# El Ábaco Oriental

## *Guía a la Aritmética con Cuentas*

**Wikilibro**


La humanidad ha utilizado ábacos, de un tipo u otro, desde los albores de la civilización para satisfacer sus necesidades de cálculo y contabilidad. La versión moderna del ábaco oriental, originario de China, todavía se utiliza hoy en día en todo el mundo para ayudar a los niños a mejorar su comprensión y habilidades numéricas. La Aritmética con Cuentas (珠算; léase *zhūsuàn* en chino, *shuzan* en japonés), o arte del uso del ábaco oriental, ha sido inscrito en 2013 en la Lista Representativa del Patrimonio Cultural Inmaterial de la Humanidad de la UNESCO.

**2022**

# Introducción

## Acerca de este libro

La presente obra es la versión como libro electrónico o, si lo prefiere, versión para imprimir del Wikilibro:

El Ábaco Oriental; Guía a la Aritmética con Cuentas

que, a su vez, es la versión en castellano conjunta de los dos Wikibooks en inglés:

- Using an Abacus *(Usando un Ábaco)*
- Traditional Abacus and Bead Arithmetic *(Ábaco y Aritmética de Cuentas Tradicionales)*

ampliada con una sección sobre Técnicas avanzadas. Estos libros han sido preparados inicialmente por Jesús Cabrera-Caño en base a unos escritos previos motivados por su participación en el grupo: Soroban and Abacus Group (groups.io) y publicados en jccAbacus bajo una licencia CC0 1.0 Universal.

El libro es una guía, que pretende ser relativamente completa, para el estudio del Ábaco Oriental. Tras su lectura, el lector conocerá:

- Por la **Primera Parte: Conceptos Básicos**
  - Qué es un ábaco en sentido general,
  - Cuáles son las características especiales del ábaco oriental,
- Por la **Segunda Parte: Métodos del Ábaco Moderno**
  - Cómo usarlo de manera efectiva para realizar las cuatro operaciones aritméticas básicas siguiendo el *Método Moderno* actualmente enseñado con el *ábaco moderno* (con 4 cuentas en la parte inferior y 1 en la superior).
- Por la **Tercera Parte: Métodos Tradicionales**
  - Cómo hacer aún más confortable el uso del ábaco con algunas técnicas que no suelen ser enseñadas en la actualidad, y cómo hacer uso de las cuentas adicionales de los ábacos tradicionales (con 5 cuentas en la parte inferior y 2 o incluso 3 en la superior)
- Por la **Cuarta Parte: Técnicas Avanzadas**
  - Que el límite en el uso del ábaco sólo se encuentra en nuestra propia imaginación...

## Licencia

## Sobre la versión electrónica

Este fichero PDF ha sido preparado por Jesús Cabrera-Caño a partir de la correspondiente versión Web en diciembre de 2021, cuando el libro ya puede considerarse completado.

# Tabla de Contenido

# Primera Parte
## Conceptos Básicos

# I Ábacos en General

Cuando los humanos se reunieron en grupos lo suficientemente grandes para que las operaciones de trueque o comercio adquirieran cierta importancia, surgió la necesidad de una contabilidad básica que a su vez requería poder contar hasta números altos, realizar operaciones aritméticas básicas y mantener un registro permanente de las transacciones. Así, tanto la aritmética como la escritura parecen tener un origen común en esta necesidad.

Tableta proto-cuneiforme: relato administrativo de la distribución de cebada con impresión de sello cilíndrico de una figura masculina, perros de caza y jabalíes. Probablemente de la ciudad de Uruk. Período Jemdet-Nasr circa 3100-2900 BCE. El carácter *SANGA* aparece abajo en el centro-izquierda

El carácter: *SANGA*.

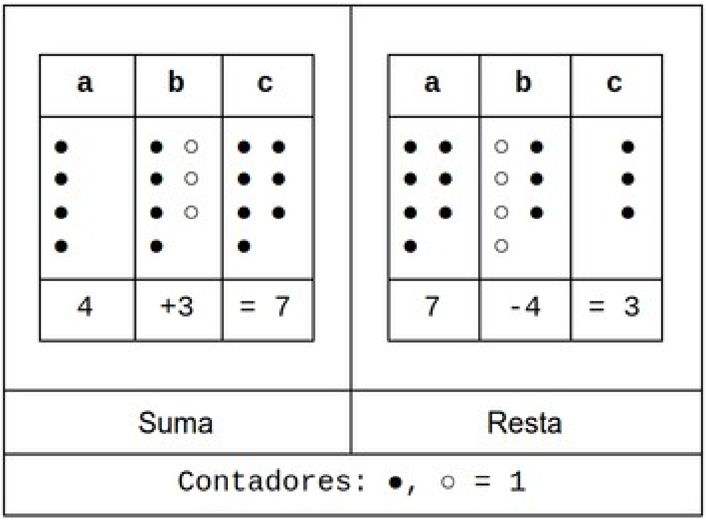
En cuanto a las operaciones aritméticas básicas, “*parecen haber sido realizadas universalmente utilizando algún tipo de ábaco”* [Woods 2017] y quizás el primer testimonio histórico de su uso se encuentra en el carácter proto-cuneiforme: SANGA , que apareció como parte de la firma de los escribas sumerios en tablillas de arcilla hace unos 5000 años y que los asiriólogos identifican con tal dispositivo [Woods 2017].

# ¿Qué es un ábaco?

Un ábaco es una herramienta o instrumento en el que los números se representan físicamente de una manera que permite manipularlos para simular mecánicamente operaciones aritméticas.

En un ábaco, los números están representados por "contadores" o "fichas" (guijarros, semillas, conchas, monedas y similares, varillas, etc.) a los que se les asigna un valor numérico. Los contadores no tienen que ser todos idénticos o tener el mismo valor asignado. Para representar un número simplemente colocamos juntos, sobre una mesa o cualquier superficie adecuada, los contadores necesarios de forma similar a como tomaríamos una serie de monedas y billetes para llegar a una determinada cantidad de dinero; en realidad es el mismo proceso.

La suma se simula reuniendo los conjuntos de contadores que representan los dos sumandos, mientras que la resta se simula eliminando del conjunto de contadores que representan el minuendo un conjunto de contadores que representan el sustraendo. Consideremos el caso más simple en el que solo usamos contadores idénticos con un valor asignado de uno.



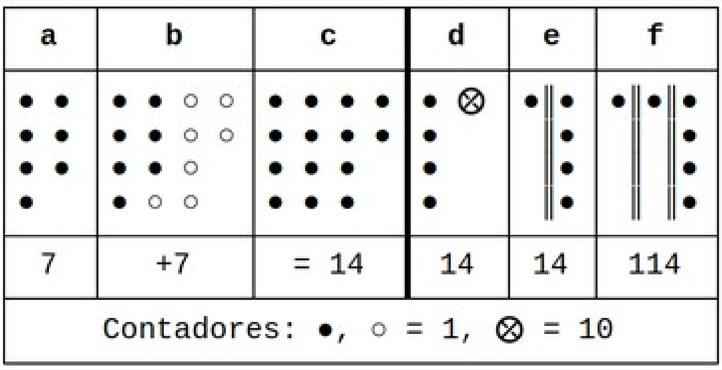

En la imagen de arriba hemos dispuesto cuatro contadores de valor uno para representar el número 4 (izquierda-**a**), después de adjuntar otros tres contadores (izquierda-**b**) que representan el número 3 tenemos una representación del número 7 (izquierda-**c**) ; es decir, la suma 4+3. De manera similar, si partimos de la representación del número 7 (derecha-**a**) y eliminamos un conjunto de fichas que representan el número 4 (derecha-**b**), lo que queda en la mesa es 3 o el resultado de la resta 7-4 (derecha-**c**).

Para realizar las operaciones anteriores no es necesario saber nada sobre las tablas de sumar o restar, en particular no se necesita saber que 4+3 = 7 o 7-4 = 3, solo se necesita saber cómo manipular los contadores. En realidad, es el ábaco el que permite "descubrir" que el resultado de 4+3 es 7 y el de 7-4 es 3. Este es un punto esencial sobre el uso de los ábacos al que volveremos en el capítulo dedicado a la suma y la resta.

Se considera comúnmente que en Aritmética hay cuatro operaciones fundamentales: Suma, Resta, Multiplicación y División, y que cualquier otro cálculo (por ejemplo, obtener una raíz cuadrada) de un modo u otro se reduce a una secuencia de estas cuatro operaciones fundamentales. Pero también se puede considerar la multiplicación como una suma repetida y la división como una resta repetida, de modo que cualquier cálculo aritmético, en realidad, se reduce en última instancia a una secuencia de sumas y restas. Por lo tanto, con un ábaco como el del ejemplo que permita sumar y restar se puede realizar en principio cualquier cálculo aritmético, aunque esto podría ser extremadamente difícil, o quizás imposible, sin algunos refinamientos que tenemos que introducir.

Con el ábaco utilizado en el ejemplo anterior (sólo contadores idénticos con valor asignado uno), es evidente que si comenzamos a trabajar con números progresivamente más grandes, nuestra mesa (ábaco) acabará abarrotada de contadores haciendo impracticable su uso e interpretación. Necesitamos una forma de reducir el número de objetos físicos (contadores) a manipular y mantenerlo dentro de unos límites que nos resulten cómodos. Para esto hay un par de soluciones:

- **Utilizar contadores físicamente diferentes** con diferentes valores asignados. Este es el sistema más primitivo, utilizado por los sumerios hace más de 5000 años y todavía vigente, ya que el uso de monedas y billetes de diferentes valores nominales en cualquier sistema monetario actual se corresponde perfectamente con esta idea.
- **Definir regiones espaciales** en nuestra mesa (ábaco) para que un mismo contador represente un valor u otro según la región que ocupe.




Veamos un ejemplo: En la figura anterior hemos sumado 7+7 (**a** y **b**) con nuestro ábaco primitivo, y vemos que 14, el resultado, se muestra como una mesa repleta de contadores (**c**). Podemos reemplazar algunos de estos contadores con uno físicamente diferente que tenga asignado un valor más alto, por ejemplo 10 (el **valor de reemplazo**). Con esto, el estado de nuestro ábaco (**d**) se hace más fácil de interpretar; se ha simplificado ya que se han sustituido 10 contadores de valor 1 por un solo contador de valor 10. Esta sería la primera de las soluciones apuntadas arriba.

Alternativamente, podemos considerar el ábaco dividido en dos regiones espaciales y utilizar contadores idénticos a los que asociaremos un valor u otro según la región en la que lo ubiquemos. En (**e**) en la figura anterior, el ábaco se ha dividido en dos regiones, izquierda y derecha, separadas por una línea vertical doble. Si asignamos un valor de uno a los contadores ubicados a la derecha y 10 a los ubicados a la izquierda, el número 14 estaría representado como se ilustra. Esta forma de proceder es preferible a la anterior ya que podemos repetir el proceso, definiendo tantas regiones como necesitemos con los valores de reemplazo que nos convengan, permitiéndonos representar números arbitrariamente grandes con contadores de un solo tipo; por ejemplo, en (**f**) hemos representado 114 con tan sólo 6 contadores usando tres regiones y dos valores de reemplazo de 10. Estamos asistiendo aquí al nacimiento de la notación posicional!

Antes de continuar conviene indicar que existen dos tipos principales de ábacos:

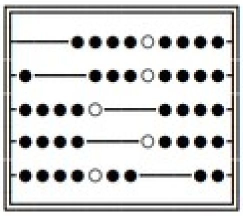
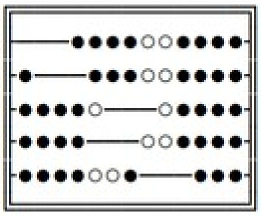
Ábaco de mesa europeo. Un ábaco de contadores libres usando monedas de 0,01 € como contadores (Número representado: 1724).

- **Ábaco de contadores libres o ábaco de mesa**: los contadores son independientes y normalmente se mantienen separados en una caja o bolsa y se colocan o quitan de la mesa según sea necesario [Barnard 1916; Smith 1921] . Es el tipo más primitivo y el que hemos considerado aquí hasta ahora.
- **Ábaco de cuentas fijas**: Los contadores, llamados **cuentas** en este contexto, están siempre presentes, integrados en un marco y pueden deslizarse desde una posición **inactiva** a una **activa** a lo largo de ranuras, rieles, cuerdas, alambres o varillas. Este es el tipo más sofisticado de ábaco, portátil, compacto, y que permite un cálculo más rápido. Como veremos, el ábaco oriental, al que está dedicado este libro, es de este tipo.

Ábaco ruso *schoty*

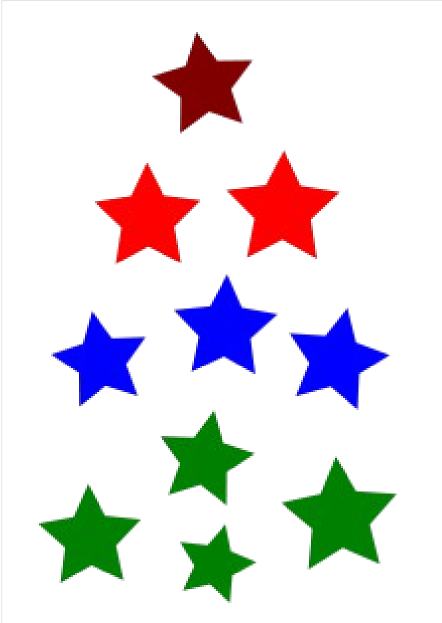
Ábaco escolar

Ahora podemos mencionar al **ábaco ruso** (Schoty) , al **ábaco iraní** (chortkeh) y al **ábaco escolar** como ejemplos de ábacos de cuentas fijas que se ajustan a lo que hemos explicado hasta ahora. Los tres consisten en un marco de madera con alambres dispuestos horizontalmente a lo largo del cual se ensartan diez cuentas en el caso del ábaco ruso y el escolar y nueve en el ábaco iraní. Las cuentas pueden deslizarse desde una posición inactiva (derecha) a una posición activada (izquierda) y cada alambre o varilla representa una de las regiones mencionadas anteriormente, con un valor de reemplazo de 10; de modo que una cuenta en cada uno de los alambres tiene un valor asociado diez veces más alto que el de las cuentas en el alambre inmediatamente inferior.

| a | b | c |
|---|---|---|
|  |  | × 10000<br>× 1000<br>× 100<br>× 10<br>× 1 |
| Chortkeh<br>Ábaco iraní<br>Número: 1547 | Schoty (Счёты)<br>Ábaco ruso<br>(simplificado)<br>Número: 1547 | |
| Contadores: •, ○ = 1 | | |

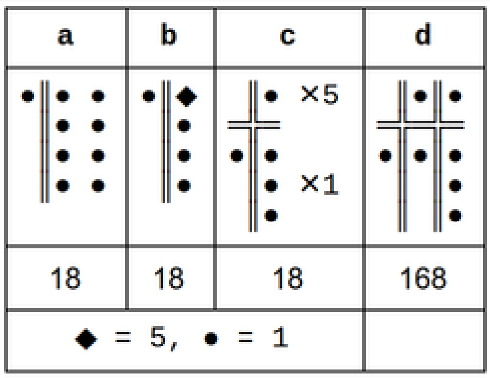
Estos ábacos tienen todo lo necesario para permitir operaciones aritméticas con números expresados en notación decimal: varias varillas para representar potencias sucesivas de diez y 9 cuentas para representar los dígitos del 0 al 9 (por conveniencia, el ábaco ruso y el escolar tienen una cuenta más de lo estrictamente necesario). Si lo desea, puede probar un simulador de ábaco ruso en este enlace.

Pero todavía necesitamos un último refinamiento para comprender completamente el ábaco de Asia oriental.



Subitización: A medida que aumenta el número de objetos, se vuelve más difícil para un observador apreciar instantáneamente cuántos están presentes sin contar.

**Subitización** es un término de origen inglés (*Subitizing*) que representa la apreciación rápida, precisa y segura que podemos hacer del número de una pequeña cantidad de objetos. Podemos hacer tal apreciación si el número de objetos a contar es 4 o 5 como máximo; a partir de ahí, tendremos que invertir tiempo en contar. En los ábacos de Rusia e Irán y en el escolar tenemos 9 o 10 cuentas por varilla, por lo que la lectura del número representado puede estar más allá de este límite de subitización de 4 o 5. Esto se alivia utilizando cuentas de dos colores diferentes como se ilustra en las imágenes anteriores, pero también hay un par de técnicas adicionales que no solo nos permiten permanecer dentro de los límites de la subitización, sino que también reducen la cantidad de cuentas necesarias en el ábaco.




En la imagen superior (**a**) tenemos el número 18 representado en dos regiones (barras, columnas, alambres...); una de ellas contiene 8 contadores que están por encima del límite de subitización. Para simplificar la lectura del ábaco podemos:

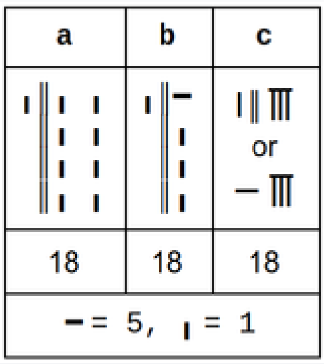
- **Utilizar un tipo diferente de contador** con un valor de reemplazo de, por ejemplo, cinco (**b**).
- **Subdividir las regiones** o barras en dos zonas: una en la que un contador toma el valor uno y la otra en la que toma el valor cinco (**c**, **d**).

En cualquier caso, no necesitamos tener más de cuatro contadores idénticos por región para poder representar números en notación decimal, por lo que tenemos garantizada la lectura rápida del ábaco. Cuando usamos 5 como el segundo valor de reemplazo, estamos usando una notación decimal biquinaria para los números. Ejemplos de ambas soluciones son las **varillas de cálculo** y el **ábaco oriental**.

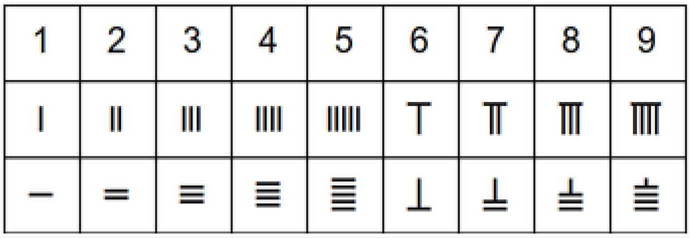
# Varillas de cálculo

*Sangi* (算木): Varillas de cálculo estilo japonés sobre un tablero. Cada casilla puede albergar un dígito.

Las varillas de cálculo son un ábaco tipo mesa, o ábaco de contadores libres, en los que los contadores son pequeñas varillas de madera, bambú, hueso, etc. que se disponen sobre una superficie plana, utilizando o no un tablero con casillas o escaques. Este ábaco que dominó las matemáticas chinas durante al menos 14 siglos y las matemáticas japonesas hasta la Restauración Meiji (a mediados del siglo XIX), es probablemente el más versátil que ha existido alguna vez, ya que nos permite distribuir dígitos en dos dimensiones, aunque desafortunadamente también es muy lento de manipular.

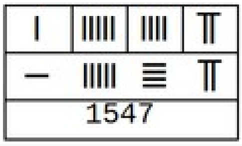



En la figura anterior (**a**) usamos barras dispuestas verticalmente (|) como contadores de valor uno para representar el número 18. En (**b**) usamos una barra dispuesta horizontalmente (—) como contador de valor cinco y en (**c**) usamos una disposición más compacta con alternancia de orientación, o no, dependiendo de si usamos una mesa lisa o un tablero con casillas. Los dígitos del 1 al 9 se representan como:



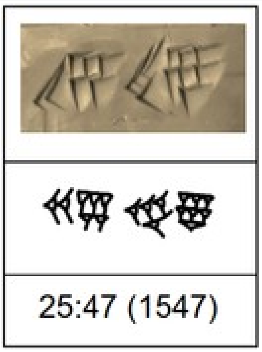

(ver detalles en Wikipedia)

Por ejemplo, el número 1547 se expresaría:



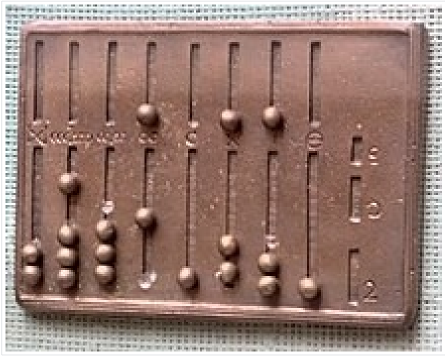

El cero estaba representado por una celda vacía en el tablero o por un espacio u otro objeto (por ejemplo, una ficha de Go) en la mesa. Adicionalmente, se solían utilizar varillas de dos colores diferentes para distinguir números positivos y negativos.

Es interesante mencionar que este es el único ábaco que se conoce que usa la **orientación** de los contadores para asignarles un valor u otro; pero encontramos un paralelo a este concepto, si no un precedente, muchos siglos antes de la aparición de las varillas de cálculo en los numerales babilónicos utilizados para escribir números en notación sexagesimal. Cada dígito babilónico estaba constituido por una serie de impresiones del borde de un estilo de caña sobre arcilla fresca con valor unitario si la impresión era vertical. ( , , , , ..., ), y con valor diez si las impresiones se realizaban girando el estilo 45 grados o más en sentido antihorario ( , , , , ). El número decimal 1547 se expresa en sexagesimal en la forma 25:47, donde "25" y "47" son dos dígitos sexagesimales escritos como: y



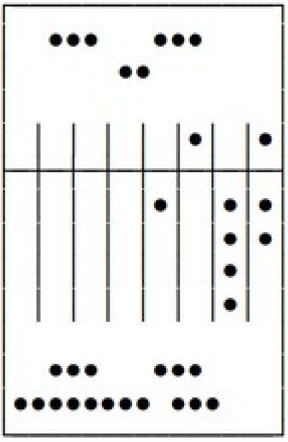
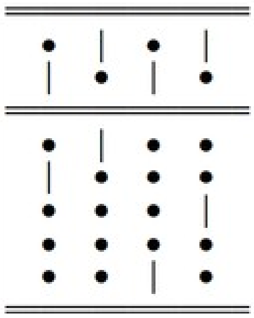

La misma apariencia de estos dígitos sugiere su representación inmediata en un ábaco de mesa usando varillas de cálculo.

# El ábaco oriental

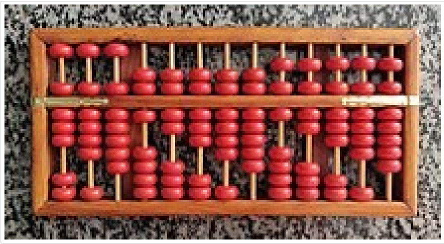


Reconstrucción de un ábaco romano. El original, de bronce, se encuentra en la Biblioteca Nacional de Francia.

La segunda de las soluciones mencionadas es la adoptada tanto por el ábaco romano como por los ábacos aparecidos en China.

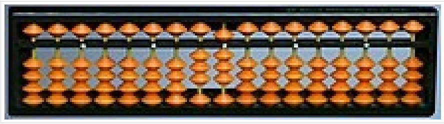
| a | b |
|---|---|
|  |  |
| Ábaco chino antiguo<br>Número: 1547 | Ábaco romano<br>y<br>soroban o<br>suanpan<br>modernos<br>Número: 1547 |

Si bien se conocen algunos ejemplos de ábaco romano como el de la figura, donde las cuentas se deslizan a lo largo de ranuras, no se sabe nada con certeza sobre el origen del ábaco oriental y si éste podría estar inspirado en aquel. Una frase confusa del *Shushu Jiyi* (術數紀遺) de Xu Yue (徐岳) [Xu Yue s.II], que quizás data del siglo II, a menudo se cita como la descripción de un dispositivo de cálculo que podríamos identificar con un ábaco y que se ha interpretado de diferentes maneras [Martzloff 2006]; por ejemplo, como en la figura (**a**) anterior. En esta interpretación de un primer ábaco chino como ábaco de mesa, la parte central se divide en una serie de columnas de dos partes; la superior asignaría un valor de 5 a cada cuenta y la inferior un valor de 1, mientras que las cuentas inactivas (sin usar) esperan dispersas por encima y por debajo de la parte central [Kojima 1963].



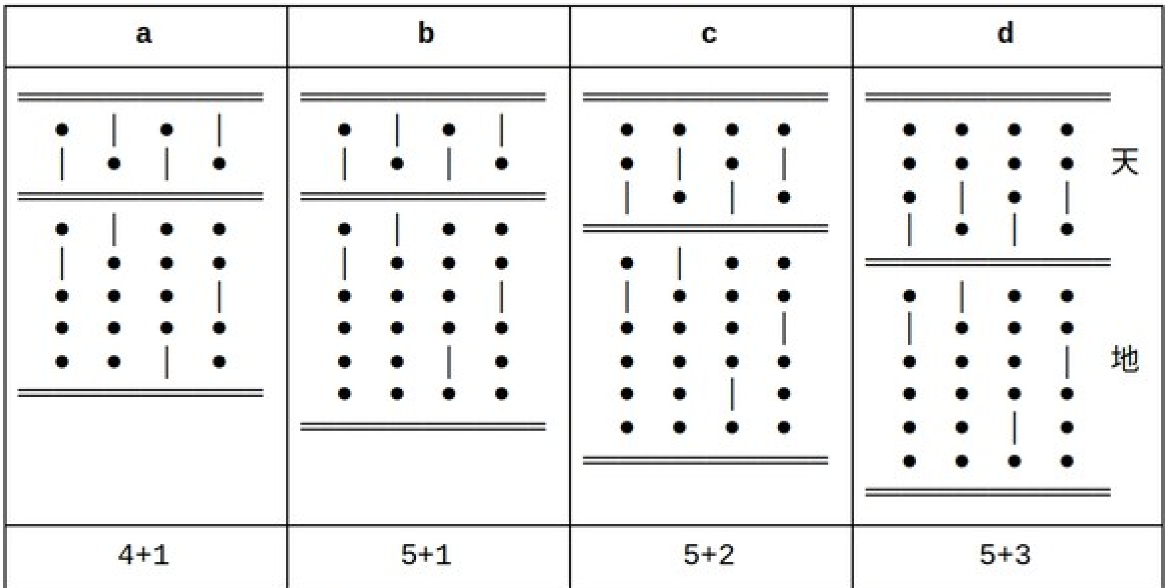
Ábaco chino tradicional (*suanpan*) 5+2 ilustrando el uso de la *cuenta suspendida*

Ábacos tipo 5+1 y 5+3, Museo Ridai de Ciencia Moderna, Tokio (Japón)



Ábaco moderno 4+1 estilo japonés (*soroban*)

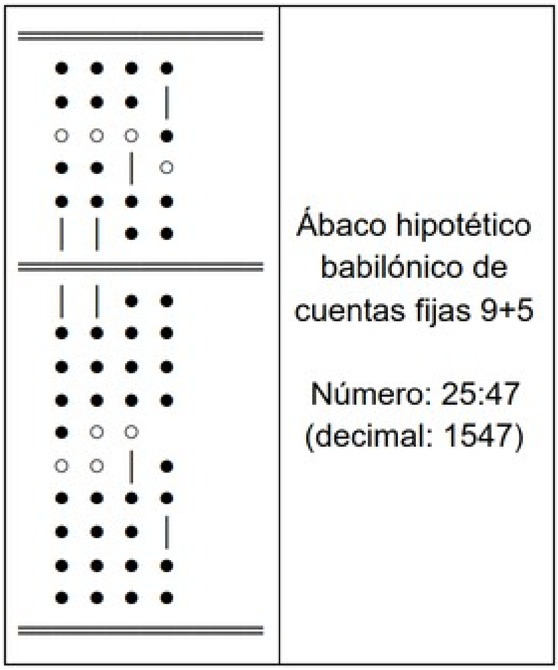
Se desconoce cuándo apareció el ábaco de cuentas ensartadas a lo largo de varillas, pero cuando este ábaco sustituyó en China a las varillas de cálculo a lo largo del siglo XVI, no tenía cuatro cuentas inferiores y una superior como el ábaco romano (nos referiremos a esta disposición como un ábaco **tipo 4+1**) sino cinco en la parte inferior y dos en la parte superior (ábaco **tipo 5+2**), separadas por una barra horizontal. Las cuentas adicionales, no necesarias para el cálculo con números decimales, se introdujeron por conveniencia para adaptar al ábaco los algoritmos que se habían desarrollado con las varillas de cálculo. Históricamente, se han utilizado los cuatro tipos de ábaco descritos en la figura siguiente:




Diferentes tipos de ábaco oriental
Número representado: 1547

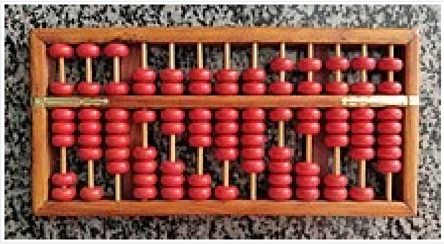
Simbólicamente, las áreas superior e inferior del ábaco han sido designadas Cielo (天, *Tiān* en chino, *Ten* en japonés) y Tierra (地, *De* en chino, *Chi* en japonés).

En la segunda sección de este libro nos centraremos en el uso del ábaco tipo 4+1 o ábaco moderno, siguiendo lo que llamaremos el *método moderno*. Si entiende los principios en los que se basa cualquier ábaco y aprende a usar el ábaco moderno, no tendrá dificultad en imaginar cómo puede usarse cualquier otro tipo de ábaco, al menos para operaciones elementales de suma y resta. Esto podría incluir, ¿por qué no? el siguiente ábaco para cálculos sexagesimales conjeturado por Woods [2017] como el ábaco babilónico, basado en lo que sabemos sobre las matemáticas en Mesopotamia ... ¡y en los errores detectados que cometieron los escribas y sus aprendices!



# II Primer Plano del Ábaco Oriental

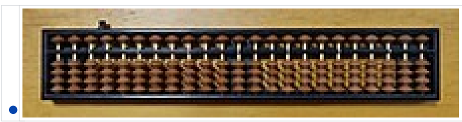
## Descripción del ábaco oriental



Ábaco chino tradicional (suanpan) de 13 varillas tipo 5+2.

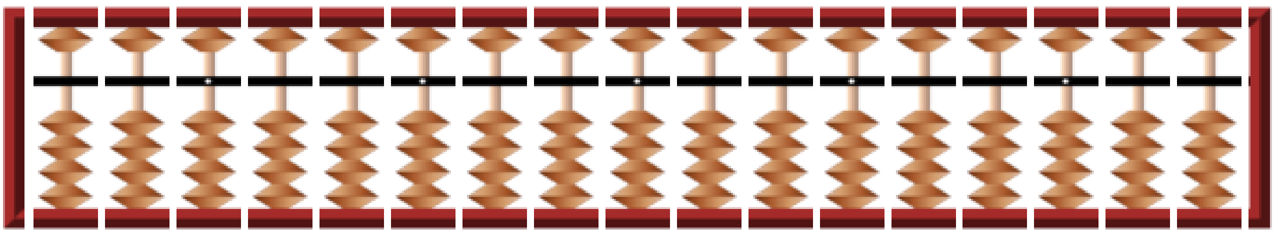
El ábaco oriental consta de las siguientes partes hechas de madera, bambú, metal, plástico, etc.:

- Un **marco** rectangular.
- Un cierto número de **varillas** paralelas los lados más cortos del marco a lo largo de las cuales se ensartan las cuentas. El número de varillas es tradicionalmente impar, y suele estar comprendido entre 9 y 27.
- Una **barra** o **viga**, paralela a los lados más largos del marco, divide el ábaco y las varillas en dos partes: una superior más estrecha, el *Cielo*, y una más ancha abajo, la *Tierra*.
- **Cuentas superiores**, es decir, las de la región superior de las varillas, a las que se asigna un valor de **5** cuando se activan.
- **Cuentas inferiores**, las de la región inferior de las varillas a las que se asigna un valor de **1** cuando se activan.
- Algunos ábacos modernos pueden incluir un **botón de reinicio** para devolver las cuentas a su posición inactiva (ver más abajo).
- Los ábacos modernos también suelen presentar algún tipo de **marcas unitarias** cada tres varillas para facilitar la alineación de los números así como la lectura de los mismos. Son convenientes para ábacos con un número elevado de varillas (17-27), pero no son esenciales. Para algunos es una molestia.



Ábaco moderno estilo japonés (soroban) de 23 varillas con botón de reinicio y marcas unitarias sobre la barra.

**Un soroban moderno (4+1) de 17 varillas con marcas unitarias sobre la barra central**

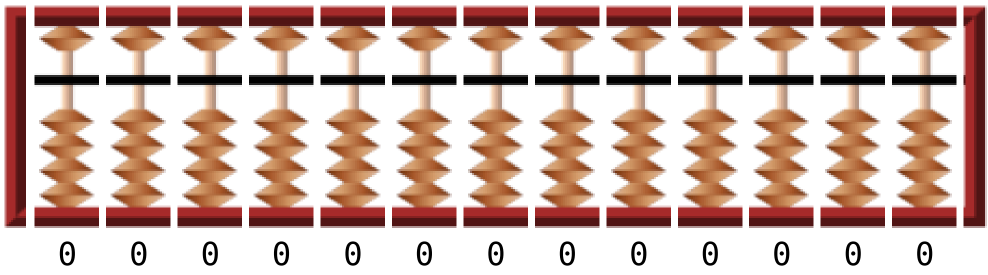


Es conveniente señalar que los ábacos chinos suelen tener cuentas de formas redondeadas mientras que los japoneses las tiene de forma bicónica, como puede apreciarse en las imágenes anteriores.

# Cuentas activas e inactivas

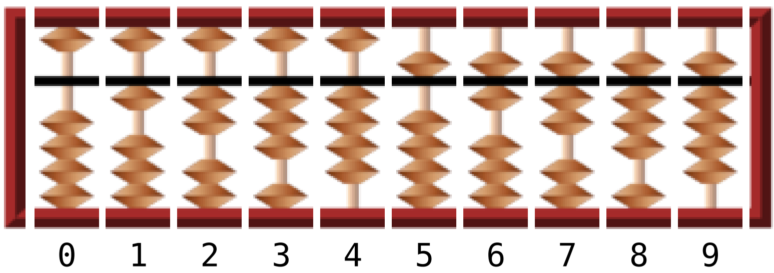
Las cuentas se consideran **inactivas** mientras están separadas de la barra o viga central. El ábaco de la siguiente figura se ha restablecido o borrado y todas sus cuentas están inactivas. Se puede considerar que todas las barras contienen ceros.

**Un ábaco puesto a cero**



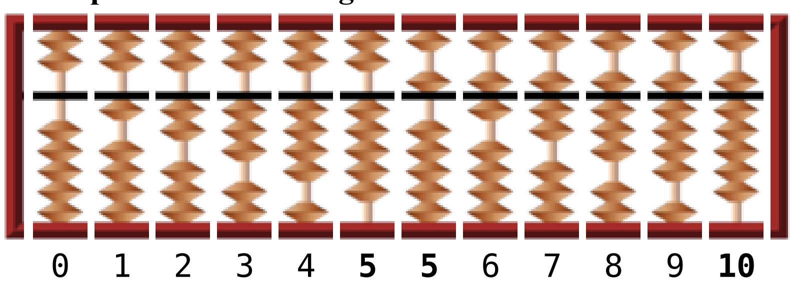

Cuando movemos las cuentas hacia la barra central las consideramos **activas** y es entonces cuando adquieren el valor asignado **5** (las superiores) o **1** (las inferiores). Esto es lo que nos permite representar números. Con un ábaco moderno tipo 4+1 podemos formar exactamente los diez dígitos del 0 al 9 necesarios para realizar cálculos con números decimales, y estos dígitos tienen una **representación única**.

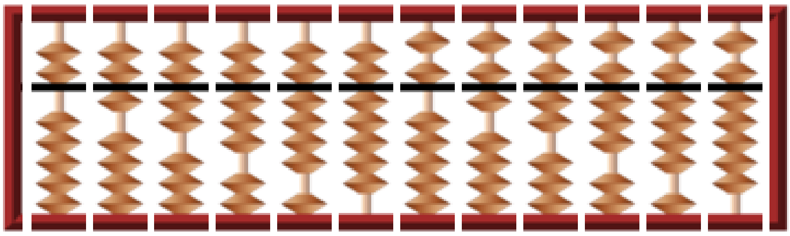
**Representación de dígitos en un ábaco moderno 4+1**




Pero con un ábaco tradicional 5+2, y usando la **cuenta suspendida**, podemos representar números hasta 20 en cada varilla!

**Representación de dígitos en un ábaco tradicional 5+2**





**10** 11 12 13 14 **15** **15** 16 17 18 19 20

Observe las tres peculiaridades del ábaco tradicional:

- La posibilidad de representar números de 10 a 20 en una sola varilla. Esto es importante en algunas técnicas tradicionales de multiplicación y división que son explicadas en la sección pertinente de este libro.
- El uso de la *cuenta suspendida* para representar los números del 15 al 20. De hecho, el ábaco tradicional debería tener tres cuentas en la parte superior (ábaco tipo 5+3) para ser usado con las técnicas tradicionales de multiplicación y división, pero el uso de la tercera bola superior resulta muy esporádico y compensa prescindir de dicha tercera cuenta simulándola con la cuenta suspendida.
- El hecho de que los números **5**, **10** y **15 se pueden representar de dos formas diferentes**: usando la **quinta cuenta inferior** o no. Este hecho puede usarse para simplificar un poco las operaciones de suma y resta como podrá verse en el capítulo dedicado al uso de la quinta cuenta inferior.

# Puesta a cero del ábaco

Después de terminar un cálculo y antes de comenzar uno nuevo, será necesario restablecer el ábaco a su estado inicial (todas las cuentas inactivas).

- Si su ábaco tiene un botón de reinicio, simplemente presiónelo y tendrá su ábaco listo para un nuevo uso.
- Con un ábaco de estilo japonés moderno (soroban, con cuentas bicónicas) esto se consigue de una forma muy rápida y eficaz. Simplemente incline el ábaco hacia usted hasta que todas las cuentas caigan a su posición más baja y devuelva el ábaco a su posición habitual sobre la mesa. Luego, con un movimiento rápido, deslice la uña de su dedo índice derecho de izquierda a derecha, justo por encima de la viga central, para empujar las cuentas superiores hacia arriba.
- Con un ábaco de estilo tradicional chino (suanpan con cuentas redondeadas) la maniobra anterior puede no funcionar correctamente; pero si el ábaco es lo suficientemente grande, hay otro procedimiento que representa un pequeño desafío de habilidad interesante en sí mismo:
    - Tome el ábaco con ambas manos por los lados cortos del marco e inclínelo hacia usted unos 45 grados hasta que caigan las cuentas.
    - Desde esa posición y sin mover los antebrazos, fuerce una rotación brusca del ábaco a la posición horizontal con un giro de sus muñecas. Si el eje de rotación definido por sus muñecas pasa por la más alta de las cuentas inferiores, la fuerza centrífuga llevará a las superiores a su posición inactiva.
    - Vuelva a poner el ábaco sobre la mesa. Probablemente necesitará algo de tiempo para perfeccionar esta técnica.

  - Finalmente, si todo lo anterior falla, como último recurso, puede usar los dedos de su mano como una escoba para *barrer* las cuentas a su posición inactiva.

# Moviendo las cuentas

Hasta finales del siglo XIX en Japón, ningún autor antiguo se molestó en escribir sobre cómo se deben manipular las cuentas [Chen 2018]; pero seguramente la técnica se transmitió por vía oral.

Para empezar, digamos que los ábacos modernos son tan ligeros que es necesario sujetarlos con la mano izquierda para estabilizarlos y evitar que se muevan sobre la mesa al manipular las cuentas. Esto tendría consecuencias desastrosas si ese movimiento induce el desplazamiento de otras cuentas distintas a las que queremos mover. En comparación, otros ábacos tradicionales son tan pesados que permanecen estables por sí mismos, lo que le permite usar su mano izquierda para otros fines, como por ejemplo seguir una lista de números en un libro de contabilidad; además, podría utilizar uno de estos ábacos como pisapapeles para estabilizar una pila de facturas, etc.

Así pues, emplearemos la mano izquierda para estabilizar el ábaco sobre la mesa mientras que usaremos la mano derecha para la manipulación de las cuentas. Mencionemos sin embargo que, en algunas regiones de Asia, se enseña a mover las cuentas usando ambas manos.

## Qué dedos usar

**Para ábacos modernos** con una longitud de varilla de aproximadamente 6 cm, se recomienda utilizar dos dedos: el pulgar y el índice de la mano derecha.

- Use su dedo índice para mover las cuentas superiores hacia arriba y hacia abajo y para mover las cuentas inferiores hacia abajo.
- Use su pulgar para mover las cuentas inferiores hacia arriba.

Pero algunos maestros muy experimentados solo usan el dedo índice ...

**Para ábacos tradicionales más grandes**, se recomienda usar tres dedos: pulgar, índice y dedo medio de la mano derecha.

