expérimental produisant une version optique du système théorique décrit par les Éqs. (4.5), (4.7) et (4.12).

paramètre  $\sigma_N$ , nous utilisons une lame demi-onde en association avec un polariseur de Glan-Taylor. Aussi, dans le modèle de bruit de speckle de l'Éq. (4.12) un seul écart-type  $\sigma_N$  est supposé pour le speckle sur toute l'image  $N(u, v)$ . Par conséquent, une attention particulière doit être consacrée pour contrôler expérimentalement l'uniformité du faisceau laser. Dans notre cas, ceci est assuré par le filtre spatial conçu pour obtenir un faisceau laser épuré quasiment uniforme autour du centre couvrant le capteur CCD. Comme il est visible sur une image expérimentale de bruit de speckle acquise avec le dispositif de la Fig. 4.5 et montrée sur la Fig. 4.6, le speckle apparaît avec une taille de grain spécifique. Des conditions liées à ce paramètre sont requises sur le dispositif expérimental pour assurer la validité du modèle de bruit de speckle des Éqs. (4.5) et (4.12). La densité

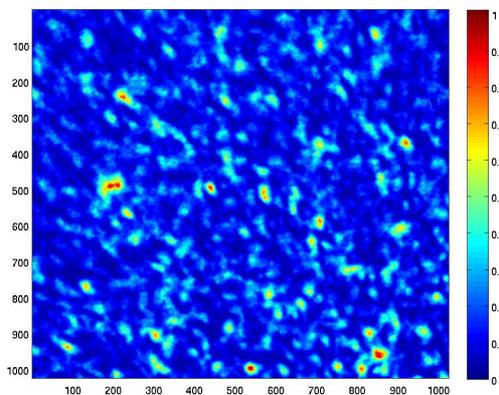


FIG. 4.6 – Image expérimentale de bruit de speckle obtenue avec le dispositif optique schématisé sur la Fig. 4.5.

de probabilité exponentielle de l'Éq. (4.12) décrit les fluctuations des niveaux de gris dans le speckle aux échelles inférieures à la taille du grain, et cette densité de probabilité ne subit pas les moyennages sur plusieurs grains voisins [112]. Ainsi, le modèle de bruit de speckle des Éqs. (4.5) et (4.12) décrit la situation où la taille des pixels du capteur est plus petite que la taille des grains de speckle [112]. Dans le même temps, le modèle basé sur la densité de probabilité de l'Éq. (4.12) est significatif dans un contexte statistique si l'image acquise  $Y(u, v)$  contient un grand nombre de grains de speckle. La taille des grains de speckle doit donc être contrôlée pour qu'ils soient bien plus grands que la taille du pixel et bien plus petits que le capteur CCD. Ceci est obtenu expérimentalement en ajustant la position de la première lentille avec une précision micrométrique. Une onde d'intensité spatialement uniforme traverse alors le diffuseur statique, un verre poli, pour créer un champ de speckle (front d'onde) qui illumine l'objet. Cet objet est un transparent portant le contraste de l'image d'entrée  $S(u, v)$ , de niveaux de transparence calibrés correspondant aux paramètres  $R_0$  et  $R_1$  de notre étude théorique. Enfin, la seconde lentille image le plan de l'objet sur la caméra comme l'indique la Fig. 4.5, pour produire l'image de sortie  $Y(u, v)$ . Le dispositif d'acquisition d'image est réduit au simple quantificateur 1 bit de l'Éq. (4.6).

Afin de mesurer la qualité de l'acquisition, nous reprenons l'écart quadratique moyen  $Q_{S'Y} = \sqrt{\langle (S' - Y)^2 \rangle}$  de l'Éq. (4.21) entre l'image de référence binaire  $S'(u, v)$  (pour l'objet sur le transparent de la Fig. 4.5) et l'image de sortie  $Y(u, v)$  (l'image sur la caméra CCD de la Fig. 4.5). Dans cette expérience l'image  $S(u, v)$  est une image en niveaux de gris de taille  $1024 \times 1024$  pixels. Le rôle constructif du bruit de speckle  $N(u, v)$  est illustré sur la Fig. 4.7 où les points de mesure expérimentaux de  $Q_{S'Y}$  reproduisent une évolution non monotone lorsque le niveau  $\sigma_N$  du speckle augmente. La Fig. 4.7 montre un bon accord entre les résultats théoriques et expérimentaux. On peut voir sur cette figure que les positions du niveau de bruit optimal  $\sigma_{\text{opt}}$  dont l'expression analytique est donnée par l'Éq. (4.24) correspondent exactement aux valeurs théoriques données par le tableau en encart. On peut également s'intéresser à l'évolution de l'écart quadratique moyen minimal en fonction du contraste en intensité de l'image d'entrée pris comme le rapport  $R_1/R_0$ . D'un point de vue théorique, selon l'Éq. (4.25) l'écart quadratique moyen minimal augmente de façon monotone quand le contraste  $R_1/R_0$  diminue. Pour de forts contrastes entre l'objet et le fond, c'est-à-dire une valeur élevée du rapport  $R_1/R_0$ , le bruit de speckle a un effet bénéfique plus important sur la transmission. Ce contraste apparaît dans les Éqs. (4.24) et (4.25) ce qui corrobore l'idée que ce rapport a un rôle important sur la transmission aidée par le bruit de speckle. D'un point de vue expérimental, la Fig. 4.7 confirme la diminution de l'écart minimal, c'est-à-dire l'augmentation de la meilleure performance possible, lorsque le contraste est augmenté.

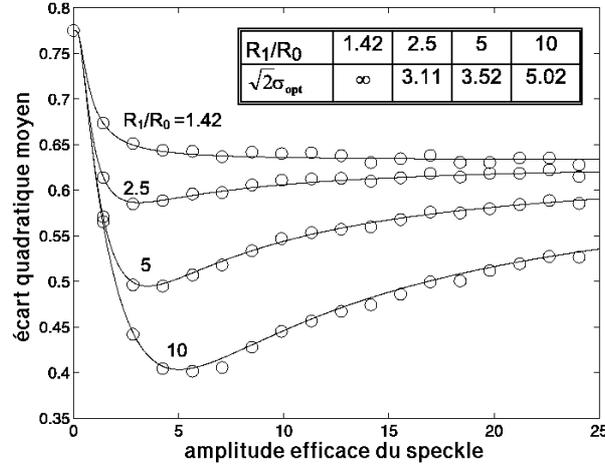


FIG. 4.7 – Écart quadratique moyen entrée–sortie  $Q_{S'Y}$  de l'Éq. (4.21) en fonction de l'amplitude efficace  $\sqrt{2}\sigma_N$  du bruit de speckle  $N(u, v)$ , pour différentes valeurs du contraste  $R_1/R_0$  de l'image d'entrée  $S(u, v)$ . Les autres paramètres sont  $\theta = 0.75$ ,  $p_1 = 0.6$  et  $R_1 = 1$ . Le trait plein correspond à l'expression analytique de l'Éq. (4.22). Les ensembles de points (cercles) sont obtenus en injectant dans l'Éq. (4.5) des images réelles de speckle acquises par le dispositif expérimental de la Fig. 4.5. La taille du grain de speckle a été ajustée pour être plus grande que la taille du pixel (le domaine de validité du modèle choisi) et pour être plus petite que la taille du capteur CCD (pour diminuer les fluctuations d'une acquisition à l'autre). Le tableau en encart donne les amplitudes efficaces optimales du bruit de speckle données par l'Éq. (4.24).

## 4.5 Discussion sur le modèle utilisé

Nous avons montré la possibilité d'une transmission aidée par le bruit de speckle. La démonstration est enrichie par une analyse théorique avancée qui fournit pour la première fois une expression analytique exacte du niveau de bruit optimal pour favoriser la transmission de l'image. La possibilité d'obtenir cette expression est à souligner car c'est un fait rare dans le cadre des analyses de l'effet de bruit utile dans les systèmes non linéaires où l'on est souvent contraint d'avoir recours, au moins partiellement, aux simulations numériques. Nous avons également réalisé une analyse expérimentale, montrant la possibilité d'une action constructive du bruit de speckle dans la transmission d'une image par un système d'imagerie cohérente. Ainsi, les prédictions analytiques affichent un bon accord avec les résultats expérimentaux. L'étude théorique est réalisée dans le cas d'une image d'entrée binaire ainsi que dans le cas d'une distribution simple des niveaux de gris. L'effet de bruit utile en imagerie cohérente peut donc s'étendre à des modèles plus complexes pour le système imageur, ce qui illustre le caractère général de cet effet. À l'aide de l'analyse de la section 4.2 pour des images avec niveaux de gris distribués, on pourrait considérer une comparaison entre ces résultats théoriques et les résultats obtenus avec le même dispositif optique.

Nous avons choisi de commencer les investigations dans le domaine de l'imagerie cohérente par un simple détecteur à seuil, comme nous l'avions fait dans la première partie sur les réseaux de capteurs. À la différence du couplage additif présent dans ces réseaux de capteurs à seuil, le couplage multiplicatif entre l'image à transmettre et le speckle apporte l'avantage de rendre l'effet de bruit utile indépendant du seuil. Cependant ce modèle simple de capteur peut être remplacé par un quantificateur à plusieurs bits ou un capteur linéaire avec saturation, qui respectent mieux les attributs des caméras numériques. Dans le chapitre suivant, nous allons analyser comment utiliser le phénomène d'amélioration par le bruit de speckle, en présence de saturation du capteur d'image, afin d'optimiser l'efficacité du système d'imagerie cohérente pendant l'acquisition.

---

# Chapitre 5

## Transmission par un capteur avec saturation

En mesure et instrumentation, les dispositifs d'acquisition sont généralement linéaires pour les faibles amplitudes d'entrée et saturent aux fortes amplitudes. La partie linéaire de leur caractéristique entrée–sortie pose souvent une limite à la dynamique du signal pour laquelle le signal est acquis fidèlement. Dans ce chapitre nous allons voir qu'il est possible d'utiliser la partie saturante à l'aide du bruit de speckle, afin d'obtenir une acquisition plus efficace. Nous allons montrer, comme nous l'exposons dans [106], comment ajuster de façon optimale le niveau de bruit de speckle pour obtenir un bénéfice maximal en présence d'une saturation du dispositif d'acquisition.

### 5.1 Système d'acquisition dont un capteur avec saturation

Nous considérons à nouveau le système d'imagerie cohérente présenté dans le chapitre précédent mais ici l'image intermédiaire bruitée  $X(u, v)$  est observée au moyen d'un autre dispositif d'acquisition, décrit par la caractéristique entrée–sortie  $g(\cdot)$ , délivrant l'image de sortie selon  $Y(u, v) = g[X(u, v)]$  de l'Éq. (4.7). Dans la suite, nous considérons pour le dispositif d'acquisition la caractéristique

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x < \theta \\ \theta & \text{si } x \geq \theta . \end{cases} \quad (5.1)$$

La caractéristique  $g(\cdot)$  de l'Éq. (5.1) est un modèle standard pour beaucoup de capteurs ou de dispositifs d'acquisition d'image, plus réaliste que la caractéristique à seuil de l'Éq. (4.6) et plus similaire aux capteurs d'image que l'on rencontre en pratique comme par exemple les caméras CCD supposant à la fois une partie linéaire et une saturation. La caractéristique  $g(\cdot)$  de l'Éq. (5.1) est purement linéaire pour des niveaux d'entrée de

faible amplitude au-dessus de zéro et sature pour des niveaux d'entrée de forte amplitude au-dessus de  $\theta > 0$ . Par exemple,  $g(\cdot)$  de l'Éq. (5.1) offre un modèle pour une caméra CCD qui représente l'entrée sur 256 niveaux entre 0 et 255, et qui sature au-dessus de 255.

Étant donné les Éqs. (4.5) et (4.7) où l'on considère une action multiplicative du bruit de speckle  $N(u, v)$ , le niveau de bruit de speckle joue un rôle clé dans la position de la dynamique de l'image intermédiaire  $X(u, v)$  appliquée au dispositif d'acquisition par rapport à l'intervalle linéaire  $[0, \theta]$  de  $g(\cdot)$ . Pour un capteur donné avec un niveau de saturation  $\theta$  fixé, un niveau trop grand de  $N(u, v)$  peut saturer fortement l'acquisition, tandis qu'un niveau trop faible de  $N(u, v)$  peut provoquer une exploitation médiocre de la dynamique complète  $[0, \theta]$  du capteur. Afin de mesurer la similarité entre l'image d'entrée  $S(u, v)$  porteuse d'information et l'image de sortie  $Y(u, v)$ , nous reprenons l'intercovariance normalisée  $C_{SY}$  entre les images  $S(u, v)$  et  $Y(u, v)$  définie par

$$C_{SY} = \frac{\langle (S - \langle S \rangle)(Y - \langle Y \rangle) \rangle}{\sqrt{\langle (S - \langle S \rangle)^2 \rangle \langle (Y - \langle Y \rangle)^2 \rangle}}$$

de l'Éq. (4.8) et l'écart quadratique moyen entrée–sortie

$$Q_{SY} = \sqrt{\langle (S - Y)^2 \rangle} = \sqrt{\langle S^2 \rangle - 2\langle SY \rangle + \langle Y^2 \rangle}$$

de l'Éq. (4.21). Nous utiliserons les mesures  $C_{SY}$  et  $Q_{SY}$  explicitées dans la section suivante, pour caractériser quantitativement l'existence d'un niveau optimal de bruit de speckle, dans des conditions d'acquisition d'image. Nous allons voir comment exploiter de manière avantageuse la saturation contenue dans le fonctionnement du capteur à l'aide du bruit de speckle. En tirant parti de la saturation de cette façon, l'acquisition atteint une performance maximale qui ne peut pas être atteinte lorsque le capteur opère seul dans la partie linéaire de sa réponse.