- Use su dedo medio para mover las cuentas superiores hacia arriba y hacia abajo.
- Use su dedo índice para mover las cuentas inferiores hacia abajo.
- Use su pulgar para mover las cuentas inferiores hacia arriba

## Movimientos combinados

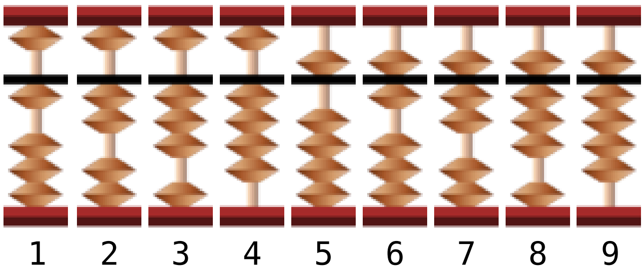
Cuando la operación afecte tanto a las cuentas superiores como a las inferiores, intente seguir las reglas de la tabla siguiente. Algunos movimientos pueden realizarse simultáneamente y otros deben realizarse en rápida sucesión en el orden indicado.

**Movimientos combinados de cuentas superiores e inferiores**

| Para mover → y ↓ | Cuenta superior hacia arriba | Cuenta superior hacia abajo |
|---|---|---|
| **Cuenta(s) inferior(es) hacia arriba** | Hágalo simultáneamente | Hágalo simultáneamente |
| **Cuenta(s) inferior(es) hacia abajo** | Primero la(s) cuenta(s) inferior(es), luego la superior | Primero la cuenta superior, luego la(s) inferior(es) |

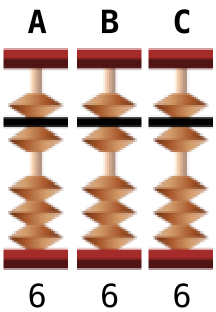
## Ejercicios

- Ingrese los dígitos del 1 al 9 de izquierda a derecha en cualquier lugar de su ábaco (moderno o tradicional) usando las reglas anteriores.




luego, elimínelos de izquierda a derecha utilizando también las reglas anteriores.

- Ingrese tres o más seises consecutivos de izquierda a derecha y límpielos en rápida sucesión de izquierda a derecha.




Este ejercicio debería repetirlo diariamente unas cuantas veces hasta que pueda hacerlo casi sin mirar el ábaco.

# Segunda Parte
# Métodos del Ábaco Moderno

# III Adición y Sustracción

## Introducción

Como ya se ha dicho en la sección Conceptos Básicos de este libro, la suma y la resta son las dos únicas operaciones que se pueden realizar en el ábaco; todo lo demás debe reducirse a una secuencia de tales sumas y restas, por lo que aprender estas dos operaciones es el paso más fundamental en el estudio del ábaco.

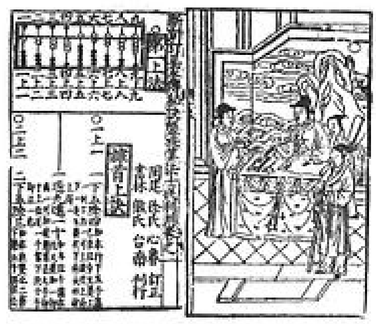
Aprender a sumar y restar con el ábaco es otro caso de aprendizaje psicomotor, similar a aprender a bailar, montar en bicicleta, conducir o aprender un instrumento musical.

- En una primera fase se necesita un esfuerzo cognitivo continuo tratando de determinar cuál es el siguiente movimiento que se tiene que hacer.
- Posteriormente, se tiende a pensar menos mientras los movimientos van surgiendo de una forma cada vez más automática.
- Finalmente, los movimientos surgirán espontáneamente, se tendrán definitivamente *programados* en la corteza cerebral motora y no habrá que volver a pensar en ellos. No obstante, se podrán perfeccionar a lo largo de toda la vida.

Sí, estudiar el ábaco es como aprender a tocar un instrumento musical, pero aprender el ábaco es mucho más fácil y rápido que aprender a tocar la viola y el progreso se puede notar día a día.

En lo que sigue nos ocuparemos de la suma y la resta conjuntamente; en efecto, sería muy difícil separar el aprendizaje de una de estas operaciones de la otra ya que, como veremos, cuando estamos sumando pasamos la mitad del tiempo restando números *complementarios* y viceversa, cuando estamos restando pasamos la mitad del tiempo sumando dichos números complementarios.

También se ha anticipado en el capítulo citado de este libro que no es necesario saber sumar y restar para usar un ábaco, solo saber **manipular** las cuentas o contadores. De hecho, durante siglos se enseñó el ábaco a personas que no tenían conocimientos previos de aritmética, y que el único conocimiento que tendrían de ella a lo largo de su vida sería el uso del propio ábaco. Aprendieron a sumar y restar memorizando una larga serie de, llamémoslo, versos, rimas o **reglas** destinadas a ser cantadas o recitadas a medida que se practicaban. Por ejemplo, tomándolas del *Pánzhū Suànfǎ* de Xú-Xīnlǔ [1573], el primer libro completamente dedicado al ábaco publicado en 1573 (finales de la dinastía Ming), y traducidas libremente del chino:



*Las dos primeras páginas del Pánzhū Suànfǎ*

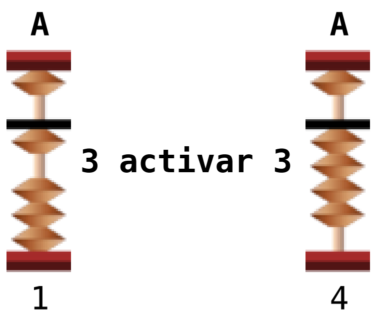
| **Reglas para la suma de un dígito (Xú Xīnlǔ, 1573)** |
|---|
| 1 activar 1, 1 activar 5 desactivar 4, 1 restar 9 llevar 1 |
| 2 activar 2, 2 activar 5 desactivar 3, 2 restar 8 llevar 1 |
| 3 activar 3, 3 activar 5 desactivar 2, 3 restar 7 llevar 1 |
| 4 activar 4, 4 activar 5 desactivar 1, 4 restar 6 llevar 1 |
| 5 activar 5, 5 desactivar 5 llevar 1 |
| 6 activar 6, 6 activar 1 desactivar 5 llevar 1, 6 restar 4 llevar 1 |
| 7 activar 7, 7 activar 2 desactivar 5 llevar 1, 7 restar 3 llevar 1 |
| 8 activar 8, 8 activar 3 desactivar 5 llevar 1, 8 restar 2 llevar 1 |
| 9 activar 9, 9 activar 4 desactivar 5 llevar 1, 9 restar 1 llevar 1 |
| **Reglas para la resta de un dígito (Xú Xīnlǔ, 1573)** |
| 1 desactivar 1, 1 tomar 1 sumar 9, 1 activar 4 desactivar 5 |
| 2 desactivar 2, 2 tomar 1 sumar 8, 2 activar 3 desactivar 5 |
| 3 desactivar 3, 3 tomar 1 sumar 7, 3 activar 2 desactivar 5 |
| 4 desactivar 4, 4 tomar 1 sumar 6, 4 activar 1 desactivar 5 |
| 5 desactivar 5, 5 tomar 1 sumar 5 |
| 6 desactivar 6, 6 tomar 1 sumar 4 |
| 7 desactivar 7, 7 tomar 1 sumar 3 |
| 8 desactivar 8, 8 tomar 1 sumar 2 |
| 9 desactivar 9, 9 tomar 1 sumar 1 |

Lo cual, obviamente, nos informa de qué cuentas tenemos que mover para sumar o restar un dígito. Por ejemplo, la tercera línea de la tabla de suma contiene tres reglas para intentar sumar un 3:

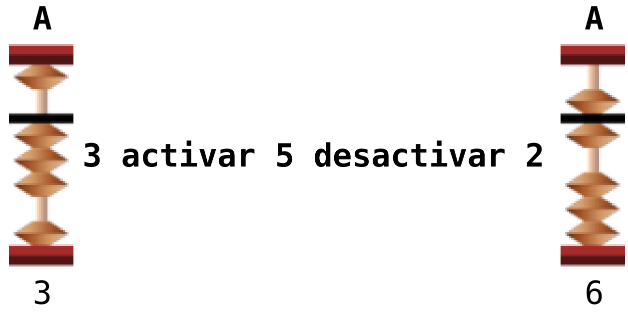
- **3 activar 3**, es decir, simplemente activar tres cuentas inferiores.
- **3 activar 5 desactivar 2**, es decir, activar una cuenta superior y desactivar dos inferiores.
- **3 restar 7 lleva 1**, es decir, restar 7 y *acarrear* (sumar) 1 a la columna de la izquierda.

que se aplican, por ejemplo, a los siguientes casos:

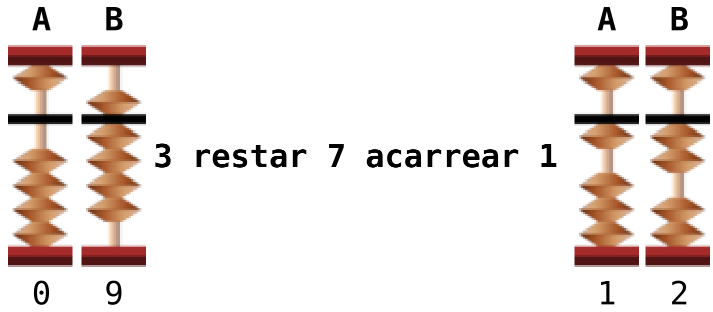
**1+3**



**3+3**




**9+3**




Comprenderá mejor estas reglas más adelante, pero no se preocupe de todos modos, no tendrá que seguir estas 48 reglas, ya que irá por un camino más fácil memorizando solo seis reglas que, además, se pueden resumir en sólo tres.

# Suma y resta de un dígito

El primer paso para aprender a sumar y restar con un ábaco es aprender a sumar o restar uno de los 9 dígitos 1, 2,..., 9 a/de cualquier otro 0, 1, 2,..., 9; en total 180 casos que recorreremos en nuestra práctica diaria hasta que los tengamos integrados en nuestra memoria motora. Después de esto, sumar o restar números de varios dígitos será tan simple como iterar este proceso de manera ordenada para todos los dígitos del sumando o sustraendo.

## Lo que necesita saber

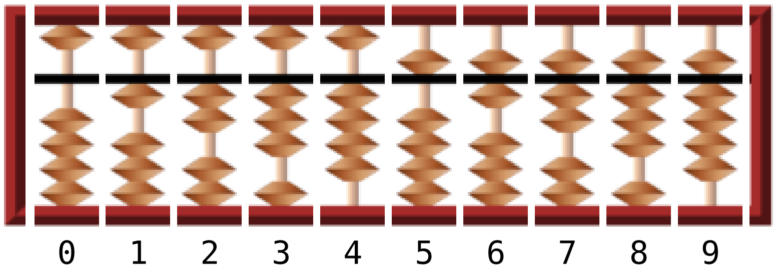
Para tratar los 180 casos mencionados anteriormente sin memorizar las 48 reglas del *Panzhu Suanfa*, necesitamos memorizar algunos datos casi triviales:

- las cuentas necesarias para formar un dígito.
- los complementos a 5 de los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5
- los complementos a 10 de los dígitos 1, 2, ..., 10

### Cuentas necesarias para formar un dígito

Recuerde lo que se dijo en los Conceptos Básicos de este libro: *"La suma se simula reuniendo los conjuntos de contadores que representan a los dos sumandos, mientras que la resta se simula eliminando del conjunto de contadores que representan al minuendo un conjunto de contadores que* *representan al sustraendo"* . Por lo tanto, necesitamos saber las cuentas que componen cada dígito para poder sumarlas o restarlas, pero esto ya lo sabemos por la figura:

**Representación de números en un ábaco moderno 4+1**




o en forma de tabla:

**Cuentas necesarias para formar un dígito**

| Dígito | Superiores | inferiores |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 2 |
| 3 | 0 | 3 |
| 4 | 0 | 4 |
| 5 | 1 | 0 |
| 6 | 1 | 1 |
| 7 | 1 | 2 |
| 8 | 1 | 3 |
| 9 | 1 | 4 |

**Números complementarios**

También necesitamos memorizar dos tipos de parejas de dígitos:

- Números complementarios a 5
- Números complementarios a 10

Estos son las parejas de dígitos que juntos suman 5 o 10. Siempre los podemos encontrar mentalmente con nuestro conocimiento de suma y resta, pero con la práctica terminarán sólidamente instalados en nuestra memoria sin la necesidad de "calcularlos" mentalmente. Son la base de la mecánica del ábaco.

**Números complementarios a 5**

| | | |
|---|---|---|
| 0 - 5 | 1 - 4 | 2 - 3 |

**Números complementarios a 10**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 - 10 | 1 - 9 | 2 - 8 | 3 - 7 | 4 - 6 | 5 - 5 |

En una etapa posterior, para tratar con números negativos, también necesitará manejar números complementarios a 9:

**Números complementarios a 9**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 - 9 | 1 - 8 | 2 - 7 | 3 - 6 | 4 - 5 |

Pero por ahora puede olvidarse de ellos sin problemas.

## Las reglas a utilizar

La mecánica de la suma y la resta se basa en **tres reglas** que se probarán en secuencia tomando en cuenta lo siguiente:

- Sólo si una regla fracasa (porque no dispongamos de las cuentas necesarias para completar la operación) procederemos a probar con la siguiente regla.
- La segunda de las reglas solo funciona para los dígitos 1, 2, 3 y 4.
- La tercera regla descompone la operación en otras dos *"más simples"* : un **acarreo** a la columna directamente a la izquierda, sea **llevar** (sumar 1) o **tomar prestado** (restar 1) de esa columna, más una operación del tipo opuesto (es decir, una resta si estamos sumando o una suma si estamos restando). En este caso:
  - La primera operación, con la columna de la izquierda (llevar o tomar prestado), es trivial la mayor parte de las veces, pero no siempre.
  - La segunda operación (la opuesta a la inicial) culminará usando las reglas 1 o 2 (nunca 3) de la operación contraria; es decir, la operación acabará aquí.
  - Necesitaremos decidir en qué orden haremos estas dos operaciones.

### Reglas para la suma

Estas son las reglas para la suma de un dígito:

| | |
|---|---|
| **1** | Trate de añadir las **cuentas necesarias** |
| **2** | Trate de añadir 5 (una **cuenta superior**) y retirar el complementario a 5 (**cuentas inferiores**) |
| **3** | **Lleve 1** a la izquierda y **reste** el complementario a 10 |

### Reglas para la resta

Y estas son las reglas para su sustracción:

| | |
|---|---|
| **1** | Trate de retirar las **cuentas necesarias** |
| **2** | Trate de **retirar** 5 (cuenta superior) y **añadir** el complementario a 5 (cuentas inferiores) |
| **3** | **Tome prestado** 1 de la izquierda y **sume** el complementario a 10 |

### Reglas conjuntas de suma y resta

Las reglas anteriores para la suma y la resta son de estructura idéntica, por lo que podemos fusionarlas en:

| | |
|---|---|
| **1** | Trate de **añadir/retirar** las **cuentas necesarias** |
| **2** | Trate de **añadir/retirar** 5 (cuenta superior) y **retirar/añadir** el complementario a 5 (cuentas inferiores) |
| **3** | **Lleve/tome prestado** 1 de la izquierda y **reste/sume** el complementario a 10 |

¡y así sólo tendremos tres reglas que memorizar! Estas reglas nos ayudarán en la fase inicial de nuestra práctica a decidir qué cuentas hemos de mover, pero con el tiempo las iremos necesitando cada vez menos, conforme vayamos integrando en nuestra memoria motora cada uno de los 180 casos de suma y resta de un dígito y, con la práctica, llegaremos a prescindir totalmente de ellas. Entonces podremos decir que hemos aprendido a sumar y restar con el ábaco.

Las reglas anteriores nos muestran la absoluta simetría de las operaciones de suma y resta con el ábaco y justifican que tratemos ambas operaciones conjuntamente.

### Orden de las operaciones

Antes de pasar a algunos ejemplos preliminares tenemos que decidir qué orden de operación usar en caso de llegar a la regla 3, lo que sucederá la mitad de las veces. Esta regla nos lleva a dividir el problema original en dos partes, con suerte más simples: un acarreo (llevada o préstamo) y una operación del tipo opuesto a la que estamos realizando. ¿Qué hacemos primero?

El método estándar japonés que se enseña actualmente y desde finales del siglo XIX propone realizar primero el préstamo y luego la suma del número complementario en el caso de la resta (lo cual recibe el nombre de *sakidama* 先珠 en japonés), mientras que en el caso de la suma, la resta del número complementario se hace primero y luego se lleva 1 a la columna de la izquierda (*atodama* 後珠) [Kojima 1954]. Esto parece inspirado en la estructura de las reglas / versos / rimas chinas utilizadas para enseñar el ábaco desde la antigüedad, pero no parece haber ninguna razón lógica convincente para hacerlo y no todos están de acuerdo [Abraham 2011].

Como veremos, con el ábaco se trabaja de izquierda a derecha durante la suma y resta de números de varios dígitos, por lo que parece natural intentar respetar este movimiento de izquierda a derecha de la mano sin molestarla con continuas idas y venidas a la columna de la izquierda. Usar siempre *sakidama* (llevar y tomar prestado primero), tanto para la suma como para la esta, parece lo más natural.

No hace falta decir que si tiene un profesor o un entrenador debe seguir escrupulosamente sus instrucciones, pero si es autodidacta no dude en experimentar hasta encontrar su camino.

Por cierto, en algunos países asiáticos se enseña a usar la mano izquierda para llevar y tomar prestado.

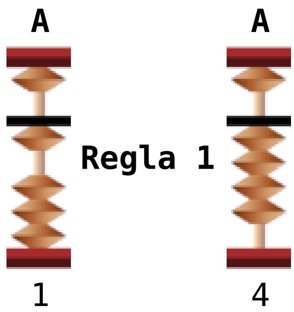
### Algunos ejemplos preliminares

**Ejemplo**

Ponga un 1 en una columna de su ábaco y súmele 3:

1. ¿Tenemos a nuestra disposición (inactivas) las **cuentas necesarias** (3 inferiores) para sumarlas al 1 de nuestro ábaco? ¡Sí!
2. entonces, las activamos y hemos completado la operación con la **primera regla**.

**1+3**



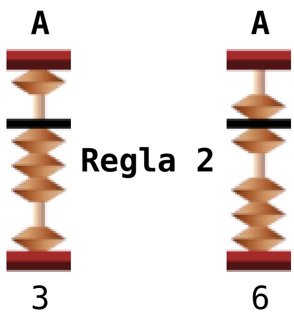

---

**Ejemplo**

Entre 3 en una columna de su ábaco y súmele otro 3:

1. ¿Tenemos a nuestra disposición (inactivas) las cuentas necesarias (3 inferiores) para sumarlas a las 3 de nuestro ábaco? ¡No!
2. entonces, pasamos a la segunda regla.
3. Como el sumando 3 es menor que 5 podemos probar la segunda regla: ¿Tenemos a nuestra disposición (inactiva) una cuenta superior? ¡Sí!
4. entonces, aplicamos la segunda regla: activamos la cuenta superior y retiramos dos cuentas inferiores (el complemento a 5 del sumando 3).

**3+3**




---

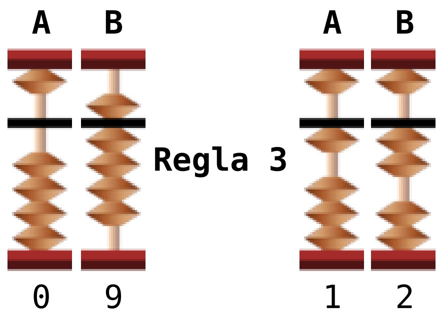
**Ejemplo**

Ponga 9 en una columna de su ábaco y sume 3:

1. ¿Tenemos a nuestra disposición (inactivas) las cuentas necesarias (3 inferiores) para sumarlas a las 3 de nuestro ábaco? ¡No!
2. entonces, pasamos a la segunda regla.

3. Como el sumando 3 es menor que 5 podemos probar la segunda regla: ¿Tenemos a nuestra disposición (inactiva) una cuenta superior? ¡No!
4. Entonces procedemos a la tercera regla:
5. Sume 1 a la columna **A** y reste 7 (el complemento a 10 de 3) de **B**
6. ¿Tenemos a nuestra disposición (activas, estamos restando ahora de la columna **B**) las cuentas necesarias (una cuenta superior y 2 inferiores) para retirarlas del 9 de nuestro ábaco? ¡Sí!
7. entonces, retírelas y habremos completado esta parte de la operación con la primera regla.

**9+3**




Como puede ver, las reglas utilizadas aquí son las mismas que aparecieron en el *Panzhu Suanfa* de Xú-Xīnlǔ [1573], ¡pero condensadas en sólo tres reglas gracias al concepto de números complementarios!

Veamos ahora los movimientos inversos para la resta:

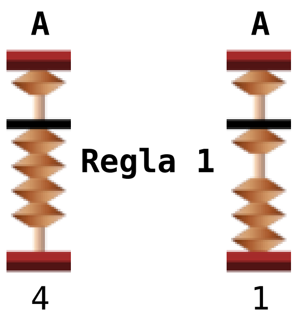
---

**Ejemplo**

Ingrese 4 en una columna de su ábaco y reste 3 de la misma:

1. ¿Tenemos a nuestra disposición (activas) las cuentas necesarias (3 inferiores) para retirarlas de las 4 en nuestro ábaco? ¡Sí!
2. entonces, las desactivamos y habremos completado la operación con la primera regla.

**4-3**




---

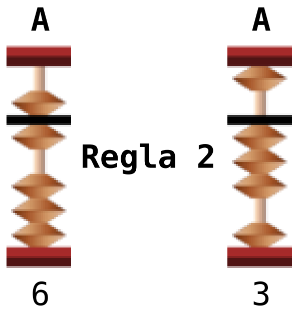
**Ejemplo**

Entre 6 en una columna de su ábaco y reste 3 de ella:

1. ¿Tenemos a nuestra disposición (activas) las cuentas necesarias (3 inferiores) para restarlas a las 6 de nuestro ábaco? ¡No!
2. entonces, pasamos a la segunda regla.

3. Como el sustraendo 3 es menor que 5 podemos probar la segunda regla: ¿Tenemos a nuestra disposición (activa) una cuenta superior? ¡Sí!
4. Entonces aplicamos la segunda regla: desactivamos la cuenta superior y agregamos dos cuentas inferiores (el complemento a 5 del sustraendo 3).

**6-3**



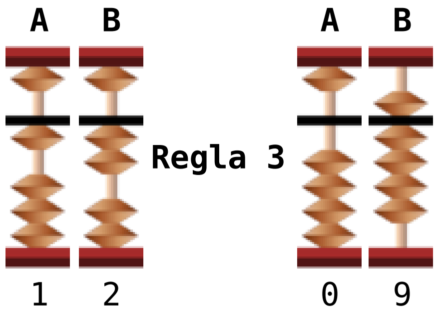

---

**Ejemplo**

Entre 12 en un par de columnas de su ábaco (**AB**) y reste 3 de **B**:

1. ¿Tenemos a nuestra disposición (activas) las cuentas necesarias (3 inferiores) para retirarlas de **B**? ¡No!
2. Entonces, intentamos la segunda regla.
3. Como el sustraendo 3 es menor que 5 podemos probar la segunda regla: ¿Tenemos a nuestra disposición (activa) una cuenta superior? ¡No!
4. Entonces, pasamos a la tercera regla:
   1. Tome prestado (reste) 1 de **A** y sume 7 (el complemento a 10 de 3) a **B**
   2. ¿Tenemos a nuestra disposición (inactivas, estamos sumando ahora) Las cuentas necesarias (una cuenta superior y 2 inferiores) para agregarlas a las 2 en **B**? ¡Sí!
   3. * entonces, actívelas y habremos completado esta parte de la operación con la primera regla.

**12-3**




## Tipos de suma y resta de un solo dígito

La siguiente tabla muestra para cada una de las 180 operaciones elementales de suma y resta qué regla nos resuelve el problema. Puede serle útil durante sus primeras prácticas, para elegir qué dígitos sumar o restar.

**Tipos de suma y resta de un solo dígito**

| Suma | | | | | | | | | | | | Resta | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | | | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
| **+1** | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | | **-1** | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **+2** | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | | **-2** | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| **+3** | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | | **-3** | 3 | 3 | 3 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| **+4** | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | | **-4** | 3 | 3 | 3 | 3 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| **+5** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | | **-5** | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **+6** | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | **3** | **3** | **3** | **3** | 3 | | **-6** | 3 | **3** | **3** | **3** | **3** | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **+7** | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | **3** | **3** | **3** | 3 | 3 | | **-7** | 3 | 3 | **3** | **3** | **3** | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 |
| **+8** | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | **3** | **3** | 3 | 3 | 3 | | **-8** | 3 | 3 | 3 | **3** | **3** | 3 | 3 | 3 | 1 | 1 |
| **+9** | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | **3** | 3 | 3 | 3 | 3 | | **-9** | 3 | 3 | 3 | 3 | **3** | 3 | 3 | 3 | 3 | 1 |

Como puede ver, las tablas anteriores para la suma y la resta son imágenes especulares entre sí. Observe también cómo la mitad de los casos corresponden a la regla tres, es decir, requieren acarreos, y de ellos, los marcados en negrita, terminan con una operación de tipo 2 opuesta. Verifique también cómo la regla 2 solo afecta la suma o resta de dígitos menores que 5.

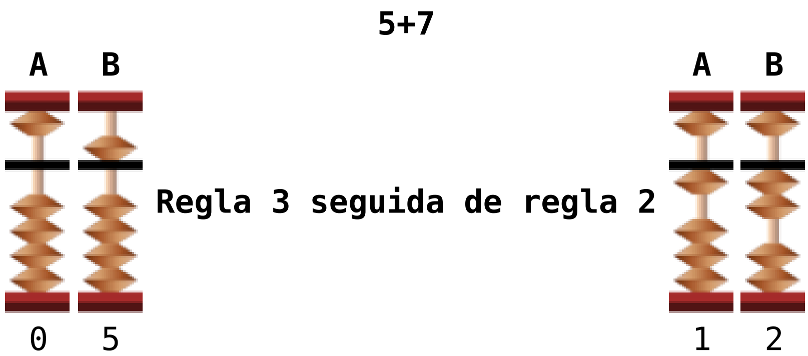
## Ejemplos

Estudie detenidamente los siguientes ejemplos.

**Ejemplo**

Ponga 5 en una columna de su ábaco y sume 7:

En este ejemplo, que requiere un acarreo (regla 3), la resta del número complementario a su vez requiere el uso de la regla 2, que afecta a la cuenta superior.

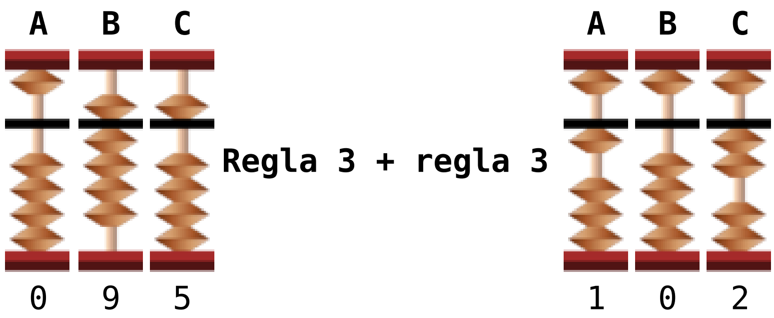


**Ejemplo**

Entre 95 en el ábaco y súmele 7:

Ahora el acarreo conduce a otra operación de tipo 3, que requiere a su vez un nuevo acarreo. En esta operación se ven afectadas tres columnas del ábaco.

**95+7**




**Ejemplo**

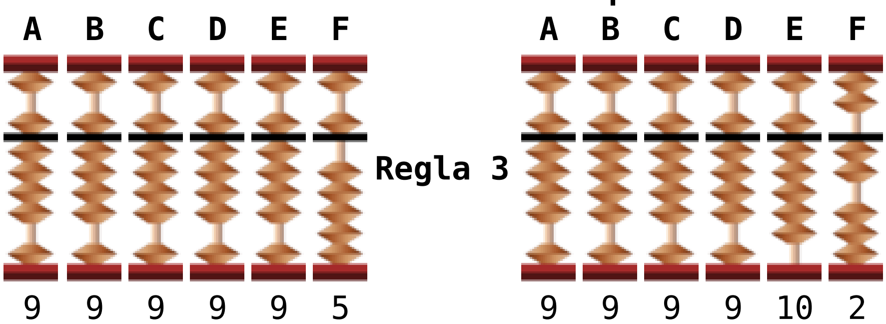
Entre 999995 en el ábaco y súmele 7:

Se trata de una situación extrema, extrapolación del caso anterior, que conviene estudiar detenidamente. ¡El acarreo se extiende o corre a través de las columnas de la izquierda hasta que encuentra un *hueco* para alojarse!

**999995+7**


Piense que, si tuviéramos a nuestra disposición una **quinta cuenta inferior**, como en el caso del ábaco tradicional, podríamos haber evitado este "acarreo" al menos temporalmente.

**999995+7 en un ábaco tipo 5+2**



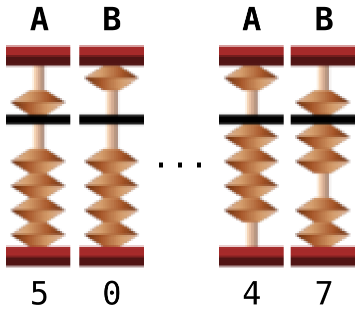
Para obtener detalles sobre el uso de la quinta bola inferior, puede consultar el capítulo correspondiente una vez que haya adquirido suficiente práctica.

**Ejemplo**

Entre 50 en su ábaco y reste 3:

En este caso de una operación de tipo 3, el acarreo (préstamo) a su vez requiere una operación de tipo 2 (que afecta a la cuenta superior).

**50-3**

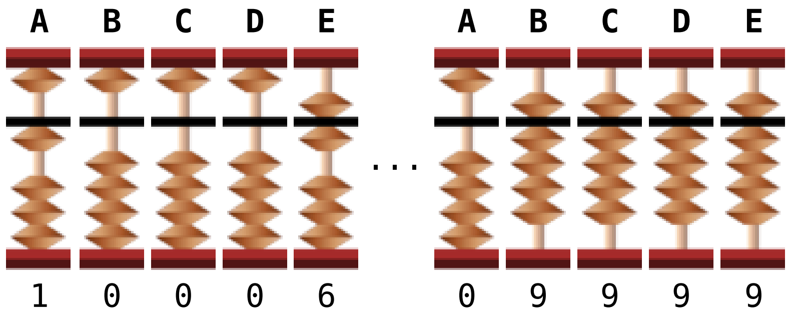



**Ejemplo**

Introduzca 10006 en su ábaco y reste 7:

Finalmente, este es un caso de *"pedir prestado"* donde tenemos que viajar lejos hacia la izquierda para encontrar *algo* de lo que poder restar. Estudie también este caso detenidamente.

**10006-7**




Se trata también de una situación que se intenta paliar con el uso de una quinta cuenta inferior en los ábacos tradicionales.

## Dos consejos

Hasta aquí nuestras explicaciones *teóricas* o *intelectuales* sobre el ábaco. Ahora ya sabe lo que "es" el ábaco oriental y está en camino. Este conocimiento intelectual será su guía durante sus primeros pasos, pero con la práctica, los movimientos de las cuentas se convertirán en una segunda naturaleza para usted y nunca volverá a pensar en todas estas reglas (al menos, hasta que escriba su primer libro sobre el ábaco). Para lograr esto necesitará practicar y practicar y te ofrecemos un par de consejos importantes que le ayudarán a completar el camino que está tomando ahora.

- **Nunca lea los resultados intermedios.** Este es un mal hábito que no conduce a nada, sólo a perder tiempo y energía mental, y lo que quiere es adquirir rapidez y confort en el uso del ábaco. Su ábaco está ahí para mantener sus números seguros sin que tenga que preocuparse de ellos. Debería limitarse a "reaccionar" a la disposición de las cuentas sin ser consciente del número que estas representan.
- **Olvídese de las tablas de sumar y restar**, salvo lo que hemos extraído de ellas en forma de números complementarios a 5 y 10. En particular, nunca piense: "Tengo que sumar 7+8, esto da 15, luego tiene que aparecer un quince en el ábaco". Si hace esto, estará "pensando" mientras suma y resta, y eso lo cansará y lo frenará. Si tiene que pensar en algo, piense en las reglas de movimiento de las cuentas y no en los números, ...hasta que sea capaz de sumar y restar mecánicamente mientras piensa en cualquier otra cosa.

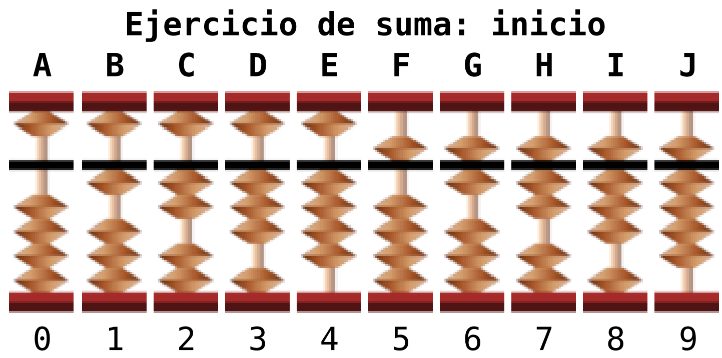
Si no sigue estos consejos, probablemente desarrollará un mal hábito que puede ser muy difícil de corregir posteriormente, como ocurre con los malos hábitos que se adquieren, por ejemplo, al estudiar un instrumento musical.

## Y ahora la práctica

Sus primeros ejercicios deben ser lo más simples posible y nada parece más fácil que elegir aleatoriamente dos dígitos, por ejemplo: 6 y 8, y tratar de sumarlos o restarlos (quizás agregando un uno delante del primer número si al restar el segundo necesita tomar prestado). Puede utilizar la tabla de tipos de operaciones explicada anteriormente en este capítulo para conocer de antemano el tipo de operación a realizar.

Posteriormente, se debe proceder a una práctica sistemática de los 180 casos de suma y resta de un solo dígito, para lo cual se propone el siguiente ejercicio que también servirá como introducción a la suma y resta de números de varios dígitos.

Comience con el ábaco en el siguiente estado, con el número 123456789, y agregue el mismo dígito a cada una de las nueve columnas **B** - **J** procediendo de izquierda a derecha




Por ejemplo, para sumar 1 a cada uno de los dígito de 123456789; es decir, para sumar 111111111 a 123456798, siga los pasos indicados en la siguiente tabla de procedimiento

**111111111 + 123456798**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJ** | |
|  123456789 | Empezar con esto |
| +1 | Sumar 1 a **B** (Tipo 1) |
|  +1 | Sumar 1 a **C** (Tipo 1) |
|   +1 | Sumar 1 a **D** (Tipo 1) |
|    +1 | Sumar 1 a **E** (Tipo 1) |
|     +1 | Sumar 1 a **F** (Tipo 1) |
|      +1 | Sumar 1 a **G** (Tipo 1) |
|       +1 | Sumar 1 a **H** (Tipo 1) |
|        +1 | Sumar 1 a **I** (Tipo 1) |
|         +1 | Sumar 1 a **J** (Tipo 3 con doble acarreo) |
|  234567900 | Resultado |
| **ABCDEFGHIJ** | |

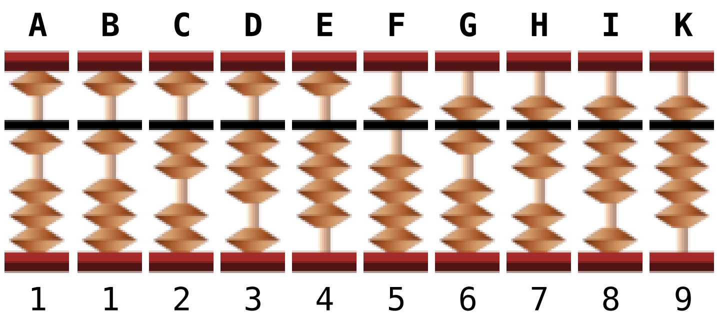
y debería llegar al resultado indicado: 123456789 + 111111111 =234567900. La siguiente tabla muestra los resultados de sumar 111111111, 222222222, ... 999999999 a 1234568789.

**123456789 +ddddddddd**

| d | Resultado |
|---|---|
| 1 | 234567900 |
| 2 | 345679011 |
| 3 | 456790122 |
| 4 | 567901233 |
| 5 | 679012344 |
| 6 | 790123455 |
| 7 | 901234566 |
| 8 | 1012345677 |
| 9 | 1123456788 |

En cuanto a la resta, añadiremos un **1** adicional a la columna **A** para futuros acarreos:

**Ejercicio de resta: inicio**



y procederemos de forma similar

**Restando el `dígito 1` de `B-J`**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJ** | |
| 1123456789 | Inicio |
| -1 | Restar 1 de **B** (Tipo 1) |
|  -1 | Restar 1 de **C** (Tipo 1) |
|   -1 | Restar 1 de **D** (Tipo 1) |
|    -1 | Restar 1 de **E** (Tipo 1) |
|     -1 | Restar 1 de **F** (Tipo 2) |
|      -1 | Restar 1 de **G** (Tipo 1) |
|       -1 | Restar 1 de **H** (Tipo 1) |
|        -1 | Restar 1 de **I** (Tipo 1) |
|         -1 | Restar 1 de **J** (Tipo 3) |
| 1012345678 | Resultado |
| **ABCDEFGHIJ** | |

y deberíamos obtener: 1012345678 = 1123456789-111111111. Para el resto de dígitos, la siguiente tabla muestra los resultados de restar 111111111, 222222222, ... 999999999 de 1123456789.

**1123456789-ddddddddd**

| d | Resultado |
|---|---|
| 1 | 1012345678 |
| 2 | 901234567 |
| 3 | 790123456 |
| 4 | 679012345 |
| 5 | 567901234 |
| 6 | 456790123 |
| 7 | 345679012 |
| 8 | 234567901 |
| 9 | 123456790 |

Durante un tiempo debería practicar estos ejercicios a diario hasta que note que poco a poco va sustituyendo su trabajo intelectual (pensando en las reglas a utilizar) por una respuesta mecánica instintiva.

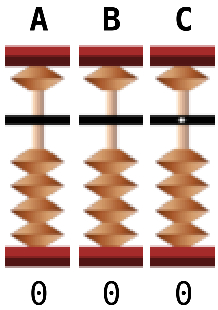
# Sumas y restas de varios dígitos

## Trabajar siempre de izquierda a derecha

En castellano, los números se nombran comenzando con la potencia más alta de diez; 327 es "trescientos veintisiete" y no "siete veinte trescientos". Este es el caso de muchos otros idiomas, incluidos el chino y el japonés, pero no de otros como los de la familia semítica. Esta es la razón principal por la que en el ábaco la suma o resta de números de varios dígitos se trabaja **de izquierda a derecha**; esto hará las cosas más sencillas, tanto si tenemos que leer los números de una lista como si alguien nos los dicta.

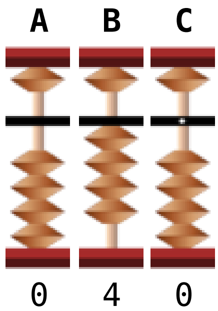
Por ejemplo, obtengamos 44 + 78. Comencemos con un ábaco puesto a cero e introduzcamos el primer sumando 44 en cualquier lugar del mismo (alineado con una marca de varilla unitaria si lo desea, esto es conveniente pero no esencial)

**Ponga a cero el ábaco**



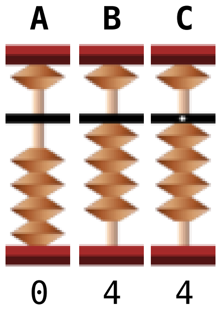

ponga 4 (40) en **B**

**Entre 40**



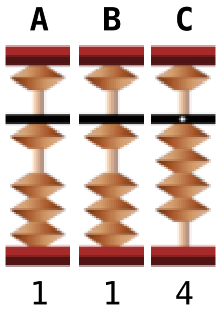

ahora 4 en **C**

**Entre 4**



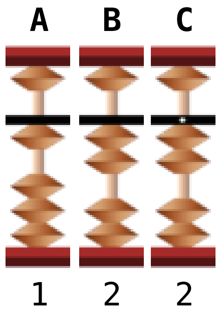

ahora sume 7 (70) a **B**

**+70**




por último sume 8 a **C**

**+8**




El resultado: 122 aparece en **ABC**.

En una forma más compacta:

**44 + 78**

| Abacus | Comment |
|---|---|
| **ABC** | |
| . | Marca unidad en **C** |
| 4 | Entre 4 en **B** (40) |
| 44 | Entre 4 en **C** |
| +7 | Sume 7 a **B** (70) |
| 114 | |

| | |
|---|---|
| +8 | Sume 8 a **C** |
| 122 | Resultado |
| . | Marca unidad en **C** |

---

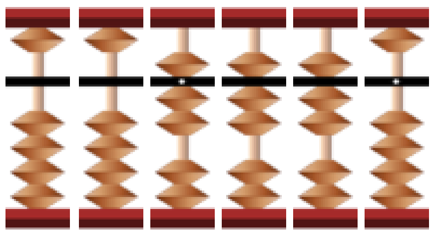
Otro ejemplo. Supongamos que tenemos que obtener el total de estas cantidades en euros:

| **Suma** |
|---|
| 7.77 € |
| 11.99 € |
| 69.62 € |
| 54.43 € |
| -96.99 € |
| **Total** |
| 46.82 € |

Comience poniendo a cero su ábaco e introduzca el primer número (de izquierda a derecha). Puede alinearlo con algunos de los marcadores de puntos unitarios si lo desea.

**Tras introducir el primer sumando**

**A B C D E F**



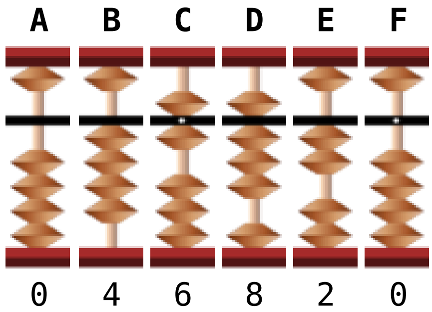
0 0 7 7 7 0

**Suma**

| **Ábaco** | **Comentario** |
|---|---|
| **ABCDEF** | |
| . . | Marca unidad |
| 777 | Entre 7.77 € |
| +1 | Sumar 11.99 € |
| +1 | |
| +9 | |
| +9 | |
| 1976 | Resultado intermedio |
| +6 | Sumar 69.62 € |
| +9 | |
| +6 | |
| +2 | |

| | |
|---|---|
| 8938 | Resultado intermedio |
| +5 | Sumar 54.43 € |
| +4 | |
| +4 | |
| +3 | |
| 14381 | Resultado intermedio |
| -9 | Restar 96.99 # |
| -6 | |
| -9 | |
| -9 | |
| 4682 | Total: 46.82 € |
| .   . | Marca unidad |

**Resultado final**




## Formas de practicar la suma y la resta

### Con hojas de ejercicios

Debería comenzar su práctica sumando y restando series cortas de números enteros pequeños; por ejemplo, de 3 a 5 números de 2 o 3 dígitos. Por ejemplo:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 594 | 880 | 480 | 336 | 480 | 963 | 29 | 373 |
| 807 | 343 | 879 | 309 | -269 | 744 | 261 | -163 |
| -660 | -181 | -472 | 450 | -122 | -154 | 909 | 423 |
| -466 | -580 | 19 | -335 | 780 | -811 | 186 | -445 |
| 275 | 462 | 906 | 760 | 869 | 742 | 1385 | 188 |

Aumente progresivamente el tamaño de estas series hasta llegar a 10 números y, a partir de aquí, aumente progresivamente el tamaño de los números a sumar / restar a 5 o 6 dígitos. Por ejemplo:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 514299 | 375287 | 351129 | 882678 | 758320 | 562337 | 388730 | 798306 |
| 127127 | 611780 | 806691 | 876701 | 769094 | 315480 | -287030 | -483827 |
| 774517 | -312229 | 600755 | -365479 | 991286 | -540643 | -11891 | 572862 |
| -895449 | 618415 | -368489 | -157706 | -49973 | 513724 | 323483 | 840450 |
| 907858 | -78719 | 815758 | 17497 | 74914 | -651332 | 212117 | 452414 |
| 67913 | -467463 | 573731 | 999762 | -590317 | 359925 | 373242 | -298427 |
| -918061 | -406146 | 51556 | -262868 | 644711 | 285750 | 118641 | 503089 |
| 930513 | 481087 | 668536 | -910991 | -900673 | 883744 | -693301 | 175358 |
| -582082 | 958663 | -609796 | -56430 | -449638 | -591941 | 442672 | 918199 |
| -722266 | 216295 | 713031 | -333692 | -380293 | 75119 | -370874 | 315118 |
| 204369 | 1996970 | 3602902 | 689472 | 867431 | 1212163 | 495789 | 3793542 |

Por lo tanto, necesitará colecciones de problemas de este tipo que puede generar con algunas utilidades gratuitas en Internet (ver abajo Recursos externos)

Con este tipo de práctica desarrollarás dos habilidades diferentes

- Sumar y restar eficientemente con el ábaco.
- leer números de un vistazo y guardarlos en la memoria el tiempo suficiente para trabajarlos en el ábaco.

Esto último es fundamental para, por ejemplo, hacer uso del ábaco en contabilidad.

## Sin hojas de ejercicios

#### El ejercicio 123456789

En los libros antiguos sobre el ábaco era común demostrar la suma y la resta mediante un conocido ejercicio que consiste en sumar el número 123456789 nueve veces a un ábaco puesto a cero hasta llegar al número 1111111101, y luego borrarlo nuevamente restando el mismo número otras nueve veces. Este es un ejercicio conveniente porque usa muchos de los 180 casos de suma y resta de 1 dígito (pero no todos) y permite practicar la suma y resta con el ábaco solo, sin hojas de ejercicios en papel, pero no es un ejercicio elemental dada su longitud. Necesitará, por lo tanto, algo de tiempo de práctica para completarlo sin errores.

A lo largo de este ejercicio se obtienen los siguientes resultados parciales:

| |
|---:|
| 000000000 |
| 123456789 |
| 246913578 |
| 370370367 |
| 493827156 |
| 617283945 |
| 740740734 |
| 864197523 |
| 987654312 |
| 1111111101 |

Para más detalles, consulte el capítulo: Variantes del Ejercicio 123456789.

## Sumas y restas con otros ábacos

Todo lo que aprenda sobre el ábaco oriental funcionará bien con otros tipos de ábaco o al menos simplificará su aprendizaje. Recuerde que las operaciones básicas del ábaco son la suma y la resta y todo lo demás debe reducirse a una secuencia de estas dos operaciones y al problema de cómo organizar tal secuencia de operaciones en el ábaco.

### Varillas de cálculo

Las varillas de cálculo son otro ejemplo de un ábaco bi-quinario, por lo que se aplican las mismas tres reglas de suma y resta estudiadas aquí. Solo tiene que tener en cuenta que los conceptos de activar/desactivar cuentas se traducen en colocar/retirar varillas de la mesa y que "tener a nuestra disposición" varillas para añadir no se refiere al montón de varillas listas para usar que tenemos en la caja, sino a "encajar" dentro de los límites de representación de los números (una varillas de valor 5 y 5 varillas de valor 1 como máximo).

### Ábaco ruso

El ábaco ruso (Schoty) no es un ábaco bi-quinario; por lo que la segunda de las reglas de suma y resta que se dan aquí no funciona. todo se resuelve con la ayuda de la primera y la tercera reglas exclusivamente.

# Recursos externos

- Uitti, Stephen. «Soroban Sheets (Addition and subtraction)». *Soroban*.
- Uitti, Stephen. «Soroban Sheets (Multiplication)». *Soroban*.
- «The generator». *Practicing the soroban*.

# IV Multiplicación Moderna

## Introducción

El concepto básico de multiplicación de números naturales es el de una suma repetida.

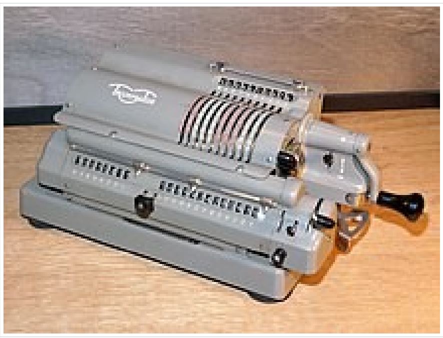
$$a \times b = \underbrace{b + \cdots + b}_{a \text{ times}}$$

Por ejemplo, para multiplicar 47 por 23 solo es necesario sumar 23 47 veces o sumar 47 23 veces; lo podemos hacer con nuestro ábaco:

**Multiplicación como suma repetida**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFHIJ** | |
| .   .   . | Marcas de unidad |
| +1    +47 | Sumar 1 a **C** y 47 a **IJ** |
| 1     47 | |
| +1    +47 | Sumar 1 a **C** y 47 a **IJ** |
| 2     94 | |
| +1    +47 | Sumar 1 a **C** y 47 a **IJ** |
| 3    141 | |
| ... | Continuar del mismo modo<br><br>19 veces...! |
| 22   1034 | |
| +1    +47 | Sumar 1 a **C** y 47 a **IJ** |
| 23   1081 | Fin. 23×47=1081 |
| .   .   . | Marcas de unidad |

Donde repetimos 23 veces la suma de 47 a las columnas **IJ** mientras sumamos 1 a **C** para tener un *"contador"* a nuestra disposición.



Las calculadoras mecánicas del pasado empleaban este procedimiento para multiplicar

¡Pero esto es tremendamente lento! Una forma más eficiente de hacer lo mismo puede ser la siguiente:

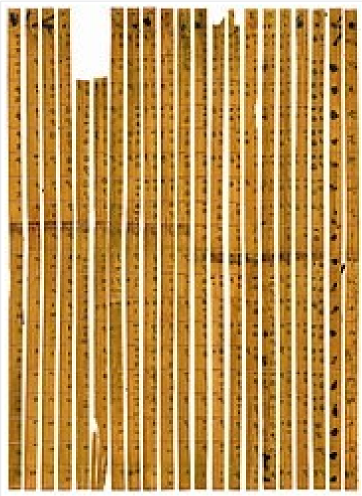
**Una forma más conveniente**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFHIJ** | |
| . . . | Marcas unidad |
| +1 +47 | Sumar 1 a **C** y 47 a **IJ** |
| 1 47 | |
| +1 +47 | Sumar 1 a **C** y 47 a **IJ** |
| 2 94 | |
| +1 +47 | Sumar 1 a **C** y 47 a **IJ** |
| 3 141 | |
| +1 +47 | Sumar 1 a **B** y 47 a **HI** |
| 13 511 | |
| +1 +47 | Sumar 1 a **B** y 47 a **HI** |
| 23 1081 | Fin. 23×47=1081 |
| . . . | Marcas unidad |

Donde esta vez, después de agregar 47 tres veces a **IJ** (y 1 a **C**), nos hemos desplazado una columna a la izquierda y hemos comenzado a agregar 47 a las columnas **HI** (y 1 a **B**). Sumar 47 en **HI** equivale a sumar $470 = 10 \times 47$ a **HIJ** (10 a **BC**) reduciendo drásticamente el número de operaciones a realizar, porque después de hacerlo solo dos veces llegamos a 23 en el contador **BC** y 1081 en **GHIJ**, el resultado final. Esta forma de multiplicar fue la habitual en las calculadoras mecánicas que aparecieron a finales del siglo XIX y que se siguieron utilizando hasta la década de los 70. Pero esto sigue siendo excesivamente lento.

Piense que el ábaco tal como lo conocemos ahora permite sumar muy rápido, pero que antes de su invención se usaban varillas de cálculo que son extraordinariamente lentas de manejar. Por lo tanto, no es sorprendente que los matemáticos chinos, buscando abreviar los cálculos, finalmente inventaran la tabla de multiplicar decimal, tal como la conocemos nosotros, unos siglos antes de nuestra era.

# La tabla de multiplicar



Tiras de bambú conteniendo la tabla de multiplicar decimal más antigua conocida, datada por radiocarbono en el 305±30 antes de nuestra era

Esta es la tabla de multiplicar decimal como la aprendemos en la escuela:

**Tabla de multiplicar decimal**

| × | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| **2** | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| **3** | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| **4** | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| **5** | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| **6** | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| **7** | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| **8** | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| **9** | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

Pero viviendo en la era de las computadoras, lo más probable es que pronto comencemos a usar una calculadora electrónica y en la edad adulta hagamos pocas multiplicaciones a mano. A menudo, muchos de nosotros, incluso los matemáticos, no tenemos la tabla de multiplicar "fresca" en la memoria y esto puede ser una mala noticia para quien se inicia: si se quiere multiplicar (y dividir) de manera eficiente con un ábaco, es necesario "refrescar" la tabla de multiplicar en la memoria y esto puede requerir un cierto tiempo de práctica.

Usando la tabla de multiplicar podemos resolver el problema de multiplicación $47 \times 23$ en la forma:

$$47 \times 23 = (40 + 7) \times (20 + 3) =$$
$$= 40 \times 20 + 40 \times 3 + 7 \times 20 + 7 \times 3 =$$
$$= (4 \times 2) \times 100 + (4 \times 3) \times 10 + (7 \times 2) \times 10 + (7 \times 3)$$

es decir, solo tenemos que recuperar los **productos parciales**:

$$(4 \times 2) = 8, (4 \times 3) = 12, (7 \times 2) = 14, (7 \times 3) = 21$$

de la tabla de multiplicar y sumarlos en los lugares correctos, como hacemos con papel y lápiz

```
   47
  ×23
-----
   21
  12   (×10)
  14   (×10)
+ 8    (×100)
-----
 1081
```

Esto es absolutamente paralelo al método de multiplicación que vamos a seguir con el ábaco.

# El método de multiplicación moderno

Cuando multiplicamos dos números $a$ y $b$, llamamos a ambos números **factores** y **producto** al resultado $a \times b$, pero también es común llamar **multiplicando** a uno de los factores y **multiplicador** al otro. Sin embargo, a la hora de multiplicar con el ábaco:

**Multiplicando**
: Es el **factor que vamos a manipular** sobre el ábaco y que nos guiará para obtener los productos parciales de forma ordenada y alinearlos correctamente para su suma en las posiciones correctas.

**Multiplicador**
: Es el **factor que no vamos a manipular** sobre el ábaco. de hecho no es obligatorio ni siquiera ingresarlo (pero es conveniente). Por lo general, será el factor con menos dígitos de los dos.

## Disposición de la multiplicación

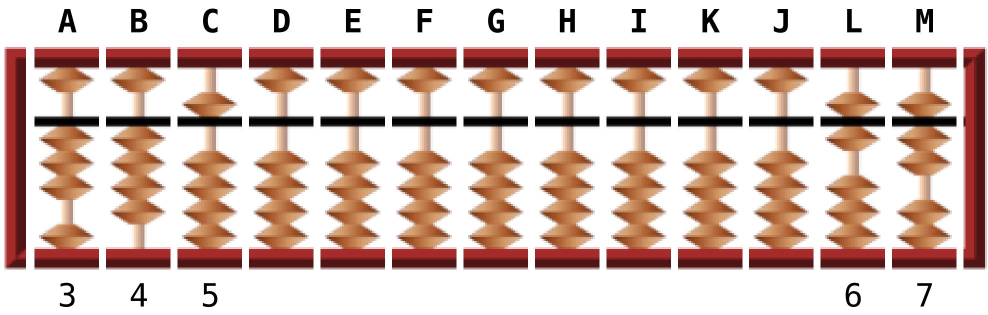
Hay dos formas de introducir ambos factores en el ábaco que pueden considerarse prácticamente equivalentes; Cada uno de ellos tiene sus propias ventajas y desventajas. Lo mismo puede decirse de la división que estudiaremos en el próximo capítulo. Siéntase libre de experimentar con ambos arreglos.

### Disposición tradicional china

El multiplicando se pone a la izquierda en el ábaco y el multiplicador lo suficientemente alejado del mismo. Al menos tantas columnas como dígitos tenga el multiplicador más dos, o mejor tres, deben dejarse libres a la derecha del multiplicando.

**Ejemplo**

**Disposición china tradicional**
**multiplicando: 345, multiplicador: 67**




o en forma de tabla:

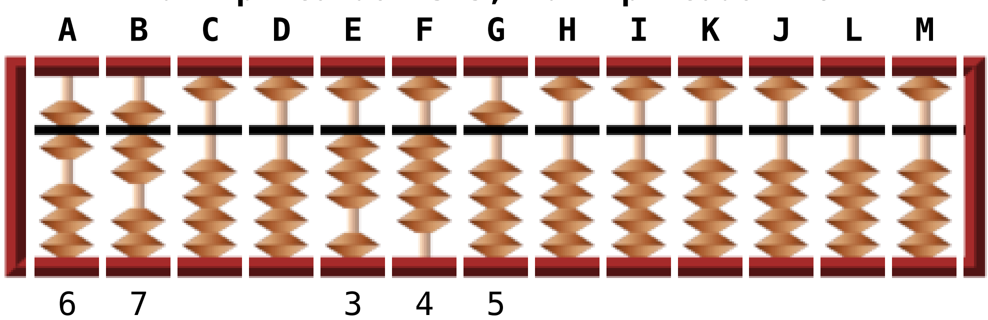
**Disposición china tradicional**
**multiplicando: 345,**
**multiplicador: 67**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLM** | |
| 345          67 | |

**Disposición tradicional japonesa**

Esta es la forma inversa. El multiplicador se sitúa a la izquierda y el multiplicando a la derecha, dejando al menos dos columnas vacías en el medio. Necesitamos tener al menos tantas columnas libres a la derecha del multiplicador como el número de dígitos del multiplicador más uno.

**Disposición tradicional japonesa**
**multiplicando: 345, multiplicador: 67**




o en forma de tabla:

**Disposición japonesa tradicional multiplicando: 345, multiplicador: 67**

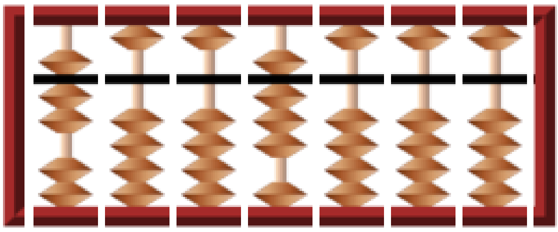
| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLM** | |
| 67   345 | |

Esta es la forma que ha sido más popular en Japón [Kojima 1954] y terminó siendo importada también a China. También es la disposición que usaremos en este capítulo.

## Multiplicación de 1 dígito × 1 dígito

Por supuesto, esto es tan trivial que no necesitamos un ábaco, pero sirve para introducir el resto de ejemplos. Supongamos que tenemos que multiplicar, tomemos 7 como multiplicador, 8 como multiplicando y adoptemos disposición japonesa que acabamos de explicar; es decir, partimos de:

**7×8=56**

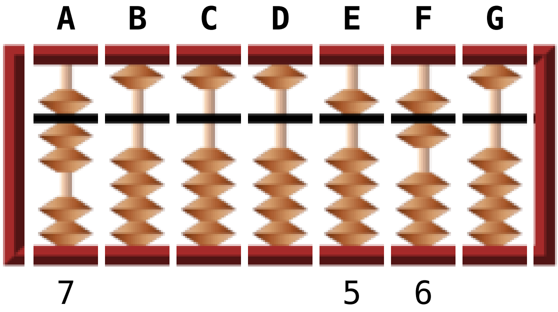



y procedamos del siguiente modo:

**7×8=56**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFG** | |
| 7  8 | Planteando el problema |
|    +56 | Multiplicar **D×A** y sumarlo a **EF** |
| 7  856 | |
| 7  ~~8~~56 | Borrar **D** |
| 7   56 | Resultado: 7×8=56 en **EF** |

**Resultado final**

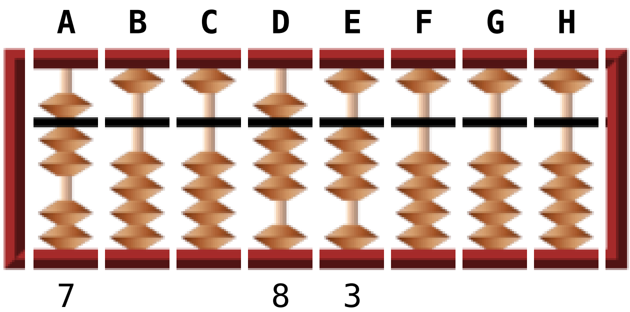



Sí, tiene razón; es usted quien hizo la multiplicación, no el ábaco. En el siguiente ejemplo sin embargo, el ábaco comienza a mostrar su utilidad.

## Multiplicación de 1 dígito × 2 dígitos

Multipliquemos: $7 \times 83$, el multiplicando será 83.

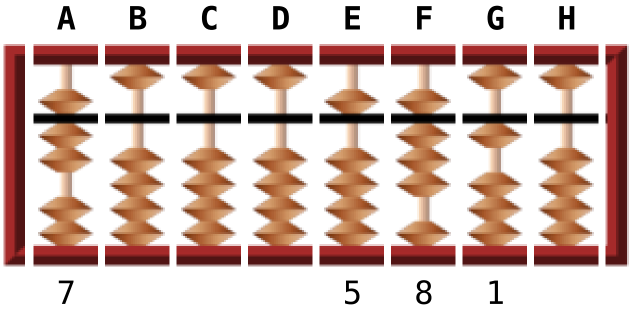
**7×83**




**7×83**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGH** | |
| 7   83 | Planteo |
|      +21 | Multiplicar **E** × **A** y sumarlo a **FG** |
| 7   8321 | |
| 7   8~~3~~21 | Borrar **E** |
| 7   8 21 | |
|     +56 | Multiplicar **D** × **A** y sumarlo a **EF** |
| 7   8581 | |
| 7   ~~8~~581 | Borrar **D** |
| 7    581 | Resultado: 7×83=581 |

**7×83 Resultado**

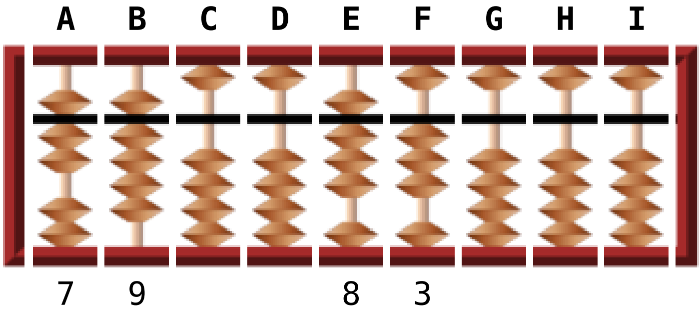



Al menos, el ábaco ha servido para sumar los dos productos parciales en **FG** y **EF**.

## Multiplicación de 2 dígitos × 2 dígitos

Ahora multipliquemos $79 \times 83$.

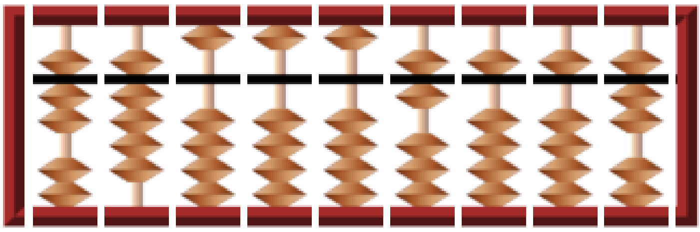
**79×83**




**79×83**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHI** | |
| 79   83 | Planteo |
| +21 | Multiplicar **F×A** y sumarlo a **GH** |
| +27 | Multiplicar **F×B** y sumarlo a **HI** |
| 79   83237 | |
| 79   8~~3~~237 | Borrar **F** |
| 79   8 237 | |
| +56 | Multiplicar **E×A** y sumarlo a **FG** |
| +72 | Multiplicar **E×B** y sumarlo a **GH** |
| 79   86557 | |
| 79   ~~8~~6557 | Borrar **E** |
| 79    6557 | Resultado: 79×83=6557 en **FGHI** |

**79×83 Resultado**




## Multiplicación de varios dígitos

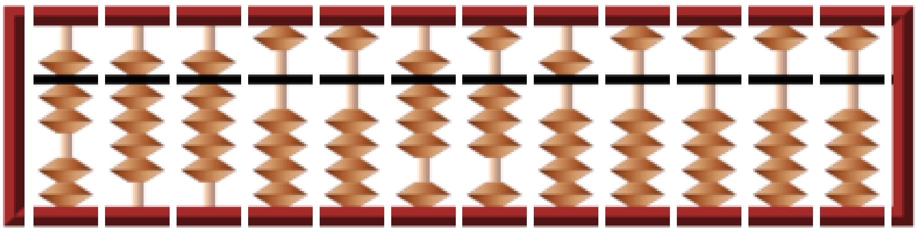
Generalizando lo visto en los ejemplos anteriores:

**Para cada dígito del multiplicando, comenzando por la derecha**

- Multiplicar el dígito actual del multiplicando por los dígitos del multiplicador (de izquierda a derecha), sumando el primer producto parcial a las dos columnas a la derecha del dígito actual del multiplicando, y el resto de los productos desplazándonos sucesivamente una columna a la derecha cada vez.
- Borrar el dígito multiplicando actual.

Veámoslo con el siguiente ejemplo: $799 \times 835$:

**799×835**

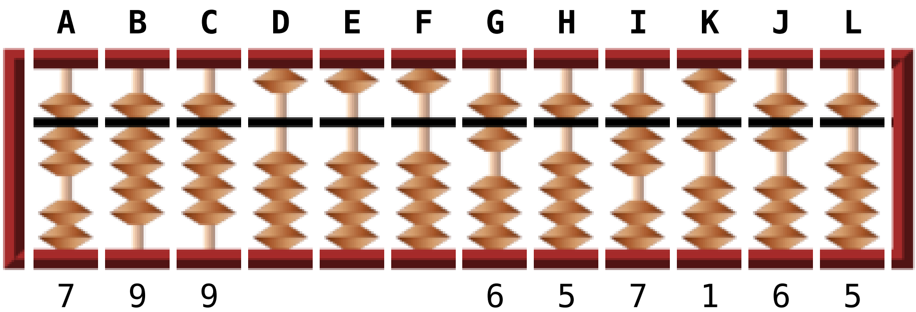



**799×835**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKL** | |
| 799   835 | Planteamiento |
| +35 | Multiplicar **H×A** y sumarlo a **IJ** |
| +45 | Multiplicar **H×B** y sumarlo a **JK** |
| +45 | Multiplicar **H×C** y sumarlo a **KL** |
| 799   8353995 | |
| 799   83~~5~~3995 | Borrar **H** |

| | | |
|---|---|---|
| 799 | 83 3995 | |
| | +21 | Multiplicar **G**×**A** y sumarlo a **HI** |
| | +27 | Multiplicar **G**×**B** y sumarlo a **IJ** |
| | +27 | Multiplicar **G**×**C** y sumarlo a **JK** |
| 799 | 8327965 | |
| 799 | 8~~3~~27965 | Borrar **G** |
| 799 | 8 27965 | |
| | +56 | Multiplicar **F**×**A** y sumarlo a **GH** |
| | +72 | Multiplicar **F**×**B** y sumarlo a **HI** |
| | +72 | Multiplicar **F**×**C** y sumarlo a **IJ** |
| 799 | 8667165 | |
| 799 | ~~8~~667165 | Borrar **F** |
| 799 | 667165 | Resultado: 799×835=667165 |

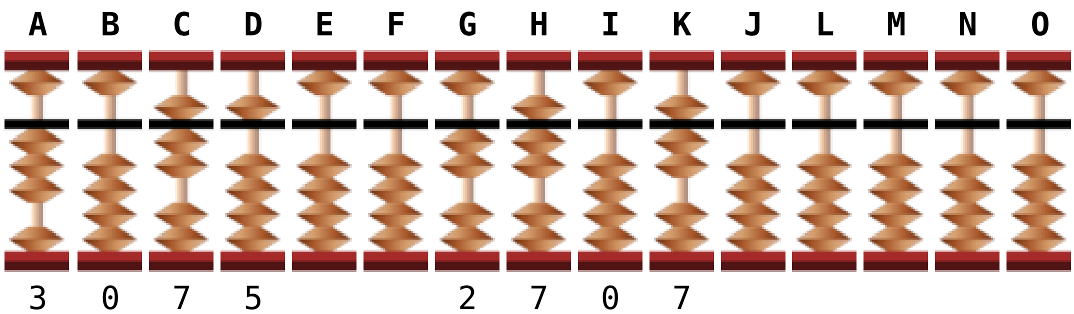
**799×835 Resultado**




## Ceros embebidos

Sea particularmente cuidadoso cuando alguno de los factores tiene ceros internos; por ejemplo:

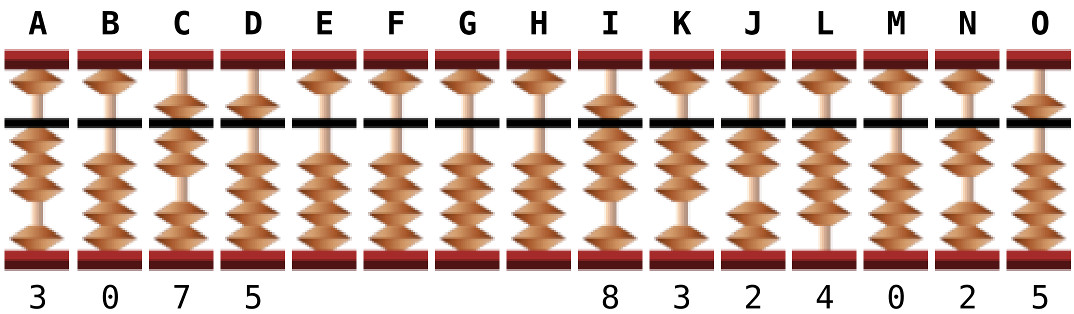
**3075×2707**



**3075×2707**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLMNO** | |
| 3075   2707 | Planteamiento |
|          +21 | Multiplicar **J**x**A**, y sumarlo a **KL** |
|            +49 | Multiplicar **J**x**C**, y sumarlo a **MN**! |
|             +35 | Multiplicar **J**x**D**, y sumarlo a **NO** |
| 3075   270721525 | |
| 3075   270~~7~~21525 | Borrar **J** |
| 3075   27   21525 | |
|        +21 | Multiplicar **H**x**A**, y sumarlo a **IJ** |
|          +49 | Multiplicar **H**x**C**, y sumarlo a **KL**! |
|           +35 | Multiplicar **H**x**D**, y sumarlo a **LM** |
| 3075   2~~7~~2174025 | |
| 3075   272174025 | Borrar **H** |
| 3075   2 2174025 | |
|       +06 | Multiplicar **G**x**A**, y sumarlo a **HI** |
|         +14 | Multiplicar **G**x**C**, y sumarlo a **JK**! |
|          +10 | Multiplicar **G**x**D**, y sumarlo a **KL** |
| 3075   2 8324025 | |
| 3075   ~~2~~ 8324025 | Borrar **G** |
| 3075     8324025 | Resultado: 3075×2707=8324025 |

**3075×2707 Resultado**



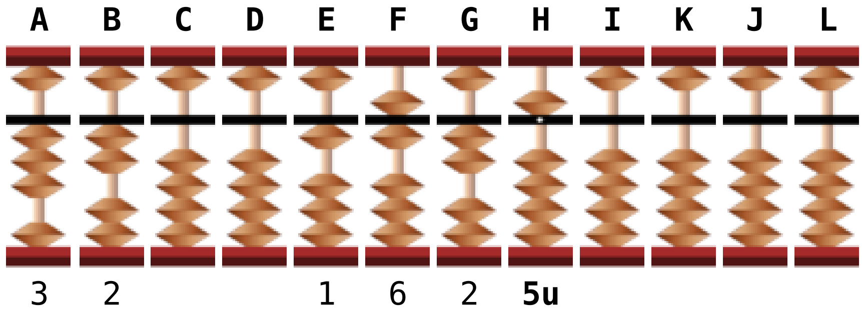

# La columna de la unidad y los decimales

Por favor, revise todos los ejemplos vistos hasta ahora y compruebe que, en todos los casos:

**La columna de las unidades del producto se ubica $n+1$ columnas a la derecha de la columna de la unidades del multiplicando; donde $n$ es el número de dígitos del multiplicador.**

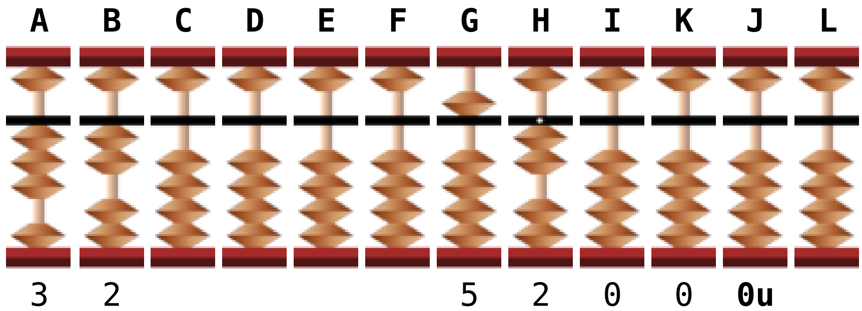
Esta es una regla general para la multiplicación de números naturales siguiendo el método moderno de multiplicación que estamos estudiando. Es conveniente tener en cuenta esta regla ya que el producto podría tener ceros al final, como en el caso $32 \times 1625 = 52000$; lo que podría confundirle. Por ejemplo:

**32×1625**




En el diagrama anterior, la barra unitaria del multiplicando es la columna **H** (señalada con un punto blanco en la barra). Después de la multiplicación, el ábaco muestra:

**32×1625 Resultado: 52000**




Necesita saber que la barra unitaria del resultado es $n + 1 = 2 + 1 = 3$ varillas a la derecha de **H** (es decir, en **J**) para leer correctamente el resultado 52000.

Podemos extender esta regla a números decimales:

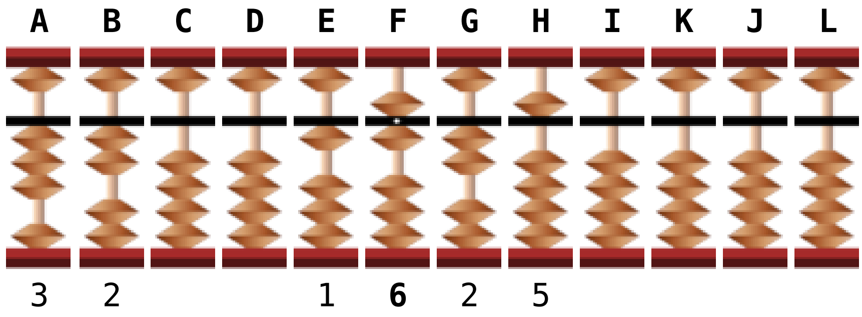
**La columna de las unidades del producto se encuentra $n+1$ columnas a la derecha de la columna de las unidades del multiplicando; donde $n$ es el número de dígitos del multiplicador** a la izquierda de su punto decimal **(¡que podría ser negativo!).**

La siguiente tabla muestra los valores $n$ para algunos multiplicadores:

| Multiplicadores | n |
|---|---|
| 32.7 | 2 |
| 3.27 | 1 |
| 0.327 | 0 |
| 0.00327 | -2 |

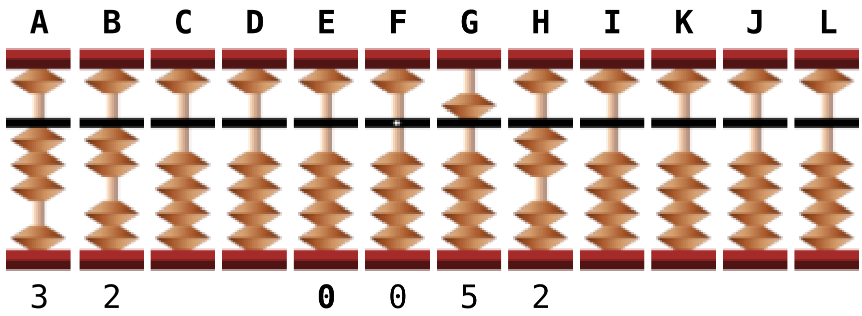
Multipliquemos $0.0032 \times 16.25$; La varilla de las unidades es **F**.

**0.0032×16.25**




y para el multiplicador $0.0032$, tenemos $n = -2$

**0.0032×16.25 Resultado: 0.052**




de modo que la barra unitaria del producto es $n + 1 = -2 + 1 = -1$ barras a la derecha de **F**, es decir, una barra a su izquierda ( **E** ) y el resultado debe leerse como $0.052$.

# Recursos externos

### Hojas de ejercicios

- Uitti, Stephen. «Soroban Sheets (Multiplication)». *Soroban*.
- «The generator». *Practicing the soroban*.

# Otras lecturas

- «Multiplication». *The Japanese Abacus: its Use and Theory*. Tokyo: Charles E. Tuttle Co., Inc.. 1954. ISBN 978-0-8048-0278-9. https://archive.org/details/japaneseabacus00taka/page/52/mode/2up.
- Heffelfinger, Totton (2004). «Multiplication». *算盤 Abacus: Mystery of the Bead*. Archivado desde el original, el 29 de Junio de 2021.

# V División Moderna

## Introducción y primeros métodos

### División euclidiana

Si consideramos dos números naturales $a$ y $b$, la división de $a$ por $b$ (indicado como $a/b$ o $a \div b$) responde a la pregunta de cuántas veces el número $b$ está contenido en el número $a$. El número $a$ en $a/b$ es el **dividendo** y $b$ el **divisor**. La respuesta o resultado $q = a/b$ se denomina **cociente**.

Tomemos $a = 1225$ y $b = 35$ como ejemplo. No hay forma más sencilla de proceder para responder a la pregunta que mediante la resta repetida, contando el número de veces que podemos restar el divisor del dividendo. Podemos hacerlo directamente sobre el ábaco usando una columna como *contador*:

**1225÷35 = 35, primera forma**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| ABCDEFGHIJKL | |
| 35        1225 | |
|     +1    -35 | Restar 35 de **KL**, sumar 1 al contador en **F** |
| 35    1   1190 | |
|     +1    -35 | Restar 35 de **KL**, sumar 1 al contador en **F** |
| 35    2   1155 | |
|     +1    -35 | Restar 35 de **KL**, sumar 1 al contador en **F** |
| 35    3   1120 | |
|     ... | Continuar 33 veces mas del mismo modo... |
| 35   33     70 | |
|     +1    -35 | Restar 35 de **KL**, sumar 1 al contador en **F** |
| 35   34     35 | |
|     +1    -35 | Restar 35 de **KL**, sumar 1 al contador en **F** |
| 35   35     00 | Hecho!, el cociente es 35 en **EF** |

Así descubrimos que el número 35 está contenido exactamente 35 veces en 1225, ya que no podemos continuar restando sin empezar a tratar con números negativos. Por lo tanto, en este ejemplo, el cociente es: $q = 35$.

Como podemos ver, en este caso podemos escribir $1225 = 35 \times 35$, o bien:

$$a = q \times b$$

lo que no podemos esperar en el caso general. Si repitiéramos el proceso con $a = 1240$, veríamos que después de restar 35 por 35 nos quedaría 15 en el ábaco, del que no podríamos seguir restando 35 sin introducir números negativos. Por lo tanto, tenemos que $1240 = 35 \times 35 + 15$; es decir, el resultado de dividir $1240$ por $35$ da un cociente de $35$ dejando un **resto** de $15$. En general tendremos:

$$a = q \times b + r$$

dónde:

- $a$ es el dividendo
- $b$ es el divisor
- $q$ es el cocientes
- $r$ es el resto, siendo $0 \leq r < b$.

En el caso de que el resto sea cero, decimos que la división es **exacta** y el dividendo es un *múltiplo* del divisor.

Este es el concepto de división euclidiana para números naturales a la que se puede reducir la división de números con fracciones decimales sin más que multiplicar $a$ y/o $b$ por potencias de $10$ adecuadas y después ajustar el punto decimal en el resultado.

## Algunas mejoras: métodos de división a trozos

El procedimiento seguido en la sección anterior es el más simple posible conceptualmente, pero es extraordinariamente largo e ineficiente. En lugar de comenzar directamente restando el divisor $b$ ($35$) del dividendo, comencemos preguntando qué potencia de 10 veces el divisor podemos restar del dividendo; en nuestro caso: ¿podemos restar 3500, 350 o solo 35? Claramente podemos restar 350 y comenzaremos a restar *trozos* de 350 , y cuando no podamos continuar, comenzaremos a restar trozos de 35 de la siguiente manera:

**1225÷35 = 35, una gran mejora**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHI** | |
| 35   1225 | Comienzo, contador en **D** |
| 35  1 875 | Restar 35 de **GH**, sumar 1 al contador **D** |
| 35  2 525 | Restar 35 de **GH**, sumar 1 al contador **D** |
| 35  3 175 | Restar 35 de **GH**, sumar 1 al contador **D** |
| 35  31140 | Restar 35 de **HI**, sumar 1 al contador **E** |
| 35  32105 | Restar 35 de **HI**, sumar 1 al contador **E** |
| 35  33 70 | Restar 35 de **HI**, sumar 1 al contador **E** |
| 35  34 35 | Restar 35 de **HI**, sumar 1 al contador **E** |
| 35  35 00 | Restar 35 de **HI**, sumar 1 al contador **E** |
| 35  35 | Sin resto, hecho!. El cociente es 35 |

Lo cual ha sido mucho más rápido. Como ve en el proceso anterior, hemos reducido intencionadamente la distancia entre el contador y el dividendo tanto como nos ha sido posible. Esto quizás oscurezca un poco el proceso, pero nos acerca a lo que haremos habitualmente con el método de división moderno que explicamos más abajo. Estudie el cálculo anterior cuidadosamente usando su propio ábaco. El método de división que hemos seguido aquí es el usado por las calculadoras mecánicas que mencionamos en el capítulo dedicado a la multiplicación.

Continuemos desde aquí buscando aún más eficiencia.