## 5.2 Évaluation des mesures de similarité entrée–sortie

Avec le capteur  $g(\cdot)$  de l'Éq. (5.1), nous voulons maintenant obtenir des expressions explicites pour les mesures de similarité entrée–sortie  $C_{SY}$  et  $Q_{SY}$  des Éqs. (4.8) et (4.21). Pour le calcul de l'espérance de sortie  $E[Y]$ , on peut noter que  $Y$  prend ses valeurs dans  $[0, \theta]$  du fait des Éqs. (4.7) et (5.1). Nous introduisons les probabilités conditionnelles  $\Pr\{Y \in [y, y + dy] | S = s\}$ . Pour  $0 < y < \theta$ , on a

$$\Pr\{Y \in [y, y + dy] | S = s\} = \Pr\{N \in [y/s, y/s + dy/s]\} = p_N(y/s)dy/s, \quad (5.2)$$

et pour  $y = \theta$  on a

$$\Pr\{Y = \theta | S = s\} = \Pr\{sN \geq \theta\} = \Pr\{N \geq \theta/s\} = 1 - F_N(\theta/s), \quad (5.3)$$

avec la fonction de répartition  $F_N(j) = \int_{-\infty}^j p_N(r)dr$  du bruit de speckle. Cela suffit pour déduire l'espérance  $E[Y]$  qui s'écrit

$$E[Y] = \int_s \int_{y=0}^{\theta} y p_N(y/s) \frac{dy}{s} p_S(s) ds + \int_s \theta [1 - F_N(\theta/s)] p_S(s) ds . \quad (5.4)$$

Nous introduisons aussi la fonction  $G_N(j) = \int_0^j r p_N(r)dr$ , et donc l'Éq. (5.4) devient

$$E[Y] = \theta + \int_s [sG_N(\theta/s) - \theta F_N(\theta/s)] p_S(s) ds . \quad (5.5)$$

De façon similaire, l'espérance  $E[SY]$  est

$$E[SY] = \int_s \int_{y=0}^{\theta} sy p_N(y/s) \frac{dy}{s} p_S(s) ds + \int_s s\theta [1 - F_N(\theta/s)] p_S(s) ds , \quad (5.6)$$

ce qui est équivalent (sachant que  $S(u, v)$  est déterministe) à

$$E[SY] = \theta \langle S \rangle + \int_s [s^2 G_N(\theta/s) - \theta s F_N(\theta/s)] p_S(s) ds . \quad (5.7)$$

L'évaluation des Éqs. (4.8) et (4.21) requiert également l'espérance  $E[Y^2]$  s'exprimant

$$E[Y^2] = \int_s \int_{y=0}^{\theta} y^2 p_N(y/s) \frac{dy}{s} p_S(s) ds + \int_s \theta^2 [1 - F_N(\theta/s)] p_S(s) ds . \quad (5.8)$$

De plus, avec la fonction  $H_N(j) = \int_0^j r^2 p_N(r)dr$ , on peut écrire que l'Éq. (5.8) devient

$$E[Y^2] = \theta^2 + \int_s [s^2 H_N(\theta/s) - \theta^2 F_N(\theta/s)] p_S(s) ds . \quad (5.9)$$

Avec  $E[S] = \int_s s p_S(s) ds$  et  $E[S^2] = \int_s s^2 p_S(s) ds$ , les Éqs. (5.5), (5.7) et (5.9) permettent d'évaluer les mesures de similarité entrée-sortie  $C_{SY}$  et  $Q_{SY}$  des Éqs. (4.8) et (4.21), dans des conditions données en entrée spécifiées par les densités de probabilité  $p_S(\cdot)$  et  $p_N(\cdot)$ . Dans ce but d'évaluation, nous choisissons comme précédemment le modèle exponentiel de bruit de speckle pour  $N(u, v)$  et une image binaire pour l'image d'entrée  $S(u, v)$ . La section suivante décrit les évolutions des mesures de similarité  $C_{SY}$  et  $Q_{SY}$  qui résultent de ces choix.

### 5.3 Optimisation avec un bruit de speckle exponentiel

La densité de probabilité exponentielle  $p_N(j) = \frac{1}{\sigma_N} \exp\left(-\frac{j}{\sigma_N}\right)$  pour  $j \geq 0$  de l'Éq. (4.12) est une densité utile pour modéliser le bruit de speckle  $N(u, v)$  [112], qui est nulle pour

des valeurs négatives  $j < 0$  des niveaux de gris. On peut déduire de l'Éq. (4.12) la fonction de répartition du bruit de speckle  $F_N(j) = 1 - \exp\left(-\frac{j}{\sigma_N}\right)$  pour  $j \geq 0$  de l'Éq. (4.13) ainsi que

$$G_N(j) = \int_0^j r p_N(r) dr = \sigma_N \left[ 1 - \left( \frac{j}{\sigma_N} + 1 \right) \exp\left(-\frac{j}{\sigma_N}\right) \right] \quad \text{pour } j \geq 0 \quad (5.10)$$

et

$$H_N(j) = \int_0^j r^2 p_N(r) dr = \sigma_N^2 \left\{ 2 - \left[ \left( \frac{j}{\sigma_N} \right)^2 + 2 \frac{j}{\sigma_N} + 2 \right] \exp\left(-\frac{j}{\sigma_N}\right) \right\} \quad \text{pour } j \geq 0. \quad (5.11)$$

Il en résulte pour l'Éq. (5.5) l'expression

$$E[Y] = \sigma_N E[S] - \sigma_N \int_s \exp\left(-\frac{\theta}{s\sigma_N}\right) p_S(s) ds, \quad (5.12)$$

pour l'Éq. (5.7) l'expression

$$E[SY] = \sigma_N E[S^2] - \sigma_N \int_s s^2 \exp\left(-\frac{\theta}{s\sigma_N}\right) p_S(s) ds, \quad (5.13)$$

et pour l'Éq. (5.9) l'expression

$$E[Y^2] = 2\sigma_N^2 E[S^2] - 2\sigma_N \int_s (\sigma_N s^2 + \theta s) \exp\left(-\frac{\theta}{s\sigma_N}\right) p_S(s) ds. \quad (5.14)$$

Avec le bruit de speckle exponentiel  $N(u, v)$  et la caractéristique avec saturation de l'Éq. (5.1), nous examinons maintenant l'acquisition d'une image d'entrée  $S(u, v)$  binaire, pour les mêmes raisons que celles évoquées dans la section 4.2. Avec des fonctions de Dirac, la densité de probabilité associée à l'image binaire est

$$p_S(s) = p_1 \delta(s - R_1) + (1 - p_1) \delta(s - R_0), \quad (5.15)$$

où pour rappel  $p_1$  est la proportion des pixels à  $R_1$  dans l'image  $S(u, v)$ . Il en résulte que  $E[S] = p_1 R_1 + (1 - p_1) R_0$  et  $E[S^2] = p_1 R_1^2 + (1 - p_1) R_0^2$ . On obtient alors pour l'Éq. (5.12)

$$E[Y] = \sigma_N E[S] - \sigma_N \left[ p_1 R_1 \exp\left(-\frac{\theta}{R_1 \sigma_N}\right) + (1 - p_1) R_0 \exp\left(-\frac{\theta}{R_0 \sigma_N}\right) \right], \quad (5.16)$$

pour l'Éq. (5.13)

$$E[SY] = \sigma_N E[S^2] - \sigma_N \left[ p_1 R_1^2 \exp\left(-\frac{\theta}{R_1 \sigma_N}\right) + (1 - p_1) R_0^2 \exp\left(-\frac{\theta}{R_0 \sigma_N}\right) \right], \quad (5.17)$$

et pour l'Éq. (5.14)

$$E[Y^2] = 2\sigma_N^2 E[S^2] - 2\sigma_N \left[ p_1 (\sigma_N R_1^2 + \theta R_1) \exp\left(-\frac{\theta}{R_1 \sigma_N}\right) + (1 - p_1) (\sigma_N R_0^2 + \theta R_0) \exp\left(-\frac{\theta}{R_0 \sigma_N}\right) \right]. \quad (5.18)$$

### 5.3. OPTIMISATION AVEC UN BRUIT DE SPECKLE EXPONENTIEL

Les Éqs. (5.16), (5.17) et (5.18) rendent possible une évaluation explicite des mesures de similarité entrée–sortie  $C_{SY}$  et  $Q_{SY}$  des Éqs. (4.8) et (4.21). La Fig. 5.1 montre pour illustration des conditions où l'on peut enregistrer une évolution non monotone des mesures de performance  $C_{SY}$  et  $Q_{SY}$  qui se trouvent améliorées quand le niveau du bruit de speckle est augmenté. Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, le niveau  $\sigma_N$  du

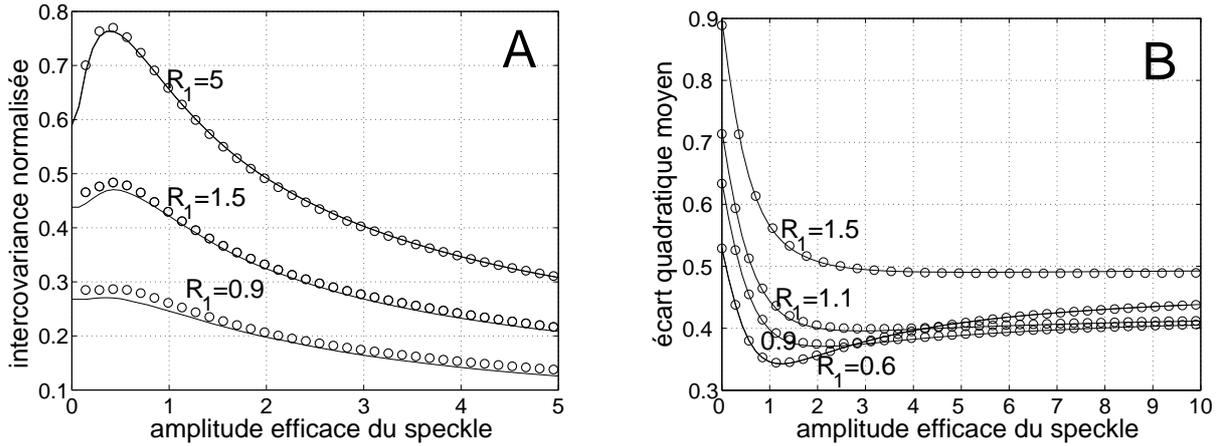


FIG. 5.1 – Mesures de similarité entrée–sortie en fonction de l’amplitude efficace  $\sqrt{2}\sigma_N$  du bruit de speckle exponentiel pour (A) l’intercovariance normalisée  $C_{SY}$  et (B) l’écart quadratique moyen  $Q_{SY}$ , pour différentes valeurs de  $R_1$ . Les autres paramètres sont  $\theta = 1$ ,  $p_1 = 0.27$  et  $R_0 = 0.5$ . Les traits pleins correspondent aux expressions théoriques des Éqs. (4.8) et (4.21). Les ensembles de points (cercles) sont obtenus en injectant dans le couplage de l’Éq. (4.5) des images réelles de speckle acquises par le dispositif expérimental de la section 4.4.

bruit de speckle peut être contrôlé expérimentalement en variant l’intensité de la source cohérente du dispositif décrit dans la section 4.4 de ce manuscrit. Ceci permet une confrontation des évolutions théoriques et expérimentales des mesures de performance  $C_{SY}$  et  $Q_{SY}$ , présentée sur la Fig. 5.1. Les résultats de la Fig. 5.1, avec un bon accord entre les valeurs expérimentales et le calcul théorique des mesures de performance dans les conditions indiquées, illustrent comment une image peut être acquise avec une efficacité maximale quand une quantité suffisante de bruit de speckle est présente dans le système imageur avec saturation considéré ici. La Fig. 5.1 démontre que les mesures  $C_{SY}$  et  $Q_{SY}$  sont maximisées lorsque le niveau  $\sigma_N$  du bruit de speckle est réglé à une valeur non nulle optimale qui peut être obtenue par simulation avec la théorie présentée dans ce chapitre. Il s’agit d’un nouveau mécanisme d’effet de bruit utile, dû ici à la partie saturante de la réponse du capteur d’image. On peut noter, du fait que les mesures quantifient de façon différente la similarité entre les images d’entrée et de sortie, que l’intercovariance  $C_{SY}$  est améliorée lorsque  $R_1$  augmente alors que l’écart quadratique moyen  $Q_{SY}$  est augmenté. Une représentation de l’image d’entrée  $S(u, v)$  binaire utilisée pour réaliser l’expérience est montrée sur la Fig. 5.2A avec l’objet représentant un avion entouré par un fond de

couleur foncée. La Fig. 5.2 fournit une appréciation visuelle de l'écrêtage réalisé par la

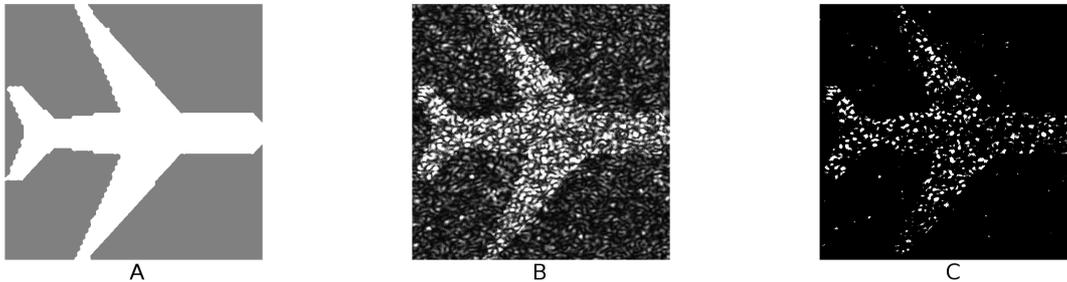


FIG. 5.2 – (A) Image d'entrée  $S(u, v)$  de taille  $1024 \times 1024$  pixels, utilisée pour les points de mesure expérimentaux présentés sur la Fig. 5.1 où l'objet occupe  $p_1 = 27\%$  de la surface de l'image et pour les paramètres  $R_0 = 0.5$ ,  $R_1 = 1.5$ . (B) Image intermédiaire  $X(u, v)$  correspondante obtenue avec un bruit de speckle d'amplitude efficace  $\sqrt{2}\sigma_N = 0.42$ . (C) Image binaire représentant uniquement les pixels saturés sur l'image acquise  $Y(u, v)$ , résultante d'une acquisition avec un niveau de saturation  $\theta = 1$ .

partie saturante du capteur d'image pour donner l'image observée  $Y(u, v)$ .

Comme montré sur la Fig. 5.3, pour un niveau optimal du bruit de speckle, la saturation affecte presque uniquement les pixels à 1 des deux régions (objet et fond) de l'image. Sur la Fig. 5.3, puisque  $R_1 > R_0$ , les pixels saturés dans l'image acquise  $Y(u, v)$  appartiennent quasiment tous à la région de l'objet. Par conséquent, dans les conditions optimales de speckle de la Fig. 5.3, la région de l'objet est d'une certaine façon débruitée par la saturation du dispositif d'acquisition. Pour un niveau de bruit de speckle trop bas, l'image acquise n'est pas du tout saturée et ne peut pas bénéficier de ce débruitage par la saturation. Pour un niveau de bruit de speckle trop élevé, la saturation affecte progressivement les deux régions de l'image acquise qui perd alors son contraste et donc sa similarité avec l'image d'entrée  $S(u, v)$  binaire. Ceci fournit une interprétation qualitative des évolutions non monotones des mesures de performance, quantifiées sur la Fig. 5.1, quand le niveau du bruit de speckle est augmenté.

## 5.4 Discussion sur l'acquisition en présence de saturation

Nous venons de montrer comment optimiser le système d'imagerie cohérente pour une efficacité maximale de l'acquisition en réglant le niveau du bruit de speckle. De façon générale, le point de départ est un signal porteur d'information à un niveau donné de bruit qui amène le capteur à opérer essentiellement dans la partie linéaire de sa caractéristique entrée-sortie. À partir de ce point, une augmentation suffisante du niveau de bruit amène le capteur à opérer dans la partie saturante de sa réponse. Comme nous l'avons expliqué

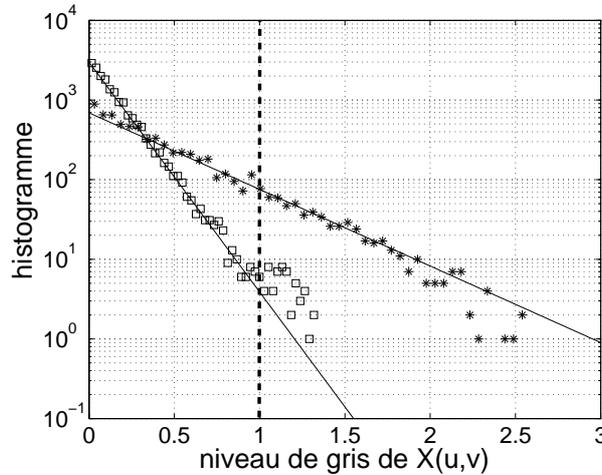


FIG. 5.3 – Histogramme des régions du fond (carrés) et de l'objet (astérisques) dans l'image intermédiaire  $X(u, v)$  du couplage de l'Éq. (4.5) en échelle logarithmique. L'image d'entrée  $S(u, v)$  est celle de la Fig. 5.2A. Les traits pleins correspondent aux histogrammes théoriques calculés à partir du modèle exponentiel de l'Éq. (4.12). Les pointillés verticaux correspondent au niveau de saturation  $\theta = 1$  du dispositif d'acquisition d'image. Le bruit de speckle est obtenu avec le dispositif expérimental de la Fig. 4.5, d'amplitude efficace  $\sqrt{2}\sigma_N = 0.42$  correspondant à sa valeur optimale pour l'intercovariance normalisée  $C_{SY}$ .

ci-dessus, la saturation met en œuvre un mécanisme d'écrêtage capable de réduire le bruit. Avec un contrôle adéquat, ce mécanisme peut mener à la sortie du dispositif avec écrêtage à une situation plus favorable au signal porteur d'information que la situation initiale sans écrêtage. Ceci démontre donc qu'en imagerie cohérente, la saturation d'un dispositif d'acquisition peut être exploitée pour que la transmission soit plus efficace que celle d'un capteur purement linéaire. La faisabilité d'un tel effet a été montrée dans [68] pour des signaux temporels 1D de distribution continue avec bruit additif et nous le montrons ici pour des signaux 2D (images) binaires avec un bruit multiplicatif de speckle.

L'acquisition, habituellement vue comme une première étape dans une chaîne de traitement de l'information, est conventionnellement conçue pour produire une représentation fidèle d'un signal physique avec la plus grande fidélité linéaire. Ici, nous avons montré comment la partie non linéaire saturante d'un dispositif d'acquisition peut également être utilisée comme un prétraitement capable de propriétés de débruitage, généralement réalisé à des niveaux plus hauts de la chaîne de traitement de l'information. Des situations semblables, où l'effet d'écrêtage d'un dispositif avec saturation peut être bénéfique pour le traitement d'un signal porteur d'information, peuvent également être rencontrées dans d'autres contextes [116]. Des effets non linéaires différents, se comportant d'une manière similaire à l'effet d'écrêtage considéré ici, ont aussi été rapportés dans d'autres secteurs de l'imagerie cohérente [117, 118, 119]. Dans ces études, l'image est quantifiée sur 1 bit, l'écrêtage qui est utilisé est donc plus fort que celui que nous considérons ici venant de

la réponse linéaire du capteur vers la saturation. D'autre part, les traitements considérés dans [117, 118, 119] sont des post-traitements à l'acquisition, à la différence de la tâche d'acquisition au niveau du capteur que nous avons examinée dans ce chapitre.

Nous avons illustré l'effet de bruit utile coopérant avec la saturation avec une densité de probabilité exponentielle pour le modèle de bruit de speckle et avec des images binaires. En se basant sur les résultats de [68], on peut s'attendre à ce que la possibilité d'exploitation bénéfique du bruit de speckle en présence de saturation se reproduira pour des images en niveaux de gris distribués. L'effet de bruit utile n'est pas dépendant, de manière critique, de la nature discrète et binaire du signal porteur d'information. La densité de probabilité exponentielle de l'Éq. (4.12) est une possibilité pour modéliser le bruit de speckle. Nous allons analyser dans le chapitre suivant l'effet de bruit utile, rencontré dans les chapitres 4 et 5 en présence de seuil et de saturation, dans des contextes applicatifs de l'imagerie cohérente où la distribution du speckle est changée (de façon dépendante de l'application).

---

## Chapitre 6

# Applications en présence de speckle

Dans certains domaines de l'imagerie cohérente, le speckle n'est pas perçu comme une nuisance et peut même être mis à profit pour mesurer des paramètres porteurs d'information. On mesure par exemple des micro-déplacements en interférométrie de speckle [97]. Dans d'autres applications de l'imagerie cohérente, le speckle est au contraire subi [120, 121, 122] comme une source de bruit réduisant la quantité d'information qu'il est possible d'extraire des images, et on peut alors chercher à le supprimer. De nombreuses techniques existent pour réduire autant que faire se peut la présence de speckle en illumination cohérente [97]. Dans la section suivante nous allons considérer une de ces méthodes, modifiant la densité de probabilité du speckle par rapport à celle considérée précédemment, qui utilise un diffuseur en mouvement et un moyennage temporel afin de réduire le bruit de speckle. Nous allons étudier pour cette technique comment le bruit de speckle peut conduire à un mécanisme d'effet de bruit utile. Une partie de ces travaux fait l'objet de l'étude [107]. Par ailleurs, les récents progrès dans les domaines des capteurs, des composants de transmission et traitement de l'information ont permis l'émergence de nouveaux types d'imagerie comme l'imagerie de polarimétrie, l'imagerie holographique, l'imagerie multi-spectrale et hyper-spectrale. Ces imageries non conventionnelles fournissent souvent des images bruitées par du speckle. Dans la seconde section de ce chapitre nous considérons également l'une d'entre elles, l'imagerie polarimétrique, et nous établissons un lien avec l'effet de bruit utile décrit dans les chapitres précédents. Ces résultats sont présentés sous une autre forme dans [123].

### 6.1 Application à la réduction de bruit de speckle

Une technique de réduction du bruit de speckle est illustrée par le schéma de la Fig. 6.1 reprenant le dispositif optique de la Fig. 4.5, qui utilise un diffuseur en mouvement. Si deux acquisitions sont réalisées avant et après le mouvement, et que la distance parcourue par un grain de speckle (dont la taille est contrôlée par la distance focale de la première lentille) sur le diffuseur est supérieure à la taille du capteur, alors on obtient deux images

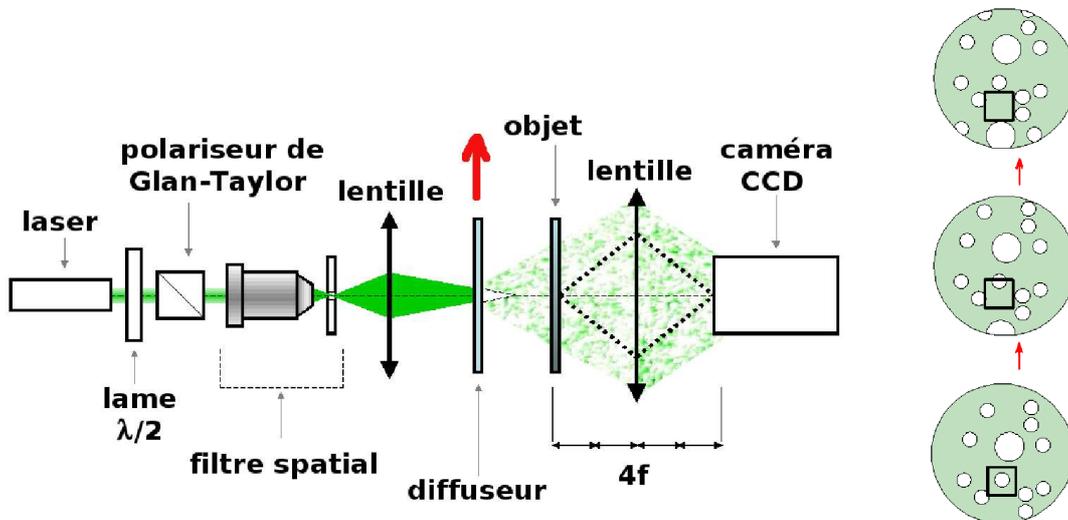


FIG. 6.1 – Mouvement du diffuseur (flèche rouge montante) au niveau du dispositif d’acquisition (à gauche) et au niveau du capteur de la caméra CCD (à droite). Le grand cercle (dans trois positions durant le mouvement) représente le champ de speckle dont les grains sont schématisés par les petits cercles. Le carré correspond au capteur CCD, qui lui est fixe.

qui ne correspondent pas à la même région du diffuseur. Dans ce cas les deux images de speckle sont indépendantes, pour la même position de l’objet. Un moyennage de ces deux images conduit à une réduction du bruit de speckle résiduel contenu dans l’image résultante. L’image résultante est ensuite utilisée pour des traitements postérieurs à l’acquisition que nous ne traitons pas ici. Nous considérons donc le moyennage de  $L$  images initiales, chacune comportant un bruit de speckle modélisé par la densité de probabilité exponentielle  $p_N(j) = \frac{1}{\sigma_N} \exp\left(-\frac{j}{\sigma_N}\right)$  pour  $j \geq 0$  de l’Éq. (4.12) et d’écart-type  $\sigma_N$ . Nous allons d’abord vérifier que le speckle résiduel contenu dans l’image résultante de ce moyennage est réduit lorsqu’on augmente le nombre  $L$  d’images initiales. Dans cette situation, le bruit de speckle contenu dans l’image intermédiaire  $X(u, v)$  revient à un moyennage temporel de  $L$  réalisations indépendantes de speckle. Par conséquent, la densité de probabilité du speckle  $N(u, v)$  résulte de  $L$  convolutions successives de la densité de probabilité exponentielle de l’Éq. (4.12), qui est la distribution Gamma [97]

$$p_N^L(j) = \left(\frac{L}{\sigma_N}\right)^L \frac{j^{L-1}}{\Gamma(L)} \exp\left(-\frac{Lj}{\sigma_N}\right) \quad \text{pour } j \geq 0. \quad (6.1)$$

Dans l’Éq. (6.1) le paramètre  $L$ , appelé ordre du speckle, est un entier et la fonction Gamma peut alors s’écrire  $\Gamma(L) = (L-1)!$ . Dans le modèle de l’Éq. (6.1), le niveau de bruit  $\sigma_N$  contrôle à la fois la moyenne  $E[N(u, v)] = \sigma_N$  et l’écart-type  $\sigma_N/\sqrt{L}$  du speckle  $N(u, v)$ . De ce fait, une augmentation de  $L$  réduit l’écart-type du bruit de speckle résiduel

## 6.1. APPLICATION À LA RÉDUCTION DE BRUIT DE SPECKLE

contenu dans l'image intermédiaire  $X(u, v)$ . Ceci explique que la réduction de bruit est d'autant plus efficace que le nombre  $L$  d'images initiales utilisées pour le moyennage est grand. Nous avons pris soin de vérifier le modèle de l'Éq. (6.1) au moyen du dispositif optique illustré sur la Fig. 4.5. En segmentant l'image expérimentale de la Fig. 6.2A similaire à celle de la Fig. 4.6, on obtient des réalisations indépendantes de speckle que l'on peut alors moyenner. Les Figs. 6.2B à 6.2H présentent les histogrammes obtenus