Si podemos duplicar fácilmente el divisor y retenerlo en la memoria, podemos acortar la operación restando trozos de una o dos veces el divisor.

| Veces | Trozo |
|---|---|
| 1 | 35 |
| 2 | 70 |

**1225÷35 = 35, algo más sofisticado**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHI** | |
| 35   1225 | Comienzo, contador en **D** |
| 35  2 525 | Restar 70 de **GH**, sumar 2 al contador en **D** |
| 35  3 175 | Restar 35 de **GH**, sumar 1 al contador en **D** |
| 35  32105 | Restar 70 de **HI**, sumar 2 al contador en **E** |
| 35  34 35 | Restar 70 de **HI**, sumar 2 al contador en **E** |
| 35  35 00 | Restar 35 de **HI**, sumar 1 al contador en **E** |
| 35  35 | Sin resto. Hecho, El cociente es 35 |

O incluso mejor si podemos construir una tabla como la de abajo doblando el divisor tres veces [Wilson 2005]:

| Veces | Trozo |
|---|---|
| 1 | 35 |
| 2 | 70 |
| 4 | 140 |
| 8 | 280 |

**1225÷35 = 35, un método muy efectivo**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHI** | |
| 35   1225 | Comienzo, contador en **D** |
| 35  2 525 | Restar 70 de **GH**, sumar 2 al contador en **D** |
| 35  3 175 | Restar 35 de **GH**, sumar 1 al contador en **D** |
| 35  34 35 | Restar 140 de **HI**, sumar 4 al contador en **E** |
| 35  35 00 | Restar 35 de **HI**, sumar 1 al contador en **E** |
| 35  35 | Sin resto. Hecho, El cociente es 35 |

que es algo más corto y, claramente, nada podría ser más rápido que tener una tabla de multiplicar completa del divisor.

## Tabla de multiplicación del divisor

Si disponemos de la tabla de múltiplos del divisor, en nuestro caso 35

**Tabla de multiplicar por 35**

| Veces | Trozo |
|---|---|
| 1 | 35 |
| 2 | 70 |
| 3 | 105 |
| 4 | 140 |
| 5 | 175 |
| 6 | 210 |
| 7 | 245 |
| 8 | 280 |
| 9 | 315 |

entonces podemos abreviar las cosas aún más.

**1225÷35 = 35, el método más corto**

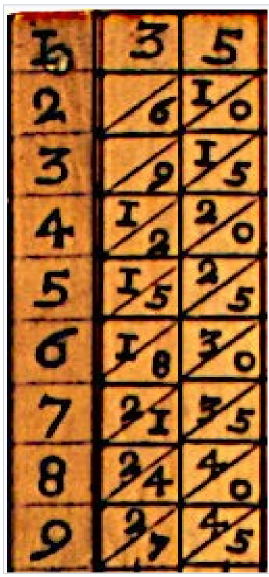
| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHI** | |
| 35    1225 | Comienzo, contador en **D** |
| 35   3 175 | Restar 105 de **GH**, sumar 3 al contador en **D** |
| 35   35 00 | Restar 175 de **HI**, sumar 5 al contador en **E** |
| 35   35 | Resto nulo. Hecho, el cociente es 35 |

No hay duda, este es un método de división óptimo, ya que nada puede ser más rápido y cómodo... una vez que tengamos una tabla como la de arriba. Pero calcular la tabla de multiplicar de un divisor lleva tiempo, requiere papel y lápiz para anotarla y este trabajo adicional sólo estaría justificado si tenemos una gran cantidad de divisiones por hacer con el mismo divisor común.

En 1617 John Napier (Neper), el *padre de los logaritmos*, presentó un invento para aliviar este problema que consiste en una serie de tablillas, conocidas como ábaco neperiano o tablas neperianas, con la tabla de multiplicar de un dígito escrita en ellos y que podían combinarse para obtener la tabla de multiplicar de cualquier número. Por ejemplo, en nuestro caso

Juego chino de tablas neperianas

**Tabla de multiplicar por 35 usando las tablas neperianas**



| | |
|---|---|
| 1 | 35 |
| 2 | 70 |
| 3 | 105 |
| 4 | 140 |
| 5 | 175 |
| 6 | 210 |
| 7 | 245 |
| 8 | 280 |
| 9 | 315 |

No hay duda de que tal invento se extendió muy pronto a Oriente de mano de los misioneros Jesuitas [Williams 1990] y se usó junto con el ábaco, pero este uso debe considerarse excepcional; no todo el mundo tenía tablillas neperianas al alcance de la mano. Se necesita otra herramienta y esa herramienta es la tradicional tabla de multiplicar de 1 dígito que se aprende de memoria y que vamos a usar como aproximación a la tabla de multiplicar específica del divisor (la que se usó arriba), esta tabla nos guiará para elegir el dígito del cociente que debemos probar.

Cabe señalar que los procedimientos anteriores no agotan las posibilidades de los métodos de división por trozos [DHMG ].

# División moderna

## División moderna vs tradicional

El **método moderno** de división se llama así porque, a lo largo de la primera mitad del siglo XX, su uso ha desplazado al del **método tradicional**, pero de hecho es mucho más antiguo que éste, habiendo sido desplazado por él en el siglo XIII. Una característica del método moderno es el uso de la tabla de multiplicar de 1 dígito como guía para la elección de la **cifra provisional** que tenemos que probar como cociente y para el cálculo del *trozo* que tenemos que restar del dividendo.

**Tabla de multiplicar decimal**

| × | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| **2** | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| **3** | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| **4** | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| **5** | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| **6** | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| **7** | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| **8** | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| **9** | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

En comparación, el método tradicional utiliza tanto una **tabla de división** especial como guía para la cifra provisional del cociente como la tabla de multiplicar para calcular la parte a sustraer.

La razón principal por la que el método moderno comenzó a desplazar al método tradicional en Japón, después de la Restauración Meiji, es que puede ser aprendido de manera más fácil y rápida por quienes ya saben dividir con papel y lápiz al no requerir la memorización de una compleja tabla de división. Por otro lado, anticipemos que el método tradicional hace de la división un proceso completamente automatizado, sin necesidad de *pensar*; solo hay que seguir las reglas para obtener el resultado, lo que permite realizar la operación sin ningún cansancio mental. Trataremos sobre esta división tradicional el la sección de este libro dedicada a los métodos tradicionales.

## Punto clave de la división con el ábaco

Uno de los puntos clave del aprendizaje del ábaco es ser conscientes de que este instrumento nos permite corregir algunas cosas de forma muy rápida y sin dejar rastros, lo que convierte al ábaco en un instrumento especialmente indicado para procedimientos de **prueba y error**. Esto nos es especialmente útil en el caso de la división. Si tenemos que dividir $634263 \div 79283$, en lugar de forzar nuestra mente tratando de encontrar la cifra correcta del cociente, simplemente elegimos una cifra aproximada provisional o interina simplificando el problema original a $63 \div 7$ y la probamos intentando restar el trozo (cociente provisional)$\times$79283 del dividendo; al hacerlo, ocurrirá una de las siguientes situaciones:

**El dígito del cociente provisional es correcto**

es decir, podemos restar el fragmento (dígito del cociente intermedio) $\times$ (divisor), pero no podemos restar el cociente una vez más porque el resto es menor que el divisor.

**Es insuficiente y debemos revisarlo al alza**

podemos restar el fragmento (dígito intermedio del cociente) $\times$ (divisor), pero aún podemos restar el cociente una vez más porque el resto es mayor o igual que el divisor. Agregamos uno al cociente intermedio y restamos el divisor nuevamente del resto.

**Es excesivo y debemos revisarlo a la baja.**

esta es la situación más compleja y propensa a errores. Por lo general, descubrimos demasiado tarde (en medio de la resta de fragmentos) que la cifra intermedia es excesiva y tenemos que retroceder, restar uno del cociente y restaurar el dividendo/resto agregándole lo que se le ha restado en exceso antes de que podamos seguir.

Por tanto, el proceso de obtención de un dígito del cociente tiene dos fases (prueba y error):

1. Elegir un dígito de cociente provisional.
2. Probar si es correcto y modificarlo si no lo es.

Una vez que hayamos encontrado la cifra correcta, generalmente tendremos un resto distinto de cero que actuará como dividendo si queremos extender la división al siguiente dígito del cociente.

Veremos todo esto a lo largo de los ejemplos que siguen, pero primero, necesitamos algunas palabras sobre cómo organizar la división en el ábaco.

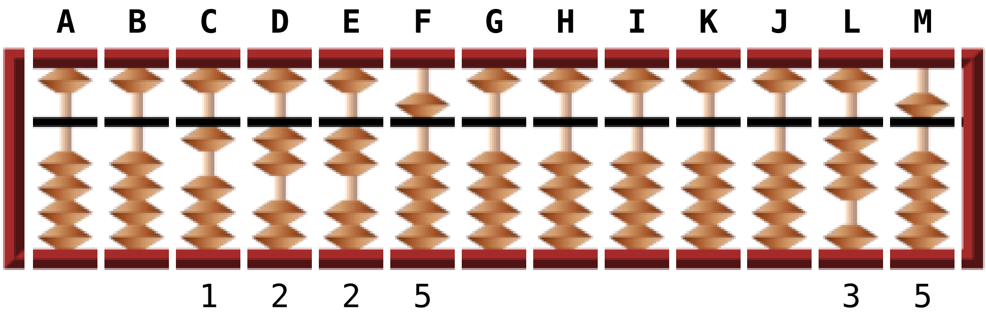
## Disposición en el ábaco de la división moderna

El dividendo es el término activo con el que vamos a trabajar en el ábaco, el divisor es inactivo y permanecerá invariable durante la operación, de hecho no es imprescindible introducirlo en el ábaco pero sí recomendable, especialmente para los principiantes. Como en el caso de la multiplicación, existen dos estilos para colocar dividendo y divisor en el ábaco, cada uno con sus ventajas y desventajas. Siéntase libre de probar ambas formas.

### Disposición tradicional china

El divisor se sitúa en el extremo derecho del ábaco mientras que el dividendo se coloca hacia la izquierda, dejando al menos dos columnas libres a su izquierda.

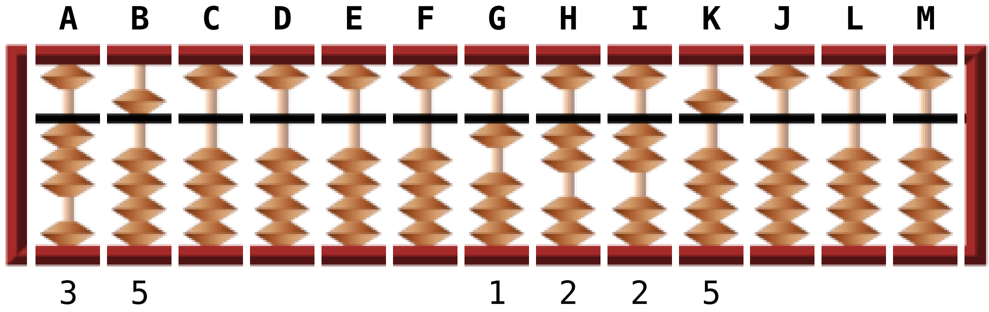
**1225÷35 Disposición al estilo chino**




### Disposición tradicional japonesa

El divisor va al extremo izquierdo del ábaco mientras que el dividendo se sitúa a su derecha, dejando al menos cuatro columnas libres entre los dos términos.

**1225÷35 Disposición al estilo japonés**




En este capítulo usaremos el estilo japonés para los ejemplos, pero siéntase libre de probar ambas disposiciones.

### Colocando la cifra del cociente

La cifra del cociente intermedio se coloca en una de las dos columnas directamente a la izquierda del dividendo. Para decidir en cuál, necesitamos comparar el divisor con un número igual de cifras de los primeros dígitos del dividendo, agregando ceros a su derecha si fuera necesario; llamemos a estas cifras el **dividendo de trabajo**:

**Dividendo de trabajo mayor o igual que el divisor**

esto significa que el divisor *cabe* en el dividendo de trabajo y el cociente, es decir, el número de veces que el divisor entra en el dividendo de trabajo, se sitúa en la segunda columna a la izquierda del primer dígito del dividendo

**Ejemplo**: 827÷46. El dividendo de trabajo 82 es mayor que el divisor 46, luego el cociente intermedio va a la segunda columna a la izquierda del dividendo. La tabla de multiplicar sugiere que usemos **2** como cociente provisional (simplificando 827÷46 a 8÷4)

**827÷46**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| ABCDEFGHIJKLM | |
| 46     827 | |
| 46   **2** 827 | Situamos el cociente provisional **2** en **E** |

**Dividendo de trabajo menor que el divisor**

esto significa que el divisor no cabe en el dividendo de trabajo. En este caso, necesitamos incluir el siguiente dígito del dividendo, o un cero si no quedan más, en nuestro dividendo de trabajo, y el cociente, el número de veces que el divisor entra en este dividendo de trabajo ampliado, se sitúa en la columna directamente a la izquierda del primer dígito del dividendo

**Ejemplo**: 18÷467, el dividendo de trabajo 180 es menor que 467, entonces lo ampliamos a 1800 y el cociente provisional se situará en la primera columna a la izquierda del dividendo. La tabla de multiplicar sugiere que usemos **4** como cociente intermedio después de simplificar 1800÷467 a 18÷4.

**18÷467**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLM** | |
| 467      18 | |
| 467    **4**18 | Situamos el cociente provisional **4** en **G** |

## Ejemplos

Debe comenzar haciendo ejercicios con divisores de un solo dígito y luego probar con divisores de dos, tres, etc. cifras. Con divisores de un dígito, nunca debería tener que revisar al alza o la baja. Por ejemplo, empiece por dividir 123456789 por los dígitos 2, 3, ..., 9. Veamos la división por 9 aquí.

**Ejemplo: 123456789÷9 = 13717421**

- Por favor lea el símbolo "->" como: "la tabla de multiplicar sugiere usar ...".
- Como verá, en todos los casos excepto en el último, el dividendo de trabajo es menor que el divisor y necesitamos expandirlo a dos dígitos.

**123456789÷9 = 13717421**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLMNO** | |
| 9     123456789 | 12/9 -> 1 como cociente provisional |
| 9    1123456789 | situar cociente prov. en E |
|      -9 | restar 9×1=9 de FG |
| 9    1 33456789 | 33/9 -> 3 como cociente provisional |
| 9    1333456789 | situar cociente prov. en F |
|      -27 | restar 9×3=27 de GH |
| 9    13 6456789 | 64/9 -> 7 como cociente provisional |
| 9    1376456789 | situar cociente prov. en G |
|       -63 | restar 9×7=63 de HI |
| 9    137 156789 | 15/9 -> 1 como cociente provisional |
| 9    1371156789 | situar cociente prov. en H |
|         -9 | restar 9×1=9 de IJ |
| 9    1371 66789 | 66/9 -> 7 como cociente provisional |
| 9    1371766789 | situar cociente prov. en I |
|         -63 | restar 9×7=63 de JK |
| 9    13717 3789 | 37/9 -> 4 como cociente provisional |
| 9    1371743789 | situar cociente prov. en J |
|          -36 | restar 9×4=36 de KL |
| 9    137174 189 | 18/9 -> 2 como cociente provisional |
| 9    1371742189 | situar cociente prov. en K |
|           -18 | restar 9×2=18 de LM |

| | |
|---|---|
| 9   1371742  9 | 9/9 -> 1 como cociente provisional |
| 9   13717421 9 | situar cociente prov. en L |
| -9 | restar 9×1=9 de MN |
| 9   13717421 | Resto nulo, hecho!<br><br>123456789÷9 = 13717421 |

123456789 es un número curioso, es precisamente el producto de 9 por 13717421, ¡un número primo grande!

---

**Ejemplo: 1225 ÷ 35 = 35 Divisor de dos dígitos. Revisando al alza y a la baja**

**1225÷35 = 35**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJ** | |
| 35     1225 | 12÷3↦4 como cociente provisional |
| +4 | situar cociente prov. en F |
| 35    41225 | Tratar de restar 4×35 de GHI, |
| -12 | primero 4×3 de GH |
| 35    40025 | ahora 4×5 de HI |
| -20 | **¡No se puede!** |
| -1 | Revisar a la baja la cifra del cociente |
| 35    30025 | |
| +3 | Devolver lo sustraído en exceso de GH (1) |
| 35    30325 | |
| -15 | continuar normalmente: restar 3×5 de HI |
| 35    3 175 | 17÷3↦5 como cociente provisional |
| +5 | situar cociente prov. en G |
| 35    35175 | Tratar de restar 5×35 de HIJ |
| -15 | primero 5×3 de HI |
| 35    35025 | |
| -25 | ahora 5×5 de IJ |
| 35    35 | Resto nulo, fin! 1225÷35 = 35 |

**Nota:**

1

Hemos restado 4 × 3 = 12 de **FGH** , pero si el dígito del cociente correcto es 3, deberíamos haber restado 3 × 3 = 9, por lo que restamos 3 en exceso (solo el primer dígito del divisor ). Debemos devolver este exceso antes de continuar.

---

Ahora, supongamos que después de nuestra "mala experiencia" revisando a la baja la primera cifra del cociente, y en exceso de prudencia, elegimos 4 como segundo cociente provisional en lugar de 5 como sugiere la tabla de multiplicar. Esta sería la continuación:

**1225÷35 = 35, segundo dígito del cociente, ejemplo de revisión al alza**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHI** | |
| 35   3 175 | 17÷3 -> 5, pero usaremos 4 4! |
|      +4 | situar cociente prov. en G |
| 35   34175 | Tratamos de sustraer 4×35 de HIJ |
|       -12 | primero 4×3 = 12 de HI |
|        -20 | ahora 4×5 = 20 de IJ |
| 35   34 20 | **¡Resto mayor o igual al divisor!** |
|      +1 | Revisar al alza G |
|        -20 | restar divisor del resto HI |
| 35   34 | Resto nulo, fin! 1225÷35 = 35 |

---

**Ejemplo 1÷327**

Hasta ahora hemos considerado divisiones entre números naturales con cocientes y residuos, así como números naturales, pero podemos operar con números decimales exactamente como lo hacemos en el cálculo escrito con división larga. Por ejemplo, encontremos el inverso de 327; es decir, 1/327 en un ábaco con 13 columnas.

**1÷327 = 0.00305810...**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLM** | |
| 327    1 | 10/3 -> 3 como cociente provisional |
| 327   31 | situar cociente prov. en G |
|       -09 | restar 3×3=9 de HI |
| 327   3 1 | |
|        -06 | restar 3×2=6 de IJ |
| 327   3  4 | |
|         -21 | restar 3×7=21 de JK |
| 327   3  19 | 19/3 -> 6 como cociente provisional |
| 327   30619 | situar cociente prov. en I |
|         -18 | restar 6×3=18 de JK |
| 327   306 1 | |
|          -12 | **no se puede restar** 6×2=12 de KL! |

| | |
|---|---|
| -1 | revisar a la baja I |
| +3 | restaurar el exceso sustraido de JK |
| 327   305 4 | |
| -10 | continuar normalmente, restar 5×2=10 de KL |
| 327   305 30 | |
| -35 | restar 5×7=35 de LM |
| 327   305 265 | 36/3 -> 8 como cociente provisional |
| 327   3058265 | situar cociente prov. en J |
| -24 | restar 8×3=24 de KL |
| 327   3058 25 | |
| -16 | restar 8×2=16 de LM |
| 327   3058  9 | Resultado hasta aquí: 3058 |

Hemos obtenido $3058$ como los primeros dígitos de $1/327$, pero: $1/327 \approx 1/300 = 1/(3 \cdot 100) = (1/3) \cdot 0.01 \approx 0.33 \cdot 0.01 = 0.0033$ por lo que nuestro resultado es en realidad $0.003058$. Mas abajo daremos una regla para encontrar la varilla unidad de la división.

---

**Ejemplo: 634263 ÷ 79283 = 7,999987 ..., un caso complicado**

Finalmente, obtengamos el primer dígito del cociente de esta división especialmente maliciosa.

**634263÷79283 = 7,999987...**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLM** | |
| 79283   634263 | 63/7 -> Probamos 9 |
| 79283 9634263 | |
| -63 | restar 9*7=63 de HI |
| 79283 9004263 | |
| -81 | **no se puede restar** 9*9=81 de IJ! |
| -1 | revisar D a la baja |
| +7 | restaurar lo restado en exceso del dividendo |
| 79283 8 74263 | |
| -72 | continuar restando 8x9=72 de IJ |
| 79283 8 02263 | |
| -16 | restar 8*2=16 de JK |
| 79283 8 00663 | |
| -64 | restar 8*8=64 de KL |
| 79283 8 00023 | **no se puede restar** 9*3=27 de LM! |
| -1 | revisar D a la baja |

| | |
|---|---|
| +7928 | restaurar lo restado en exceso del dividendo |
| 79283 7 79303 | |
| -21 | continuar restando 7x3=21 de LM |
| 79283 7 79282 | cociente: 7, resto: 79283 |

No hay duda de que en este caso redondear el divisor 79283 a 80000 nos habría dado mejores resultados ya que 63÷8 sugiere usar 7 (la cifra correcta) como dígito del cociente provisional.

**634263÷79283 = 7,999987..., divisor redondeado**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLM** | |
| 79283 634263 | 63/8 -> probamos 7 |
| 7634263 | |
| -49 | restar 7*7=49 del dividendo HI |
| 79283 7144263 | |
| -63 | restar 7*9=63 del dividendo IJ |
| 79283 7 81263 | |
| -14 | restar 7*2=14 del dividendo JK |
| 79283 7 79863 | |
| -56 | restar 7*8=56 del dividendo KL |
| 79283 7 79303 | |
| -21 | restar 7*3=21 del dividendo LM |
| 79283 7 79282 | cociente: 7, resto: 79283 |

# La varilla unidad y los decimales

La contrapartida de la regla para encontrar la varilla unidad en el caso de la multiplicación es la siguiente regla para la división:

**La columna de las unidades de los cocientes se ubica** $n+1$ **columnas a la** izquierda **de la columna de las unidades del dividendo; donde** $n$ **es el número de dígitos del divisor** a la izquierda de su punto decimal **(¡que puede ser negativo!).**

La siguiente tabla muestra los valores de $n$ para algunos divisores:

| Divisor | n |
|---|---|
| 32.7 | 2 |
| 3.27 | 1 |
| 0.327 | 0 |
| 0.00327 | -2 |

**Ejemplo:** 1/327 (lo hemos visto arriba)

**1/327; columna unidad**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| ABCDEFGHIJKLM | |
| 327    1 | el divisor tiene 3 dígitos. n=3 |
|        . | varilla unidad del dividendo |
|      ... | |
| 327   3058  9 | Fin de la división. Resultado: 3058 |
|        . | varilla unidad del dividendo |
|    <--- | desplazarla n+1 = 4 posiciones a la izquierda |
|    . | varilla unidad del cociente |
|       3058 | por lo tanto, ésto... |
|    .003058 | ... debe leerse: 0.003058 |

# Multiplicación y división como operaciones inversas

En los cálculos escritos siempre podemos revisar nuestro trabajo para asegurarnos de que no hemos cometido errores y que el resultado obtenido es el correcto. En los cálculos con el ábaco esto no es posible ya que el ábaco no guarda memoria del pasado y de los resultados intermedios. Podemos recurrir a algunos artificios como la prueba del nueve o del once, pero la forma tradicional de verificar los resultados con el ábaco ha sido repetir los cálculos o deshacerlos.

Deshacer sumas y restas es tan simple como partir del resultado y restar lo que hemos sumado y sumar lo que hemos restado; Si hacemos tanto el cálculo como la verificación correctamente, deberíamos terminar con un ábaco limpio, puesto a cero. Para verificar una multiplicación usaremos la división y, recíprocamente, para verificar una división usaremos la multiplicación, sumando el resto si lo hay. Después de hacer esto, devolveremos el ábaco a su estado inicial con los dos operandos originales en sus posiciones de partida. Veamos un ejemplo:

**Comprobando 2461÷64 por multiplicación**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| ABCDEFGHIJ | |
| 64    2461 | 24/6 -> 4 como cociente provisional |
|      42461 | situar cociente prov. en F |
|      -24 | restar 4×6=24 del dividendo GH |
| 64   4  61 | |
|       -16 | no se puede restar 4×4=16 del dividendo HI |
|     -1 | revisar cociente a la baja |
| 64   3  61 | |
|       +6 | restaurar lo restado en exceso del dividendo GH |
| 64   3 661 | |
|       -12 | continuar normalmente, restar 3×4=12 del dividendo HI |

| | | |
|---|---|---|
| 64 | 3 541 | 54/6 -> 9, pero vamos a usar 8 |
| 64 | 38541 | |
| | -48 | restar 8×6=48 del dividendo HI |
| 64 | 38 61 | |
| | -32 | restar 8×4=32 del dividendo IJ |
| 64 | 38 29 | cociente: 38, resa 29 |
| | | **La revisión por multiplicación empieza aquí** |
| | +48 | sumar 8×6=48 a HI |
| 64 | 38509 | |
| | +32 | sumar 8×4=32 a IJ |
| 64 | 38541 | |
| 64 | 3 541 | borrar G |
| | +18 | sumar 3×6=18 a GH |
| 64 | 32341 | |
| | +12 | sumar 3×4=12 a HI |
| 64 | 32461 | |
| 64 | 2461 | borrar F. **Estado inicial!** |

En este libro se ha sugerido usar el número 123456789 para sus primeros ejercicios tanto de multiplicación como de división por un solo dígito. Intente combinarlos con la operación inversa; por ejemplo: divida 123456789 por 9 para obtener 13717421 y multiplique este resultado por 9 para que 123456789 vuelva a la misma posición inicial en el ábaco. O bien comience multiplicando 123456789 por 9 para obtener 1111111101 y luego divida este resultado por 9 para volver al punto de partida. Pruebe todos los dígitos del 2 al 9. Es un buen ejercicio de rutina.

# Recursos externos

### Hojas de ejercicios

•«The generator». *Practicing the soroban*.

# Otras lecturas

•«Division». *The Japanese Abacus: its Use and Theory*. Tokyo: Charles E. Tuttle Co., Inc.. 1954. ISBN 978-0-8048-0278-9. https://archive.org/details/japaneseabacus00taka/page/64/mode/2up.

•Heffelfinger, Totton (2004). «Division». *算盤 Abacus: Mystery of the Bead*. Archivado desde el original, el 29 de Junio de 2021.

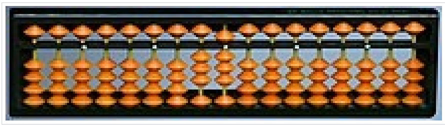
•Siqueira, Edvaldo (2004). «Decimals & Division». *算盤 Abacus: Mystery of the Bead*. Archivado desde el original, el 6 de Mayo de 2021.

# Tercera Parte
## Métodos Tradicionales

# VI Introducción a los Métodos Tradicionales

## Ábaco moderno frente al tradicional

El ábaco oriental (chino simplificado: 算盘; chino tradicional: 算盤; pinyin: suànpán, japonés: そろばん soroban, simplemente *"el ábaco"* en este libro de texto) , como un ábaco de cuentas fijas que deslizan sobre varillas, se originó en China en una fecha incierta, pero hacia finales del siglo XVI su uso había desplazado por completo a las varillas de cálculo como instrumento matemático en su país de origen. Desde China su uso se extendió a otros países vecinos, especialmente Japón, Corea y Vietnam, permaneciendo como principal herramienta de cálculo hasta la era electrónica. La forma en que era utilizado, el "**Método Tradicional**", se mantuvo estable durante al menos cuatro siglos hasta finales del siglo XIX, cuando se inició una evolución hacia lo que llamamos el "**Método Moderno**" que, haciendo uso del ábaco moderno, ya hemos estudiado en la sección anterior de este libro.

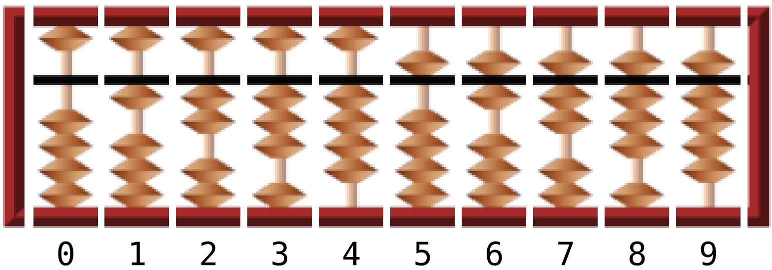


Ábaco moderno (tipo 4+1).

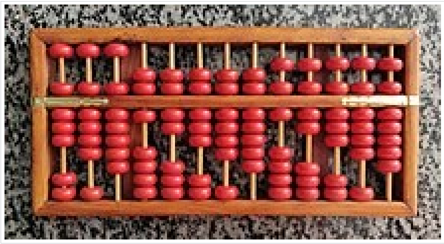
Ábacos tradicionales tipo 5+3 y 5+1.

El ábaco moderno es del tipo 4+1, es decir, tiene cuatro cuentas en la parte inferior y una en la parte superior.

**Representación de números en el ábaco moderno (4+1)**



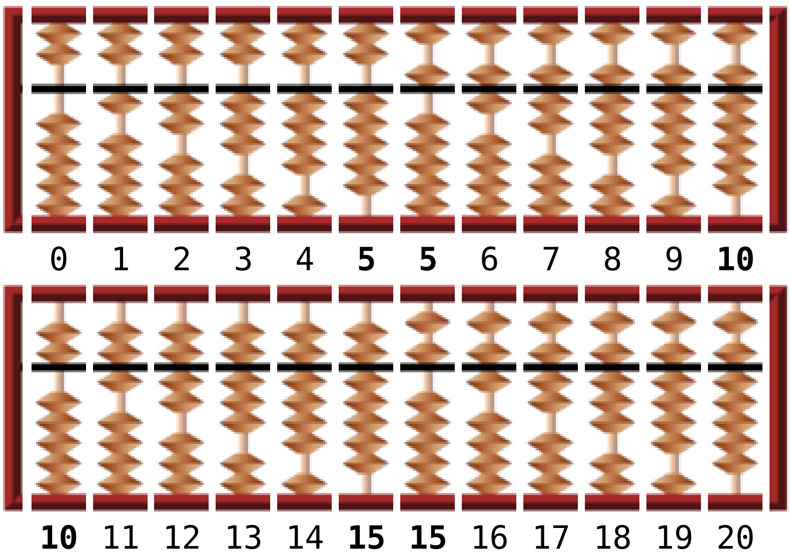

Esto es todo lo que se necesita para poder realizar aritmética decimal. Sin embargo, los ábacos tradicionales tenían cuentas adicionales, siendo el más frecuente el tipo 5+2 (aunque el tipo 5+1 también fue popular en Japón) y ocasionalmente el tipo 5+3.



Ábaco chino tradicional 5+2 ilustrando el uso de *cuentas suspendidas*

Con tres cuentas superiores podemos representar hasta 20 en una sola varilla, lo cual es conveniente, como veremos, para las técnicas tradicionales de división y multiplicación. Con dos cuentas superiores podemos lograr lo mismo usando la **cuenta suspendida** (懸珠, *Xuán zhū* en chino [Chen 2013], *kenshu* en japonés), una forma de simular la tercera cuenta para las raras ocasiones en que ésta se necesita (ver en la figura la representación de los números de 15 a 20).

**Representación de números en un ábaco tradicional (5+2)**




Con una quinta cuenta inferior, tenemos dos formas diferentes de representar los números **5**, **10** y **15**. Esto significa que tenemos opciones entre las que podemos elegir la que más nos convenga. En el caso de la suma y la resta, la posibilidad de elegir entre dos representaciones para 5 y 10 nos permitirá simplificar un poco los cálculos.

Las técnicas tradicionales se pueden utilizar en cualquier tipo de ábaco, con la excepción obvia del uso de la quinta cuenta inferior en un ábaco que no la tiene (4+1), la diferencia entre tener o no cuentas superiores adicionales es más una cuestión de comodidad y fiabilidad que de eficiencia o capacidades.

## Métodos modernos y tradicionales

El método tradicional se utilizó durante al menos cuatro siglos, cubriendo las dinastías Ming y Qing en China y el período Edo en Japón. A partir de la Restauración Meiji en Japón, los estudiantes del ábaco empezaron a cambiar en el sentido de que ya sabían cómo realizar cálculos con papel y lápiz antes de comenzar a estudiar el ábaco, mientras que los estudiantes de épocas anteriores no sabían nada sobre aritmética; para la mayoría, el ábaco era la única forma de matemáticas que iban a conocer. Esto provocó una lenta adaptación de la enseñanza y los métodos del ábaco a los nuevos tiempos y circunstancias, dando lugar, después de varias décadas, a lo que ahora llamamos el Método Moderno; de hecho, un método simplificado.

En el idioma inglés, las siguientes dos obras de Takashi Kojima se citan con frecuencia en referencia al método moderno:

- The Japanese Abacus: its Use and Theory [Kojima 1954]
- Advanced Abacus: Theory and Practice [Kojima 1963]

Es importante mencionarlos porque, aparte de su contenido, constituyen la primera difusión del uso del ábaco oriental hacia occidente. Todavía se pueden encontrar varias ediciones de estos libros, incluidos los formatos de libros electrónicos, y el primero se puede consultar en línea en archive.org.

Hoy en día, el método moderno puede parecer óptimo en muchos sentidos y podemos pensar que algunas *"rarezas"* del método tradicional, especialmente la forma de organizar la división en el ábaco, carecen de sentido práctico; pero si el método tradicional se mantuvo estable durante siglos, siendo usado por millones de personas (incluidas grandes figuras de las matemáticas como Seki Takakazu), sólo puede ser porque también fue considerado óptimo en su tiempo. Simplemente, el criterio de *optimalidad* de los antiguos difería del que podamos tener hoy.

Desafortunadamente, nadie en el pasado se molestó en describir "por qué" se hacían las cosas de tal modo, los autores clásicos solamente escribieron sobre "cómo" hacer las cosas, de modo que nosotros sólo podemos especular sobre las razones subyacentes a algunas de estas técnicas antiguas.

# Principales diferencias entre los métodos tradicionales y modernos

Estos son los tres puntos más importantes que diferencian las técnicas tradicionales de las modernas:

- El uso de la **quinta cuenta inferior** en suma y resta para simplificar un poco ambas operaciones, lo cual se extiende a todo lo que se puede hacer con el ábaco ya que todo depende en última instancia de la suma y la resta.
- El uso de un método de división usando una **tabla de división** que elimina el esfuerzo mental requerido para determinar la cifra del cociente provisional. Este método ( *kijohou* , *guīchúfă* 帰除法) descrito por primera vez en la *Iluminación Matemática* ( *Suànxué Qǐméng* , 算學啟蒙) por Zhū Shìjié 朱士傑 (1299) [Zhū 1299] para su uso con varillas de cálculo reemplazó al antiguo método de división basado en la tabla de multiplicar y cuyo origen se remonta al menos al siglo III, al libro *The Mathematical Classic of Master Sun* *(Sūnzǐ Suànjīng* 孫子算經) [Se & Yong 2004] [Sunzi s. III-V CE]. Este antiguo método, que es la base de los métodos cortos y largos de división escrita, ha reemplazado a su vez al método tradi-

cional de división en los tiempos modernos. Es decir, ¡Los tiempos modernos nos han devuelto a lo antiguo!

- Los métodos tradicionales y modernos también difieren en la forma en que se organiza la operación de división en el ábaco. La **disposición de división tradicional** es algo más compacta que la moderna y también más problemática ya que requiere (o se beneficia) del uso de cuentas superiores adicionales. Esta disposición de la división a su vez condiciona la forma en que se organizan la multiplicación y las raíces.

# El principio de mínimo esfuerzo

Como se mencionó anteriormente, ningún autor en el pasado ha escrito sobre *por qué* se hacían las cosas de aquella manera, solo sobre *cómo* hacer las cosas; así que solamente podemos elucubrar para tratar de entender *por qué*. Pero el lector verá a lo largo de este libro que las técnicas tradicionales suponen, en comparación con las modernas, una reducción del esfuerzo mental necesario para utilizar el ábaco. Esto es especialmente claro en el caso de la división que utiliza una tabla de división, pero también en el resto de técnicas que se describirán ya que efectivamente implican una reducción en el número y/o la extensión de "gestos" necesarios para completar una operación. Aquí llamamos gesto a:

- movimientos de dedos o cuentas
- desplazamientos de manos
- cambios de dirección
- salto de varillas (es decir, cambiar la posición de la mano de una varilla a otra barra no adyacente)

y cada uno de estos gestos:

- como proceso físico, tarda un tiempo en completarse,
- como lo controla nuestro cerebro, requiere nuestra atención, consumiendo energía (mental o bioquímica),
- como lo hacemos seres humanos (no máquinas), tiene la posibilidad de hacerse de manera incorrecta, introduciendo errores.

de manera que podemos esperar, al reducir el número y extensión de estos gestos, un cálculo algo más rápido, más relajado y fiable.

Teniendo en cuenta lo anterior, se tiene la tentación de pensar que al adoptar este principio de mínimo esfuerzo, las técnicas tradicionales evolucionaron en el sentido de facilitar la vida con el ábaco, lo que podría explicar su vigencia a lo largo de los siglos, pero esto no es más que un conjetura sin soporte documental.

Si pensamos en el método moderno, polarizado hacia la sencillez, la velocidad y la eficacia, podríamos decir que es el *"método del velocista"* mientras que el método tradicional es el *"método del corredor de maratón"*.

El lector, después de seguir este libro, podrá sacar sus propias conclusiones al respecto.

## Aprendiendo el ábaco en el pasado

Puede ser interesante saber que en el pasado la gente aprendía el ábaco sin tener conocimientos previos de matemáticas, en particular sin conocer nada como una tabla de sumar o restar; en su lugar, memorizaban una serie de reglas mnemotécnicas, *versos* o *rimas*, frases cortas en chino que indicaban qué cuentas tenían que moverse para realizar la suma o resta de un dígito a otro dígito [Suzuki 1982] [Chen 2013; Chen 2018]; ya lo hemos mencionado al tratar de la suma y la resta con el ábaco moderno, y si el lector compra un ábaco tradicional chino (suanpan) es posible que reciba con el mismo un librillo en inglés: *The Fundamental Operations in Bead Arithmetic, How to Use the Chinese Abacus* de Kwa Tak Ming [Kwa 1922], un manual escrito para promover el uso del ábaco en Filipinas que contiene una curiosa versión inglesa de las mencionadas *rimas*. Una vez que los estudiantes aprendían a sumar y restar con este tipo de reglas, comenzaban a memorizar las tablas de multiplicación y división, también en forma de versos o rimas. En total, aprender los conceptos básicos del ábaco requería memorizar alrededor de **150 reglas** que debían recitarse o cantarse mientras se aplicaban.

En el presente libro, hemos reducido a tres el número de reglas a memorizar para el aprendizaje de las dos operaciones básicas de adición y sustracción, pero a costa de memorizar también parejas de números complementarios. Como estudiantes modernos del ábaco partimos con un conocimiento previo de aritmética y no tendremos que memorizar reglas o rimas para multiplicar; ya hemos memorizado la tabla de multiplicar que además nos ayudará a dividir, pero si deseamos aprender el método tradicional de división sí que tendremos que memorizar una cincuentena de reglas. Pero no se preocupe, se pueden aprender gradualmente y su esfuerzo se verá recompensado con una fascinante facilidad para dividir.

## Tablas de procedimientos y algunos términos y notaciones

Como de costumbre, en este libro usaremos tablas para describir los procedimientos en el ábaco, por ejemplo:

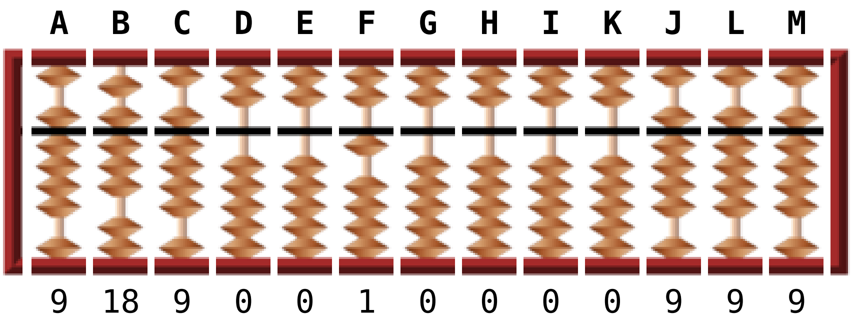
**Ejemplo de tabla de procedimiento**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLM** | |
| 896 412 | Esta vez el divisor va a la izquierda y el dividendo a la derecha. |
| 896 512 | Columna E: regla 4/8> 5 + 0, cambie 4 en E por 5, agregue 0 a F |
| 896 512 | no se puede restar E × B = 5 × 9 = 45 de FG, |
| -1 | revisar hacia abajo E: restar 1 de E, |
| +8 | sumar 8 a F |
| 896 492 | |
| etc. | etc. |

Donde, a la izquierda, se muestra la evolución dígito a dígito del estado del ábaco o la operación de suma o resta actual junto con comentarios a la derecha sobre lo que se está haciendo. Las columnas del ábaco están etiquetadas con letras en la parte superior (los espacios en blanco representan barras no utilizadas).

Esta representación, perfecta para el ábaco moderno, necesita un par de refinamientos para adaptarla al ábaco tradicional.

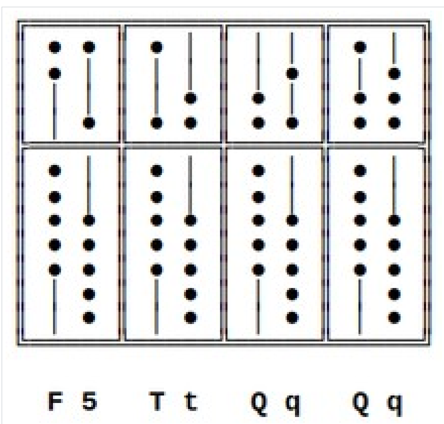
- Una columna de un ábaco tradicional puede contener un número mayor que 9 y no es posible escribir sus dos dígitos en nuestra tabla sin alterar su alineación vertical. Para evitar esto, usaremos **notación de subrayado** para valores entre 10 y 19 y el primer dígito (uno) estará representado por un subrayado en la columna anterior (consulte el capítulo sobre cómo tratar con el desbordamiento para una razón). Por ejemplo, la situación que se representa a continuación ocurre poco después de comenzar la división tradicional de 998001 por 999




y se representa en una tabla de procedimiento como:

**Notación de subrayado**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| ABCDEFGHIJKLM | |
| 9̲88001      999 | Valor en B es 18 |




Notación relativa al uso de la quinta cuenta inferior.