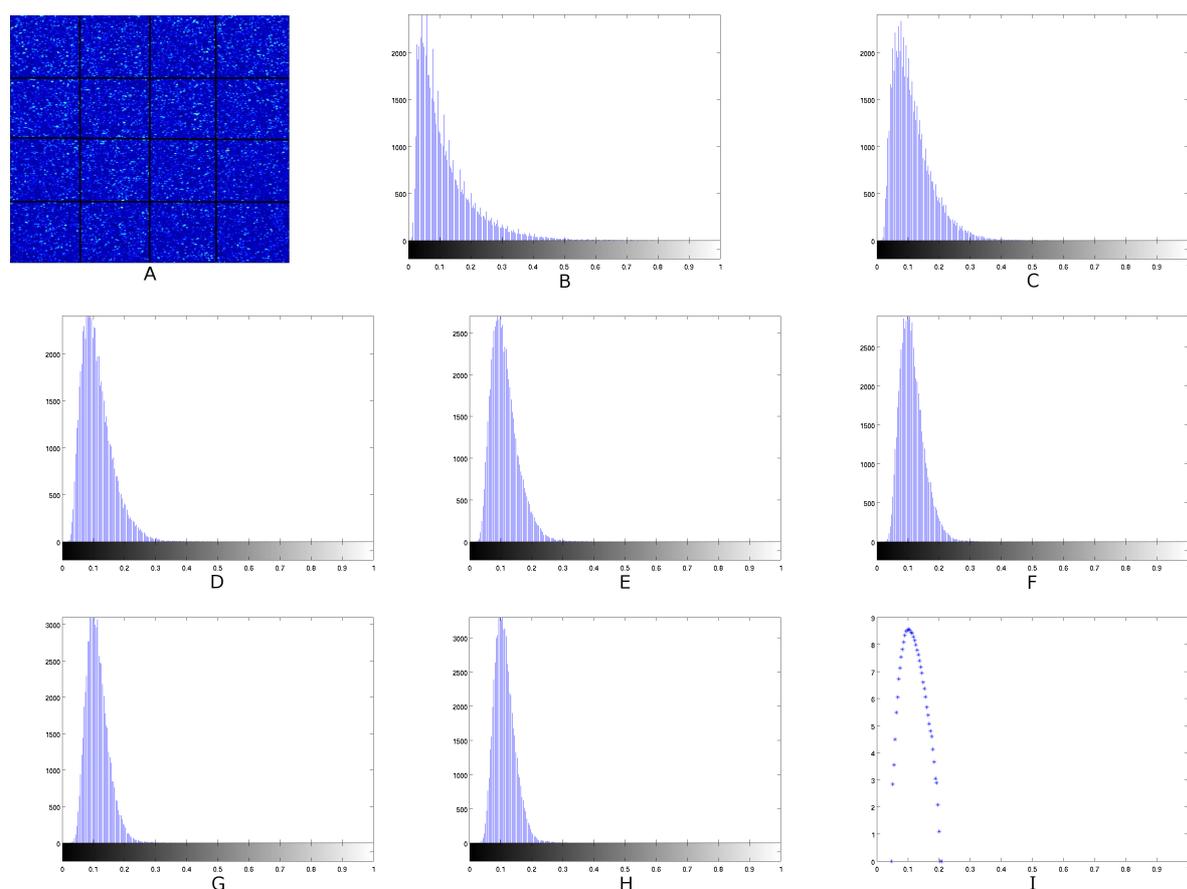


FIG. 6.2 – Moyennage à partir d’une image expérimentale de speckle. (A) Segmentation de l’image de speckle. Histogrammes de l’image résultante du moyennage sur  $L$  réalisations pour (B)  $L = 1$  (C)  $L = 2$  (D)  $L = 3$  (E)  $L = 4$  (F)  $L = 5$  (G)  $L = 6$  et (H)  $L = 7$ , vérifiant la densité de probabilité Gamma de l’Éq. (6.1). (I) Histogramme en échelle logarithmique pour  $L = 16$ , proche de celui d’une gaussienne.

pour différentes valeurs de  $L$ . On peut observer sur ces figures que les histogrammes sont proches du modèle de l’Éq. (6.1), et tendent vers une loi normale quand  $L$  augmente tout comme la densité de probabilité Gamma de l’Éq. (6.1). La gaussianité est illustrée sur la Fig. 6.2I pour un grand nombre  $L$  d’images moyennées. L’image intermédiaire  $X(u, v) = S(u, v) \times N(u, v)$ , contenant un bruit de speckle d’ordre  $L$  du fait du moyennage temporel par le mouvement du diffuseur, est acquise par le capteur du système imageur

décrit par la caractéristique  $g(\cdot)$  entrée-sortie à seuil

$$g[X(u, v)] = \begin{cases} 0 & \text{si } X(u, v) \leq \theta \\ 1 & \text{si } X(u, v) > \theta \end{cases}$$

de l'Éq. (4.6). Le capteur d'image fournit alors l'image de sortie selon  $Y(u, v) = g[X(u, v)]$ . Comme nous allons le constater dans la prochaine section, un effet de bruit utile peut être obtenu sur le traitement réalisé par ce capteur, en contrôlant le niveau du bruit de speckle dans les images moyennées.

### 6.1.1 Amélioration par le bruit de speckle

La mesure de performance utilisée est l'écart quadratique moyen  $Q_{SY} = \sqrt{\langle (S - Y)^2 \rangle} = \sqrt{\langle S^2 \rangle - 2\langle SY \rangle + \langle Y^2 \rangle}$  de l'Éq. (4.21), faisant intervenir la fonction de répartition  $F_N^L(\cdot)$  du bruit de speckle définie par  $F_N^L(j) = \int_{-\infty}^j p_N^L(x) dx$ . Il est possible d'obtenir une expression analytique de cette fonction de répartition à partir de la densité de probabilité  $p_N^L(\cdot)$  de l'Éq. (6.1). Nous avons l'intégrale

$$F_N^L(j) = \left( \frac{L}{\sigma_N} \right)^L \frac{1}{\Gamma(L)} \int_0^j x^{L-1} \exp\left( \frac{-Lx}{\sigma_N} \right) dx, \quad (6.2)$$

et des intégrations par partie successives mènent à l'expression

$$F_N^L(j) = 1 - \exp\left( \frac{-Lj}{\sigma_N} \right) \sum_{n=0}^{L-1} \frac{1}{n!} \left( \frac{Lj}{\sigma_N} \right)^n. \quad (6.3)$$

L'évolution de l'écart quadratique moyen  $Q_{SY}$  des Éqs. (4.21) et (4.22) est présentée sur la Fig. 6.3 en fonction du niveau de bruit  $\sigma_N$ , pour différentes valeurs de l'ordre  $L$  du speckle et avec les autres paramètres fixés. Sur cette figure, les prédictions analytiques montrent un bon accord avec les simulations numériques. Les courbes présentent une évolution non monotone, quel que soit le nombre  $L$  d'images moyennées, lorsque le niveau  $\sigma_N$  du bruit de speckle augmente. Le minimum de l'écart quadratique moyen, correspondant à la meilleure performance possible de l'acquisition, est atteint pour une valeur optimale non nulle de  $\sigma_N$ . Ceci démontre un effet de bruit utile dans le cas de la réduction du speckle résiduel que nous considérons ici. La Fig. 6.3 montre également qu'augmenter le nombre  $L$  d'images moyennées permet de mieux réduire ce bruit, puisque la valeur minimale de l'écart quadratique moyen diminue avec une augmentation de  $L$ . Dans le cas limite  $L \rightarrow \infty$ , l'erreur minimale tend vers zéro, ce qui correspond à une suppression du speckle résiduel.

Nous proposons maintenant une interprétation qualitative de la réduction du bruit de speckle lors d'une augmentation de  $L$ . En introduisant les probabilités  $p_0 = \Pr\{S = R_0\} =$

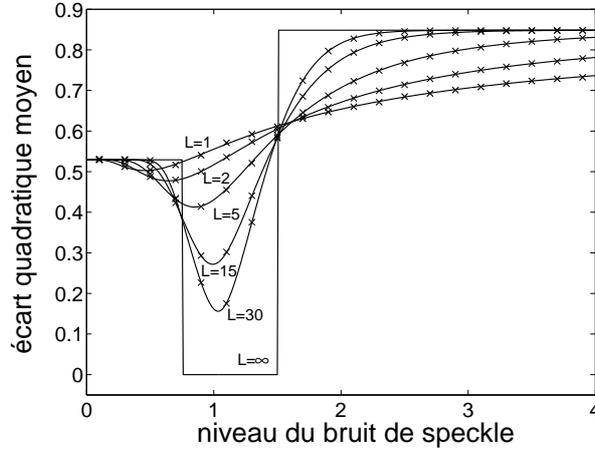


FIG. 6.3 – Écart quadratique moyen  $Q_{S'Y}$  de l'Éq. (4.21) en fonction du niveau  $\sigma_N$  du bruit de speckle, pour différentes valeurs de l'ordre  $L$  à un seuil  $\theta = 0.75$  du capteur. Les caractéristiques de l'image d'entrée  $S(u, v)$  sont  $R_0 = 0.5$ ,  $R_1 = 1$  et  $p_1 = 0.28$ . Les prédictions analytiques sont représentées en trait plein. Les croix correspondent aux simulations numériques, en moyennant  $L$  réalisations indépendantes de speckle de densité de probabilité donnée par l'Éq. (4.12).

$1 - p_1$ , l'image intermédiaire  $X(u, v)$  peut être décrite par les densités de probabilités conditionnelles

$$p_{X|S=R_k}(j) = \frac{p_k}{R_k} p_N^L \left( \frac{j}{R_k} \right) \quad \text{avec } k \in \{0, 1\}. \quad (6.4)$$

La Fig. 6.4 montre les fonctions  $p_{X|S=R_0}(\cdot)$  et  $p_{X|S=R_1}(\cdot)$  pour différentes valeurs de  $L$  et pour une valeur donnée du niveau  $\sigma_N$  de bruit. Le seuil  $\theta$  du capteur d'image est fixé et représenté par les pointillés verticaux. La zone noire, située sous la courbe  $p_{X|S=R_0}(\cdot)$ , représente la probabilité d'erreur de transmettre  $R_1$  comme valeur de pixel pour le fond au lieu de la valeur correcte  $R_0$ . De la même façon, la zone grise située sous la courbe  $p_{X|S=R_1}(\cdot)$  représente la probabilité d'erreur de transmettre  $R_0$  comme valeur de pixel pour la région de l'objet au lieu de la valeur correcte  $R_1$ . Par conséquent, réduire la taille des deux zones permet d'améliorer la transmission de l'image d'entrée  $S(u, v)$ . Ceci est obtenu en augmentant la valeur de  $L$  comme illustré sur la Fig. 6.4. Lorsque  $L$  augmente, la variance  $\sigma_N^2/L$  du bruit de speckle diminue. Quand  $L \rightarrow \infty$ , les densités de probabilités conditionnelles  $p_{X|S=R_0}(\cdot)$  et  $p_{X|S=R_1}(\cdot)$  deviennent des fonctions de Dirac, ce qui se traduit par l'évolution particulière que prend l'écart quadratique moyen sur la Fig. 6.3 dans ce cas limite.

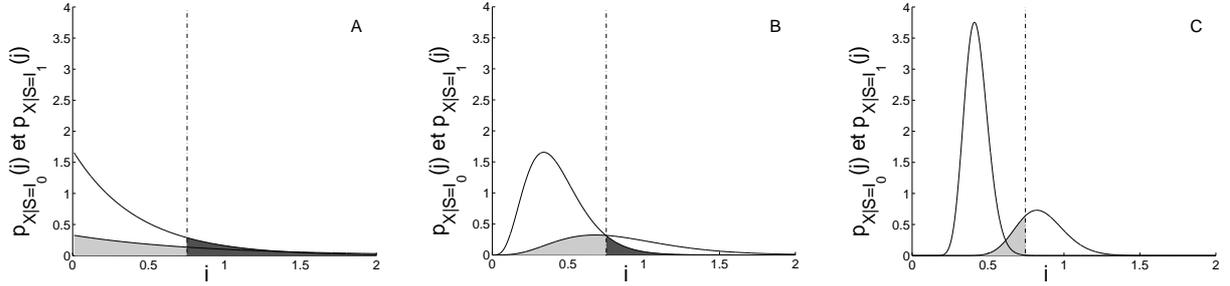


FIG. 6.4 – Densités de probabilité conditionnelles  $p_{X|S=R_0}(r)$  et  $p_{X|S=R_1}(r)$  de l'Éq. (6.4) avec un seuil  $\theta = 0.75$  et à  $\sigma_N = 0.85$ , pour (A)  $L = 1$  (B)  $L = 5$  et (C)  $L = 30$ . Mêmes conditions pour l'image d'entrée que sur la Fig. 6.3. Les zones grise et noire correspondent à la probabilité d'une mauvaise transmission de l'image d'entrée  $S(u, v)$ , respectivement dans la région de l'objet et la région du fond.

### 6.1.2 Niveau optimal du bruit de speckle

Comme dans le chapitre 4 pour  $L = 1$ , il est à nouveau possible de calculer le niveau optimal du bruit de speckle contenu dans les images initiales. Nous obtenons, sous les hypothèses  $\theta \neq 0$  et  $p_1 \neq 1$ , l'expression

$$\sigma_{\text{opt}} = \frac{R_0 - R_1}{R_0 R_1} \frac{L\theta}{\ln(K)} \quad \text{avec } K = \left(\frac{R_0}{R_1}\right)^L \frac{p_1}{1 - p_1}. \quad (6.5)$$

Cette forme analytique permet aussi d'avoir accès à l'expression de la meilleure performance qu'il est possible d'obtenir, c'est-à-dire la valeur minimale de l'écart quadratique moyen  $Q_{\min}$  entre l'image d'entrée  $S(u, v)$  et l'image de sortie  $Y(u, v)$ . Nous obtenons

$$Q_{\min}^2 = p_1 + (1 - p_1) K^{\frac{1 - R_0/R_1}{1 - R_0/R_1}} \sum_{n=0}^{L-1} \frac{1}{n!} \left[ \frac{\ln(K)}{\frac{R_0}{R_1} - 1} \right]^n - p_1 K^{\frac{R_0/R_1}{1 - R_0/R_1}} \sum_{n=0}^{L-1} \frac{1}{n!} \left[ \frac{\frac{R_0}{R_1} \ln(K)}{\frac{R_0}{R_1} - 1} \right]^n \quad (6.6)$$

avec  $K$  donné dans l'Éq. (6.5). Avec l'expression analytique exacte de l'Éq. (6.6), on peut connaître exactement la meilleure performance qu'il est possible d'atteindre pour le système d'imagerie cohérente avec capteur à seuil, en fonction de l'ordre  $L$  du speckle et les caractéristiques de l'image d'entrée. Comme nous l'avons remarqué sur la Fig. 6.3, le bruit de speckle a un effet plus important sur la réduction lorsque  $L$  est augmenté en donnant une valeur plus faible de l'écart quadratique moyen minimal. Nous pouvons vérifier à l'aide de l'Éq. (6.6) que cette erreur minimale tend vers zéro lorsque  $L \rightarrow \infty$ , ce qui correspond à une suppression du bruit de speckle dans le cas d'images binaires que nous avons étudié ici, comme nous l'avons noté sur la Fig. 6.3.

Dans d'autres applications que la réduction du bruit de speckle, on peut être amené à combiner plusieurs images d'une même scène dans des conditions différentes pour chacune

des images, dans le même but d'extraire plus d'information sur la scène imagée. Ainsi en imagerie de polarimétrie, deux images d'une même scène sont acquises avec des degrés de polarisation qui diffèrent de  $90^\circ$ . Nous établissons un lien, dans la section suivante, entre ce type d'application où l'on rencontre souvent du speckle et un mécanisme d'effet de bruit utile.

## 6.2 Application à l'imagerie de polarimétrie

En imagerie active de polarisation, une onde cohérente avec un état de polarisation bien défini illumine une scène. L'état de polarisation de la lumière transmise ou réfléchiée par la scène est ensuite analysé par le système imageur. Plusieurs images sont souvent nécessaires pour faire cette analyse de la polarisation de la lumière reçue par le capteur. Dans une de ses formes les plus simples, l'imagerie de polarisation active nécessite l'acquisition de deux images. Le montage expérimental que nous avons utilisé dans cette situation est le même que celui du chapitre 4 de cette partie, auquel on ajoute un analyseur placé devant la caméra. Le laser du montage est polarisé rectilignement selon une direction connue. Une première image  $X_1(u, v)$  est acquise avec l'analyseur orienté comme la lumière issue du laser. Une seconde image  $X_2(u, v)$  est acquise avec l'analyseur orienté à  $90^\circ$  de l'orientation utilisée pour l'image  $X_1(u, v)$ . Ces images  $X_1(u, v)$  et  $X_2(u, v)$  sont présentées sur la Fig. 6.5. On calcule ensuite l'image

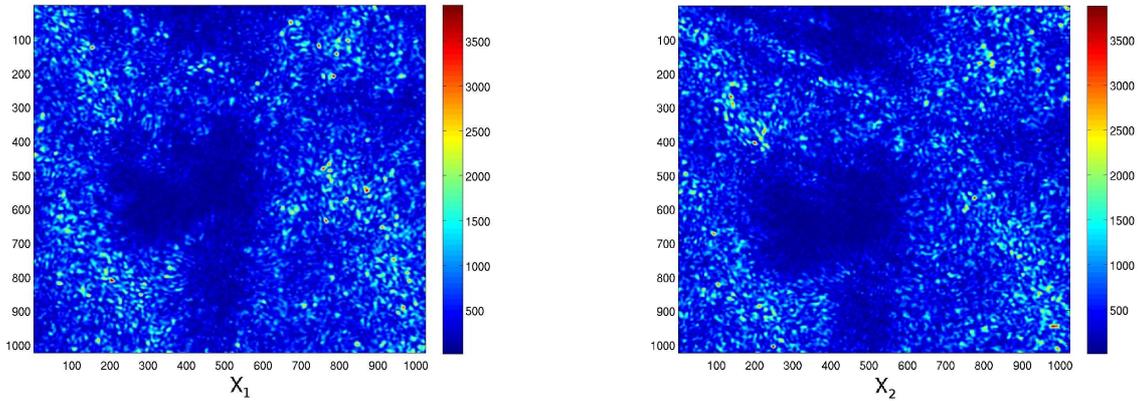


FIG. 6.5 – Images  $X_1(u, v)$  et  $X_2(u, v)$  acquises au moyen du dispositif de la Fig. 4.5 auquel on a ajouté un analyseur, avec une orientation de l'analyseur de respectivement  $0^\circ$  et  $90^\circ$  par rapport à la polarisation de l'onde incidente.

$$\rho(u, v) = \frac{X_1(u, v) - X_2(u, v)}{X_1(u, v) + X_2(u, v)}, \quad (6.7)$$

présentée sur la Fig. 6.6A, donnant le contraste de dépolarisation dans le cas où la scène illuminée agit comme un pur dépolariseur. Les deux images  $X_1(u, v)$  et  $X_2(u, v)$ , acquises

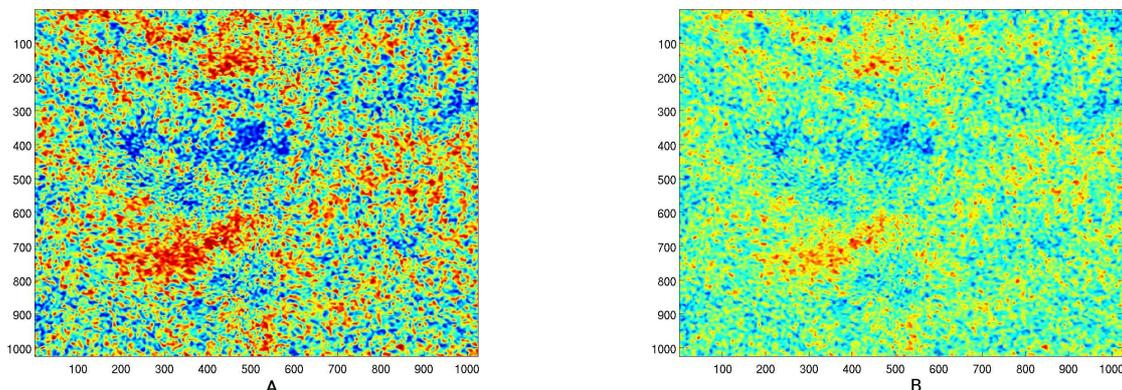


FIG. 6.6 – (A) Contraste de dépolarisation  $\rho(u, v)$  obtenu à partir des images  $X_1(u, v)$  et  $X_2(u, v)$  selon l'Éq. (6.7), en supposant que la scène illuminée agit comme un pur dépolariseur. (B) Représentation naturelle  $\beta_X(u, v)$  du contraste de dépolarisation  $\rho(u, v)$ , obtenue selon l'Éq. (6.9).

en illumination cohérente, sont souvent perturbées par un bruit de speckle selon le couplage multiplicatif de l'Éq. (4.5). Ainsi, l'image  $\rho(u, v)$  est également bruitée par le speckle. Quand  $X_1(u, v)$  et  $X_2(u, v)$  suivent une distribution de type Gamma de l'Éq. (6.1), le bruit de speckle contenu dans  $\rho(u, v)$  peut être décrit par un bruit multiplicatif de densité de probabilité [124]

$$p_u(\rho) = \frac{(2L-1)!}{2^{2L-1}[(L-1)!]^2} (1-u^2)^L \frac{(1-\rho^2)^{L-1}}{(1-u\rho)^2} \quad \text{pour } \rho \in [-1, 1]. \quad (6.8)$$

Dans cette situation, il est parfois utile [125] de travailler avec la représentation naturelle de  $\rho(u, v)$ , donnée par

$$\beta_X(u, v) = \log[X_1(u, v)]/2 - \log[X_2(u, v)]/2. \quad (6.9)$$

L'image  $\beta_X(u, v)$  ainsi obtenue et montrée Fig. 6.6B est alors perturbée par un bruit additif avec une densité de probabilité proche de celle d'une gaussienne [125], en supposant que dans l'image  $\beta_X(u, v)$  les composantes  $S_1(u, v)$  et  $S_2(u, v)$  sont indépendantes du bruit. Nous avons pris soin de vérifier ce résultat avec le dispositif optique. En effet, la Fig. 6.7 montre un bon accord entre l'histogramme de la représentation naturelle  $\beta_N(u, v)$  et celui de la gaussienne correspondante. Nous supposons donc un couplage additif entre l'image d'entrée et le bruit, produisant l'image intermédiaire  $\beta_X(u, v)$  selon la relation

$$\beta_X(u, v) = \beta_S(u, v) + \beta_N(u, v), \quad (6.10)$$

où la densité de probabilité  $p_{\beta_N}(\cdot)$  de  $\beta_N(u, v)$  est gaussienne de moyenne nulle et d'écart-type  $\sigma_N$

$$p_{\beta_N}(j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_N} \exp\left(-\frac{j^2}{2\sigma_N^2}\right). \quad (6.11)$$

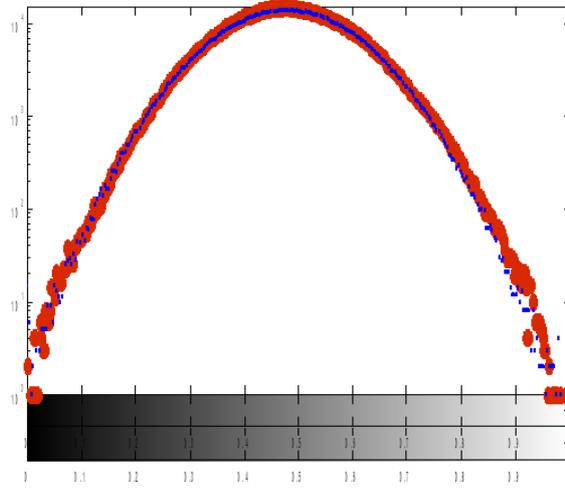


FIG. 6.7 – Histogrammes en échelle logarithmique de l'image  $\beta_N(u, v)$  obtenue selon l'Éq. (6.9) à partir des images  $X_1(u, v)$  et  $X_2(u, v)$  de la Fig. 6.5 (en rouge), et de la gaussienne correspondante (en bleu) de mêmes moyenne et écart-type.

En reprenant le capteur d'image à seuil  $\theta$  de l'Éq. (4.6) comme non-linéarité appliquée à l'image  $\beta_X(u, v)$  pour donner l'image de sortie  $\beta_Y(u, v)$  selon l'Éq. (4.7), on peut étudier les évolutions de l'écart quadratique moyen dont l'expression générale est donnée par l'Éq. (4.21), lorsque l'on augmente le niveau du bruit  $\beta_N(u, v)$  contenu dans l'image  $\beta_X(u, v)$ . La Fig. 6.8 illustre la possibilité d'un effet bénéfique du bruit dans le processus de transmission d'image. Ceci est possible uniquement quand  $\theta > 1$ . Il existe donc des conditions pour lesquelles l'écart quadratique moyen, entre l'image d'entrée  $\beta_S(u, v)$  et l'image  $\beta_Y(u, v)$  en sortie du capteur à seuil passe par un minimum pour un niveau de bruit optimal  $\sigma_{\text{opt}}$  non nul. Nous pouvons déterminer de manière explicite les expressions théoriques exactes pour le niveau de bruit optimal  $\sigma_{\text{opt}}$  et pour le minimum de l'écart quadratique moyen qu'il permet d'atteindre. Nous obtenons pour le niveau de bruit optimal

$$\sigma_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{(\theta - R_0)^2 - (\theta - R_1)^2}{2 \ln(K_b)}} \quad \text{avec} \quad K_b = \frac{\theta - R_0}{\theta - R_1} \frac{1 - p_1}{p_1}. \quad (6.12)$$

On peut voir sur l'Éq. (6.12) qu'il existe des domaines où le niveau optimal  $\sigma_{\text{opt}}$  du bruit  $\beta_N(u, v)$  est positif et non nul, quand  $\theta > R_0$ ,  $\theta > R_1$ ,  $p_1 \neq 1$  et  $K_b > 1$ . Par exemple, on obtient une valeur négative de  $K_b$  pour les conditions de la Fig. 6.8 et pour  $\theta < 1$ , ce qui interdit l'existence d'un niveau de bruit  $\sigma_{\text{opt}}$  réel minimisant l'écart quadratique moyen. Et en effet, on observe sur la Fig. 6.8 que l'image d'entrée est mieux transmise sans bruit pour  $\theta < 1$ . Ainsi, dans le cas additif, le signal doit être situé sous le seuil pour pouvoir profiter du bruit alors qu'une telle condition n'existe pas dans le cas multiplicatif. Comme nous l'avons fait pour le couplage multiplicatif, il est possible d'exprimer analytiquement à partir de l'Éq. (6.12) l'écart quadratique minimal  $Q_{\text{min}}$  atteint pour le niveau de bruit

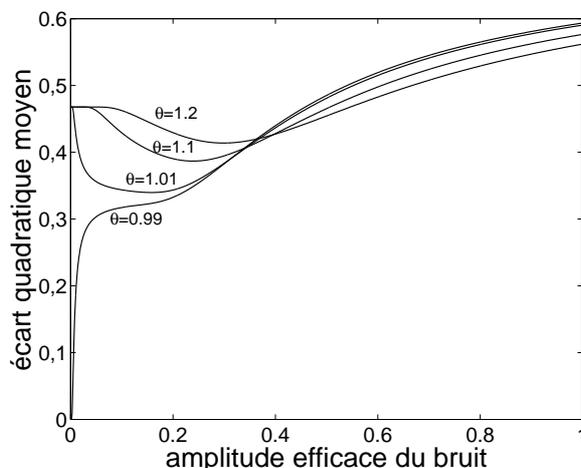


FIG. 6.8 – Écart quadratique moyen de l'Éq. (4.22) en fonction de l'amplitude efficace  $\sigma_N$  du bruit additif  $\beta_N(u, v)$ , pour différentes valeurs du seuil  $\theta$ . Les autres paramètres sont  $R_0 = 1/2$ ,  $R_1 = 1$ , et  $p_1 = 0.22$ .

optimal  $\sigma_{\text{opt}}$ . Nous obtenons l'écart quadratique minimal

$$Q_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ 1 - (1 - p_1) \operatorname{erf} \left( \sqrt{\frac{\ln(K_b)}{1 - \left(\frac{\theta - R_1}{\theta - R_0}\right)^2}} \right) + p_1 \operatorname{erf} \left( \sqrt{\frac{\ln(K_b)}{\left(\frac{\theta - R_0}{\theta - R_1}\right)^2 - 1}} \right) \right]^{1/2}, \quad (6.13)$$

### 6.3 Discussion sur les applications considérées

Nous avons appliqué la théorie du chapitre 4 dans deux types de systèmes d'acquisition en imagerie cohérente couramment utilisés en pratique. Nous avons retrouvé un mécanisme d'effet de bruit utile dans ces deux situations. Les systèmes d'acquisition que nous avons considérés sont modélisés ici dans leur forme la plus simple, dans le but justement d'obtenir une première preuve de faisabilité. Les études sur l'effet de bruit utile montrent, qu'en général, l'effet bénéfique du bruit est préservé de façon robuste lorsque l'on considère des variations plus élaborées en partant des ingrédients minimaux. Ainsi, les résultats de cette étude nous permettent d'envisager des explorations dans de nombreuses directions. On pourrait considérer d'autres types de caractéristique entrée–sortie pour le capteur d'image. Il serait intéressant de vérifier par exemple la robustesse de l'effet pour un quantificateur plusieurs bits et mesurer ainsi l'effet du bruit de speckle sur l'erreur de quantification. Concernant les images d'entrée, des modèles plus sophistiqués avec des niveaux de gris distribués au lieu de niveaux discrets fixés  $R_0$  et  $R_1$  peuvent être envisagés. L'étude

### 6.3. DISCUSSION SUR LES APPLICATIONS CONSIDÉRÉES

---

préliminaire du chapitre 4 a montré que la possibilité d'un effet de transmission d'image assistée par le bruit est préservée quand les niveaux de gris sont distribués de façon connue.