- Como se vio arriba, los números 5, 10 y 15 tienen dos representaciones posibles: usar o no la quinta cuenta inferior. Cuando sea pertinente distinguir entre los dos, usaremos los siguientes códigos:
- **F:** para denotar un *cinco inferior* (cinco cuentas inferiores activadas) en lugar de:

    1. **5:** *cinco superiores* (una cuenta superior activada).
    2. **T:** diez en una varilla (una cuenta superior y cinco cuentas inferiores activadas). En el ábaco de tipo 5 + 2, también es un *diez inferior* en lugar de una **t** y un *diez superior* (dos cuentas superiores activadas).
    3. **Q:** *quince inferiores* en una varilla (dos cuentas superiores y cinco cuentas inferiores activadas) en lugar de **q** quince superior (cuenta superior suspendida en el 5 + 2 , tres cuentas superiores activadas en el 5 + 3).

# Recursos externos

## Entrenador Soroban

Soroban Trainer mostrando un ábaco tipo 5+2 usando la cuenta superior suspendida.

Si está interesado en las técnicas tradicionales pero aún no tiene un ábaco tradicional, puede utilizar la aplicación JavaScript

```
Soroban Trainer
```

- Puede ejecutarlo directamente desde GitHub en su navegador
- o puede descargarlo a su computadora desde su repositorio en GitHub.

# VII Particularidades Tradicionales de la Adición y la Sustracción

## Introducción

Con cualquier tipo de ábaco, la suma se simula reuniendo los conjuntos de contadores que representan los dos sumandos, mientras que la resta se simula eliminando del conjunto de contadores que representan el minuendo un conjunto de contadores que representan el sustraendo. La suma y la resta son las dos únicas operaciones posibles en cualquier tipo de ábaco. Todo lo demás tiene que descomponerse en una secuencia de suma y resta.

Apenas hay diferencia entre sumar y restar con un ábaco moderno o uno tradicional, si el lector ya sabe realizar estas dos operaciones con fluidez con un ábaco moderno, podrá hacer lo mismo con uno tradicional. Los únicos dos puntos adicionales a considerar son:

- el uso de la **quinta cuenta inferior** para simplificar las operaciones.
- la **operación inversa**: combinar las direcciones de trabajo hacia la derecha y hacia la izquierda para evitar desplazamientos de la mano.

de los cuales el primero es, con mucho, el más importante.

## Quinta cuenta inferior

Páginas iniciales del *Pánzhū Suànfǎ* 盤珠算法 (1573)

La quinta cuenta inferior se puede utilizar en operaciones de suma y resta al igual que sus compañeras. Su uso se demuestra en algunos libros antiguos como: *Métodos computacionales con las cuentas en una bandeja* (*Pánzhū Suànfǎ* 盤珠算法) by Xú Xīnlǔ 徐心魯 (1573) [Xú-Xīnlǔ 1573], pero con el tiempo dejó de aparecer en los manuales. Esto no debe sorprender demasiado, no se trata de una técnica esencial sino más bien de un truco para aligerar o hacer más cómodas las operaciones con el ábaco y su uso se puede demostrar directamente con el ábaco y transmitirse de forma oral más fácilmente que plasmándolo en un libro. No olvidemos que los antiguos libros chino-japoneses sobre el ábaco eran realmente concisos; prácticamente recordatorios o formularios, ya que la enseñanza oral era considerada fundamental.

## Operación inversa (de derecha a izquierda)

Algunos libros antiguos sobre el ábaco, por ejemplo, *"Pista Matemática"* (*Shùxué Tōngguǐ* 數學通軌) de Kē Shàngqiān (柯尚遷) (1578) [Kē-Shàngqiān 1578], enseñan la suma usando una dirección de operación alterna con la obvia intención de ahorrar movimientos de la mano. Si el lector ya ha estudiado el ábaco moderno, sabe por qué es preferible operar de izquierda a derecha y esto no es solo una cuestión exclusiva del ábaco; en el siglo XIX, el conocido astrónomo canadiense-estadounidense Simon Newcomb, una reconocida computadora humana, recomendaba sumar y restar de izquierda a derecha en cálculo escrito en la introducción de sus tablas de logaritmos [Newcomb c1882] si se quería llegar a ser eficiente en el cálculo manual.

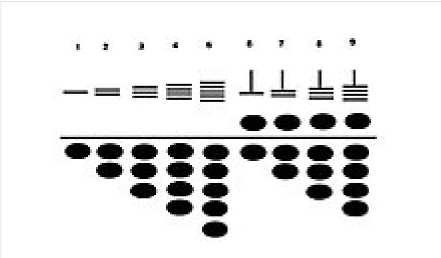
Por tanto, la alternancia de operación debe considerarse como una cuestión secundaria. Si se menciona aquí es porque, a pesar de su limitada utilidad, es un ejercicio muy interesante que puede resultar bastante difícil al principio para quien ya está habituado a trabajar de izquierda a derecha, quizás un pequeño desafío que puede llevar al lector a interesantes reflexiones sobre el orden de movimiento de los dedos; en particular, sobre si los acarreos deben realizarse "antes" o "después".

En el capítulo dedicado a las variantes del ejercicio 123456789 se propone propone su práctica diaria como una forma de perfeccionar nuestra "comprensión de las cuentas".

# VIII Uso de la 5ª Cuenta Inferior

## Introducción

Ábacos con cinco cuentas inferiores, Museo Ridai de Ciencia Moderna, Tokio (Japón)



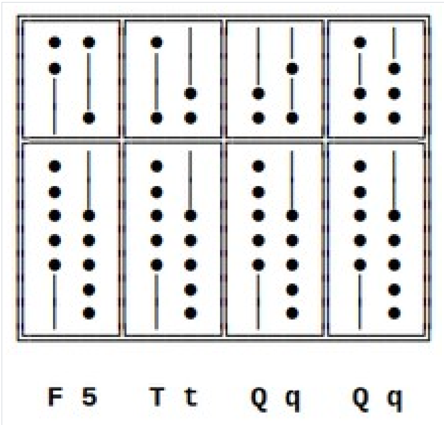
El ábaco oriental como heredero de las varillas de cálculo

Es un misterio por qué los ábacos tradicionales chinos y japoneses tenían cinco cuentas en su parte inferior, ya que solo se requieren cuatro desde el punto de vista de la representación de números decimales. Como ningún documento antiguo existente parece explicarlo, este misterio probablemente dure para siempre y tendremos que conformarnos con nuestras propias conjeturas para tratar de comprender su origen. En esta línea, podríamos pensar que, cuando aparecieron por primera vez, los ábacos de cuentas fijas fueron concebidos a imagen y semejanza de las varillas de cálculo, de las que heredaron todos los algoritmos. Con las varillas de cálculo, el uso de cinco barras para representar el número cinco era obligatorio para evitar la ambigüedad entre uno y cinco, al menos inicialmente, cuando no se usaba una representación del cero ni un tablero cuadriculado al estilo japonés. Equipar el ábaco con cinco cuentas inferiores permite una manipulación paralela o similar de cuentas y varillas, aportando algún tipo de compatibilidad de "hardware" y "software" a los ábacos de cuentas fijas; de hecho, los primeros libros chinos sobre el ábaco también se ocupaban de las varillas de cálculo, por lo que ambos instrumentos eran aprendidos al mismo tiempo. También podríamos invocar un cierto deseo de compatibilidad entre el ábaco y el sistema de notación derivado de las varillas de cálculo que, de una forma u otra, ha estado en uso hasta los tiempos modernos. Si fuéramos a anotar nuestros resultados usando tal notación, estaríamos interesados en cambiar los cincos de nuestro ábaco para que estén representados por las cinco cuentas inferiores con el fin de evitar errores de transcripción catastróficos.

Las varillas de cálculo, el ábaco más versátil y poderoso de la historia, tenía un defecto: es extremadamente lento de manipular. Como se ha explicado en la sección anterior de este libro, no es una sorpresa que los antiguos matemáticos chinos inventaran la tabla de multiplicar para acelerar la multiplicación y que también descubrieran el uso de dicha tabla de multiplicar para acelerar la división. No ha de ser, por tanto, una sorpresa que también descubrieran que las operaciones de suma y resta se podían simplificar un poco al usar la quinta cuenta inferior del ábaco. Realmente tenían que ser muy sensibles a la lentitud.

A continuación, se presenta un pequeño conjunto de reglas para el uso de la quinta cuenta junto con su razón de ser y alcance de uso. Estas reglas no se establecen explícitamente en ninguna de las obras clásicas, pero se pueden inferir de las demostraciones de suma y resta presentes en ellas [Chen 2013], especialmente en el: *Métodos computacionales con las cuentas en una bandeja* (*Pánzhū Suànfǎ* 盤珠算法) de Xú Xīnlǔ 徐心魯 (1573) [Xú-Xīnlǔ 1573], por cierto, el libro más antiguo que se conoce enteramente dedicado al ábaco.

## Algunos términos y notación




Notación relacionada con el uso de la quinta cuenta inferior

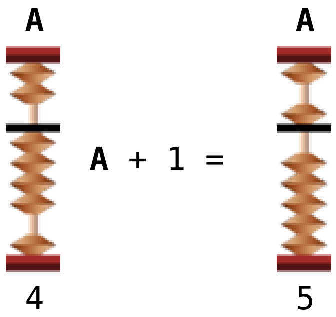
En lo que sigue usaremos los siguiente conceptos y forma de notación en referencia al uso (o no) de la quinta cuenta inferior (véase la figura acompañante a la derecha).

- **F:** para denotar un *cinco inferior* (cinco cuentas inferiores activadas) en lugar de:
- **5:** *cinco superior* (una cuenta superior activada).
- **T:** diez en una varilla (una cuenta superior y cinco cuentas inferiores activadas). En el ábaco de tipo 5 + 2, también es un *diez inferior* en lugar de **t** un *diez superior* (dos cuentas superiores activadas).
- **Q:** *quince inferior* en una varilla (dos cuentas superiores y cinco cuentas inferiores activadas) en lugar de **q** quince superior (cuenta superior suspendida en el 5+2, tres cuentas superiores activadas en el 5+3).
- **acarreo:** esto representa el número 1 cuando se debe agregar a una columna como un *acarreo* desde la derecha (adición).

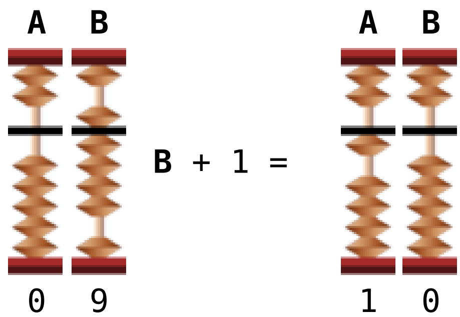
## Reglas para la adición

- **a1: No utilice nunca la quinta cuenta**, excepto en los dos casos siguientes:
- **a2:** 4 + acarreo = **F**
- **a3:** 9 + acarreo = **T**

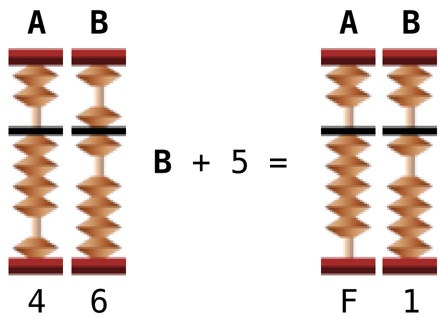
Es decir, al sumar 1 a una varilla se actúa como de costumbre, por ejemplo:



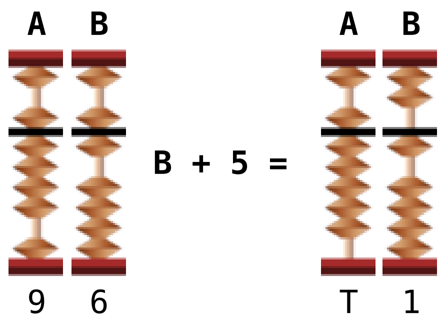

y




pero al sumar 1 como resultado de un **acarreo** o *llevada*, se usa la quinta cuenta inferior en la forma:




y



Puede ver las reglas de adición anteriores mencionadas de una manera ligeramente diferente por Chen [2018].

## La lógica de estas reglas

El objetivo de la regla **a1** es simplemente procurar dejar siempre una cuenta inferior sin usar a nuestra disposición para el caso de que la columna actual tenga que recibir posteriormente un acarreo desde la derecha, mientras que las reglas **a2** y **a3** dictan el uso de la quinta cuenta ante tal situación. Entonces, podemos esperar obtener:

- una reducción del número de movimientos de dedos porque evitamos tratar con las cuentas superiores e inferiores a la vez
- evitar algunos saltos de varillas y reducir el intervalo de desplazamiento izquierda-derecha de la mano
- cortar cualquier "acarreo múltiple" hacia la izquierda (piense en 99999 + 1 = 999T0 en lugar de 99999 + 1 = 100000)

## La ventaja

Las ventajas anteriores se obtienen automáticamente mediante el uso de las reglas **a2** y **a3**, pero la regla **a1** es de naturaleza diferente. La regla **a1** es una previsión para el futuro, simplificará las cosas si un acarreo futuro realmente cae en la columna actual (lo que ocurre aproximadamente el 50% de las veces en promedio), pero no simplificará nada en caso contrario. La regla **a1** es una especie de apuesta (las reglas para la resta a continuación también son de la misma naturaleza).

## El ámbito de uso

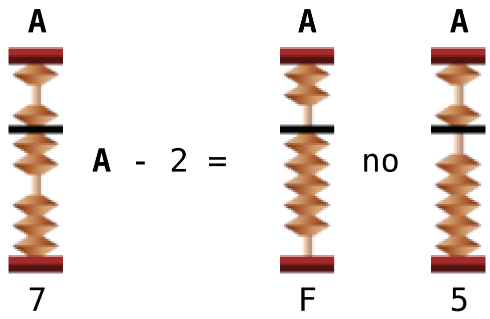
Las reglas **a1**, **a2** y **a3** son para columnas que pueden recibir un acarreo, lo que excluye la última columna a la derecha en la **operación normal** (es decir, operando de izquierda a derecha).

En la **operación inversa** (operando de derecha a izquierda), ninguna columna recibirá posteriormente un acarreo desde la derecha, por lo que la regla **a1** no es aplicable, pero las reglas **a2** y **a3** siempre deberán usarse. (Esto se menciona porque una técnica antigua, ahora caída en el olvido, utilizaba la operación hacia la izquierda en alternancia con la operación normal en sumas y restas de varios números para evitar largos desplazamientos de la mano. No es de utilidad general, pero sí un ejercicio extremadamente interesante y recomendable para un usuario avanzado para mejorar su "comprensión de las cuentas").

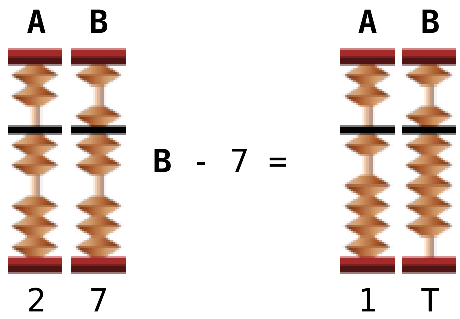
Excepcionalmente, si sabe que alguna columna nunca recibirá un acarreo, también podemos olvidarlos de la regla **a1**. (Esto puede parece un comentario extraño aquí, pero debemos hacerlo para lo que seguirá).

# Reglas para la sustracción

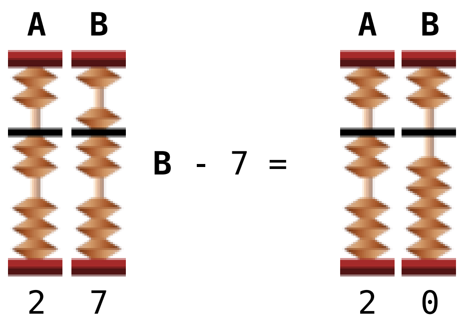
- **s1** Utilice siempre cinco inferiores (**F**) en lugar de cinco superiores (**5**). Por ejemplo: 7-2 = F




- **s2** Nunca deje una varilla despejada (**0**) si puede tomar prestado de la varilla inmediatamente a la izquierda (¡pero no de una más lejana!), deje **T** en su lugar, es decir, por ejemplo: 27-7 = 1T

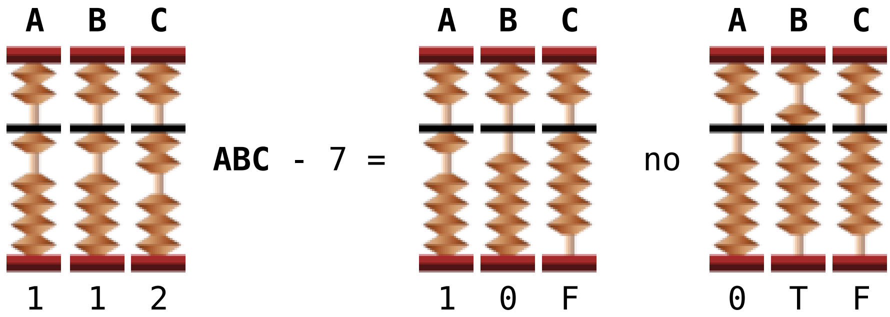



en lugar de 27-7 = 20.

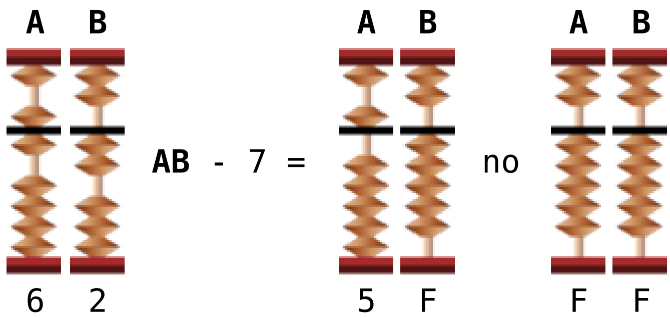



**Observación**

Estas dos reglas no se aplican a las varillas de las que se está tomando prestado; es decir, 112-7 = 10F




y 62-7 = 5F (no FF).




## La lógica de estas reglas

Ambas reglas tienden a dejar cuentas inferiores activadas a nuestra disposición para el caso en que necesitemos tomar prestado de ellas en el futuro (es como tener dinero suelto en el bolsillo por si acaso), ahorrándonos algunos movimientos y/o desplazamientos de la mano más anchos o más complejos, como tomar prestado de columnas no adyacentes o saltar varillas.

## La ventaja

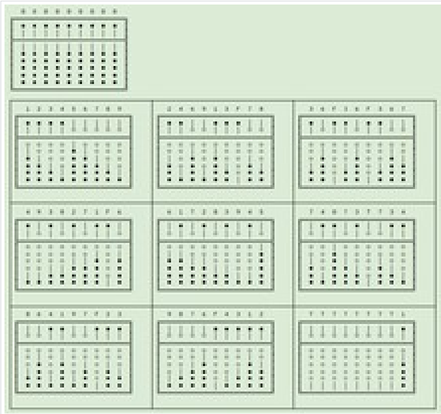
No se obtiene automáticamente, sólo cuando necesitamos tomar prestado de la varilla actual. En esto es similar a la regla de adición **a1**.

## El ámbito de uso

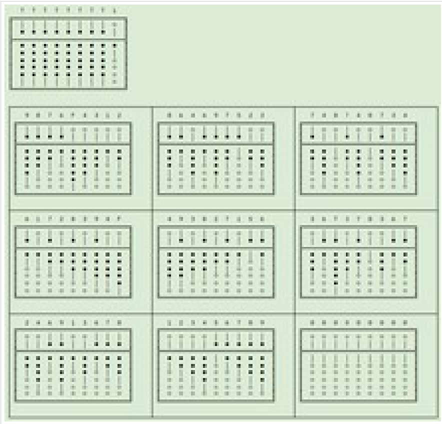
Una vez más, la columna de la derecha está fuera del alcance de estas reglas, ya que nunca tomaremos prestado de ella.

Además, en la operación hacia la izquierda o inversa, nunca tomaremos prestado de la columna actual, por lo que estas reglas no se aplican (lo que puede verse como una razón adicional para preferir la operación hacia la derecha en el uso normal).

# Ejemplo de uso de las reglas



Diagramas del *Panzhu Suanfa* de Xu Xinlu (1573) para el ejercicio 123456879 (adición)



Diagramas del *Panzhu Suanfa* de Xu Xinlu (1573) para el ejercicio 123456879 (sustracción)

Era común en los libros antiguos sobre el ábaco demostrar la suma y la resta mediante el conocido ejercicio que consiste en sumar el número 123456789 nueve veces a un ábaco puesto a cero hasta llegar al número 1111111101, y luego borrarlo nuevamente restando el mismo número nueve veces. Este ejercicio parece tener el nombre chino: "Jiǔ pán qīng" 九盤清, que significa algo así como "limpiar las nueve bandejas".

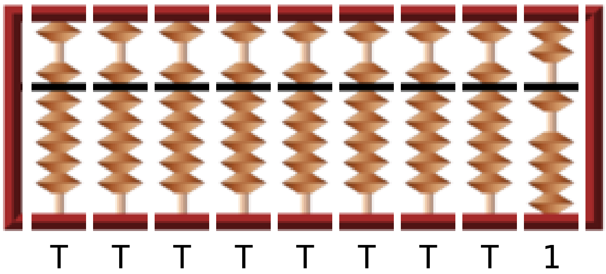
Precisamente, las reglas de uso de la quinta cuenta inferior ofrecidas aquí se han inferido de la demostración de suma y resta que aparece en el *Panzhu Suanfa* de Xú-Xīnlǔ [1573], por lo que nada mejor que emplear este ejercicio como prueba de dichas reglas. En particular, las reglas permiten reconstruir la serie de resultados intermedios que aparecen en el mencionado libro [Suzuki 1982] tras cada adición o sustracción del número 12345689. Para la suma:

```
    000000000, 123456789, 246913F78, 36T36T367, 4938271F6,
    617283945, 74073T734, 864197F23, 9876F4312,    ...
```

en este punto, agregar 123456789 una vez más da como resultado 1111111101, pero este número aparece en el *Panzhu Suanfa* como:

```
    TTTTTTTT1
```

es decir, el ábaco presenta este aspecto:




que no se puede obtener mediante el uso de las reglas anteriores únicamente. Una situación similar ocurre al repetir este ejercicio pero comenzando con 999999999 en lugar de un ábaco despejado (ver Tabla 2), llegando a 1TTTTTTTT0. Es por esto por lo que incluimos el último comentario sobre el alcance de las reglas de adición anteriores. Puede ser que, por inspección o intuición, nos demos cuenta de que usar la quinta cuenta aquí no genera ningún acarreo, por lo que podemos prescindir de la regla **a1** y proceder a este resultado, ...un tanto teatral por lo demás.

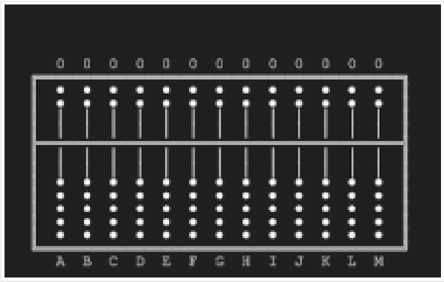
A partir de aquí, por sustracción deberíamos obtener:

```
TTTTTTTT1, 9876F4312, 864197523, 740740734, 61728394F,
493827156, 36T370367, 246913578, 123456789, 000000000
```

Como se puede ver, pocas **F** y **T** aparecen en los resultados intermedios de esta parte del ejercicio, pero algunas más aparecen durante el cálculo (Tabla 1), siendo inmediatamente convertidas a 4 y 9 al tomar prestado, que es el propósito para el cual fueron introducidas. Las **F** y **T** que quedan en los resultados intermedios son sólo las no utilizadas.

Veamos a continuación el detalle del ejercicio. El lector debería estudiarlo detenidamente.

## Suma

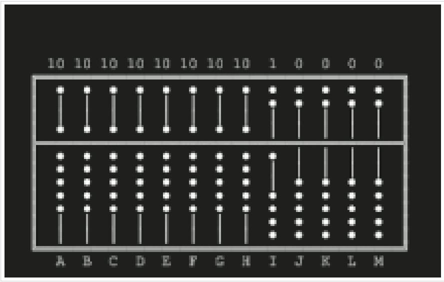


*Panzhu Suanfa*: Suma (ejercicio 123456789).

```
ABCDEFGHI        ABCDEFGHI        ABCDEFGHI        ABCDEFGHI        ABCDEFGHI
---------        ---------        ---------        ---------        ---------
000000000        123456789        246913F78        36T36T367        4938271F6
100000000   A+1  223456789   A+1  346913F78   A+1  46T36T367   A+1  5938271F6   A+1
120000000   B+2  243456789   B+2  366913F78   B+2  48T36T367   B+2  6138271F6   B+2
123000000   C+3  246456789   C+3  369913F78   C+3  49336T367   C+3  6168271F6   C+3
123400000   D+4  246856789   D+4  36T313F78   D+4  49376T367   D+4  6172271F6   D+4
123450000   E+5  246906789   E+5  36T363F78   E+5  49381T367   E+5  6172771F6   E+5
123456000   F+6  246912789   F+6  36T369F78   F+6  493826367   F+6  6172831F6   F+6
123456700   G+7  246913489   G+7  36T36T278   G+7  493827067   G+7  6172838F6   G+7
123456780   H+8  246913F69   H+8  36T36T358   H+8  493827147   H+8  617283936   H+8
123456789   I+9  246913F78   I+9  36T36T367   I+9  4938271F6   I+9  617283945   I+9

ABCDEFGHI        ABCDEFGHI        ABCDEFGHI        ABCDEFGHI
---------        ---------        ---------        ---------
617283945        74073T734        864197F23        9876F4312
717283945   A+1  84073T734   A+1  964197F23   A+1  T876F4312   A+1
737283945   B+2  86073T734   B+2  984197F23   B+2  TT76F4312   B+2
740283945   C+3  86373T734   C+3  987197F23   C+3  TTT6F4312   C+3
740683945   D+4  86413T734   D+4  987597F23   D+4  TTTTF4312   D+4
740733945   E+5  86418T734   E+5  987647F23   E+5  TTTTT4312   E+5
740739945   F+6  864196734   F+6  9876F3F23   F+6  TTTTTT312   F+6
74073T645   G+7  864197434   G+7  9876F4223   G+7  TTTTTTT12   G+7
74073T725   H+8  864197F14   H+8  9876F4303   H+8  TTTTTTT92   H+8
74073T734   I+9  864197F23   I+9  9876F4312   I+9  TTTTTTTT1   I+9
```

## Resta




*Panzhu Suanfa*: Resta (ejercicio 123456789).

```
ABCDEFGHI       ABCDEFGHI       ABCDEFGHI       ABCDEFGHI       ABCDEFGHI
---------       ---------       ---------       ---------       ---------
TTTTTTTT1       9876F4312       864197523       740740734       61728394F
9TTTTTTT1  A-1  8876F4312  A-1  764197523  A-1  640740734  A-1  F1728394F  A-1
98TTTTTT1  B-2  8676F4312  B-2  744197523  B-2  620740734  B-2  49728394F  B-2
987TTTTT1  C-3  8646F4312  C-3  741197523  C-3  617740734  C-3  49428394F  C-3
9876TTTT1  D-4  8642F4312  D-4  740797523  D-4  617340734  D-4  49388394F  D-4
9876FTTT1  E-5  8641T4312  E-5  740747523  E-5  617290734  E-5  49383394F  E-5
9876F4TT1  F-6  864198312  F-6  740741523  F-6  617284734  F-6  49382794F  F-6
9876F43T1  G-7  864197612  G-7  740740823  G-7  617283T34  G-7  49382724F  G-7
9876F4321  H-8  864197532  H-8  740740743  H-8  6172839F4  H-8  49382716F  H-8
9876F4312  I-9  864197523  I-9  740740734  I-9  61728394F  I-9  493827156  I-9

ABCDEFGHI       ABCDEFGHI       ABCDEFGHI       ABCDEFGHI
---------       ---------       ---------       ---------
493827156       36T370367       246913578       123456789
393827156  A-1  26T370367  A-1  146913578  A-1  023456789  A-1
373827156  B-2  24T370367  B-2  126913578  B-2  003456789  B-2
36T827156  C-3  247370367  C-3  123913578  C-3  000456789  C-3
36T427156  D-4  246970367  D-4  123F13578  D-4  000056789  D-4
36T377156  E-5  246920367  E-5  123463578  E-5  000006789  E-5
36T371156  F-6  246914367  F-6  123457578  F-6  000000789  F-6
36T370456  G-7  246913667  G-7  123456878  G-7  000000089  G-7
36T370376  H-8  246913587  H-8  123456798  H-8  000000009  H-8
36T370367  I-9  246913578  I-9  123456789  I-9  000000000  I-9
```

## Extensión del ejemplo

Una vez que comprenda y domine el presente ejercicio, puede extenderlo para ampliar su práctica de uso de la quinta cuenta sin mas que repetirlo sobre un *fondo* 111111111, 222222222,..., 999999999 en lugar de 000000000. Se ofrecen a continuación los resultados parciales.

```
    0          1           2           3           4
000000000  0111111111  0222222222  0333333333  0444444444
123456789  02345678T0  0345678T11  045678T122  05678T1233
246913F78  0357T24689  046913F7T0  057T246911  0691357T22
36T36T367  0481481478  0592592F89  06T36T36T0  0814814811
4938271F6  0604938267  0715T49378  082715T489  09392715T0
617283945  0728394TF6  08394T6167  09F0617278  1061738389
74073T734  08F18F1845  09629629F6  1074073T67  118F18F178
864197F23  097F308634  1086419745  1197F2T8F6  1308641967
9876F4312  109876F423  1209876F34  1320987645  14320987F6
TTTTTTTT1  1222222212  1333333323  1444444434  1555FFFF45
9876F4312  1098765423  1209876534  132098764F  1432098756
864197523  097F308634  108641974F  1197F30856  1308641967
740740734  08F18F184F  0962962956  0T74074067  118F18F178
61728394F  072839F056  0839F06167  09F0617278  0T61728389
493827156  05T4938267  0716049378  0827160489  093827159T
36T370367  0481481478  0592592589  06T370369T  0814814811
246913578  0357T24689  046913579T  0F7T246911  0691358022
123456789  023456789T  0345678T11  04F678T122  0F678T1233
000000000  0111111111  0222222222  0333333333  0444444444

    5           6           7           8           9
0555555555  0666666666  0777777777  0888888888  0999999999
0678T12344  078T1234F5  08T1234F66  0T1234F677  11234F6788
07T2469133  091357T244  0T246913F5  11357T2466  1246913F77
0925925922  1036T36T33  1148148144  12592592F5  136T36T366
1049382711  115T493822  12715T4933  1382715T44  14938271F5
11728394T0  128394T611  1394T61722  1F06172833  1617283944
1296296289  14073T73T0  1F18F18F11  1629629622  174073T733
14197F2T78  1530864189  164197F2T0  17F3086411  1864197F22
1543209867  1654320978  176F431T89  1876F431T0  19876F4311
16666666F6  1777777767  1888888878  1999999989  1TTTTTTTT0
1F43209867  16F4320978  176F432089  1876F4319T  19876F4311
14197F3078  1F30864189  164197529T  17F3086411  1864197522
1296296289  140740739T  1F18F18F11  1629629622  1740740733
117283949T  12839F0611  139F061722  14T6172833  1617283944
0T49382711  115T493822  1271604933  1382716044  149382715F
0925925922  0T36T37033  1148148144  125925925F  136T370366
07T2469133  0913580244  0T2469135F  11357T2466  1246913577
0678T12344  078T12345F  08T1234566  0T12345677  1123456788
0FFF55555F  0666666666  0777777777  0888888888  0999999999
```

# Reglas adicionales

Por supuesto, las reglas para la suma también se pueden usar directamente en la multiplicación y las reglas para la resta en la división, raíces, etc. Ya lo sabe, todo lo que se puede hacer en el ábaco consiste en una sucesión de sumas y restas.

Adicionalmente, aunque la división tradicional se estudiará en capítulos posteriores, podemos dejar indicada aquí una regla adicional que le es específica y a la que podrá referirse tras estudiar la tabla de división; con ábacos 5+2 o 5+3:

> •**k1**: Utilice siempre cinco, diez y quince inferiores (**F**, **T**, **Q**) cuando sume al resto durante la aplicación de las **reglas de división**.

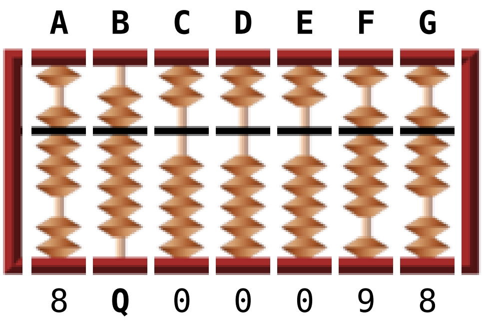
Esto es así porque, aunque estemos sumando a una varilla, lo siguiente que haremos será empezar a restar de la misma (si el divisor tiene más de un dígito). Es una especie de extensión de la primera regla para la resta (**s1**). Por ejemplo, iniciando la división87÷98:

**87÷98**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFG** | |
| 87    98 | Dividendo: AB, divisor: FG |
| 8**Q**    98 | A: Regla 8/9>8+8 |
| -64 | |
| 886   98 | etc. |

Justo después de la aplicación de la regla de división 8/9>8+8 deberíamos tener:

**Regla: 8/9>8+8**




Por cierto, a veces puede encontrar algo contradictorio el uso de la segunda regla para la resta (**s2**) en la división tradicional. Por ejemplo, 1167/32 = 36.46875

**1167/32 = 36.46875**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFG** | |
| 32 1167 | regla 1/3>3+1 |

| | |
|---|---|
| 32 3267 | -3*2=-6 in F, use la regla **s2** |
| -6 | |
| 32 31T7 | |

Ahora bien, ¿qué regla de división debería usarse aquí? 1/3>3+1 o 2/3>6+2? De hecho, podemos usar cualquiera de ellas y revisarlas según sea necesario, pero es más rápido darse cuenta de que el resto es en realidad 3207, de modo que la segunda regla de división es la adecuada, así que simplemente cambie las columnas **EF** a 62 y continúe con 2/3>6+2 en E

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFG** | |
| 32 3627 | |
| ... | etc. |

Finalmente, si está utilizando el método de multiplicación tradicional o similar en un 5+2, puede encontrarse con un desbordamiento en algunas columnas, por lo que la regla adicional:

- **m1** [14] + acarreo = Q

debe también considerarse.

# Acerca de la ventaja

Está claro que el uso de la quinta cuenta puede reducir el número de movimientos de cuentas o de los dedos requeridos en algunos cálculos (piense en 99999 + 1 = 999T0 frente a 99999 + 1 = 100000). Una estimación basada en el ejercicio 123456789 y algunos de sus derivados conduce a una reducción del 10% en promedio (contando los movimientos simultáneos de las cuentas superior e inferior por separado). Esta es una reducción modesta, pero la ventaja de la quinta cuenta va más allá de simplemente reducir el número de movimientos de los dedos, ya que también reduce el número y/o la extensión de otros gestos de la mano requeridos en los cálculos (desplazamientos, cambios de dirección, saltos de varillas, ...). Como ya se ha indicado en otra parte, cada gesto:

- como proceso físico, tarda un tiempo en completarse,
- como lo controla nuestro cerebro, requiere nuestra atención, consumiendo energía (mental o bioquímica),
- como lo hacemos seres humanos (no máquinas), tiene la posibilidad de hacerse de manera incorrecta, introduciendo errores.

Bajo esta óptica, podemos esperar entonces que el uso de la quinta cuenta resulte en un cálculo algo más rápido, más relajado y fiable al reducir el número total de gestos requeridos. No es fácil medir esta triple ventaja utilizando un solo parámetro.

Saltar columnas parece haber sido visto tradicionalmente como algo que debe evitarse como una posible fuente de errores [Chen 2013; Chen 2018]. Sin este concepto, la regla de resta (**s2**) no se puede entender ya que no siempre conduce a una reducción en el número de movimientos de los dedos, pero siempre reduce el rango de movimiento de la mano y la necesidad de saltar barras.

En cualquier caso, la ventaja de usar la quinta cuenta, aunque no despreciable, es solo modesta, y cada uno debe decidir si vale la pena usarla o no. Después de acostumbrarse y dominar el uso de la quinta cuenta, no hay mejor prueba de su eficiencia que usar nuevamente un ábaco moderno 4+1, y ser sensible al trabajo adicional requerido para completar las mismas tareas con él.

# Otras lecturas


- Heffelfinger, Totton (2011). «The 5 Earth Bead Advantage». *算盤 Abacus: Mystery of the Bead*. Archivado desde el original, el 1 de Agosto de 2021.


# Recursos externos

Puede practicar *online* el uso de la quinta cuenta con Soroban Trainer (ver: Entrenador Soroban en el capítulo: Introducción a los Métodos Tradicionales) usando este fichero 123456789-5bead.sbk que tendrá que descargar a su ordenador y después subirlo a Soroban Trainer (Es un archivo de texto que puede inspeccionar con cualquier editor de texto y que puede descargar de forma segura a su computadora.).

# IX Variantes del Ejercicio 123456789

## Introducción

Como hemos visto en el capítulo anterior, el "ejercicio 123456789", que consiste en sumar ese número nueve veces a un ábaco a cero hasta llegar al número 1111111101 y luego restarlo nueve veces hasta que el ábaco se despeje nuevamente, se viene utilizando desde la antigüedad para ilustrar y practicar la suma y la resta. Es un ejercicio conveniente porque:

- es lo suficientemente largo como para que no sea un ejercicio trivial
- si no volvemos al valor inicial (cero) es señal de que nos hemos equivocado por el camino
- no necesitamos ni libro ni hoja de ejercicios
- utiliza muchos de los casos elementales de suma y resta de un dígito a otro dígito

pero también tiene un par de inconvenientes:

- no usa todos los pares de dígitos (por ejemplo, un 3 nunca se suma a un 5)
- después de repetirlo varias veces, se comienza a memorizar *mecánicamente* el ejercicio, de modo que ya **no** estamos practicando sumas y restas

Para evitar estos dos problemas podemos modificar el ejercicio de varias formas.

## Usando un fondo

Ya se ha mencionado en el capítulo anterior. En lugar de usar un ábaco puesto a cero, llenamos 9 columnas del mismo con un dígito (111111111, 222222222, etc.) y procedemos a sumar y luego restar nueve veces el número 123456789. Con esto multiplicamos por 10 el número de ejercicios a nuestra disposición y podremos estar seguros de que ahora recorremos todos los casos posibles de suma y resta dígito por dígito a la vez que la memorización mecánica se hace más difícil.

La siguiente tabla contiene los valores intermedios del ejercicio como referencia. Estos valores se recorren de arriba hacia abajo durante la fase de adición y de abajo hacia arriba en la de sustracción.

**Ejercicio 123456789 sobre un fondo**
**Resultados intermedios**

| +1..9 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | +1..9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 000000000 | 111111111 | 222222222 | 333333333 | 444444444 | 0 |
| 1 | 123456789 | 234567900 | 345679011 | 456790122 | 567901233 | 1 |
| 2 | 246913578 | 358024689 | 469135800 | 580246911 | 691358022 | 2 |
| 3 | 370370367 | 481481478 | 592592589 | 703703700 | 814814811 | 3 |
| 4 | 493827156 | 604938267 | 716049378 | 827160489 | 938271600 | 4 |
| 5 | 617283945 | 728395056 | 839506167 | 950617278 | 1061728389 | 5 |
| 6 | 740740734 | 851851845 | 962962956 | 1074074067 | 1185185178 | 6 |
| 7 | 864197523 | 975308634 | 1086419745 | 1197530856 | 1308641967 | 7 |
| 8 | 987654312 | 1098765423 | 1209876534 | 1320987645 | 1432098756 | 8 |
| 9 | 1111111101 | 1222222212 | 1333333323 | 1444444434 | 1555555545 | 9 |

**Ejercicio 123456789 sobre un fondo**
**Resultados intermedios (continuación)**

| +1..9 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | +1..9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 555555555 | 666666666 | 777777777 | 888888888 | 999999999 | 0 |
| 1 | 679012344 | 790123455 | 901234566 | 1012345677 | 1123456788 | 1 |
| 2 | 802469133 | 913580244 | 1024691355 | 1135802466 | 1246913577 | 2 |
| 3 | 925925922 | 1037037033 | 1148148144 | 1259259255 | 1370370366 | 3 |
| 4 | 1049382711 | 1160493822 | 1271604933 | 1382716044 | 1493827155 | 4 |
| 5 | 1172839500 | 1283950611 | 1395061722 | 1506172833 | 1617283944 | 5 |
| 6 | 1296296289 | 1407407400 | 1518518511 | 1629629622 | 1740740733 | 6 |
| 7 | 1419753078 | 1530864189 | 1641975300 | 1753086411 | 1864197522 | 7 |
| 8 | 1543209867 | 1654320978 | 1765432089 | 1876543200 | 1987654311 | 8 |
| 9 | 1666666656 | 1777777767 | 1888888878 | 1999999989 | 2111111100 | 9 |

## Ejercicio 987654321

En lugar de usar el número 123456789, podemos pensar en usar cualquier otra permutación de estos dígitos que podamos recordar fácilmente; por ejemplo, 987654321, la única que consideraremos aquí. Esto nos ofrece otros 10 ejercicios independientes para la práctica de suma y resta. La siguiente tabla nos muestra los valores intermedios de esta nueva serie de ejercicios utilizando un fondo.