Nous pouvons également envisager d'autres types d'applications impliquant une modification de la distribution du bruit de speckle. Ici, nous avons considéré les situations d'une modification par moyennage temporel ainsi que le cas de la polarimétrie. En imagerie incohérente, un problème courant d'acquisition est lié au bruit thermique, que l'on peut modéliser par un bruit additif gaussien comme dans le cas où l'on est ramené en polarimétrie avec la représentation naturelle  $\beta(u, v)$ , ce que nous décrivons dans [123].



---

# Conclusion sur l'imagerie cohérente

Le speckle est un bruit rencontré, de par sa nature, dans beaucoup de systèmes d'imagerie cohérente. Les systèmes d'acquisition d'image, tout comme les réseaux de la première partie, comportent des capteurs non linéaires. Nous avons montré un effet de bruit utile sur la transmission et l'acquisition d'une image par un système imageur en présence de seuil et de saturation. Nous avons développé une analyse théorique pour chacune des études. Ces analyses permettent à la fois de mieux appréhender le phénomène d'effet de bruit utile, et de vérifier les propriétés observées sur les simulations au moyen d'un calcul analytique complet. En particulier, nous avons démontré que le mécanisme par lequel le bruit de speckle vient aider la transmission est indépendant du seuil du capteur d'image. Nous avons vu que ceci est dû au couplage multiplicatif entre l'image d'entrée et le bruit de speckle. Cette propriété ne peut pas être observée dans le cas d'un couplage additif tel que celui auquel on est ramené en imagerie de polarimétrie. Nous montrons ainsi que pour n'importe quel capteur utilisé en pratique, on aura intérêt à tirer parti du speckle. On peut trouver de nouvelles propriétés de l'effet de bruit utile en s'intéressant à d'autres types de couplages signal-bruit rencontrés en imagerie, comme nous l'avons fait ici en imagerie cohérente. Nous avons trouvé, grâce aux éléments simples que nous avons choisis, une expression analytique exacte pour le niveau du bruit de speckle optimal rendant la meilleure performance qu'il est possible d'atteindre ainsi que l'expression de cette performance. Ces expressions permettent de connaître à l'avance les performances que l'on peut obtenir pour le système considéré, et peuvent donner un a priori sur les performances que l'on pourrait obtenir en tirant parti du bruit de speckle dans des systèmes plus proches de ceux utilisés en pratique. Dans le but de nous rapprocher des capteurs existant dans les systèmes imageurs, nous avons pris en compte la présence de saturation. Nous avons montré un nouveau mécanisme d'effet de bruit utile lorsqu'on prend en compte la partie saturante du capteur d'image, et on peut ainsi optimiser l'acquisition en jouant sur le niveau du bruit de speckle.

D'un point de vue expérimental, nous avons réalisé un dispositif optique nous permettant d'analyser le comportement expérimental du bruit de speckle sur le traitement d'image réalisé par un système d'imagerie cohérente. Le bruit de speckle étant lié à l'intensité de l'onde incidente, nous avons pu étudier l'évolution de la performance du système imageur lorsque l'on augmente le niveau du bruit de speckle. Nous avons ainsi vérifié une amélioration de l'acquisition par ce système, au seuil et à la saturation, en augmentant

le niveau du bruit de speckle ainsi que les propriétés avancées par les études théoriques. Nous avons considéré deux applications de ces études, implémentées en pratique dans des systèmes où le speckle est fréquemment rencontré. Ainsi nous avons trouvé pour la première fois un effet de bruit utile en réduction de bruit de speckle et en imagerie polarimétrique. Pour ces deux techniques, une analyse a permis d'aboutir aux expressions analytiques exactes pour le niveau optimal du bruit de speckle et la performance qui en résulte. Une étude sur le comportement expérimental du speckle dans ces situations permettrait notamment d'analyser l'influence de la taille des grains de speckle, et de valider les résultats sur la réduction du bruit de speckle. Nous avons pris comme modèle de speckle la densité de probabilité Gamma, qui est appropriée pour décrire les fluctuations contenues dans les images cohérentes. D'autres situations que celles du chapitre 6 faisant intervenir d'autres modèles de bruit de speckle peuvent être envisagées, comme par exemple la loi K [97].

Ce travail offre des perspectives directes dont certaines ont déjà été abordées dans les discussions des trois chapitres de cette partie II du manuscrit. D'autre part, nous avons considéré des images d'entrée dont les caractéristiques sont connues. Dans le cas où les paramètres de l'image d'entrée ne sont pas parfaitement connus, des informations a priori sont disponibles dans certaines situations. On pourrait alors examiner la transmission d'image avec du bruit de speckle par une approche bayésienne comme dans [126]. Si aucune connaissance a priori sur l'image d'entrée n'est disponible, des procédures adaptatives peuvent être mises en œuvre afin d'ajuster le niveau de bruit optimal maximisant la transmission, comme par exemple dans [127]. Plus généralement, on pourrait tenir compte des autres types de bruit en plus du speckle impliqués dans l'acquisition d'une image, comme le bruit thermique, ce qui permettrait également de mieux appréhender l'effet de bruit utile dans les dispositifs d'acquisition. De plus, nous nous sommes concentrés sur l'acquisition d'une image au niveau du capteur, sans nous préoccuper des traitements de plus haut niveau habituellement réalisés sur cette image. On peut par exemple penser à des tâches de détection, de reconnaissance de formes, ou de la poursuite de cible dans les séquences d'images. Selon le but de ces traitements, il serait intéressant d'analyser, à la manière du chapitre 6, l'influence du speckle sur ces traitements.

---

## Conclusion générale

Nous avons présenté notre contribution à l'étude de l'effet de bruit utile dans les processus non linéaires. Les travaux se sont orientés vers les réseaux de non-linéarités, le traitement neuronal de l'information et l'imagerie cohérente. À travers ces domaines, nous avons montré différents nouveaux mécanismes d'amélioration par le bruit, ayant lieu pour des signaux autant mal positionnés que bien positionnés par rapport aux non-linéarités mises en jeu.

En présence de seuil ou de saturation, nous avons montré un nouveau mécanisme où la réplication de capteurs en réseau parallèle avec bruits permet de mieux estimer le paramètre d'un signal quelconque, différent de celui agissant dans les non-linéarités isolées. Nous avons retrouvé ce mécanisme dans les processus neuronaux, comportant également un seuil et une saturation. Ces non-linéarités se retrouvent dans les dispositifs d'acquisition d'image. Nous avons exploré le domaine de l'imagerie cohérente, non considéré jusqu'ici dans le contexte des études sur l'effet de bruit utile. Nous avons ainsi illustré la possibilité de tirer parti du bruit de speckle lors de l'acquisition d'une image, au moyen de simulations numériques, d'études analytiques et d'un dispositif optique expérimental. Nous avons été plus loin que la démonstration de l'existence d'un niveau optimal de bruit en donnant des expressions pour ce niveau optimal et la performance maximale qui en résulte. Outre l'intérêt de ces expressions pour régler le niveau du bruit de speckle lors de l'acquisition d'une image, les expressions analytiques permettent de démontrer des propriétés comme ici l'indépendance de l'effet par rapport au seuil. Ceci contribue aussi à mieux comprendre les mécanismes par lesquels les processus non linéaires peuvent bénéficier du bruit.

Dans les situations où le signal porteur d'information est bien positionné par rapport aux non-linéarités, nous avons mis en évidence que le bruit peut également être utile lorsque ces non-linéarités sont répliquées en réseau parallèle, pour l'estimation de paramètres comme pour la transmission neuronale. L'effet est moins important que dans le cas d'un signal mal positionné, mais cet effet existe dans des régimes favorables à la transmission. Par conséquent, une amélioration par le bruit est possible pour une grande partie de la caractéristique des capteurs considérés. De plus, pour toutes les amplitudes du signal en entrée d'un réseau parallèle avec bruits, nous montrons une augmentation de la performance maximale avec le nombre de capteurs répliqués. Globalement, l'ensemble de ces résultats illustre la diversité des formes que peut prendre l'effet de bruit utile.

Nous avons proposé une application de ces travaux aux processus neuronaux où nous

avons retrouvé différents mécanismes d'amélioration par le bruit, ce qui suggère que le bruit joue un rôle important dans le traitement de l'information réalisé par ces processus. En ce qui concerne la partie imagerie cohérente, nous avons également proposé une application de l'effet de bruit utile pour la réduction du bruit de speckle ainsi que pour l'imagerie de polarimétrie. Comme première preuve de faisabilité, nous avons supposé des situations simples impliquant le bruit de speckle. Cependant, les résultats de ces études suggèrent une utilité à exploiter le speckle dans les divers domaines de l'imagerie cohérente où il est fréquemment rencontré, comme par exemple l'imagerie échographique ou l'imagerie satellitaire.

Différentes explorations sont possibles à partir des travaux présentés dans ce manuscrit. Des perspectives directes ont été envisagées dans les conclusions des parties I et II. Nous avons présenté les premiers travaux sur l'effet bénéfique du bruit en imagerie cohérente. Le bruit de speckle provenant de la rugosité de la scène imagée, ce bruit est lié à la scène. Il serait donc intéressant de continuer à étudier les possibilités offertes en utilisant ce bruit en imagerie cohérente. Dans ce sens, il serait intéressant d'élargir les premiers résultats présentés en imagerie optique non conventionnelle à d'autres applications que celles considérées ici. Plus généralement, des études comme en restauration [27] ou en acquisition [123] laissent envisager de nombreuses perspectives sur l'effet de bruit utile en imagerie. Étudier l'influence du bruit dans d'autres domaines de l'imagerie, avec leurs spécificités comme ici le bruit de speckle en imagerie cohérente, permettrait aussi de mieux appréhender le phénomène d'amélioration par le bruit et ses différents mécanismes. D'autre part, les réseaux de capteurs sont présents dans de nombreux domaines. Dans les dispositifs technologiques, les systèmes avec non-linéarités sont à l'heure actuelle souvent utilisés dans leur régime linéaire pour éviter la distorsion des signaux transmis. Par exemple, les amplificateurs sont utilisés au-dessous de leur pleine puissance et sont donc employés avec une perte d'efficacité. On pourrait envisager l'utilisation de bruit dans ces systèmes pour pallier le problème de la distorsion. En traitement neuronal de l'information, nous avons montré que l'effet de bruit utile persiste pour différents régimes de fonctionnement des neurones. Loin d'expliquer les différents mécanismes mis en jeu dans de tels processus, ces études permettent cependant de remarquer certaines propriétés. Le domaine des processus neuronaux reste largement ouvert, en particulier pour ce qui concerne l'influence du bruit dans des structures similaires comme les réseaux [21].

---

## Publications et communications dans le cadre de la thèse

### Articles de revue

- \* [70] F. Chapeau-Blondeau, S. Blanchard, D. Rousseau, “Noise-enhanced Fisher information in parallel arrays of sensors with saturation”, *Physical Review E* 74, pp. 031102 (2006).
- \* [80] S. Blanchard, D. Rousseau, F. Chapeau-Blondeau, “Noise enhancement of signal transduction by parallel arrays of nonlinear neurons with threshold and saturation”, *Neurocomputing* 71 (1–3), pp. 333–341 (2007).
- \* [105] S. Blanchard, D. Rousseau, D. Gindre, F. Chapeau-Blondeau, “Constructive action of the speckle noise in a coherent imaging system”, *Optics Letters* 32 (14), pp. 1983–1985 (2007).
- \* [55] F. Chapeau-Blondeau, S. Blanchard, D. Rousseau, “Fisher information and noise-aided power estimation from one-bit quantizers”, *Digital Signal Processing* 18 (3), pp. 434–443 (2008).
- \* [106] F. Chapeau-Blondeau, D. Rousseau, S. Blanchard, D. Gindre, “Optimizing the speckle noise for maximum efficacy of data acquisition in coherent imaging”, *Journal of the Optical Society of America A* 25 (6), pp. 1287–1292 (2008).
- \* [107] S. Blanchard, D. Rousseau, D. Gindre, F. Chapeau-Blondeau, “Benefits from a speckle noise family on a coherent imaging transmission”, *Optics Communications* 281 (17), pp. 4173–4179 (2008).

### Congrès avec actes et comité de lecture

- \* [110] S. Blanchard, D. Rousseau, F. Chapeau-Blondeau, “Noise-assisted image transmission with speckle noise”, *Proceedings 5th International Conference on Physics in Signal and Image Processing (PSIP)*, 31 Jan.–2 Fev. 2007, Mulhouse, France.
- \* [128] S. Blanchard, D. Rousseau, F. Chapeau-Blondeau, “Using noise to improve measurement and information processing”, *Proceedings 4th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO)*, 9–12 Mai 2007, Angers, France.
- \* [123] S. Blanchard, D. Rousseau, D. Gindre, F. Chapeau-Blondeau, “Transmission d’image assistée par le bruit en imagerie cohérente et incohérente”, *Proceedings 21è Colloque GRETSI sur le Traitement du Signal et des Images*, 11–14 Sept. 2007, Troyes, France.

---

## Séminaires

- \* “Transmission aidée par le bruit en imagerie cohérente” au Laboratoire des Propriétés Optiques des Matériaux et Applications (POMA) de l’Université d’Angers le 10 Nov. 2006.
- \* “Stochastic resonance in parallel arrays of sensors” au Laboratoire d’Ingénierie des Systèmes Automatisés (LISA) de l’Université d’Angers le 8 Sept. 2006.
- \* “Utilisation de non-linéarités des capteurs pour optimiser l’acquisition d’images en imagerie cohérente” à l’École Supérieure de Physique et de Chimie Industrielles (ES-PCI) de Paris lors des Journées Imagerie Optique Non Conventionnelle organisées par le GdR CNRS ISIS (Information, Signal, Image et viSion) et le GdR CNRS Ondes, les 19–20 Mars 2008.

---

# Bibliographie

- [1] R. Benzi, A. Sutera, and A. Vulpiani, “The mechanism of stochastic resonance,” *Journal of Physics A*, vol. 14, no. 11, pp. L453–L457, 1981.
- [2] R. Benzi, G. Parisi, A. Sutera, and A. Vulpiani, “Stochastic resonance in climatic changes,” *Tellus*, vol. 34, pp. 10–16, 1982.
- [3] F. Moss, D. Pierson, and D. O’Gorman, “Stochastic resonance : Tutorial and update,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 4, no. 6, pp. 1383–1397, 1994.
- [4] A. R. Bulsara and L. Gammaitoni, “Tuning in to noise,” *Physics Today*, vol. 49, no. 3, pp. 39–45, 1996.
- [5] L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung, and F. Marchesoni, “Stochastic resonance,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 70, pp. 223–287, 1998.
- [6] B. Kosko and S. Mitaim, “Robust stochastic resonance : Signal detection and adaptation in impulsive noise,” *Physical Review E*, vol. 64, pp. 051110, 1–11, 2001.
- [7] S. Zozor and P. O. Amblard, “On the use of stochastic resonance in sine detection,” *Signal Processing*, vol. 82, no. 3, pp. 353–367, 2002.
- [8] D. Rousseau, J. Rojas Varela, F. Duan, and F. Chapeau-Blondeau, “Evaluation of a nonlinear bistable filter for binary detection,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 15, no. 2, pp. 667–679, 2005.
- [9] F. Chapeau-Blondeau and D. Rousseau, “Nonlinear SNR amplification of harmonic signal in noise,” *Electronics Letters*, vol. 41, pp. 618–619, 2005.
- [10] S. Zozor and P. O. Amblard, “Stochastic resonance in locally optimal detectors,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 51, no. 12, pp. 3177–3181, 2003.
- [11] D. Rousseau and F. Chapeau-Blondeau, “Stochastic resonance and improvement by noise in optimal detection strategies,” *Digital Signal Processing*, vol. 15, no. 1, pp. 19–32, 2005.
- [12] F. Chapeau-Blondeau and X. Godivier, “Theory of stochastic resonance in signal transmission by static nonlinear systems,” *Physical Review E*, vol. 55, pp. 1478–1495, 1997.
- [13] F. Chapeau-Blondeau and D. Rousseau, “Noise improvements in stochastic resonance : From signal amplification to optimal detection,” *Fluctuation and Noise Letters*, vol. 2, pp. 221–233, 2002.

- 
- [14] M. Stemmler, “A single spike suffices : The simplest form of stochastic resonance in model neurons,” *Network : Computation in Neural Systems*, vol. 7, pp. 687–716, 1996.
- [15] G. P. Harmer, B. R. Davis, and D. Abbott, “A review of stochastic resonance : Circuits and measurement,” *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 51, no. 2, pp. 299–309, 2002.
- [16] P. E. Greenwood, U. U. Müller, and L. M. Ward, “Soft threshold stochastic resonance,” *Physical Review E*, vol. 70, pp. 051110, 1–10, 2004.
- [17] S. Morfu, J. C. Comte, J. M. Bilbault, and P. Marquié, “Noise-enhanced propagation in a dissipative chain of triggers,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 12, no. 3, pp. 629–633, 2002.
- [18] S. Morfu, J. M. Bilbault, and J. C. Comte, “Digital information receiver based on stochastic resonance,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 13, no. 1, pp. 233–236, 2003.
- [19] S. Zozor and P. O. Amblard, “Noise-aided processing : revisiting dithering in a Sigma-Delta quantizer,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 53, no. 8, pp. 3202–3210, 2005.
- [20] T. Nguyen, “Robust data-optimized stochastic analog-to-digital converters,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 55, pp. 2735–2740, 2007.
- [21] M. D. McDonnell, N. G. Stocks, C. E. M. Pearce, and D. Abbott, *Stochastic Resonance. From Suprathreshold Stochastic Resonance to Stochastic Signal Quantization*. in press : Cambridge University Press, 2008.
- [22] M. H. Hennig, N. J. Kerscher, F. Funke, and F. Wörgötter, “Stochastic resonance in visual cortical neurons : does the eye-tremor actually improve visual acuity?,” *Neurocomputing*, vol. 44–46, pp. 115–120, 2002.
- [23] M. O. Hongler, Y. L. de Meneses, A. Beyeler, and J. Jacot, “The resonant retina : exploiting vibration noise to optimally detect edges in an image,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 25, no. 9, pp. 1051–1062, 2003.
- [24] A. Patel and B. Kosko, “Stochastic resonance in noisy spiking retinal and sensory neuron models,” *Neural Networks*, vol. 18, no. 5–6, pp. 467–478, 2005.
- [25] S. Zozor, P. O. Amblard, and C. Duchêne, “Fluctuation in the retina : noise-enhanced processing via random sampling and microsaccads?,” in *Proceedings of the SPIE International Symposium on Fluctuations and Noise*, (Florence, Italy), pp. 66020V1–66020V10, 21–24 May 2007.
- [26] S. Morfu, J. Bossu, P. Marquié, and J. M. Bilbault, “Contrast enhancement with a nonlinear oscillators network,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 44, no. 1–4, pp. 173–180, 2006.
- [27] A. Histace and D. Rousseau, “Constructive action of noise for impulsive noise removal in scalar images,” *Electronics Letters*, vol. 42, no. 7, pp. 393–395, 2006.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [28] N. G. Stocks, “Suprathreshold stochastic resonance in multilevel threshold systems,” *Physical Review Letters*, vol. 84, pp. 2310–2313, 2000.
- [29] N. G. Stocks, “Information transmission in parallel threshold arrays : Suprathreshold stochastic resonance,” *Physical Review E*, vol. 63, pp. 041114, 1–9, 2001.
- [30] M. D. McDonnell, D. Abbott, and C. E. M. Pearce, “An analysis of noise enhanced information transmission in an array of comparators,” *Microelectronics Journal*, vol. 33, pp. 1079–1089, 2002.
- [31] D. Rousseau, F. Duan, and F. Chapeau-Blondeau, “Suprathreshold stochastic resonance and noise-enhanced Fisher information in arrays of threshold devices,” *Physical Review E*, vol. 68, pp. 031107, 1–10, 2003.
- [32] V. M. Roy and G. V. Anand, “A suprathreshold stochastic resonance based pre-processor for direction-of-arrival estimation,” in *Proceedings IEEE Region 10 Conference TENCN*, (Hong Kong, China), 14–17 Nov. 2006.
- [33] D. Rousseau, G. V. Anand, and F. Chapeau-Blondeau, “Noise-enhanced nonlinear detector to improve signal detection in non-gaussian noise,” *Signal Processing*, vol. 86, no. 11, pp. 3456–3465, 2006.
- [34] F. Moss, L. M. Ward, and W. G. Sannita, “Stochastic resonance and sensory information processing : A tutorial and review of application,” *Clinical Neurophysiology*, vol. 115, no. 2, pp. 267–281, 2004.
- [35] J. J. Collins, C. C. Chow, and T. T. Imhoff, “Stochastic resonance without tuning,” *Nature*, vol. 376, pp. 236–238, 1995.
- [36] X. Pei, L. Wilkens, and F. Moss, “Noise-mediated spike timing precision from aperiodic stimuli in an array of Hodgkin-Huxley-type neurons,” *Physical Review Letters*, vol. 77, no. 22, pp. 4679–4682, 1996.
- [37] B. J. Gluckman, S. P., T. I. Netoff, M. L. Spano, and S. J. Schiff, “Stochastic resonance in mammalian neuronal networks,” *Chaos*, vol. 8, no. 3, pp. 588–598, 1998.
- [38] N. G. Stocks and R. Mannella, “Generic noise-enhanced coding in neuronal arrays,” *Physical Review E*, vol. 64, pp. 030902, 1–4, 2001.
- [39] T. Hoch, G. Wenning, and K. Obermayer, “Optimal noise-aided signal transmission through population of neurons,” *Physical Review E*, vol. 68, pp. 011911, 1–11, 2003.
- [40] T. Hoch, G. Wenning, and K. Obermayer, “The effect of correlations in the background activity on the information transmission properties of neural populations,” *Neurocomputing*, vol. 65–66, pp. 365–370, 2005.
- [41] A. Nikitin, N. G. Stocks, and R. P. Morse, “Enhanced information transmission with signal-dependent noise in an array of nonlinear elements,” *Physical Review E*, vol. 75, pp. 021121, 1–8, 2007.

- 
- [42] C. Koch and I. Segev, *Methods in Neuronal Modeling – From Synapses to Networks*. Cambridge (MA) : MIT Press, 1989.
- [43] A. Guérin, R. Le Bouquin-Jeannès, J. Bès, G. Faucon, and C. Lorenzi, “Evaluation of two computational models of amplitude modulation coding in the inferior colliculus,” *Hearing Research*, vol. 211, no. 1–2, pp. 54–62, 2006.
- [44] G. Field and E. J. Chichilnisky, “Information processing in the primate retina : Circuitry and coding,” *Annual Review of Neuroscience*, vol. 30, pp. 1–30, 2007.
- [45] F. G. Zeng, Q. J. Fu, and R. P. Morse, “Human hearing enhanced by noise,” *Brain Research*, vol. 869, pp. 251–255, 2000.
- [46] M. Bennett and F. Wiesenfeld, K. Jaramillo, “Stochastic resonance in hair cell mechano-electrical transduction,” *Fluctuation and Noise Letters*, vol. 4, no. 1, pp. L1–L10, 2004.
- [47] L. K. Rinskaya-Korsakova, V. N. Telepnev, and N. A. Dubrovskii, “Dynamic encoding of amplitude-modulated sounds at the level of auditory nerve fibers,” *Neuroscience and Behavioral Physiology*, vol. 35, no. 1, pp. 71–81, 2005.
- [48] M. Chatterjee and M. E. Robert, “Noise enhances modulation sensitivity in cochlear implant listeners : Stochastic resonance in a prosthetic sensory system?,” *Journal of the Association for Research in Otolaryngology*, vol. 2, pp. 159–171, 2001.
- [49] N. G. Stocks, D. Allingham, and R. P. Morse, “The application of suprathreshold stochastic resonance to cochlear implant coding,” *Fluctuation and Noise Letters*, vol. 2, pp. L169–L181, 2002.
- [50] S. E. Behnam and F. G. Zeng, “Noise improves suprathreshold discrimination in cochlear-implant listeners,” *Hearing Research*, vol. 186, pp. 91–93, 2003.
- [51] M. Chatterjee and S. I. Oba, “Noise improves modulation detection by cochlear implant listeners at moderate carrier levels,” *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 118, no. 2, pp. 993–1002, 2005.
- [52] H. C. Papadopoulos, G. W. Wornell, and A. V. Oppenheim, “Low-complexity digital encoding strategies for wireless sensors networks,” in *Proceedings IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, (Seattle, USA), pp. 3273–3276, 1998.
- [53] P. E. Greenwood, L. M. Ward, and W. Wefelmeyer, “Statistical analysis of stochastic resonance in a simple setting,” *Physical Review E*, vol. 60, pp. 4687–4695, 1999.
- [54] O. Dabeer and A. Karnik, “Signal parameter estimation using 1-bit dithered quantization,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 52, pp. 5389–5405, 2006.
- [55] F. Chapeau-Blondeau, S. Blanchard, and D. Rousseau, “Fisher information and noise-aided power estimation from one-bit quantizers,” *Digital Signal Processing*, vol. 18, no. 3, pp. 434–443, 2008.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [56] T. M. Cover and J. A. Thomas, *Elements of Information Theory*. New York : Wiley, 1991.
- [57] F. Chapeau-Blondeau and D. Rousseau, “Enhancement by noise in parallel arrays of sensors with power-law characteristics,” *Physical Review E*, vol. 70, no. 6, pp. 060101, 1–4, 2004.
- [58] M. D. McDonnell, D. Abbott, and C. E. M. Pearce, “A characterization of suprathreshold stochastic resonance in an array of comparators by correlation coefficient,” *Fluctuation and Noise Letters*, vol. 2, pp. L205–L220, 2002.
- [59] D. Rousseau and F. Chapeau-Blondeau, “Suprathreshold stochastic resonance and signal-to-noise ratio improvement in arrays of comparators,” *Physics Letters A*, vol. 321, pp. 280–290, 2004.
- [60] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications, Volume I*. New York : Wiley, 1971.
- [61] P.-O. Amblard, S. Zozor, and O. J. J. Michel, “Networks of the pooling type and optimal quantization,” in *Proceedings IEEE Conference ICASSP on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 3, (Toulouse, France), pp. 716–719, 14–19 May 2006.
- [62] M. D. McDonnell, P.-O. Amblard, N. G. Stocks, S. Zozor, and D. Abott, “High resolution optimal quantization for stochastic pooling networks,” in *Proceedings SPIE on Complexity and nonlinear dynamics*, vol. 6417, pp. 641706,1–15, 12–13 Dec. 2006.
- [63] A. Bulsara, E. W. Jacobs, T. Zhou, F. Moss, and L. Kiss, “Stochastic resonance in a single neuron model : Theory and analog simulation,” *Journal of Theoretical Biology*, vol. 152, pp. 531–555, 1991.
- [64] J. K. Douglass, L. Wilkens, E. Pantazelou, and F. Moss, “Noise enhancement of information transfer in crayfish mechanoreceptors by stochastic resonance,” *Nature*, vol. 365, pp. 337–340, 1993.
- [65] J. J. Collins, T. T. Imhoff, and P. Grigg, “Noise-enhanced information transmission in rat SA1 cutaneous mechanoreceptors via aperiodic stochastic resonance,” *Journal of Neurophysiology*, vol. 76, pp. 642–645, 1996.
- [66] L. B. Kish, G. P. Harmer, and D. Abbott, “Information transfer rate of neurons : Stochastic resonance of shannon’s information channel capacity,” *Fluctuation and Noise Letters*, vol. 1, pp. L13–L19, 2001.
- [67] D. Rousseau and F. Chapeau-Blondeau, “Neuronal signal transduction aided by noise at threshold and saturation,” *Neural Processing Letters*, vol. 20, pp. 71–83, 2004.
- [68] D. Rousseau, J. Rojas Varela, and F. Chapeau-Blondeau, “Stochastic resonance for nonlinear sensors with saturation,” *Physical Review E*, vol. 67, pp. 021102, 1–6, 2003.