En total, ya tenemos 20 ejercicios diferentes.

**Ejercicio 987654321 sobre un fondo**
**Resultados intermedios**

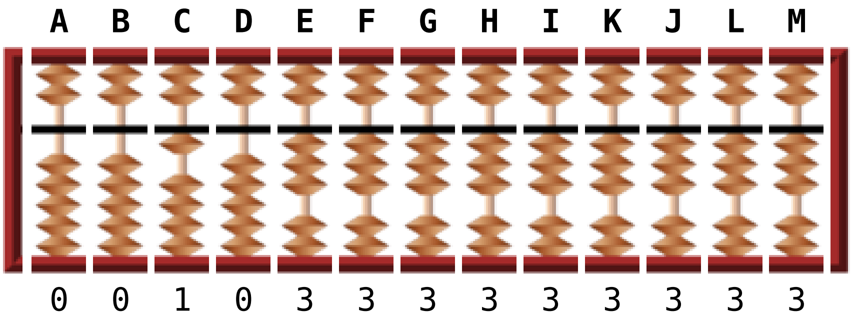
| +9..1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | +9..1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 000000000 | 111111111 | 222222222 | 333333333 | 444444444 | 0 |
| 1 | 987654321 | 1098765432 | 1209876543 | 1320987654 | 1432098765 | 1 |
| 2 | 1975308642 | 2086419753 | 2197530864 | 2308641975 | 2419753086 | 2 |
| 3 | 2962962963 | 3074074074 | 3185185185 | 3296296296 | 3407407407 | 3 |
| 4 | 3950617284 | 4061728395 | 4172839506 | 4283950617 | 4395061728 | 4 |
| 5 | 4938271605 | 5049382716 | 5160493827 | 5271604938 | 5382716049 | 5 |
| 6 | 5925925926 | 6037037037 | 6148148148 | 6259259259 | 6370370370 | 6 |
| 7 | 6913580247 | 7024691358 | 7135802469 | 7246913580 | 7358024691 | 7 |
| 8 | 7901234568 | 8012345679 | 8123456790 | 8234567901 | 8345679012 | 8 |
| 9 | 8888888889 | 9000000000 | 9111111111 | 9222222222 | 9333333333 | 9 |

**Ejercicio 987654321 sobre un fondo**
**Resultados intermedios (continuación)**

| +9..1 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | +9..1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 555555555 | 666666666 | 777777777 | 888888888 | 999999999 | 0 |
| 1 | 1543209876 | 1654320987 | 1765432098 | 1876543209 | 1987654320 | 1 |
| 2 | 2530864197 | 2641975308 | 2753086419 | 2864197530 | 2975308641 | 2 |
| 3 | 3518518518 | 3629629629 | 3740740740 | 3851851851 | 3962962962 | 3 |
| 4 | 4506172839 | 4617283950 | 4728395061 | 4839506172 | 4950617283 | 4 |
| 5 | 5493827160 | 5604938271 | 5716049382 | 5827160493 | 5938271604 | 5 |
| 6 | 6481481481 | 6592592592 | 6703703703 | 6814814814 | 6925925925 | 6 |
| 7 | 7469135802 | 7580246913 | 7691358024 | 7802469135 | 7913580246 | 7 |
| 8 | 8456790123 | 8567901234 | 8679012345 | 8790123456 | 8901234567 | 8 |
| 9 | 9444444444 | 9555555555 | 9666666666 | 9777777777 | 9888888888 | 9 |

## Empezando con la sustracción

Si empezamos restando los números 123456879 o 987654321 y completamos el ejercicio con su suma dispondremos de otros 20 ejercicios independientes, pero tarde o temprano nos aparecerán resultados intermedios negativos. Existe una forma de representar números negativos en el ábaco, frecuentemente referida como **"el otro lado" del ábaco**, que estudiaremos en el capítulo: Números Negativos, pero de momento es preferible mantenerse dentro de los números positivos. Para lograrlo, necesitaremos introducir un 1 dos columnas a la izquierda de donde vayamos a empezar el ejercicio; por ejemplo, usando un fondo de treses:




con un 1 en la columna **C**. Es decir, usamos el número 10 000 000 000 o  como punto de partida al que sumaremos el fondo que corresponda. De este modo tendremos de dónde tomar prestado durante la sustracción y trabajaremos con números positivos durante todo el ejercicio.

Las tablas siguientes contienen los resultados intermedios para los ejercicios 123456798 y 987654321. Nótese que las tablas no contienen a la columna **C** de arriba; de hecho, no es necesario introducir físicamente un 1 allí, simplemente podemos tomar prestado de dicha columna cuando lo necesitemos (sí, de la nada) y tarde o temprano, a lo largo del ejercicio, llevaremos un acarreo a dicha columna devolviendo lo que tomamos prestado, aunque tampoco lo hagamos constar en el ábaco. Si procedemos así, sin poner físicamente el 1 en la columna C, nos estaremos aproximando al uso del "otro lado del ábaco" para los números negativos. Vuelva por aquí cuando haya leído el capítulo correspondiente.

**Ejercicio 123456789 comenzando con sustracción**
**Resultados intermedios**

| -1..9 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | -1..9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 000000000 | 111111111 | 222222222 | 333333333 | 444444444 | 0 |
| 1 | 9876543211 | 9987654322 | 98765433 | 209876544 | 320987655 | 1 |
| 2 | 9753086422 | 9864197533 | 9975308644 | 86419755 | 197530866 | 2 |
| 3 | 9629629633 | 9740740744 | 9851851855 | 9962962966 | 74074077 | 3 |
| 4 | 9506172844 | 9617283955 | 9728395066 | 9839506177 | 9950617288 | 4 |
| 5 | 9382716055 | 9493827166 | 9604938277 | 9716049388 | 9827160499 | 5 |
| 6 | 9259259266 | 9370370377 | 9481481488 | 9592592599 | 9703703710 | 6 |
| 7 | 9135802477 | 9246913588 | 9358024699 | 9469135810 | 9580246921 | 7 |
| 8 | 9012345688 | 9123456799 | 9234567910 | 9345679021 | 9456790132 | 8 |
| 9 | 8888888899 | 9000000010 | 9111111121 | 9222222232 | 9333333343 | 9 |

**Ejercicio 123456789 comenzando con sustracción**
**Resultados intermedios (continuación)**

| -1..9 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | -1..9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 555555555 | 666666666 | 777777777 | 888888888 | 999999999 | 0 |
| 1 | 432098766 | 543209877 | 654320988 | 765432099 | 876543210 | 1 |
| 2 | 308641977 | 419753088 | 530864199 | 641975310 | 753086421 | 2 |
| 3 | 185185188 | 296296299 | 407407410 | 518518521 | 629629632 | 3 |
| 4 | 61728399 | 172839510 | 283950621 | 395061732 | 506172843 | 4 |
| 5 | 9938271610 | 49382721 | 160493832 | 271604943 | 382716054 | 5 |
| 6 | 9814814821 | 9925925932 | 37037043 | 148148154 | 259259265 | 6 |
| 7 | 9691358032 | 9802469143 | 9913580254 | 24691365 | 135802476 | 7 |
| 8 | 9567901243 | 9679012354 | 9790123465 | 9901234576 | 12345687 | 8 |
| 9 | 9444444454 | 9555555565 | 9666666676 | 9777777787 | 9888888898 | 9 |

**Ejercicio 987654321 comenzando con sustracción**
**Resultados intermedios**

| -9..1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | -9..1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 000000000 | 111111111 | 222222222 | 333333333 | 444444444 | 0 |
| 1 | 9012345679 | 9123456790 | 9234567901 | 9345679012 | 9456790123 | 1 |
| 2 | 8024691358 | 8135802469 | 8246913580 | 8358024691 | 8469135802 | 2 |
| 3 | 7037037037 | 7148148148 | 7259259259 | 7370370370 | 7481481481 | 3 |
| 4 | 6049382716 | 6160493827 | 6271604938 | 6382716049 | 6493827160 | 4 |
| 5 | 5061728395 | 5172839506 | 5283950617 | 5395061728 | 5506172839 | 5 |
| 6 | 4074074074 | 4185185185 | 4296296296 | 4407407407 | 4518518518 | 6 |
| 7 | 3086419753 | 3197530864 | 3308641975 | 3419753086 | 3530864197 | 7 |
| 8 | 2098765432 | 2209876543 | 2320987654 | 2432098765 | 2543209876 | 8 |
| 9 | 1111111111 | 1222222222 | 1333333333 | 1444444444 | 1555555555 | 9 |

**Ejercicio 987654321 comenzando con sustracción**
**Resultados intermedios (continuación)**

| -9..1 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | -9..1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 555555555 | 666666666 | 777777777 | 888888888 | 999999999 | 0 |
| 1 | 9567901234 | 9679012345 | 9790123456 | 9901234567 | 12345678 | 1 |
| 2 | 8580246913 | 8691358024 | 8802469135 | 8913580246 | 9024691357 | 2 |
| 3 | 7592592592 | 7703703703 | 7814814814 | 7925925925 | 8037037036 | 3 |
| 4 | 6604938271 | 6716049382 | 6827160493 | 6938271604 | 7049382715 | 4 |
| 5 | 5617283950 | 5728395061 | 5839506172 | 5950617283 | 6061728394 | 5 |
| 6 | 4629629629 | 4740740740 | 4851851851 | 4962962962 | 5074074073 | 6 |
| 7 | 3641975308 | 3753086419 | 3864197530 | 3975308641 | 4086419752 | 7 |
| 8 | 2654320987 | 2765432098 | 2876543209 | 2987654320 | 3098765431 | 8 |
| 9 | 1666666666 | 1777777777 | 1888888888 | 1999999999 | 2111111110 | 9 |

# Usando la quinta cuenta inferior

Esta es la propuesta más interesante en el contexto de los métodos tradicionales. Los cuarenta ejercicios anteriores se pueden realizar utilizando la quinta cuenta inferior como se explica en detalle en el capítulo anterior; esto le permitirá dominar esta técnica tradicional. Consulte el capítulo anterior sobre la 5ª cuenta para los resultados intermedios del ejercicio 123456789.

¡Con esto, sumamos un total de 80 ejercicios!

# Usando dirección de operación alterna

Y finalmente, ¿por qué no? Aunque solamente sea por el placer de superar una dificultad diferente, podemos combinar los ejercicios anteriores con una dirección de operación alterna, de izquierda a derecha y de derecha a izquierda, como se explica en el capítulo introductorio de Particularidades Tradicionales de la Adición y la Sustracción.

**Ejemplo de operación alternada**

| Abacus | Comment |
|---|---|
| ABCDEFGHIJ | |
| | Ábaco puesto a cero |
| +1 | |
| +2 | |
| +3 | |
| +4 | |
| +5 | |
| +6 | |
| +7 | |
| +8 | |
| +9 | |
| 123456789 | Primer paso completado |
| +9 | |
| +8 | |
| +7 | |
| +6 | |
| +5 | |
| +4 | |
| +3 | |
| +2 | |
| +1 | |
| 246913578 | Segundo paso completado |
| etc. | |

Con esto, podría dar un paso más en su comprensión de la mecánica de las cuentas.

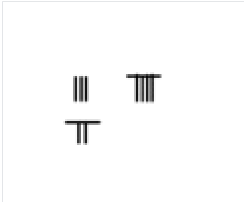
# Conclusión

Con los 160 ejercicios aquí presentados, ya no tiene excusa, puede practicar sumas y restas durante horas en cualquier momento, sin hojas de ejercicios, quizás mientras está cómodamente sentado en su sofá, con su ábaco apoyado en las rodillas y mientras ve la televisión...

¡Esta es una puerta a la maestría!

# X Sinopsis de la División Tradicional

## Introducción



División según Sunzi de 309 por 7 usando varillas de cálculo

De las cuatro operaciones aritméticas fundamentales, la división es probablemente la más difícil de aprender y realizar. Al ser básicamente una secuencia de restas, existe una gran cantidad de algoritmos o métodos para realizarla y muchos de estos métodos se han utilizado con el ábaco [Suzuki 1980; Suzuki 1981]. De estos, dos destacan por su eficiencia y deben considerarse los principales:

- El **método de división moderno** (**MD**), *shojohou* en japonés, *shāng chúfǎ* en chino (商除法); el más antiguo de los dos, su origen se remonta al menos a los siglos III al V d.C., como se cita en el libro: *El Clásico Matemático del Maestro Sun* (*Sūnzǐ Suànjīng* 孫子算經). Si lo llamamos *moderno* es porque es el que se enseña habitualmente en la actualidad al ser el más parecido a la división con papel y lápiz. Este método de división se basa en el uso de la tabla de multiplicar. Durante el período Edo fue introducido en Japón por Momokawa Jihei [Momokawa 1645], pero no ganó popularidad [Smith & Mikami 1914] hasta el siglo XX con el desarrollo de lo que hemos venido llamando Método Moderno.
- El **método de división tradicional** (**TD**), *kijohou* (帰除法) en japonés, *guī chú* (帰除) en chino , descrito por primera vez en la *Ilustración matemática* (*Suànxué Qǐméng*, 算學啟蒙) de Zhū Shìjié 朱士傑 [Zhū 1299]. Su principal peculiaridad es que utiliza una tabla de división además de la tabla de multiplicar, lo que ahorra el esfuerzo mental de determinar qué cifra provisional del cociente tenemos que probar. Además, podemos crear tablas de división especiales para divisores de varios dígitos; lo que nos ahorrará el uso de la tabla de multiplicar.

Ambos métodos se utilizaron por primera vez en China con varillas de cálculo.

En los capítulos siguientes nos ocupamos del método tradicional de división, asumiendo que el lector ya tiene experiencia con el método moderno de división.

## Capítulos

### División Moderna y Tradicional; Parientes Próximos

En este capítulo tratamos de mostrar cómo los métodos modernos y tradicionales, aparentemente tan diferentes, están realmente estrechamente relacionados, a la vez que tratamos de justificar **por qué** se inventó este método.

## Guía a la División Tradicional

Aquí veremos **cómo** utilizar el método tradicional.

## Aprendiendo la Tabla de División

Contiene algunas indicaciones que pueden facilitarle la memorización de la tabla de división.

## Cómo Tratar con el Desbordamiento

Cómo hacer frente a la **disposición tradicional de la división** (**TDA**) utilizando diferentes tipos de ábaco, especialmente el moderno 4+1 y el tradicional japonés 5+1.

## Ejemplos de División Tradicional

Un conjunto básico de ejemplos para ilustrar todo lo anterior.

## Tablas de División Específicas

Tablas de división para divisores de varios dígitos, lo que permite dividir por ellos sin recurrir a la tabla de multiplicar.

## División por Potencias de 2

Otro método de división tradicional diferente de 帰除法 basado en fracciones; una forma de división *in situ*.

# XI División Moderna y Tradicional; Parientes Próximos

## División Moderna (商除法)

Es conveniente que el lector tenga fresco en la memoria el capítulo sobre la división moderna de la sección: Métodos del Ábaco Moderno; en particular lo que allí llamamos:

**El punto clave**

Uno de los puntos clave del aprendizaje del ábaco es ser conscientes de que este instrumento nos permite corregir algunas cosas de forma muy rápida y sin dejar rastros, lo que convierte al ábaco en un instrumento especialmente indicado para procedimientos de **prueba y error**. Esto nos es especialmente útil en el caso de la división. Si tenemos que dividir $634263 \div 79283$, en lugar de forzar nuestra mente tratando de encontrar la cifra correcta del cociente, simplemente elegimos una cifra aproximada provisional o interina simplificando el problema original a $63 \div 7$ y la probamos intentando restar el trozo (cociente provisional)×79283 del dividendo; al hacerlo, ocurrirá una de las siguientes situaciones:

- El dígito del cociente provisional es correcto
- Es excesivo y debemos revisarlo a la baja
- Es insuficiente y debemos revisarlo al alza

ya que es este punto clave lo que nos señala la tremenda similitud entre las dos aproximaciones, tradicional y moderna, a la división; así como la pequeña diferencia que nos conducirá a un algoritmo completamente diferente. Recordemos también uno de los ejemplos vistos en dicho capítulo:

**División Moderna: 1225÷35 = 35**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJ** | |
| 35     1225 | 12÷3↦4 como cociente provisional |
| +4 | situar cociente prov. en F |
| 35   41225 | Tratar de restar 4×35 de GHI, |
| -12 | primero 4×3 de GH |
| 35   40025 | ahora 4×5 de HI |
| -20 | **¡No se puede!** |
| -1 | Revisar a la baja la cifra del cociente |
| 35   30025 | |
| +3 | Devolver lo sustraído en exceso de GH |
| 35   30325 | |
| -15 | continuar normalmente: restar 3×5 de HI |
| 35   3 175 | 17÷3↦5 como cociente provisional |
| +5 | situar cociente prov. en G |
| 35   35175 | Tratar de restar 5×35 de HIJ |

| | |
|---|---|
| -15 | primero 5×3 de HI |
| 35 35025 | |
| -25 | ahora 5×5 de IJ |
| 35 35 | Resto nulo, fin! 1225÷35 = 35 |

# División tradicional (帰除法)

En lugar de intentar resolver directamente el problema original 1225÷35 o la aproximación utilizada en **MD** 12÷3, simplificamos aún más y tratamos de resolver 10÷3; es decir, utilizamos un enfoque más crudo del problema original al ignorar el segundo dígito del dividendo, por lo que debemos prepararnos para revisar el cociente intermedio con más frecuencia. Con este cambio de enfoque de 12÷3 a 10÷3 estamos adoptando la *filosofía* de **TD**; la cual es sólo una ligera variación de la técnica de división por trozos utilizada en **MD**. Es por esta razón por lo que podemos considerar ambas técnicas de división como parientes cercanos, miembros de la familia de algoritmos de división por trozos.

Por supuesto, si el lector ya ha desarrollado cierta habilidad dividiendo por el método moderno, no hallará ninguna dificultad en aplicar esta nueva aproximación. Así, el ejemplo anterior discurriría de la forma:

**1225÷35 con la nueva *filosofía***

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| ABCDEFGHIJ | |
| 35 1225 | **10÷3↦3** por la tabla de multiplicar |
| +3 | cociente provisional en F |
| 35 31225 | sustraer 3×35 from GHI, |
| -09 | primero 3×3 from GH |
| 35 3 325 | |
| -15 | luego 3×5 from HI |
| 35 3175 | ok. |
| 35 3 175 | **10÷3↦3** por la tabla de multiplicar |
| +3 | cociente provisional en G |
| 35 33175 | sustraer 3×35 from HIJ, |
| -09 | primero 3×3 de HI |
| 35 33 85 | |
| -15 | ahora 3×5 de IJ |
| 35 33 70 | resto mayor que el divisor (35) |
| +1-35 | revisamos al alza |
| 35 34 35 | resto igual que el divisor (35) |
| +1-35 | revisamos al alza otra vez |
| 35 35 | resto nulo, hecho! 1225÷35 = 35 |

Fíjese en que

- **MD** y **TD** (tal y como se ha explicado hasta ahora) se pueden entremezclar libremente durante el mismo problema de división. Este es un ejercicio interesante y recomendable que permite comparar ambas estrategias una junto a la otra.
- **TD** utiliza una aproximación más simple y **por defecto** del problema original que **MD**, por lo que podemos prever algunos pros y contras
  - **Pros**
    - Algunos pueden encontrar este enfoque más simple
    - Será necesario revisar a la baja con menos frecuencia (revisar hacia a la baja suele ser más difícil y propenso a errores que revisar al alza)
  - **Contras**
    - Necesitaremos revisar el cociente provisional con más frecuencia, ya que la aproximación seguida es mas rudimentaria, lo cual es un problema de eficiencia.

Los dos pros anteriores probablemente jugaron un papel en el desarrollo de la técnica sofisticada que conocemos como división tradicional, pero entender por qué fue el método preferido durante siglos, a pesar del *contra* anterior, requiere reflexionar sobre el origen del esfuerzo mental realizado durante la división y descubrir la *belleza oculta* de **TD**.

# La fuente del esfuerzo mental

Cuando aprendemos la tabla de multiplicar, memorizamos una secuencia de frases como:

> “*nueve por nueve, ochenta y uno*”
> “*nueve por ocho, setenta y dos*”
> ...

El orden en el que se aprenden estas frases puede variar, pero la estructura de las frases es similar en muchos idiomas, al menos en español e inglés al igual que en chino y japonés. Consiste en una *etiqueta* que contiene los dos factores a multiplicar seguidos del *producto*. Tan pronto como pensamos en la etiqueta, ésta, actuando como una invocación, trae a nuestra conciencia el valor del producto. Representémoslo de la siguiente manera (lea ➡ como la *invocación*):

| Lengua | Etiqueta | | Producto |
|---|---|---|---|
| **Español** | nueve por nueve | ➡ | ochenta y uno |
| **Inglés** | nine times nine | ➡ | eighty-one |
| **Chino** | 九九 | ➡ | 八十一 |
| **Japonés** | くく | ➡ | はちじゅういち |
| **Symbólico** | 9×9 | ➡ | 81 |

¿Cómo usamos esta tabla de multiplicar durante la división? Pensemos en nuestro ejemplo anterior usando shojohou o el método de división moderno: $17 \div 3 \mapsto 5$, de la tabla de multiplicación por tres necesitamos el producto más grande que se puede restar de 17. Necesitamos escanear en nuestra memoria (representado por ⤷) al menos parte de dicha tabla y por cada producto rescatado, ver si es menor de 17 y elegir el máximo de los productos menores que 17. Un proceso complicado que se puede representar como:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 3×1 | ➡ | 3 | | |
| | 3×2 | ➡ | 6 | | |
| ⤷ | 3×3 | ➡ | 9 | sí | |
| ⤷ | 3×4 | ➡ | 12 | sí | |
| ⤷ | 3×5 | ➡ | 15 | sí | **¡seleccionamos éste!** |
| ⤷ | 3×6 | ➡ | 18 | no | |
| | 3×7 | ➡ | 21 | | |
| | 3×8 | ➡ | 24 | | |
| | 3×9 | ➡ | 27 | | |

Este proceso consume tiempo y energía. Los especialistas en informática pueden encontrar una similitud entre este proceso y la búsqueda en una tabla de una base de datos relacional por datos en una columna no indexada; la ineficacia de tal búsqueda es bien conocida. La creación de un nuevo índice para esa tabla en función de la columna y los criterios de búsqueda puede mejorar drásticamente las cosas. ¿Podemos hacer algo similar en nuestro caso para que la división sea más cómoda?

# Indexando la tabla de multiplicar; la tabla de división

Para hacer algo similar a indexar la tabla de multiplicar en términos de los productos para facilitar la búsqueda, debemos memorizar frases nuevas que contengan esos productos como etiquetas; es decir, frases que comiencen con ellos; por ejemplo:

| Etiqueta | Cociente |
|---|---|
| 3/3 | 1 |
| 6/3 | 2 |
| 9/3 | 3 |
| 12/3 | 4 |
| 15/3 | 5 |
| 18/3 | 6 |
| 21/3 | 7 |
| 24/3 | 8 |
| 27/3 | 9 |

Es decir, tenemos que memorizar una **tabla de división**, lo cual es un trabajo duro. Piense también que la tabla anterior no es óptima en el sentido de que faltan muchos de los números entre 1 y 29; quizás deberíamos memorizar una tabla del siguiente estilo en su lugar:

| Etiqueta | Cociente | Resto |
|---|---|---|
| 1/3 | 0 | 1 |
| 2/3 | 0 | 2 |
| 3/3 | 1 | 0 |
| 4/3 | 1 | 1 |
| 5/3 | 1 | 2 |
| … | … | … |
| 27/3 | 9 | 0 |
| 28/3 | 9 | 1 |
| 29/3 | 9 | 2 |

donde la tercera columna contiene los restos de la división euclidiana. Probablemente esté de acuerdo en que memorizar una tabla de este tipo está fuera del alcance de la mayoría de las personas (¡piense en la tabla para 9!).

## La *belleza oculta* de la división tradicional

Si dedicásemos toda una vida a dividir con el ábaco usando el método moderno terminaríamos enfrentándonos con todas las divisiones elementales posibles del tipo ab÷c, donde a, b y c son dígitos y ab<c0, aproximadamente unas 360 en total. Sin embargo, si usásemos la división tradicional tal y como se ha explicado aquí hasta ahora, nos enfrentaríamos con todas las divisiones elementales del tipo a0÷c, es decir 10✕a÷c con a0<c0, ¡sólo 36 en total! Esto hace viable la memorización de una tabla de división. De hecho, para dividir por 3 basta con memorizar:

| Etiqueta | Cociente | Resto |
|---|---|---|
| 10/3 | 3 | 1 |
| 20/3 | 6 | 2 |

o, en una forma simbólica más compacta

| Regla |
|---|
| 1/3 > 3+1 |
| 2/3 > 6+2 |

que podemos usar directamente para resolver nuestro ejemplo sin pensar, simplemente eligiendo la cifra sugerida por la regla como cociente provisional:

**1225÷35 = 35 usando reglas de división**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| ABCDEFGHIJ | |
| 35     1225 | Regla: 1/3 > 3+1 |
|     +3 | cociente interino 3 en F |

| | | |
|---|---|---|
| 35 | 31225 | sustraer 3×35 de GHI, |
| | -09 | primero 3×3 de GH |
| 35 | 3 325 | |
| | -15 | después 3×5 de HI |
| 35 | 3 175 | ok. |
| 35 | 3 175 | Regla: 1/3 > 3+1 |
| | +3 | cociente interino 3 en G |
| 35 | 33175 | sustraer 3×35 from HIJ, |
| | -09 | primero 3×3 de HI |
| 35 | 33 85 | |
| | -15 | ahora 3×5 de IJ |
| 35 | 33 70 | resto mayor que el divisor (35) |
| | +1-35 | revisando al alza |
| 35 | 34 35 | resto igual al divisor (35) |
| | +1-35 | revisando al alza otra vez |
| 35 | 35 | Resto nulo, ¡hecho! 1225÷35 = 35 |

pero aún no hemos hecho uso del resto que aparece en las reglas después del signo más, por lo que todavía **no estamos usando** la mecánica completa de la división tradicional; ese y otros temas se cubrirán en el próximo capítulo.

## La tabla de división

Concluyamos el presente capítulo ofreciendo una primera visión de la tabla de división completa utilizada en **TD**. Todos los elementos se obtienen de los términos a0÷c por división euclidiana.

**Tabla de División**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1/9>1+1 | 2/9>2+2 | 3/9>3+3 | 4/9>4+4 | 5/9>5+5 | 6/9>6+6 | 7/9>7+7 | 8/9>8+8 | 9/9>9+9 |
| 1/8>1+2 | 2/8>2+4 | 3/8>3+6 | 4/8>5+0 | 5/8>6+2 | 6/8>7+4 | 7/8>8+6 | 8/8>9+8 | |
| 1/7>1+3 | 2/7>2+6 | 3/7>4+2 | 4/7>5+5 | 5/7>7+1 | 6/7>8+4 | 7/7>9+7 | | |
| 1/6>1+4 | 2/6>3+2 | 3/6>5+0 | 4/6>6+4 | 5/6>8+2 | 6/6>9+6 | | | |
| 1/5>2+0 | 2/5>4+0 | 3/5>6+0 | 4/5>8+0 | 5/5>9+5 | | | | |
| 1/4>2+2 | 2/4>5+0 | 3/4>7+2 | 4/4>9+4 | | | | | |
| 1/3>3+1 | 2/3>6+2 | 3/3>9+3 | | | | | | |
| 1/2>5+0 | 2/2>9+2 | | | | | | | |
| 1/1>9+1 | | | | | | | | |

El lector probablemente se sentirá sorprendido al contemplar los elementos de la diagonal señalados en gris tales como 9/9>9+9, 8/8>9+8, etc. La división euclidiana de 90 por 9 da un cociente de 10 y un resto de cero, ¿Por qué se indica aquí un cociente de 9 y un resto de 9? Como veremos, tales reglas son especiales en cierto sentido.

# Otras lecturas


- «The Definitive Higher Math Guide on Integer Long Division (and Its Variants)». Math Vault. Archivado desde el original, el May 14, 2021.
- Knott, Cargill G. (1886). «The Abacus, in its Historic and Scientific Aspects». *Transactions of the Asiatic Society of Japan* **14**: pp. 18-73. https://archive.org/details/in.gov.ignca.26020/page/17/mode/2up. deals with traditional division
- Totton Heffelfinger (2013). «Suan Pan and the Unit Rod - Division». 算盤 Abacus: Mystery of the Bead. Archivado desde el original, el August 3, 2021.
- Totton Heffelfinger (2013). «Short Division Techniques - Chinese Suan Pan». 算盤 Abacus: Mystery of the Bead. Archivado desde el original, el August 3, 2021.
- Totton Heffelfinger (2013). «Long Division Techniques - Chinese Suan Pan». 算盤 Abacus: Mystery of the Bead. Archivado desde el original, el August 3, 2021.
- Totton Heffelfinger (2013). «Chinese Division Rules on a Soroban». 算盤 Abacus: Mystery of the Bead. Archivado desde el original, el August 3, 2021.

# XII Guía a la División Tradicional

## Introducción

El método de división tradicional (**TD**), *kijohou* , *guī chúfă* (帰除法), es uno de los dos métodos principales de división utilizados con el ábaco. Este método utiliza tanto la tabla de multiplicar como una tabla de división específica y ha sido el método estándar estudiado con el ábaco durante al menos 4 siglos, perdiendo popularidad en la década de 1930 por las razones que ya han sido comentadas. Como algoritmo de división *dígito a dígito* lo hemos presentado en el capítulo anterior comparándolo al método de división moderno; haciendo hincapié en su especial característica: no requiere *pensar* en qué dígito provisional probar, sino sólo seguir las reglas. En el presente capítulo veremos cómo llevarlo efectivamente a la práctica con el ábaco.

## La tabla de división

En el capítulo anterior se ha introducido la siguiente **tabla de división** o **tabla de dividir** (八算, *Hassan* en japonés, *Bāsuàn* en chino):

**Tabla de División**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1/9>1+1 | 2/9>2+2 | 3/9>3+3 | 4/9>4+4 | 5/9>5+5 | 6/9>6+6 | 7/9>7+7 | 8/9>8+8 | 9/9>9+9 |
| 1/8>1+2 | 2/8>2+4 | 3/8>3+6 | 4/8>5+0 | 5/8>6+2 | 6/8>7+4 | 7/8>8+6 | 8/8>9+8 | |
| 1/7>1+3 | 2/7>2+6 | 3/7>4+2 | 4/7>5+5 | 5/7>7+1 | 6/7>8+4 | 7/7>9+7 | | |
| 1/6>1+4 | 2/6>3+2 | 3/6>5+0 | 4/6>6+4 | 5/6>8+2 | 6/6>9+6 | | | |
| 1/5>2+0 | 2/5>4+0 | 3/5>6+0 | 4/5>8+0 | 5/5>9+5 | | | | |
| 1/4>2+2 | 2/4>5+0 | 3/4>7+2 | 4/4>9+4 | | | | | |
| 1/3>3+1 | 2/3>6+2 | 3/3>9+3 | | | | | | |
| 1/2>5+0 | 2/2>9+2 | | | | | | | |
| 1/1>9+1 | | | | | | | | |

donde cada celda es el resultado de la división euclidiana:

$$(10 \times a)/b = q, r$$

($q$: cociente, $r$: resto, $a, b$: dígitos de 1 a 9) expresado en la forma $a/b > q + r$ por razones que veremos a continuación. Esto significa que se cumple lo siguiente:

$$10a = q \cdot b + r$$

Aunque ya hemos señalado al final del capítulo anterior que las reglas diagonales (en gris) son especiales; son un tanto excepcionales en el sentido de que que el resto de la división euclidiana siempre es menor que el divisor, lo cual no es el caso aquí, por lo que estas reglas no son el resultado de una división euclidiana en sentido estricto aunque satisfagan la ecuación anterior. En breve podremos explicar su especial naturaleza.

La tabla tiene tres zonas que corresponden a lo siguiente: Si el divisor tiene $n$ cifras y lo comparamos con los $n$ primeros dígitos del dividendo contados desde la izquierda (añadiendo ceros finales si fuera necesario), pueden ocurrir tres casos:

1. que el dividendo sea mayor o igual que el divisor (ej. $770/689$)
2. que el dividendo sea menor que el divisor y el primer dígito del divisor sea igual al primer dígito del dividendo (por ejemplo,$670/689$)
3. que el dividendo sea menor que el divisor y el primer dígito del divisor sea mayor que el primer dígito del dividendo (por ejemplo,$570/689$)

Las tres zonas de la tabla se corresponden con estos tres casos:

- Las celdas en blanco bajo la diagonal de la tabla de división corresponden al caso **1**. Podrían rellenarse al estilo de las tablas que se pueden ver en otros lugares [WikipediaJA Kuku], pero las dejamos vacías aquí por simplicidad. Si durante la división caemos en esta zona, procederemos, al menos por ahora, simplemente revisando al alza el dígito anterior del cociente tal y como veremos en los ejemplos que seguirán.
- Los elementos diagonales (en gris) corresponden al caso **2**, lo cual sólo puede ocurrir si el divisor tiene al menos dos dígitos.
- Finalmente, los demás elementos no diagonales corresponden al caso **3**, que puede considerarse el más importante de estudiar.

Ahora sí, ya podemos explicar lo que las reglas diagonales tienen de especial. Si pensamos en el ejemplo dado arriba: $670/689$, si tratamos de aplicar la filosofía de la división tradicional, tal y como se introdujo en el capítulo anterior, deberíamos simplificar el problema a $60/6$, lo que nos conduce a un cociente de 10 y un resto nulo; pero dicho cociente de 10 es excesivo de entrada ya que $10 \times 689 = 6890 > 6700$ y no podríamos restarlo del dividendo. Estamos forzados, por tanto, a revisar a la baja el divisor y considerar 9, en lugar de 10, como cociente provisional y aceptar 6 como resto de la división $60/6$. Podemos entender por tanto las reglas diagonales como el resultado de una división euclidiana, en sentido estricto, inmediatamente seguida de una revisión a la baja.

No hay duda de que memorizar la tabla de división requiere una inversión de tiempo y esfuerzo. Por ello, al lector le interesaría *probar* el método para saber si le interesa o no antes de realizar dicha inversión. Afortunadamente, las reglas de división por nueve, cinco y dos tienen una estructura muy simple que permiten memorizarlas casi instantáneamente (ver más abajo); también los elementos diagonales para divisores de varios dígitos se pueden retener inmediatamente. Esto significa que podemos aprender esta técnica tradicional sin mucho esfuerzo utilizando divisores que comienzan con 9, 5 o 2 y así poder decidir si vale la pena dedicar tiempo a aprender toda la tabla o no. En lo que sigue usaremos ejemplos basados en tales divisores.

**Reglas fáciles de memorizar**

| Diagonal | División por 9 | División por 5 | División por 2 |
|---|---|---|---|
| 1/1>9+1 | 1/9>1+1 | 1/5>2+0 | 1/2>5+0 |
| 2/2>9+2 | 2/9>2+2 | 2/5>4+0 | |
| 3/3>9+3 | 3/9>3+3 | 3/5>6+0 | |
| 4/4>9+4 | 4/9>4+4 | 4/5>8+0 | |
| 5/5>9+5 | 5/9>5+5 | | |
| 6/6>9+6 | 6/9>6+6 | | |
| 7/7>9+7 | 7/9>7+7 | | |
| 8/8>9+8 | 8/9>8+8 | | |
| 9/9>9+9 | | | |

## ¿Por qué las reglas de división incluyen restos?

Supongamos que vamos a dividir 35 entre 9, la regla 3/9>3+3 nos dice que debemos usar 3 como cociente intermedio y el siguiente paso será restar el producto 3×9 = 27 de 35, dejando un resto de 8. Si también memorizamos los restos, podemos ahorrarnos este paso de multiplicación de la siguiente manera: quitamos, limpiamos o **borramos el primer dígito del dividendo**, en este caso 3, **luego sumamos el resto** (3) **a la siguiente cifra** (5) **del dividendo**. De esta forma obtenemos el mismo resultado pero sin utilizar la tabla de multiplicar. Con divisores de un dígito nunca tendremos que recurrir a la tabla de multiplicar, y en el caso de divisores con varias cifras, procediendo de la misma forma, nos ahorraremos una de las multiplicaciones necesarias. Lo veremos en el ábaco a continuación, pero primero necesitamos añadir algo sobre cómo vamos a organizar la división en el ábaco.

## Disposición moderna de la división (MDA)

Se supone que el lector ya ha estudiado el método moderno del ábaco y la división moderna tal como se ha explicado en la sección precedente de este libro y que se corresponde con el método divulgado en lengua inglesa por Kojima [1954]. En particular, ya conoce cómo organizar la división sobre un ábaco 4+1, por lo que en los ejemplos siguientes ilustraremos la división tradicional usando la misma disposición con la que ya está familiarizado para que pueda seguirla más fácilmente y usar su ábaco de tipo 4+1 habitual si lo desea. Llamaremos a esta organización **Disposición moderna de la división** (o **MDA**, por sus siglas en inglés), pero esta disposición **no es** la forma en que la división se organizaba tradicionalmente en el ábaco. Más adelante, presentaremos la **Disposición tradicional de la división** (**TDA**) que, como veremos, tiene algunas ventajas y algunos inconvenientes, incluyendo la necesidad (o al menos la conveniencia) de utilizar un ábaco especializado con cuentas superiores adicionales.

Mientras use **MDA** puede usar las mismas reglas que ya conoce sobre la posición de la varilla unitaria si las necesita.

Veamos ahora el caso de la división 35÷9 del párrafo anterior, primero sin usar los restos (de la regla):

**35÷9 sin usar los restos (de la regla)**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| ABCDEFGH | |
| 9      35 | Divisor en A, dividendo en GH, regla: 3/9>3+3 |
|     +3 | cociente provisional 3 en E |
| 9    335 | |
|      -27 | restar 3×9=27 de GH |
| 9    3 8 | nuevo resto/dividendo en H |
| ... | ... |

Y ahora usando los restos:

**35÷9 usando los restos (de la regla)**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| ABCDEFGH | |
| 9      35 | Divisor en A, dividendo en GH, regla: 3/9>3+3 |
|     +3 | cociente provisional 3 en E |
| 9    335 | |
|      -3 | borrar primer dígito del dividendo en G |
| 9    3 5 | |
| 9     +3 | sumar el resto 3 de la regla a H |
| 9    3 8 | nuevo resto/dividendo en H |
| ... | ... |

**es decir:**

> Cuando se usa **MDA**, la regla **a/b>q+r** se debe leer: *"introducir **q** como dígito provisional del cociente a la izquierda de **a**, borrar **a** y sumar **r** a la cifra de la derecha"*

# Divisores de un dígito

El número 123456789 se ha utilizado tradicionalmente para demostrar el uso de las tablas de multiplicar y dividir en libros antiguos chinos [Xú-Xīnlǔ 1573] y japoneses [Yoshida 1634; Shinoda 1895]. Aquí lo usaremos con los *"divisores fáciles"* 9, 5 y 2.

## Ejemplo: 123456789÷9=13717421

**123456789÷9=13717421**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| ABCDEFGHIJ | (divisor no indicado) |
|  123456789 | Regla 1/9>1+1 |
| +1 | cociente provisional 1 en A |
|  -1 | borrar B |
|   +1 | añadir resto 1 al dígito adyacente |

| | |
|---|---|
| 1 33456789 | Regla 3/9>3+3 |
| 13 6456789 | Regla 6/9>6+6 |
| 1361056789 | |
| +1-9 | revisión al alza |
| 137 156789 | Regla 1/9>1+1 |
| 1371 66789 | Regla 6/9>6+6 |
| 1371612789 | |
| +1-9 | revisión al alza |
| 13717 3789 | Regla 3/9>3+3 |
| 1371731089 | |
| +1-9 | revisión al alza |
| 137174 189 | Regla 1/9>1+1 |
| 1371741 99 | |
| +1-9 | revisión al alza |
| 1371742  9 | |
| +1-9 | revisión al alza |
| 13717421 | ¡Hecho! |

## Ejemplo: 123456789÷5=24691357.8

**123456789÷5=24691357.8**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJ** | (divisor no indicado) |
| 123456789 | Regla 1/5>2+0 |
| 2 23456789 | Regla 2/5>4+0 |
| 24 3456789 | Regla 3/5>6+0 |
| 246 456789 | Regla 4/5>8+0 |
| 2468 56789 | |
| +1-5 | revisión al alza |
| 2469  6789 | |
| +1-5 | revisión al alza |
| 24691 1789 | Regla 1/5>2+0 |
| 246912 789 | |
| +1-5 | revisión al alza |
| 246913 289 | Regla 2/5>4+0 |
| 2469134 89 | |
| +1-5 | revisión al alza |
| 2469135 39 | Regla 3/5>6+0 |
| 24691356 9 | |
| +1-5 | revisión al alza |
| 24691357 4 | Regla 3/5>6+0 |

| | |
|---|---|
| 246913578 | ¡Hecho! |

**Ejemplo: 123456789÷2=61728394.5**

**123456789÷2=61728394.5**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJ** | (divisor no indicado) |
|  123456789 | Regla 1/2>5+0 |
| 5 23456789 | |
| +1-2 | revisión al alza |
| 6  3456789 | |
|  +1-2 | revisión al alza |
| 61 1456789 | Regla 1/2>5+0 |
| 615 456789 | |
|   +2-4 | revisión al alza dos veces |
| 617  56789 | |
|    +2-4 | revisión al alza dos veces |
| 6172 16789 | Regla 1/2>5+0 |
| 61725 6789 | |
|     +3-6 | revisión al alza tres veces |
| 61728  789 | |
|      +3-6 | revisión al alza tres veces |
| 617283 189 | Regla 1/2>5+0 |
| 6172835 89 | |
|       +4-8 | revisión al alza cuatro veces |
| 6172839  9 | |
|        +4-8 | revisión al alza cuatro veces |
| 61728394 1 | Regla 1/2>5+0 |
| 617283945 | ¡Hecho! |

# Divisores de varios dígitos

Considere, por ejemplo, $359936/9728 = 37$, en este caso es conveniente pensar en el divisor como compuesto por un **divisor** propiamente dicho (el primer dígito) seguido de un **multiplicador** (el resto de los dígitos del divisor), es decir, $9728 = dmmm$, donde $d$ es el divisor (9) y $mmm$ es el multiplicador (728). Los nombres en chino y japonés para este método de división (帰除 *Guī-chú* en chino, 帰除法 *Kijohou* en japonés) se refieren a esto: 帰, *Guī* , *Ki* es el divisor propiamente dicho y 除, *chú* , *jo* es el multiplicador [Feng 2020].

En este caso, la forma de actuar es la siguiente:

1. Primero consideramos solo el divisor $d$ y hacemos exactamente lo mismo que en el caso del divisor de un solo dígito, es decir, seguimos la regla de división: obtenemos el cociente intermedio $q$ y sumamos el resto (de la regla) a la columna adyacente

2. Luego restamos el producto $q \times$ multiplicador del dividendo si podemos; de lo contrario, tenemos que **revisar a la baja** $q$ y devolver $d$ al resto o dividendo usando las siguientes reglas:

**Reglas para revisar a la baja**

| Mientras se divide por: | Revisar q a: | Sumar al resto: |
|---|---|---|
| 1 | q-1 | +1 |
| 2 | q-1 | +2 |
| 3 | q-1 | +3 |
| 4 | q-1 | +4 |
| 5 | q-1 | +5 |
| 6 | q-1 | +6 |
| 7 | q-1 | +7 |
| 8 | q-1 | +8 |
| 9 | q-1 | +9 |

Con esto, devolveremos al resto o dividendo lo que hemos restado de más al usar la regla de división errónea; pero si el multiplicador tiene más de una cifra y ya hemos procesado varias de ellas cuando reparamos en que el cociente provisional es excesivo, también tendremos que devolver lo sustraído de más sumando los dígitos que hemos usado del multiplicador (véase el ejemplo más abajo).

## Ejemplo: 359936÷9728=37

Veamos primero el caso mencionado arriba

**359936÷9728=37**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLM** | Divisor:9, Multiplicador: 728 |
| 9728   359936 | Regla 3/9>3+3 |
| 9728  3 89936 | cociente 3 en G, borrar H y sumar 3 a I |
| -2184 | restar 3×multiplicador 3×728=2184 de I-L |
| 9728  3 68096 | Regla 6/9>6+6 |
| 9728  3614096 | cociente 6 en H, borrar I y sumar 6 a J |
| -4368 | restar 6×multiplier 6×728=4368 de J-M |
| 9728  36 9728 | revisión al alza |
| +1-9728 | |
| 9728  37 | ¡Hecho! |

## Ejemplo 235÷59=3.98… (revisión a la baja)

**235÷59=3.98…**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJ** | Divisor:5, Multiplicador: 9 |
| 59   235 | Regla 2/5>4+0 |
| 59   4 35 | cociente 4 a E, borrar F y sumar 0 a G |
| -36 | **no se puede restar** 4×multiplicador 4×9=36 de GH! |
| -1+5 | revisión a la baja siguiendo las reglas dadas arriba |
| 59   3 85 | |
| -27 | restar 3×multiplicador 3×9=27 de GH |
| 59   3 58 | Regla 5/5>9+5 |
| 59   3913 | cociente 9 a F, borrar G y sumar 5 a H |
| -81 | restar 9×multiplicador 9×9=81 de HI |
| 59   39 49 | Regla 4/5>8+0 |
| ... | etc. |

## Ejemplo: 23711÷5928=3,9998… (revisión a la baja)

**3711÷5928=3,9998…**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLMN** | Divisor: 5, Multiplicador: 928 |
| 5928   23711 | Regla 2/5>4+0 |
| 5928   4 3711 | cociente 4 a G, borrar H y sumar 0 a I |
| -36 | restar 4×9=36 de IJ |
| 5928   4   111 | |
| -8 | restar 4×2=8 de JK |
| 5928   4    31 | |
| -32 | **no se puede restar** 4×8=32 de KL! |
| -1+592 | revisión a la baja devolviendo el exceso restado de IJK |
| 5928   3 5951 | |
| -24 | continuando normalmente, restar 3×8=24 de KL |
| 5928   3 5927 | Regla 5/5>9+5 |
| ... | etc. |

En este ejemplo el divisor es 5 y el multiplicador es 928. Cuando reparamos en que 4 es un cociente excesivo ya hemos restado del dividendo el producto de 4 por las dos primeras cifras del multiplicador (92); por lo tanto, para revisar a la baja y devolver al dividendo lo que hemos sustraído de más, deberemos:

- Sumar 5 a la primera cifra del dividendo en **I** (de acuerdo a la tabla de arriba) para corregir lo que la aplicación de la regla se ha llevado de más.

- Sumar las cifras usadas del multiplicador (92) a **JK**, que es lo que nos hemos llevado de más al sustraer $4 \times 92 = 368$ en lugar de $3 \times 92 = 276$.

Ambas cosas combinadas se traducen en la suma de 592 al resto realizada arriba en **IJK**.

## Disposición tradicional de la división (TDA)

Como se comentó anteriormente, hay dos formas básicas de organizar los problemas generales de división. Veámoslas una al lado de la otra:

- Disposición moderna de la división (**MDA**), como lo explica Kojima [1954] y como se ha explicado en el capítulo correspondiente de este libro,

**MDA 25÷5=5**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| ABCDEF | |
| 5   25 | El dividendo empieza en E |
| 5  5 | Tras la división el cociente empieza en D |

- Disposición tradicional de la división (**TDA**), usada en los libros antiguos desde los tiempos de las varillas de cálculo [Zhū 1299] hasta la primera parte del siglo XX [Kwa 1922],

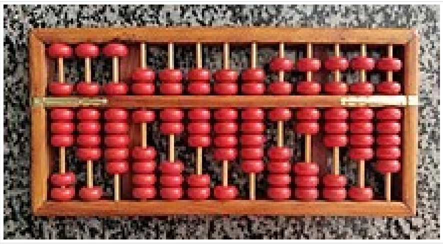
**TDA 25÷5=5**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| ABCDEF | |
| 5   25 | El dividendo empieza en E |
| 5   5 | Tras la división el cociente empieza en E |

Hasta ahora hemos utilizado **MDA** con la división tradicional sin ningún problema. **TDA**, sin embargo, es problemática con cualquier método de división, incluido el tradicional. Esta naturaleza problemática se debe a una *colisión* entre el divisor y el dividendo/resto que ocurre con frecuencia (es decir, ambos requieren el uso simultáneo de la misma columna), y se necesitan técnicas o ábacos especiales para hacer frente a esta colisión. A pesar de esto, la **TDA** se ha utilizado durante siglos junto con el método tradicional de división, al menos desde el siglo XIII, mientras que el **MDA** se ha dejado de lado hasta los tiempos modernos. Está claro que se pueden reconocer ciertas ventajas a **TDA**, pero no está tan claro que sean suficientes para justificar su uso histórico:

- Utiliza una varilla menos
- El resultado no se desplaza demasiado hacia la izquierda como en **MDA**, lo cual es de interés en el caso de operaciones encadenadas. Esto y el punto anterior hacen que **TDA** sea más adecuado para ábacos con un número reducido de columnas, como el tradicional suanpan/soroban de 13 varillas.

- Ahorra algunos movimientos de los dedos; por ejemplo, la operación 6231÷93 = 67 puede hacerse en 14 movimientos usando la división tradicional con **TDA** mientras que son necesarios 24 con **MDA**.
- Los desplazamientos de las manos son más cortos.
- Es menos propenso a errores ya que se saltan menos columnas.



Suanpan mostrando de 8 a 20 de izquierda a derecha, ilustrando el uso de las cuentas adicionales y "suspendidas".

La forma de tratar con la colisión mencionada es aceptar que la primera columna del dividendo o resto, después de la aplicación de las reglas de división, puede **desbordar** y tomar temporalmente un valor superior a 9 (hasta 18 es necesario en algunos casos), al tiempo que proporcionar algún mecanismo para hacer frente a tal desbordamiento. Curiosamente, parece que ningún texto antiguo explica cómo hacer esto último, aunque está claro que en el caso de un ábaco 5+2 o 5+3 usaremos las cuentas superiores adicionales para representar los valores de 10 a 20 en la columna desbordada, recurriendo a la *cuenta suspendida* (懸珠 *xuán zhū* en chino , *kenshu* en japonés) en el caso del ábaco 5+2. La tercera cuenta o la cuenta suspendida se requiere sólo en aproximadamente el 1% de los casos [Chen 2013] , lo que justifica la adopción del modelo 5+2 como el estándar en lugar del 5+3. En un capítulo posterior veremos cómo hacer frente al desbordamiento en un ábaco con sólo una cuenta superior.

**Cuando se usa TDA**

> **la regla** a/b>q+r **debe leerse: "*cambiar* a *a* q *como dígito del cociente intermedio y sumar* r *a la cifra de la derecha*".**

**Con TDA, la regla para encontrar la columna unidad es la siguiente** [Heffelfinger 2013]

> **La columna de las unidades de los cocientes se ubica $n$ columnas a la** izquierda **de la columna de las unidades del dividendo; donde $n$ es el número de dígitos del divisor** a la izquierda de su punto decimal **(¡que puede ser negativo!).**

La siguiente tabla muestra los valores de $n$ para algunos divisores:

| Divisor | n |
|---|---|
| 32.7 | 2 |
| 3.27 | 1 |
| 0.327 | 0 |
| 0.00327 | -2 |

Para ver ejemplos de **TD** usando **TDA**, consulte el capítulo: Ejemplos de División Tradicional.

## Acerca de la eficiencia de la división tradicional

Como puede ver en los ejemplos con divisores de un solo dígito, la eficiencia de **TD** se deteriora a medida que el divisor comienza con cifras más bajas, en el sentido de que tenemos que revisar al alza con más frecuencia. Podemos decir que la eficiencia es nula cuando el divisor empieza por 1; de hecho, ni siquiera tenemos reglas de división excepto 1/1> 9+1 (que es "estadísticamente" excesiva, consulte el capítulo: Aprendiendo la Tabla de División). Para este último caso, el truco es dividir por 2 *in situ* (capítulo: División por Potencias de 2) tanto el divisor como el dividendo, lo cual es muy rápido, y proceder a dividir ambos resultados normalmente; ahora el divisor comenzará con un dígito entre 5 y 9 y la división tradicional resultará más eficiente. Por ejemplo: $128/16 = 64/8$

Para dividir in situ por dos, simplemente trabaje de derecha a izquierda borrando un dígito de cada vez y sumando en su lugar su mitad:

**Ilustrando la división *in situ* por 2**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHI** | |
| 16      128 | División por 2 *in situ* |
| 16      124 | mitad de 8 |
| 16      114 | mitad de 2 |
| 16       64 | mitad de 1 |
| 13       64 | mitad de 6 |
|  8       64 | mitad de 1 |
|  8       64 | Regla 6/8>7+4 |
|  8      7 8 | |
|          +1-8 | revisión al alza |
|  8      8 | ¡Hecho! |

En otros casos, nuestra intuición y experiencia con **MD** podrían ayudarnos.

Esta menor eficiencia de **TD** en comparación con **MD** es el precio a pagar para ahorrarnos el trabajo mental de deducir la cifra del cociente provisional que tenemos que probar.

# Otras lecturas


- Knott, Cargill G. (1886). «The Abacus, in its Historic and Scientific Aspects». *Transactions of the Asiatic Society of Japan* **14**: pp. 18-73. https://archive.org/details/in.-gov.ignca.26020/page/17/mode/2up. Trata con división tradicional
- Totton Heffelfinger (2013). «Suan Pan and the Unit Rod - Division». 算盤 Abacus: Mystery of the Bead. Archivado desde el original, el 3 de Agosto de 2021.
- Totton Heffelfinger (2013). «Short Division Techniques - Chinese Suan Pan». 算盤 Abacus: Mystery of the Bead. Archivado desde el original, el 3 de Agosto de 2021.
- Totton Heffelfinger (2013). «Long Division Techniques - Chinese Suan Pan». 算盤 Abacus: Mystery of the Bead. Archivado desde el original, el 3 de Agosto de 2021.
- Totton Heffelfinger (2013). «Chinese Division Rules on a Soroban». 算盤 Abacus: Mystery of the Bead. Archivado desde el original, el 3 de Agosto de 2021.

# XIII Aprendiendo la Tabla de División

## Memorización de la tabla de división.

La tabla de división contiene 45 reglas, incluidos los 9 elementos diagonales para divisores de varios dígitos:

**Tabla de División (八算, *Hassan*, *Bā suàn*)**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1/9>1+1 | 2/9>2+2 | 3/9>3+3 | 4/9>4+4 | 5/9>5+5 | 6/9>6+6 | 7/9>7+7 | 8/9>8+8 | 9/9>9+9 |
| 1/8>1+2 | 2/8>2+4 | 3/8>3+6 | 4/8>5+0 | 5/8>6+2 | 6/8>7+4 | 7/8>8+6 | 8/8>9+8 | |
| 1/7>1+3 | 2/7>2+6 | 3/7>4+2 | 4/7>5+5 | 5/7>7+1 | 6/7>8+4 | 7/7>9+7 | | |
| 1/6>1+4 | 2/6>3+2 | 3/6>5+0 | 4/6>6+4 | 5/6>8+2 | 6/6>9+6 | | | |
| 1/5>2+0 | 2/5>4+0 | 3/5>6+0 | 4/5>8+0 | 5/5>9+5 | | | | |
| 1/4>2+2 | 2/4>5+0 | 3/4>7+2 | 4/4>9+4 | | | | | |
| 1/3>3+1 | 2/3>6+2 | 3/3>9+3 | | | | | | |
| 1/2>5+0 | 2/2>9+2 | | | | | | | |
| 1/1>9+1 | | | | | | | | |

la misma cantidad de elementos independientes que encontramos en la tabla de multiplicar (dada la conmutatividad de esta operación) cuya memorización fue una de las hazañas de nuestra infancia en la escuela. Memorizar la tabla de división es, por tanto, una tarea similar a aprender la tabla de multiplicar.

Estas reglas:

- Desde un punto de vista operativo, deben leerse o interpretarse de manera ligeramente diferente dependiendo de si usamos la disposición de división tradicional (**TDA**) o la moderna (**MDA**).
  - Cuando se usa **MDA**, se debe leer la regla **a / b> q + r**: "*poner **q** como dígito del cociente intermedio a la izquierda, borrar **a** y sumar **r** a la derecha* "
  - Cuando se usa **TDA**, se debe leer la regla **a / b> q + r**: "*cambiar **a** por **q** como dígito del cociente intermedio y sumar **r** a la derecha*"
- Desde un punto de vista teórico, cada regla expresa el resultado de una división euclidiana:
  $$(10 \times a)/b = q, r$$
  ($q$: cociente, $r$: resto, $a, b$: dígitos del 1 al 9) o, de manera equivalente,
  $$10a = q \cdot b + r$$

Si pensamos en este último punto, de hecho no es necesario memorizar las reglas de división ya que las podemos obtener *in situ*, cuando las necesitemos, mediante un simple proceso mental. Pero entonces estaríamos haciendo un esfuerzo mental similar al requerido con el método moderno de división y no estaríamos disfrutando de la gran ventaja que nos ofrece el método tradicional. Sin duda, la eficacia y bondad del método tradicional solo se logra memorizando las reglas, y sólo debemos recurrir al proceso mental mencionado cuando alguna regla se resiste a venir a la memoria durante la fase de aprendizaje.

Afortunadamente, una serie de patrones que aparecen en la tabla de división vienen en nuestra ayuda haciéndonos más fácil aprenderla, dejando solo 14 *reglas duras* de un total de 45.

# Reglas fáciles

En el capítulo: Guía a la División Tradicional ya mencionamos que las reglas de división por 9, 5 y 2, así como las reglas diagonales, tienen una estructura particularmente simple que permiten una memorización casi inmediata.

**Reglas fáciles de memorizar**

| Diagonal | División por 9 | División por 5 | División por 2 |
|---|---|---|---|
| 1/1>9+1 | 1/9>1+1 | 1/5>2+0 | 1/2>5+0 |
| 2/2>9+2 | 2/9>2+2 | 2/5>4+0 | |
| 3/3>9+3 | 3/9>3+3 | 3/5>6+0 | |
| 4/4>9+4 | 4/9>4+4 | 4/5>8+0 | |
| 5/5>9+5 | 5/9>5+5 | | |
| 6/6>9+6 | 6/9>6+6 | | |
| 7/7>9+7 | 7/9>7+7 | | |
| 8/8>9+8 | 8/9>8+8 | | |
| 9/9>9+9 | | | |

Por esta razón, los ejemplos presentados en dicho capítulo sólo hicieron uso de divisores con 2,5 y 9 como primer dígito. Si practica varios ejemplos con tales divisores, no le será difícil memorizar estas 22 reglas (¡casi la mitad del total!); lo que supone una drástica reducción del trabajo a realizar y no la única ayuda a recibir.

# División por 8

De las reglas restantes, las de división por 8 es la serie más larga pero no la más difícil, ya que tiene una estructura interna:

**Reglas de división por 8**

| | |
|---|---|
| 1/8>1+2 | 5/8>6+2 |
| 2/8>2+4 | 6/8>7+4 |
| 3/8>3+6 | 7/8>8+6 |
| 4/8>5+0 | |

Dejando a un lado 4/8>5+0 (piense en esto como 8x5 = 40), las dos sub-series 1, 2, 3 y 5, 6, 7 tienen los mismos residuos y los cocientes son tan simples como 1, 2, 3 y 6, 7, 8; así que, sin duda, esta no será la serie que le resulte más difícil de aprender.

## Reglas subdiagonales

Finalmente, como último recurso para aprender, observe la siguiente serie de términos adyacentes a la diagonal de la tabla.

| **Reglas subdiagonales** |
|---|
| 4/5>8+0 |
| 5/6>8+2 |
| 6/7>8+4 |
| 7/8>8+6 |
| 8/9>8+8 |

En realidad, solo hay dos reglas nuevas aquí, pero captar la estructura de la tabla anterior también lo ayudará a memorizar las reglas para los divisores 5, 8 y 9.

## Reglas "duras"

En resumen, de las 45 reglas incluidas en la tabla de división, 31 caen dentro de uno de los patrones anteriores (en gris)

**Tabla de División (八算, *Hassan*, *Bā suàn*)**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1/9>1+1 | 2/9>2+2 | 3/9>3+3 | 4/9>4+4 | 5/9>5+5 | 6/9>6+6 | 7/9>7+7 | 8/9>8+8 | 9/9>9+9 |
| 1/8>1+2 | 2/8>2+4 | 3/8>3+6 | 4/8>5+0 | 5/8>6+2 | 6/8>7+4 | 7/8>8+6 | 8/8>9+8 | |
| 1/7>1+3 | 2/7>2+6 | 3/7>4+2 | 4/7>5+5 | 5/7>7+1 | 6/7>8+4 | 7/7>9+7 | | |
| 1/6>1+4 | 2/6>3+2 | 3/6>5+0 | 4/6>6+4 | 5/6>8+2 | 6/6>9+6 | | | |
| 1/5>2+0 | 2/5>4+0 | 3/5>6+0 | 4/5>8+0 | 5/5>9+5 | | | | |
| 1/4>2+2 | 2/4>5+0 | 3/4>7+2 | 4/4>9+4 | | | | | |
| 1/3>3+1 | 2/3>6+2 | 3/3>9+3 | | | | | | |
| 1/2>5+0 | 2/2>9+2 | | | | | | | |
| 1/1>9+1 | | | | | | | | |

y nos quedamos con sólo 14 reglas "duras" o difíciles que tendremos que memorizar sin otra ayuda. Esto ya no parece un gran trabajo.

## La tabla combinada de multiplicación y división

Lo que sigue es una simple nota histórica con poca o ninguna relevancia práctica.

La tabla de multiplicar estudiada por el lector probablemente contiene los 81 productos de dos dígitos en cualquier orden; es decir, incluye tanto 8x9 = 72 como 9x8 = 72, lo cual es innecesario dada la conmutatividad de la multiplicación. Por el contrario, en chino o japonés sólo contenía uno de los términos de estos pares 8x9 = 72; siempre con el primer factor menor o igual que el segundo [Chéng-Dàwèi 1592; Chen 2013]. Por otro lado, las reglas de división se enunciaron dando primero el divisor que siempre es mayor que el dividendo, a excepción de las reglas que hemos llamado diagonales en las que es igual. Esto permite concebir una tabla combinada de multiplicación-división que cubra todo el "espacio" de pares de dígitos como operandos:

**Tabla combinada de multiplicación y división**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9×9 81 | 9\8 8+8 | 9\7 7+7 | 9\6 6+6 | 9\5 5+5 | 9\4 4+4 | 9\3 3+3 | 9\2 2+2 | 9\1 1+1 |
| 8×9 72 | 8×8 64 | 8\7 8+6 | 8\6 7+4 | 8\5 6+2 | 8\4 5+0 | 8\3 3+6 | 8\2 2+4 | 8\1 1+2 |
| 7×9 63 | 7×8 56 | 7×7 49 | 7\6 8+4 | 7\5 7+1 | 7\4 5+5 | 7\3 4+2 | 7\2 2+6 | 7\1 1+3 |
| 6×9 54 | 6×8 48 | 6×7 42 | 6×6 36 | 6\5 8+2 | 6\4 6+4 | 6\3 5+0 | 6\2 3+2 | 6\1 1+4 |
| 5×9 45 | 5×8 40 | 5×7 35 | 5×6 30 | 5×5 25 | 5\4 8+0 | 5\3 6+0 | 5\2 4+0 | 5\1 2+0 |
| 4×9 36 | 4×8 32 | 4×7 28 | 4×6 24 | 4×5 20 | 4×4 16 | 4\3 7+2 | 4\2 5+0 | 4\1 2+2 |
| 3×9 27 | 3×8 24 | 3×7 21 | 3×6 18 | 3×5 15 | 3×4 12 | 3×3 9 | 3\2 2+6 | 3\1 3+1 |
| 2×9 18 | 2×8 16 | 2×7 14 | 2×6 12 | 2×5 10 | 2×4 8 | 2×3 6 | 2×2 4 | 2\1 5+0 |
| 1×9 9 | 1×8 8 | 1×7 7 | 1×6 6 | 1×5 5 | 1×4 4 | 1×3 3 | 1×2 2 | 1×1 1 |

Donde hemos alterado la redacción de nuestras reglas de división para adaptarlas al orden de los argumentos utilizados en chino. Para resaltar este hecho, hemos reemplazado "/" por "\", por lo que las reglas de división tal como aparecen en la tabla anterior deben interpretarse en la forma: Lea **a** \ **b c** + **d**: como: **a** cabe en **b0 c** veces dejando **d** como resto.

La tabla combinada tiene 81 elementos o reglas, a las que debemos sumar las reglas diagonales

| Diagonal |
|---|
| 1/1>9+1 |
| 2/2>9+2 |
| 3/3>9+3 |
| 4/4>9+4 |
| 5/5>9+5 |
| 6/6>9+6 |
| 7/7>9+7 |
| 8/8>9+8 |
| 9/9>9+9 |

y las reglas de revisión dadas en el capítulo anterior:

**Reglas para revisar a la baja**

| Mientras se divide por: | Revisar q a: | Sumar al resto: |
|---|---|---|
| 1 | q-1 | +1 |
| 2 | q-1 | +2 |
| 3 | q-1 | +3 |
| 4 | q-1 | +4 |
| 5 | q-1 | +5 |
| 6 | q-1 | +6 |
| 7 | q-1 | +7 |
| 8 | q-1 | +8 |
| 9 | q-1 | +9 |

que eran estudiadas por separado. Esto suma un total de 99 reglas a las que podemos sumar las aproximadamente 50 reglas de suma y resta. El aprendizaje tradicional del ábaco consistía fundamentalmente en la memorización y práctica de estas 150 reglas.

## Reglas estadísticas

Lo que sigue es una cuestión que surge de la práctica. Las reglas de la diagonal para los divisores 1 y 2

**Reglas diagonales para 1 y 2**

| |
|---|
| 2/2>9+2 |
| 1/1>9+1 |

son "excesivas" en el sentido de que a menudo nos vemos obligados a revisar el divisor a la baja varias veces. En la práctica, las siguientes dos reglas "estadísticas" (por darles un nombre) se comportan mejor permitiendo un cálculo más rápido.

**Reglas estadísticas**

| |
|---|
| 2/2>7+6 |
| 1/1>7+3 |

Pruébelas en algún momento durante su práctica.

# XIV Cómo Tratar con el Desbordamiento

Este capítulo es para el lector que desee practicar la división tradicional **TD** en disposición tradicional **TDA**, así como el resto de técnicas superiores que se basan en ella, usando un antiguo soroban 5+1 o incluso un ábaco moderno 4+1. Si dispone de un ábaco tradicional 5+2 (o 5+3, si es lo suficientemente afortunado), todo es mucho más sencillo y no necesitará nada de lo que sigue.

## Introducción

Excluyendo los métodos especiales de división de los que trataremos en la sección de Métodos Avanzados, hay dos formas básicas de disponer la división sobre el ábaco. Ya las hemos mencionado en la Guía a la División Tradicional:

- **Disposición Moderna** (**MDA**), como la descrita por Kojima [1954]

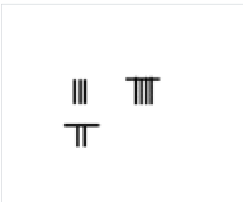
**MDA 25÷5=5**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| ABCDEF | |
| 5   25 | El dividendo empieza en **E** |
| 5  5 | Trás la división, el cociente empieza en **D** |

- **Disposición Tradicional** (**TDA**), la usada en libros antiguos como el *Jinkoki* (塵劫記) [Yoshida 1634], o el *Panzhu Suanfa* (盤珠算法) [Xú-Xīnlǔ 1573]

**TDA 25÷5=5**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| ABCDEF | |
| 5   25 | El dividendo empieza en **E** |
| 5   5 | Trás la división, el cociente empieza en **E** |



División según Sunzhi (es decir, la *division moderna* **MD**) con varillas de cálculo; tradicionalmente utilizaba tres filas horizontales de dígitos.

**MDA** parece una disposición perfecta para cualquier método de división; no sólo para el moderno y el tradicional, sino también para cualquiera de la asombrosa variedad de métodos que uno puede imaginar después de leer una página como: *La guía definitiva de matemáticas superiores sobre la división larga de enteros* [DHMG ] o los esbozados en el capítulo: División Moderna, y simplemente usando las cuentas de un ábaco 4+1 (moderno). Por el contrario, **TDA** es una disposición problemática con cualquier método de división, ya que con frecuencia tiene lugar una *colisión* entre cociente y dividendo/resto al requerir ambos el uso simultáneo de la misma columna. Por ejemplo, en el caso de la división moderna nos veríamos obligados a posponer la entrada en el ábaco del dígito del cociente provisional hasta que quedase libre la columna correspondiente durante la sustracción del producto de dicho cociente por el divisor. En cuanto a la división tradicional, la aplicación de las reglas de división supone sustituir el primer dígito del dividendo por el cociente provisional y sumar el resto (de la regla) a la columna siguiente; si dicha suma alcanza un valor superior a 9 (hasta 18) tenemos un 1 que *desborda* dicha columna y que deberíamos sumar como un acarreo a la columna de la izquierda pero que, como dicha columna está ocupada por el cociente, se produce la colisión y el 1 *desbordado* no tiene adonde ir. Es decir, **se necesitan técnicas o ábacos especiales** para hacer frente a esta colisión.

Y sin embargo, **TDA** se ha utilizado durante siglos junto con el método tradicional de división, mientras que **MDA** parece haber sido relegada al olvido hasta los tiempos modernos y la adopción del ábaco 4+1; y ello a pesar de que **MDA** es la primera idea que se nos ocurriría si intentásemos adaptar el antiguo método de división de Sunzhi (utilizado con las varillas de cálculo) a una sola fila de dígitos en lugar de las tres habituales. Se desconocen las razones por las que esto ha sido así, y posiblemente seguirán siendo un misterio para siempre dado que ningún autor clásico se tomó la molestia de contárnoslas. No obstante, debemos reconocerle ciertas ventajas a la disposición tradicional **TDA**:

- Utiliza una varilla menos menos.
- El resultado no se desplaza demasiado hacia la izquierda como con **MDA**; lo cual es de interés en el caso de operaciones encadenadas. Esto, junto con el punto anterior, hace que **TDA** sea más adecuado para ábacos de pequeño número de columnas, como el tradicional suanpan/soroban de 13 varillas.
- Ahorra algunos movimientos de cuentas; por ejemplo, en la operación 6231÷93 = 67 usando la división tradicional, se pueden contar 14 movimientos usando **TDA** frente a los 24 requeridos si usamos**MDA**.
- Los desplazamientos de la mano son más cortos.
- Es menos propenso a errores ya que es necesario saltan menos columas.

¿Son suficientes estas razones para justificar el uso histórico de **TDA**? Parece necesario aceptarlo.

En cuanto a la forma de hacer frente a la colisión o desbordamiento, esto no es un problema con un ábaco tradicional 5+2 o 5+3; como ya se explicó, las cuentas superiores adicionales se pueden usar para almacenar valores tan altos como 20 en cada columna del ábaco. El problema surge cuando pensamos que los ábacos de tipo 5+1 fueron populares en Japón durante el período Edo y fueron usados con la división tradicional, pero parece que ningún texto japonés antiguo explica cómo tratar con el desbordamiento. La cuestión que trata de resolver este capítulo es esta: ¿Qué se puede hacer con un ábaco 5+1 tradicional o con el moderno 4+1?.

En lo que sigue, se ofrecen tres soluciones a esta cuestión aunque la primera de ellas no es nada recomendable para una práctica habitual.

El ganso solitario vuelve a su bandada. Ilustración de un ejercicio tradicional de multiplicación/división con el ábaco. Basado en una pintura de Bian Shoumin 边寿民 (1684–1752).

Usaremos un ejercicio clásico 998001÷999 = 999 como ejemplo para ilustrar las tres alternativas mencionadas. Este ejercicio se llama en chino: *Regreso del ganso solitario* (孤雁歸隊 *Gūyàn guīduì*). Si plantea esta división en el ábaco, por ejemplo:

| Ábaco |
|---|
| **ABCDEFGHIJK** |
| 999  998001 |

y si es lo suficientemente imaginativo, sin duda identificará la cuenta solitaria colocada en **K** con un *ganso solitario* que acaba de dejar su bandada en **FGH** (puede ver el lugar que ocupaba en la parte inferior de la columna **H**). Para hacerlo volver a su lugar sólo tenemos que completar la división y obtener 999.

## Primera forma: *Fuerza bruta*

En principio, podríamos sumar el "1 desbordado" en cualquier columna no utilizada, por ejemplo, la de más a la derecha del ábaco; pero esto podría resultar molesto e inconveniente porque tanto la mano como la atención tendrían que ir saltando de un lugar a otro en el ábaco con el riesgo de terminar trabajando en la columna equivocada. Aquí, sin más miramientos, sumaremos el 1 desbordado a la columna del dígito del cociente intermedio recién ingresado. Quizás el lector se sienta aterrado al oír esto y no le faltarán razones para ello, ya que crearemos una entidad híbrida, en parte cociente y en parte dividendo difícil de entender conceptualmente, pero si podemos mantener el valor del cociente intermedio en la memoria por un momento podremos operar como de costumbre y cualquier anomalía desaparecerá del ábaco en segundos. Veámoslo con el ejemplo 998001÷999 = 999 en un ábaco 4+1:

**998001÷999 = 999; *a lo bruto* en un 4+1**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJK** | |
| 999  998001 | Regla: 9/9>9+9, ¡recuerde el cociente 9! |
| 999  998001 | cambie el 9 en F por 9 |
|      +9 | sume 9 a G |
| 999 1088001 | el acarreo corre hacia la izquierda, no se asuste |
|      -81 | reste 9*9=81 de GH |
| 999 1007001 | |

| | |
|---|---|
| -81 | reste 9*9=81 de HI, fin de la anomalía |
| 999 998901 | Regla: 9/9>9+9, ¡recuerde el cociente 9! |
| 999 1007901 | el acarreo corre hacia la izquierda, no se asuste |
| -81 | reste 9*9=81 de HI, fin de la anomalía |
| 999 999801 | |
| -81 | reste 9*9=81 de IJ |
| 999 998991 | Regla: 8/9>8+8, ¡recuerde el cociente 8! |
| 999 999791 | |
| -72 | reste 8*9=72 de IJ |
| 999 999071 | |
| -72 | reste 8*9=72 de JK, fin de la anomalía |
| 999 998999 | revisión al alza |
| 999 999 | ¡Hecho! |

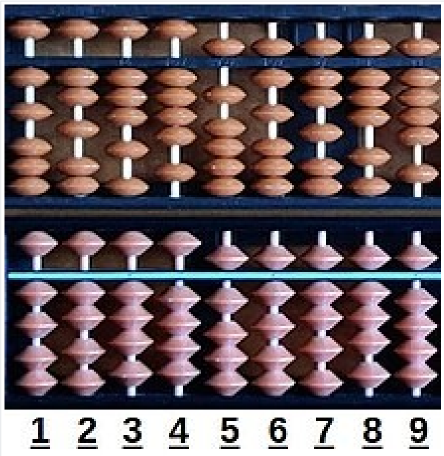
En un ábaco 5+1, las cosas son más fáciles. Podemos usar la quinta cuenta para evitar que el acarreo corra hacia la izquierda:

**998001÷999 = 999; *a lo bruto* en un 5+1 (2ª cifra del cociente)**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJK** | |
| ... | |
| 999 998901 | Regla: 9/9>9+9, ¡recuerde el cociente 9! |
| 999 9**T**7901 | |
| -81 | reste 9*9= 81 de HI |
| 999 999801 | |
| ... | ...etc. |

Como vemos, es posible hacer las cosas así, pero no parece un método muy atractivo ya que necesitamos memorización y mucha atención para no cometer errores. Por tanto, no se debe intentar este método excepto como ejercicio de concentración. Si hemos traído este método aquí, es principalmente como introducción al siguiente método.

# Segunda forma: Cuentas inferiores suspendidas




Cuentas inferiores suspendidas en ábacos 5+1 y 4+1 y notación subrayada para representarlas.

Si usamos un 5+1, en lugar de empujar la cuenta completamente hacia arriba, sumando efectivamente el 1 desbordado al dígito del cociente provisional como en el caso anterior, parece más razonable empujarlo sólo hasta la mitad, dejando una cuenta inferior suspendida como se ilustra en la parte superior de la imagen a la derecha. Esta cuenta suspendida representará el desbordamiento a la vez que respeta la integridad del dígito del cociente.

Este parece un método perfecto para tratar con el desbordamiento, tanto en la división como en la multiplicación, todo permanece bajo nuestros ojos y nada tiene que ser memorizado. De hecho, cuando se utilizan cuentas inferiores suspendidas no hay necesidad de cuentas superiores adicionales, y el ábaco 5+1 resulta tan potente como los instrumentos 5+2 o 5+3. Esto podría ayudar a explicar por qué el ábaco 5+1 fue tan popular en el pasado y por qué la quinta cuenta inferior sobrevivió durante tanto tiempo. Nótese en la mitad inferior de la figura que, con alguna complicación, este método también se puede extender al ábaco 4+1. A partir de aquí, usaremos **dígitos subrayados** para representar el desbordamiento de acuerdo con la figura. El subrayado nos recuerda cómo se ve la cuenta suspendida en el ábaco real.

## Ábaco 5+1

Repitamos el ejercicio anterior con esta técnica. El divisor ya no está representado y también se introducen algunos detalles más para ilustrar adicionalmente cómo se puede usar la quinta cuenta inferior en la resta para simplificar algo la operación (como de costumbre, **T** es 10 *inferior*: 1 cuenta superior + 5 cuentas inferiores activadas)

**998001÷999 = 999 en un 5+1**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEF** | |
| 998001 | |
| <u>9</u>88001 | Regla: 9/9>9+9 |
| -8 | restar 81 de BC |
| 9T8001 | |

| | |
|---|---|
| -1 | |
| 9T7001 | |
| -8 | restar 81 de CD |
| 999001 | |
| -1 | |
| 998901 | |
| 997901 | Regla: 9/9>9+9 |
| -8 | restar 81 de CD |
| 999901 | |
| -1 | |
| 999801 | |
| -8 | restar 81 de DE |
| 998T01 | |
| -1 | |
| 998991 | |
| 998791 | Regla: 8/9>8+8 |
| -7 | restar 72 de DE |
| 998T91 | |
| -2 | |
| 998T71 | |
| -7 | restar 72 de EF |
| 9989T1 | |
| -2 | |
| 998999 | Revisar al alza |
| -9 | (de izquierda a derecha para ahorrar desplazamiento de mano) |
| 998990 | |
| -9 | |
| 998900 | |
| -9 | |
| 998000 | |
| +1 | |
| 999000 | ¡Hecho! |

Consulte también el capítulo Ejemplos de División Tradicional para ver ilustrada esta división en ábacos de tipo 5+1, 5+2 y 5+3.

### Ábaco 4+1

Y ahora en un ábaco 4+1. Necesitamos usar el grupo suspendido de cuatro cuentas inferiores como código para 9:

**998001/999 en un ábaco 4+1**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEF** | |
| 998001 | |
| 988001 | Regla: 9/9>9+9 |
| -81 | restar 81 de BC |
| 987001 | |
| -81 | restar 81 de CD |
| 998901 | |
| 997901 | Regla: 9/9>9+9 |
| -81 | restar 81 de CD |
| 999801 | |
| -81 | restar 81 de DE |
| 998991 | |
| 998791 | Regla: 8/9>8+8 |
| -72 | restar 72 de DE |
| 998071 | |
| -72 | restar 72 de EF |
| 998999 | Revisar al alza |
| 999000 | D¡Hecho! |

Si ha intentado este caso, probablemente haya notado que el grupo de cuatro cuentas suspendidas se comporta de la misma manera que la cuenta superior suspendida que se usa en el ábaco 5+2; es decir, con "aritmética inversa", si mueve la cuenta suspendida hacia la barra del ábaco, ¡estará restando en lugar de sumando!

## Tercera forma: Memorización

Se ha dicho anteriormente que usar cuentas inferiores suspendidas parece un método perfecto, ...pero de hecho es algo molesto debido a su inherente lentitud. Siempre es difícil suspender una cuenta, especialmente las pequeñas del ábaco moderno con poco espacio libre en las varillas, y esto a pesar del truco simple de pellizcar la cuenta con dos dedos y luego retirar la mano como si se arrancara una flor. Es cierto que con un ábaco 5+1 no se necesitan cuentas superiores adicionales, pero sin duda, si tiene muchas multiplicaciones o divisiones por hacer, preferirá la velocidad que proporcionan las cuentas adicionales; ya que pocas veces se necesita una suspender una cuenta en el 5+2, y nunca en el 5+3.

En lugar de mover/suspender físicamente la *cuenta de desbordamiento*, basta pensar que la cuenta ya ha sido suspendida en la columna del cociente, o empujada sobre una varilla imaginaria que *sobrevuela alrededor de su ábaco*, o simplemente recordar que el "**estado de desbordamiento"** se ha establecido en **ON** y que debe ponerse nuevamente en **OFF** tan pronto como sea posible. Esta última forma es similar al concepto de poner banderas (flags) **ON/OFF** en la programación de calculadoras electrónicas antiguas. Obviamente, no mover una cuenta es más rápido que mover una cuenta, por lo que nada puede ser más rápido que esta alternativa. Sin embargo, necesitaremos algo de práctica para acostumbrarnos a este método y debemos prepararnos para cometer algunos errores más debido a la memorización; pero memorizar un dígito, como en el método de fuerza bruta, es peor que simplemente memorizar una condición de alerta como se requiere aquí.