- 
- [69] F. Chapeau-Blondeau and D. Rousseau, “Noise-aided SNR amplification by parallel arrays of sensors with saturation,” *Physical Letters A*, vol. 351, pp. 231–237, 2006.
- [70] F. Chapeau-Blondeau, S. Blanchard, and D. Rousseau, “Noise-enhanced Fisher information in parallel arrays of sensors with saturation,” *Physical Review E*, vol. 74, pp. 031102, 1–10, 2006.
- [71] E. Pantazelou, F. Moss, and D. Chialvo, “Noise sampled signal transmission in an array of Schmitt triggers,” in *Proceedings AIP Conference*, vol. 285 of *Noise in Physical Systems and 1/f Fluctuations*, (New York), pp. 549–552, 1993.
- [72] R. B. Frieden, *Physics From Fisher Information – A unification*. Cambridge (MA) : Cambridge University Press, 1998.
- [73] L. Gammaitoni, “Stochastic resonance and the dithering effect in threshold physical systems,” *Physical Review E*, vol. 52, pp. 4691–4698, 1995.
- [74] A. Longtin, A. Bulsara, and F. Moss, “Time-interval sequences in bistable systems and the noise-induced transmission of information by sensory neurons,” *Physical Review Letters*, vol. 67, pp. 656–659, 1991.
- [75] S. Mitaim and B. Kosko, “Adaptive stochastic resonance in noisy neurons based on mutual information,” *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 16, no. 6, pp. 1526–1540, 2004.
- [76] B. Kosko and S. Mitaim, “Stochastic resonance in noisy threshold neurons,” *Neural Networks*, vol. 16, no. 5–6, pp. 755–761, 2003.
- [77] D. R. Chialvo, A. Longtin, and J. Mullergerking, “Stochastic resonance in models of neuronal ensembles,” *Physical Review E*, vol. 55, pp. 1798–1808, 1997.
- [78] T. Hoch, G. Wenning, and K. Obermayer, “Adaptation using local information for maximizing the global cost,” *Neurocomputing*, vol. 52–54, pp. 541–546, 2003.
- [79] N. G. Stocks, “Optimizing information transmission in model neuronal ensembles : The role of internal noise,” in *Stochastic Processes in Physics, Chemistry and Biology (Lecture Notes in Physics)* (J. A. Freund and T. Pöschel, eds.), pp. 150–159, Berlin : Springer, 2000.
- [80] S. Blanchard, D. Rousseau, and F. Chapeau-Blondeau, “Noise enhancement of signal transduction by parallel arrays of nonlinear neurons with threshold and saturation,” *Neurocomputing*, vol. 71, no. 1–3, pp. 333–341, 2007.
- [81] F. Chapeau-Blondeau and G. Chauvet, “Dynamic properties of a biologically motivated neural network model,” *International Journal of Neural Systems*, vol. 3, pp. 371–378, 1992.
- [82] C. Koch, *Biophysics of Computation : Information Processing in Single Neurons*. New York : Oxford University Press, 1999.
- [83] J. J. Collins, C. C. Chow, and T. T. Imhoff, “Aperiodic stochastic resonance in excitable systems,” *Physical Review E*, vol. 52, pp. R3321–R3324, 1995.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [84] W. B. Davenport, "Signal-to-noise ratios in band-pass limiters," *Journal of Applied Physics*, vol. 24, pp. 720–727, 1953.
- [85] N. M. Blachman, "The output signal-to-noise ratio of a power-law device," *Journal of Applied Physics*, vol. 24, pp. 783–785, 1953.
- [86] P. Hänggi, M. E. Inchiosa, D. Fogliatti, and A. R. Bulsara, "Nonlinear stochastic resonance : The saga of anomalous output-input gain," *Physical Review E*, vol. 62, pp. 6155–6163, 2000.
- [87] J. M. Casado, J. Gómez Ordóñez, and M. Morillo, "Stochastic resonance of collective variables in finite sets of interacting identical subsystems," *Physical Review E*, vol. 73, pp. 011109, 1–8, 2006.
- [88] O. Landolt and A. Mitros, "Visual sensor with resolution enhancement by mechanical vibrations dithering," *Autonomous Robots*, vol. 11, no. 3, pp. 233–239, 2001.
- [89] R. Etchique and J. Aliaga, "Resolution enhancement by dithering," *American Journal of Physics*, vol. 72, no. 2, pp. 159–163, 2004.
- [90] E. Simonotto, M. Riani, C. Seife, M. Roberts, J. Twitty, and F. Moss, "Visual perception of stochastic resonance," *Physical Review Letters*, vol. 78, no. 6, pp. 1186–1189, 1997.
- [91] B. M. Jost and B. E. A. Saleh, "Signal-to-noise ratio improvement by stochastic resonance in a unidirectional photorefractive ring resonator," *Optics Letters*, vol. 21, no. 4, pp. 287–289, 1996.
- [92] F. Vaudelle, J. Gazengel, G. Rivoire, X. Godivier, and F. Chapeau-Blondeau, "Stochastic resonance and noise-enhanced transmission of spatial signals in optics : The case of scattering," *Journal of the Optical Society of America B*, vol. 15, no. 11, pp. 2674–2680, 1998.
- [93] K. P. Singh, G. Ropars, M. Brunel, F. Bretenaker, and A. Le Floch, "Stochastic resonance in an optical two-order parameter vectorial system," *Physical Review Letters*, vol. 87, pp. 213901, 1–4, 2001.
- [94] F. Pedaci, M. Giudici, J. R. Tredicce, and G. Giacomelli, "Stochastic resonance in bulk semiconductor lasers," *Physical Review E*, vol. 71, pp. 036125, 1–8, 2005.
- [95] B. McNamara, K. Wiesenfeld, and R. Roy, "Observation of stochastic resonance in a ring laser," *Physical Review Letters*, vol. 60, no. 25, pp. 2626–2629, 1988.
- [96] F. Marino, M. Giudici, S. Barland, and S. Balle, "Experimental evidence of stochastic resonance in an excitable optical system," *Physical Review Letters*, vol. 88, pp. 040601, 1–4, 2002.
- [97] J. W. Goodman, *Speckle Phenomena in Optics : Theory and Applications*. Greenwood Village CO : Roberts and Company, 2007.
- [98] P. O. Amblard and S. Zozor, "Cyclostationarity and stochastic resonance in threshold devices," *Physical Review E*, vol. 59, no. 5, pp. 5009–5020, 1999.

- 
- [99] M. I. Dykman, D. G. Luchinsky, P. V. E. McClintock, N. D. Stein, and N. G. Stocks, “Stochastic resonance for periodically modulated noise intensity,” *Physical Review A*, vol. 46, pp. R1713–R1716, 1992.
- [100] L. Gammaitoni, F. Marchesoni, E. Menichella-Saetta, and S. Santucci, “Multiplicative stochastic resonance,” *Physical Review E*, vol. 49, no. 6, pp. 4878–4881, 1994.
- [101] V. Berdichevsky and M. Gitterman, “Multiplicative stochastic resonance in linear systems : Analytical solution,” *Europhysics Letters*, vol. 36, no. 3, pp. 161–166, 1996.
- [102] A. V. Barzykin, K. Seki, and F. Shibata, “Periodically driven linear system with multiplicative colored noise,” *Physical Review E*, vol. 57, no. 6, pp. 6555–6563, 1998.
- [103] Y. Jia, S. N. Yu, and J. R. Li, “Stochastic resonance in a bistable system subject to multiplicative and additive noise,” *Physical Review E*, vol. 62, no. 2, pp. 1869–1878, 2000.
- [104] W.-R. Zhong, Y.-Z. Shao, and Z.-H. He, “Pure multiplicative stochastic resonance of a theoretical anti-tumor model with seasonal modulability,” *Physical Review E*, vol. 73, pp. 060902, 1–4, 2006.
- [105] S. Blanchard, D. Rousseau, D. Gindre, and F. Chapeau-Blondeau, “Constructive action of the speckle noise in a coherent imaging system,” *Optics Letters*, vol. 32, no. 14, pp. 1983–1985, 2007.
- [106] F. Chapeau-Blondeau, D. Rousseau, S. Blanchard, and D. Gindre, “Optimizing the speckle noise for maximum efficacy of data acquisition in coherent imaging,” *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 25, no. 6, pp. 1287–1292, 2008.
- [107] S. Blanchard, D. Rousseau, D. Gindre, and F. Chapeau-Blondeau, “Benefits from a speckle noise family on a coherent imaging transmission,” *Optics Communications*, vol. 281, no. 17, pp. 4173–4179, 2008.
- [108] D. Gindre, A. Boeglin, A. Fort, L. Mager, and K. D. Dorkenoo, “Rewritable optical data storage in azobenzene copolymers,” *Optics Express*, vol. 14, no. 21, pp. 9896–9901, 2006.
- [109] D. Gindre, A. Vesperini, J. M. Nunzi, H. Leblond, and K. D. Dorkenoo, “Refractive-index saturation-mediated multiple line emission in polymer thin-film distributed-feedback lasers,” *Optics Letters*, vol. 31, no. 11, pp. 1657–1659, 2006.
- [110] S. Blanchard, D. Rousseau, and F. Chapeau-Blondeau, “Noise-assisted image transmission with speckle noise,” in *Proceedings 5th International Conference on Physics in Signal and Image Processing*, (Mulhouse, France), 31 Jan.–2 Feb. 2007.
- [111] B. W. Silverman, *Density Estimation*. London : Chapman and Hall, 1986.
- [112] J. W. Goodman, *Statistical Optics*. New York : Wiley-Interscience, 2000.
- [113] P. Réfrégier, *Noise Theory and Application to Physics : From Fluctuation to Information*. New York : Springer, 2004.
- [114] J. C. Russ, *The Image Processing Handbook*. Boca Raton : CRC Press, 1995.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [115] E. W. Weissten, *Concise Encyclopedia of Mathematics*. New York : Chapman and Hall/CRC, 1999.
- [116] S. M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing : Detection Theory*. Englewood Cliffs : Prentice Hall, 1998.
- [117] J. Ohtsubo and A. Ogiwara, “Effects of clipping threshold on clipped speckle intensity,” *Optics Communications*, vol. 65, no. 2, pp. 73–78, 1988.
- [118] A. Ogiwara, H. Sakai, and J. Ohtsubo, “Real-time optical joint transform correlator for velocity measurement using clipped speckle intensity,” *Optics Communications*, vol. 78, no. 5–6, pp. 322–326, 1990.
- [119] R. H. Sperry and K. J. Parker, “Segmentation of speckle images based on level-crossing statistics,” *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 8, no. 3, pp. 490–498, 1991.
- [120] P. Mohana Shankar and V. L. Newhouse, “Speckle reduction with improved resolution in ultrasound images,” *IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics*, vol. 33, no. 4, pp. 537–543, 1985.
- [121] L. Wang, T. Tschudi, T. Halldórson, and P. R. Péturson, “Speckle reduction in laser projection systems by diffractive optical elements,” *Applied Optics*, vol. 37, no. 10, pp. 1770–1775, 1998.
- [122] K. Rajesh, K. C. Roy, and S. Sinha, “Satellite image restoration using statistical models,” *Signal Processing*, vol. 87, pp. 366–373, 2007.
- [123] S. Blanchard, D. Rousseau, D. Gindre, and F. Chapeau-Blondeau, “Transmission d’image assistée par le bruit en imagerie cohérente et incohérente,” in *Proceedings 21è Colloque GRETSI sur le Traitement du Signal et des Images*, (Troyes, France), 11–14 Sept. 2007.
- [124] F. Goudail and P. Réfrégier, “Statistical techniques for target detection in polarization diversity images,” *Optics Letters*, vol. 26, no. 9, pp. 644–646, 2001.
- [125] F. Goudail and P. Réfrégier, *Statistical Image Processing Techniques for Noisy Images : An Application-Oriented Approach*. New York : Kluwer, 2004.
- [126] F. Chapeau-Blondeau and D. Rousseau, “Noise-enhanced performance for an optimal Bayesian estimator,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 52, pp. 1327–1334, 2004.
- [127] S. Mitaim and B. Kosko, “Adaptive stochastic resonance,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 86, no. 11, pp. 2152–2183, 1998.
- [128] S. Blanchard, D. Rousseau, and F. Chapeau-Blondeau, “Using noise to improve measurement and information processing,” in *Proceedings 4th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics*, (Angers, France), 9–12 May 2007.