No es necesario un nuevo ejemplo para ilustrar esta técnica; los anteriores se pueden seguir bajo esta nueva perspectiva simplemente interpretando los subrayados como: **OverflowFlag: ON**.

# Conclusión

Hemos visto aquí tres técnicas para tratar con el desbordamiento en ábacos 4+1 y 5+1 que empujan la *cuenta desbordada* hacia arriba en la columna del cociente intermedio:

1. **Completamente**, sumándose efectivamente como un acarreo al cociente
2. Sólo **hasta mitad de camino**, dejando una *cuenta inferior suspendida*
3. **Nada** en absoluto (salvo en nuestra mente)

Estos métodos nos brindan la posibilidad de utilizar técnicas y disposiciones tradicionales en cualquier tipo de ábaco, simplemente adaptando la mecánica a la presencia/ausencia de cuentas adicionales. Encontrará esto ventajoso si finalmente termina convencido por las técnicas tradicionales.

Se ha mencionado que ningún texto japonés antiguo explica cómo tratar con el desbordamiento con un ábaco 5+1. Lo más probable es que el método utilizado haya sido uno de los dos últimos presentados aquí. Considere que el segundo método se puede demostrar a otros en solo segundos, y que una vez visto, no se olvida ni requiere más explicaciones; Es tan obvio que no hay mucha necesidad de escribir textos extensos para transmitir ese conocimiento.

# XV Ejemplos de División Tradicional

En este capítulo se ofrecen una serie de ejemplos de división tradicional (**TD**) usando la disposición tradicional de la división (**TDA**) tanto en forma de tablas de procedimiento como en forma gráfica.

## Divisores de un dígito

Como ya se ha mencionado, el número 123456789 se ha utilizado para demostrar la multiplicación y la división en muchos libros antiguos sobre el ábaco; algunos, como el *Panzhu Suanfa* [Xú-Xīnlǔ 1573], comienzan con la multiplicación tradicional (vea el capítulo correspondiente en este libro) de dicho número por un dígito y posteriormente usan la división para devolver el ábaco a su estado original; otros, como el *Jinkoki [Yoshida 1634]*, lo hacen al revés, comenzando con la división y terminando el ejercicio con la multiplicación. Nosotros veremos aquí la división de 123456789 por los ocho divisores de un dígito 2, 3,...9.

El número 123456789 es divisible entre 3, 9 y 13717421, por lo que las divisiones entre 2, 3, 4, 5, 6, 8 y 9 tienen resultados con expansión decimal finita (2 y 5 son divisores de la base decimal o *radix* 10). Sólo la división por 7 conduce a un resultado con un número infinito de decimales, por lo que aquí la interrumpiremos y daremos un resto.

Desafortunadamente, este ejercicio no usa todas las reglas de división, pero es un buen comienzo y permite practicar sin una hoja de ejercicios.

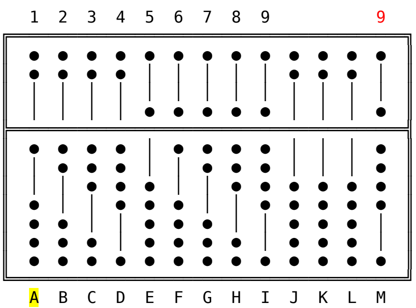
### 123456789 dividido por 9

**123456789 dividido por 9**

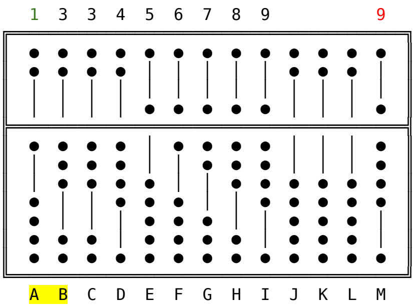
| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLM** | Divisor 9 en M |
| 123456789 9 | Columna A: Usar regla 1/9>1+1 |
| 133456789 9 | Cambiar 1 en A en 1 y sumar 1 a B |
| 136456789 9 | Columna B: Usar regla 3/9>3+3 Cambiar 3 en B en 3 y sumar 3 a C |
| 136**T**56789 9 | Columna C: Usar regla 6/9>6+6 Cambiar 6 en C en 6 y sumar 6 a D |
| 13**6**056789 9 | (Igual que arriba) |
| 137156789 9 | Revisar al alza |
| 137166789 9 | Columna D: Usar regla 1/9>1+1 Cambiar 1 en D en 1 y sumar 1 a E |
| 1371**6**2789 9 | Columna E: Usar regla 6/9>6+6 Cambiar 6 en E en 6 y sumar 6 a F |
| 137173789 9 | Revisar al alza |
| 13717**3**089 9 | Columna F: Usar regla 3/9>3+3 Cambiar 3 en F en 3 y |

| | | |
|---|---|---|
| | | sumar 3 a G |
| 137174189 | 9 | Revisar al alza |
| 137174199 | 9 | Columna G: Usar regla 1/9>1+1 Cambiar 1 en G en 1 y sumar 1 a H |
| 137174209 | 9 | Revisar al alza |
| 137174210 | 9 | Revisar al alza. **Hecho!** 123456789/9=13717421 |

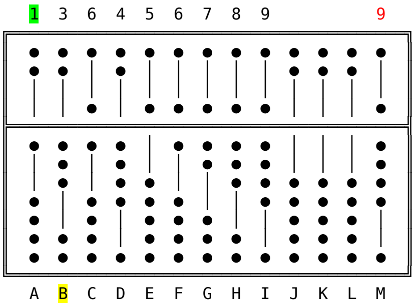
## 123456789 dividido por 9 (Ilustración)



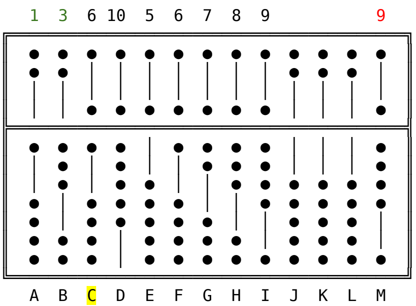

Divisor 9 en M
Columna A: Usar regla 1/9>1+1



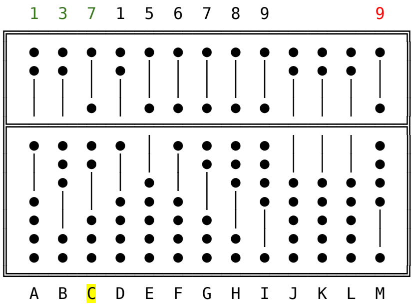

Cambiar 1 en A en 1 y sumar 1 a B



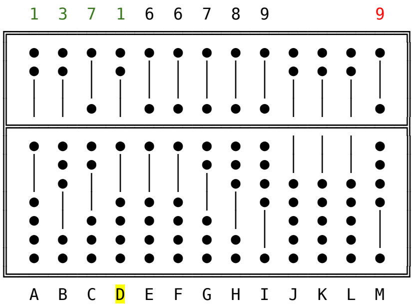

Columna B: Usar regla 3/9>3+3
Cambiar 3 en B en 3 y sumar 3 a C



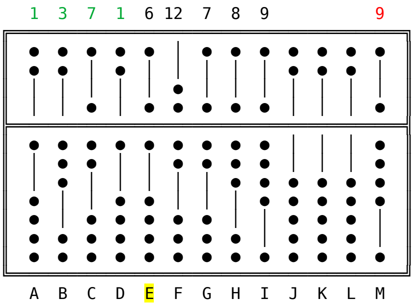

Columna C: Usar regla 6/9>6+6
Cambiar 6 en C en 6 y sumar 6 a D



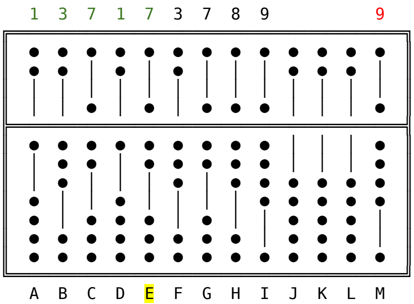

Revisar al alza



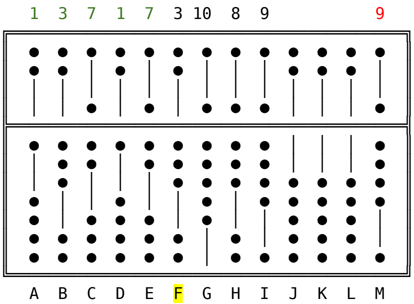

Columna D: Usar regla 1/9>1+1
Cambiar 1 en D en 1 y sumar 1 a E



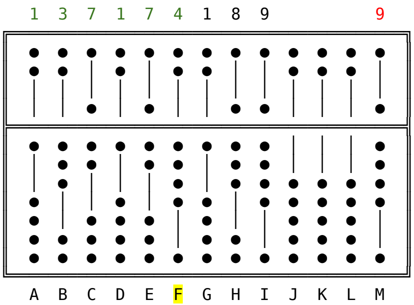

Columna E: Usar regla 6/9>6+6
Cambiar 6 en E en 6 y sumar 6 a F



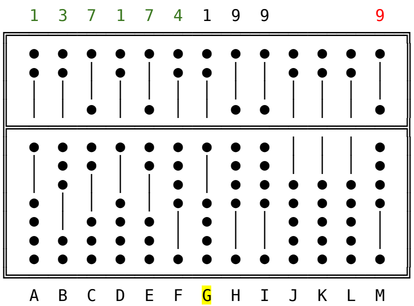

Revisar al alza



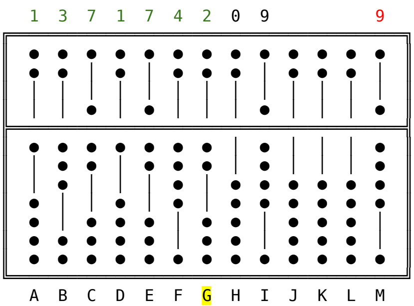

Columna F: Usar regla 3/9>3+3
Cambiar 3 en F en 3 y sumar 3
a G



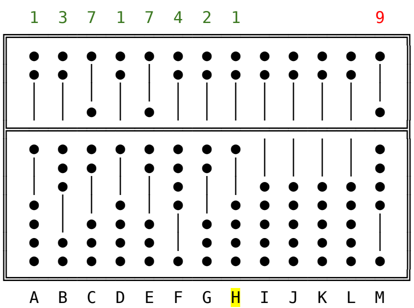

Revisar al alza




Columna G: Usar regla 1/9>1+1
Cambiar 1 en G en 1 y sumar 1
a H




Revisar al alza




Revisar al alza

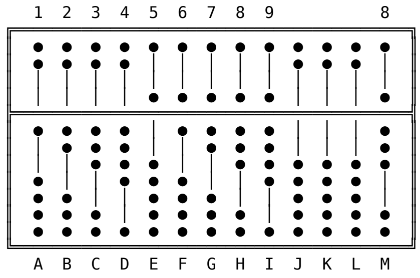
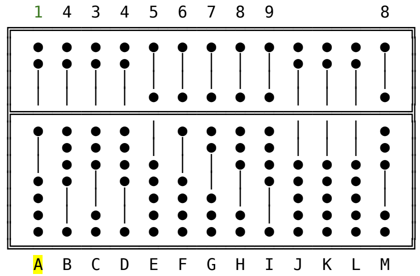
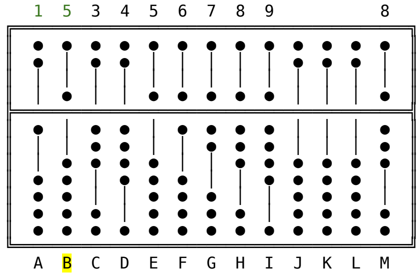
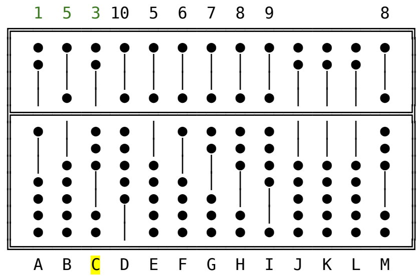
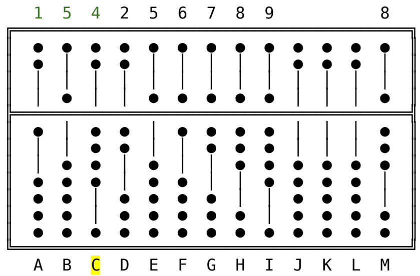
Hecho!
123456789/9=13717421

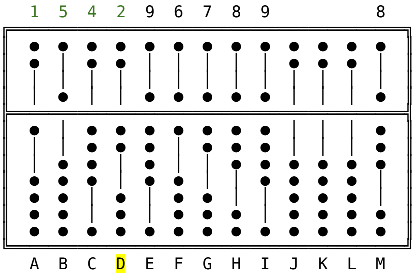
## 123456789 dividido por 8

**123456789 dividido por 8**

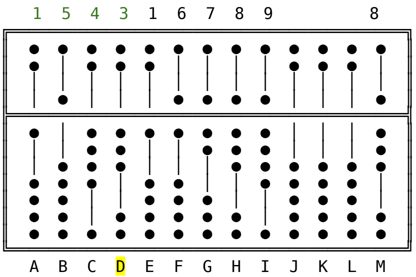
| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLM** | |
| 123456789    8 | Dividendo en A-I, divisor 8 en M |
| 143456789    8 | Columna A: regla 1/8>1+2, Cambiar 1 en A en 1, sumar 2 a B |
| 153456789    8 | Columna B: regla 4/8>5+0, Cambiar 4 en B en 5, sumar 0 a C |
| 153**T**56789    8 | Columna C: regla 3/8>3+6, Cambiar 3 en C en 3, sumar 6 a D |
| 15**3**056789    8 | (igual que arriba) |
| 154256789    8 | Revisar al alza C, sumar 1 a C, restar 8 de D |
| 154296789    8 | Columna D: regla 2/8>2+4, Cambiar 2 en D en 2, sumar 4 a E |
| 154316789    8 | Revisar al alza D, sumar 1 a D, restar 8 de E |
| 154318789    8 | Columna E: regla 1/8>1+2, Cambiar 1 en E en 1, sumar 2 a F |
| 154320789    8 | Revisar al alza E, sumar 1 a E, restar 8 de F |
| 154320**8**49    8 | Columna G: regla 7/8>8+6, Cambiar 7 en G en 8, sumar 6 a H |
| 154320969    8 | Revisar al alza G, sumar 1 a G, restar 8 de H |
| 1543209**7**3    8 | Columna H: regla 6/8>7+4, Cambiar 6 en H en 7, sumar 4 a I |
| 154320985    8 | Revisar al alza H, sumar 1 a H, restar 8 de I |
| 1543209862   8 | Columna I: regla 5/8>6+2, Cambiar 5 en I en 6, sumar 2 a J |
| 15432098624 8 | Columna J: regla 2/8>2+4, Cambiar 2 en J en 2, sumar 4 a K |
| 15432098625 8 | Columna K: regla 4/8>5+0, Cambiar 4 en K en 5, sumar 0 a L.<br><br>¡**Hecho**! 123456789/9=15432098.625 |

## 123456789 dividido por 8 (Ilustración)

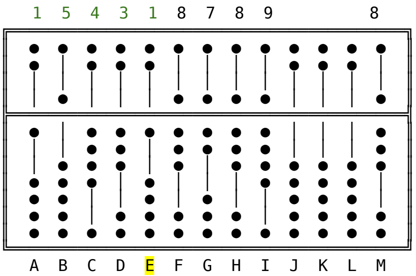
| | |
|---|---|
|  | Dividendo en A-I, divisor 8 en M |
|  | Columna A: regla 1/8>1+2, Cambiar 1 en A en 1, sumar 2 a B |
|  | Columna B: regla 4/8>5+0, Cambiar 4 en B en 5, sumar 0 a C |
|  | Columna C: regla 3/8>3+6, Cambiar 3 en C en 3, sumar 6 a D |
|  | Revisar al alza C, sumar 1 a C, restar 8 de D |



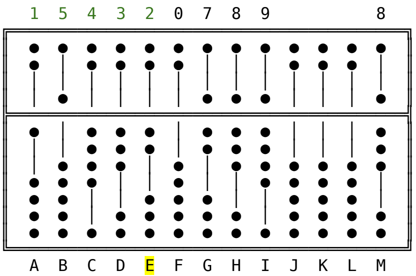

Columna D: regla 2/8>2+4, Cambiar 2 en D en 2, sumar 4 a E



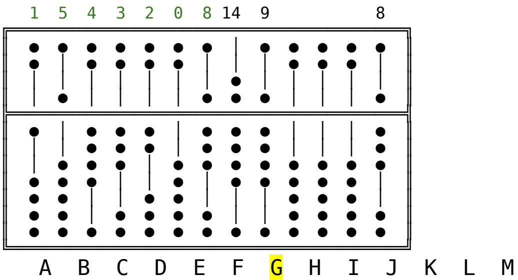

Revisar al alza D, sumar 1 a D, restar 8 de E



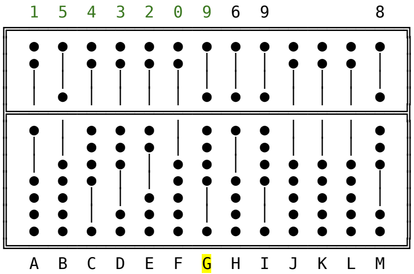

Columna E: regla 1/8>1+2, Cambiar 1 en E en 1, sumar 2 a F



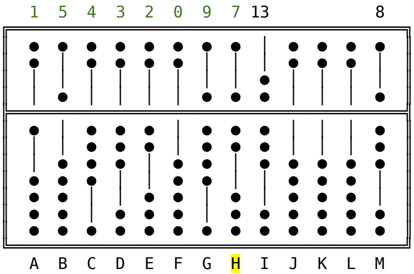

Revisar al alza E, sumar 1 a E, restar 8 de F



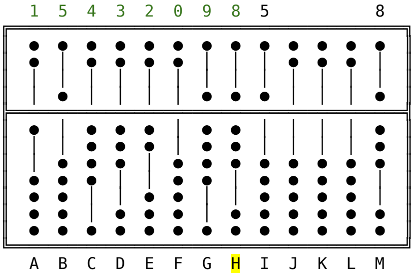

Columna G: regla 7/8>8+6, Cambiar 7 en G en 8, sumar 6 a H



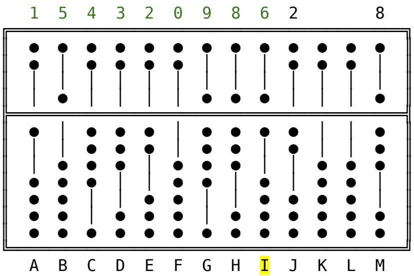

Revisar al alza G, sumar 1 a G, restar 8 de H



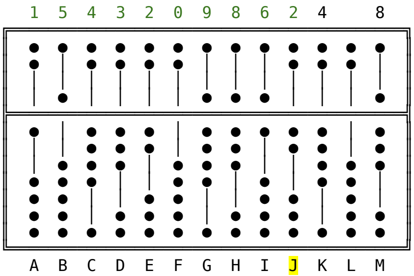

Columna H: regla 6/8>7+4, Cambiar 6 en H en 7, sumar 4 a I



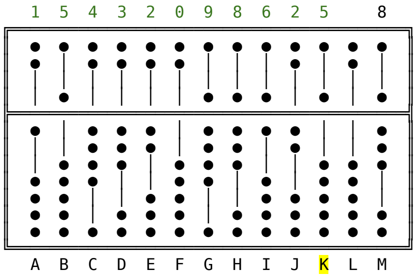

Revisar al alza H, sumar 1 a H, restar 8 de I




Columna I: regla 5/8>6+2, Cambiar 5 en I en 6, sumar 2 a J




Columna J: regla 2/8>2+4, Cambiar 2 en J en 2, sumar 4 a K

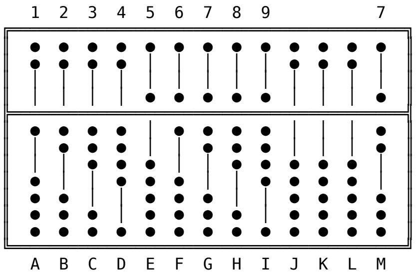
| | |
|---|---|
|  | Columna K: regla 4/8>5+0, Cambiar 4 en K en 5, sumar 0 a L.<br><br>¡**Hecho**! 123456789/9=15432098.625 |

## 123456789 dividido por 7

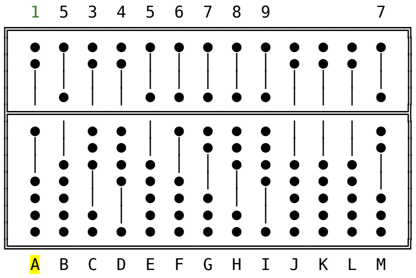
**123456789 dividido por 7**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLM** | |
| 123456789   7 | Dividendo en A-I, divisor 7 en M |
| 153456789   7 | Columna A: regla 1/7>1+3, Cambiar 1 en A en 1, sumar 3 a B |
| 174456789   7 | Columna B: regla 5/7>7+1, Cambiar 5 en B en 7, sumar 1 a C |
| 175956789   7 | Columna C: regla 4/7>5+5, Cambiar 4 en C en 5, sumar 5 a D |
| 176256789   7 | Revisar al alza C, sumar 1 a C, restar 7 de D |
| 176256789   7 | Columna D: regla 2/7>2+6, Cambiar 2 en D en 2, sumar 6 a E |
| 176346789   7 | Revisar al alza D, sumar 1 a D, restar 7 de E |
| 1763**5**1789   7 | Columna E: regla 4/7>5+5, Cambiar 4 en E en 5, sumar 5 a F |
| 176364789   7 | Revisar al alza E, sumar 1 a E, restar 7 de F |
| 17636**5**289   7 | Columna F: regla 4/7>5+5, Cambiar 4 en F en 5, sumar 5 a G |
| 176366589   7 | Revisar al alza F, sumar 1 a F, restar 7 de G |
| 176366799   7 | Columna G: regla 5/7>7+1, Cambiar 5 en G en 7, sumar 1 a H |
| 176366829   7 | Revisar al alza G, sumar 1 a G, restar 7 de H |
| 1763668**2**5   7 | Columna H: regla 2/7>2+6, Cambiar 2 en H en 2, sumar 6 a I |
| 176366841   7 | Revisar al alza H dos veces, sumar 2 a H, restar 14 de I.<br>¡Paramos aquí! 123456789/9=17636684, resto = 1 |

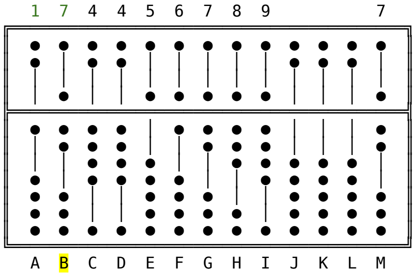
## 123456789 dividido por 7 (Ilustración)



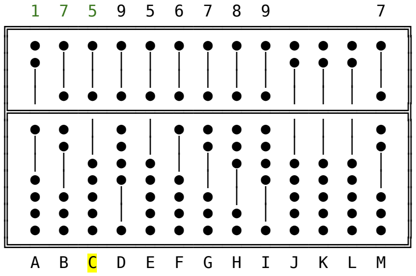

Dividendo en A-I, divisor 7 en M



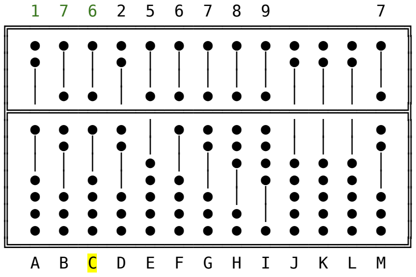

Columna A: regla 1/7>1+3, Cambiar 1 en A en 1, sumar 3 a B



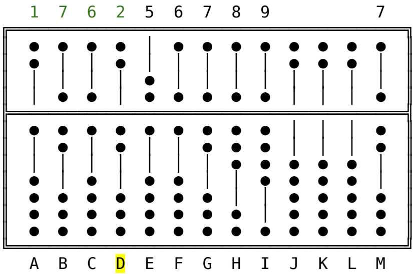

Columna B: regla 5/7>7+1, Cambiar 5 en B en 7, sumar 1 a C



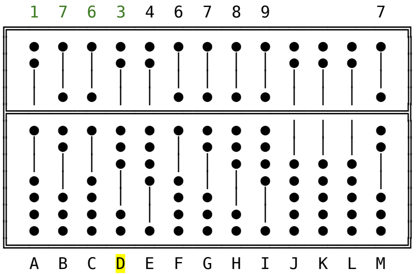

Columna C: regla 4/7>5+5, Cambiar 4 en C en 5, sumar 5 a D



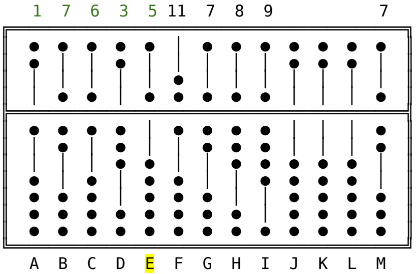

Revisar al alza C, sumar 1 a C, restar 7 de D



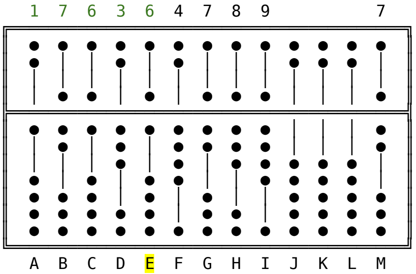

Columna D: regla 2/7>2+6, Cambiar 2 en D en 2, sumar 6 a E



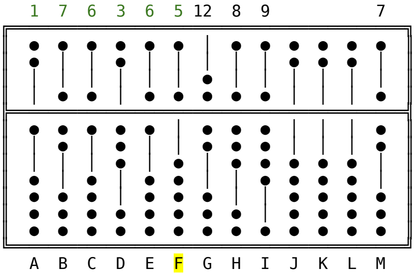

Revisar al alza D, sumar 1 a D, restar 7 de E



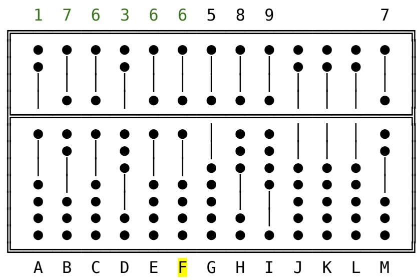

Columna E: regla 4/7>5+5, Cambiar 4 en E en 5, sumar 5 a F



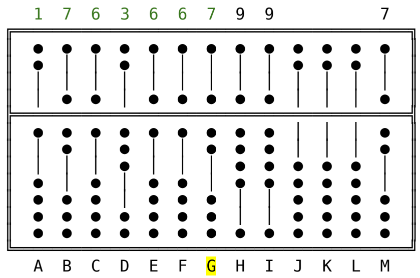

Revisar al alza E, sumar 1 a E, restar 7 de F



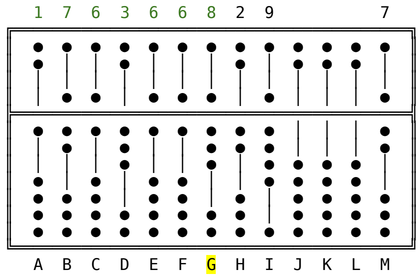

Columna F: regla 4/7>5+5, Cambiar 4 en F en 5, sumar 5 a G



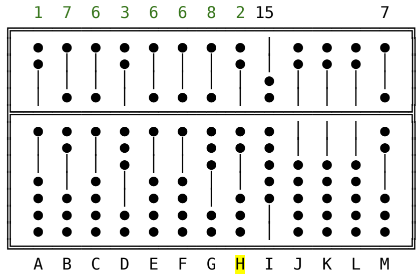

Revisar al alza F, sumar 1 a F, restar 7 de G



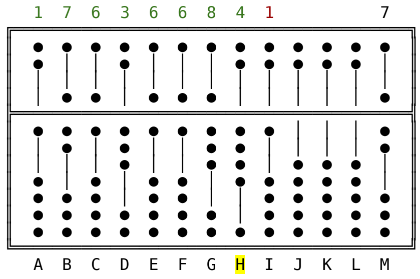

Columna G: regla 5/7>7+1, Cambiar 5 en G en 7, sumar 1 a H




Revisar al alza G, sumar 1 a G, restar 7 de H




Columna H: regla 2/7>2+6, Cambiar 2 en H en 2, sumar 6 a I




Revisar al alza H dos veces, sumar 2 a H, restar 14 de I.

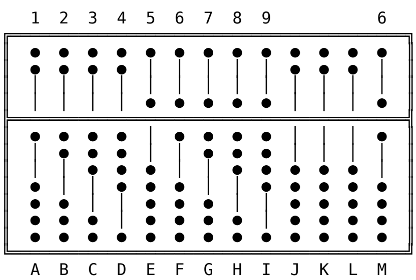
¡Paramos aquí!
123456789/9=17636684,
resto = 1

## 123456789 dividido por 6

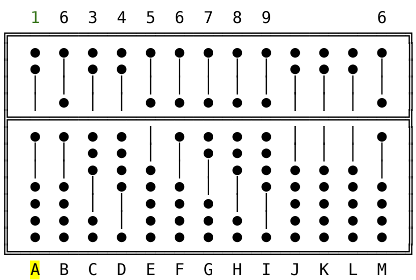
**123456789 dividido por 6**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLM** | Dividendo en A-I, divisor 6 en M |
| 123456789    6 | |
| 163456789    6 | Columna A: regla 1/6>1+4, Cambiar 1 en A en 1, sumar 4 a B |
| 203456789    6 | Revisar al alza A, sumar 1 a A, restar 6 de B |
| 205456789    6 | Columna C: regla 3/6>5+0, Cambiar 3 en C en 5, sumar 0 a D |
| 205696789    6 | Columna D: regla 4/6>6+4, Cambiar 4 en D en 6, sumar 4 a E |
| 205736789    6 | Revisar al alza D, sumar 1 a D, restar 6 de E |
| 205756789    6 | Columna E: regla 3/6>5+0, Cambiar 3 en E en 5, sumar 0 a F |
| 205760789    6 | Revisar al alza E, sumar 1 a E, restar 6 de F |
| 205761189    6 | Revisar al alza F, sumar 1 a F, restar 6 de G |
| 205761129    6 | Columna G: regla 1/6>1+4, Cambiar 1 en G en 1, sumar 4 a H |
| 205761309    6 | Revisar al alza G 2 veces, sumar 2 a G, restar 12 de H |
| 205761313    6 | Revisar al alza H, sumar 1 a H, restar 6 de I |
| 205761315    6 | Columna I: regla 3/6>5+0, Cambiar 3 en I en 5, sumar 0 a J.<br>¡Hecho! 123456789/6=20576131.5 |

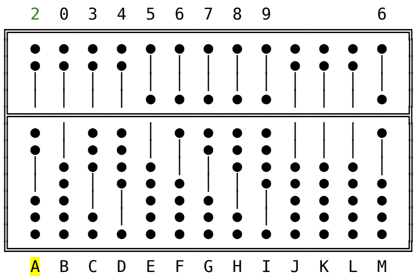
## 123456789 dividido por 6 (Ilustración)



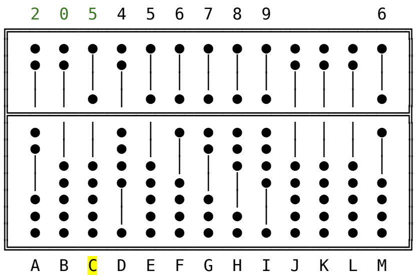

Dividendo en A-I, divisor 6 en M



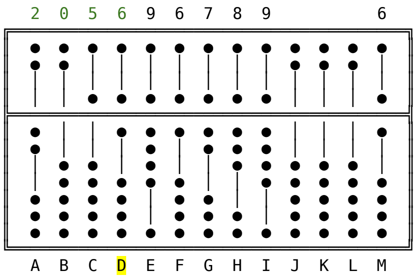

Columna A: regla 1/6>1+4, Cambiar 1 en A en 1, sumar 4 a B



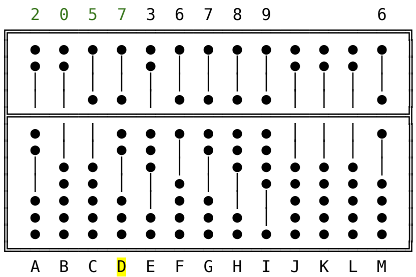

Revisar al alza A, sumar 1 a A, restar 6 de B



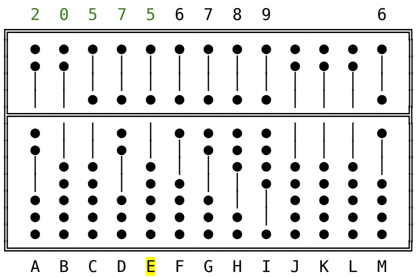

Columna C: regla 3/6>5+0, Cambiar 3 en C en 5, sumar 0 a D



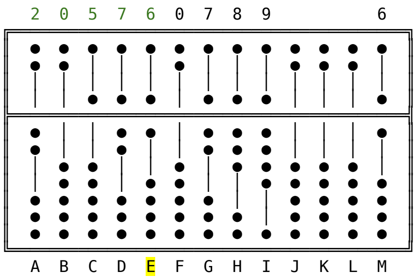

Columna D: regla 4/6>6+4, Cambiar 4 en D en 6, sumar 4 a E



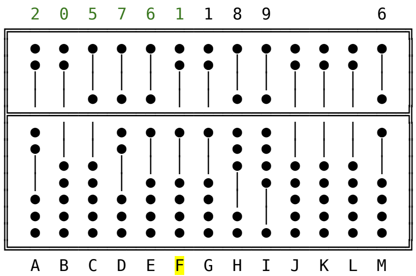

Revisar al alza D, sumar 1 a D, restar 6 de E



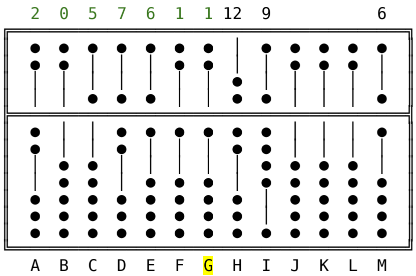

Columna E: regla 3/6>5+0, Cambiar 3 en E en 5, sumar 0 a F



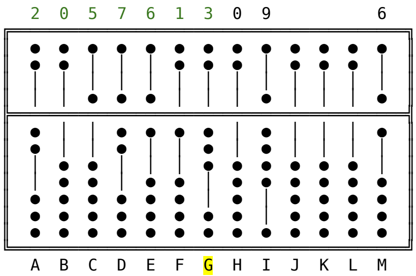

Revisar al alza E, sumar 1 a E, restar 6 de F



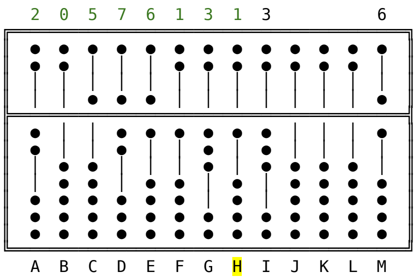

Revisar al alza F, sumar 1 a F, restar 6 de G



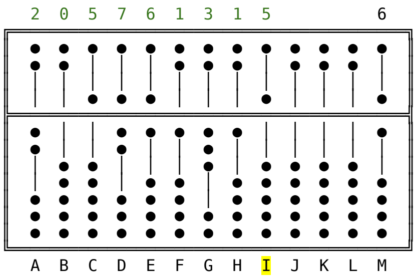

Columna G: regla 1/6>1+4, Cambiar 1 en G en 1, sumar 4 a H




Revisar al alza G 2 veces, sumar 2 a G, restar 12 de H




Revisar al alza H, sumar 1 a H, restar 6 de I




Columna I: regla 3/6>5+0, Cambiar 3 en I en 5, sumar 0 a J.

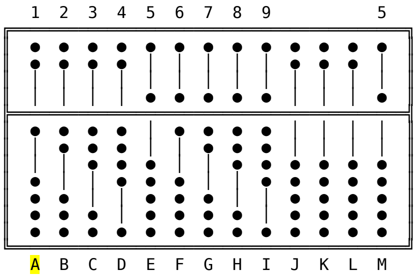
¡Hecho! 123456789/6=20576131.5

## 123456789 dividido por 5

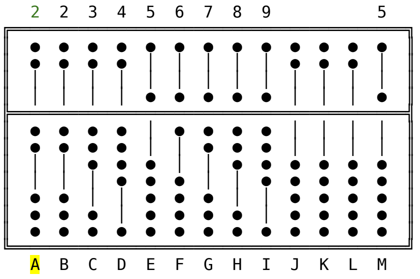
**123456789 dividido por 5**

| Abacus | Comment |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLM** | |
| 123456789    5 | Dividendo en A-I, divisor 5 en M |
| 223456789    5 | Columna A: regla 1/5>2+0, Cambiar 1 en A en 2, sumar 0 a B |
| 243456789    5 | Columna B: regla 2/5>4+0, Cambiar 2 en B en 4, sumar 0 a C |
| 246456789    5 | Columna C: regla 3/5>6+0, Cambiar 3 en C en 6, sumar 0 a D |
| 246856789    5 | Columna D: regla 4/5>8+0, Cambiar 4 en D en 8, sumar 0 a E |
| 246906789    5 | Revisar al alza D, sumar 1 a D, restar 5 de E |
| 246911789    5 | Revisar al alza E, sumar 1 a E, restar 5 de F |
| 246912789    5 | Columna F: regla 1/5>2+0, Cambiar 1 en F en 2, sumar 0 a G |
| 246913289    5 | Revisar al alza F, sumar 1 a F, restar 5 de G |
| 246913489    5 | Columna G: regla 2/5>4+0, Cambiar 2 en G en 4, sumar 0 a H |
| 246913539    5 | Revisar al alza G, sumar 1 a G, restar 5 de H |
| 246913569    5 | Columna H: regla 3/5>6+0, Cambiar 3 en H en 6, sumar 0 a I |
| 246913574    5 | Revisar al alza H, sumar 1 a H, restar 5 de I |
| 246913578    5 | Columna I: regla 4/5>8+0, Cambiar 4 en I en 8, sumar 0 a J.<br>¡Hecho! 123456789/5=24691357.8 |

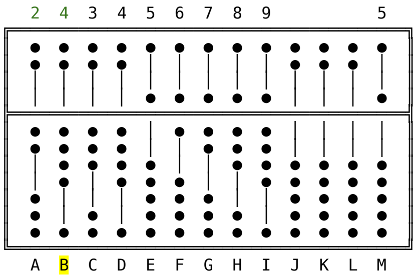
## 123456789 dividido por 5 (Ilustración)



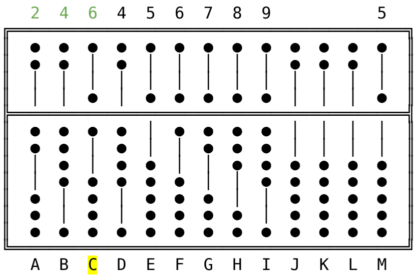

Dividendo en A-I, divisor 5 en M



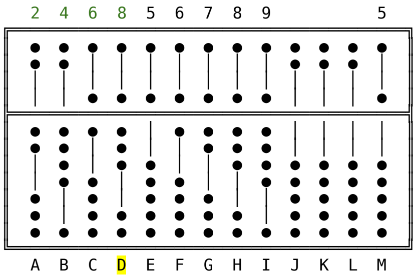

Columna A: regla 1/5>2+0, Cambiar 1 en A en 2, sumar 0 a B



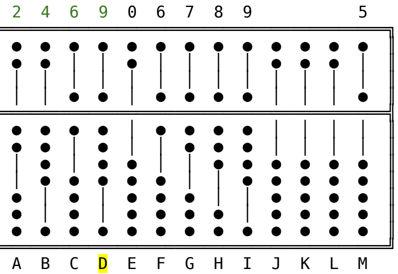
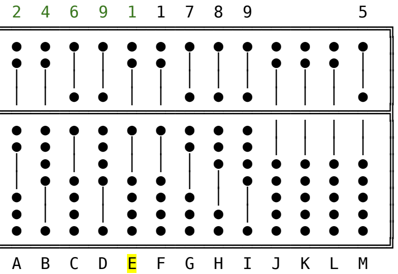
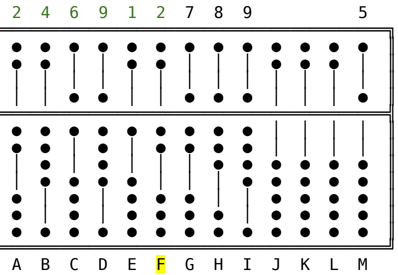
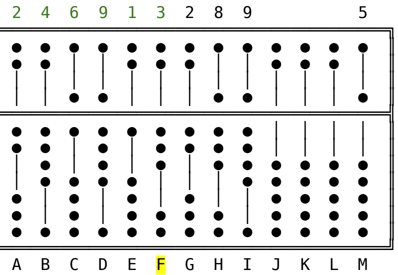
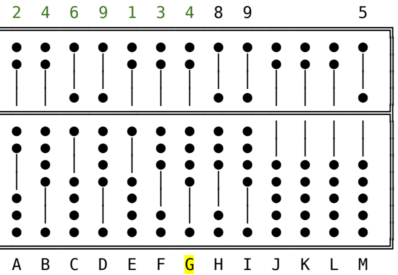

Columna B: regla 2/5>4+0, Cambiar 2 en B en 4, sumar 0 a C

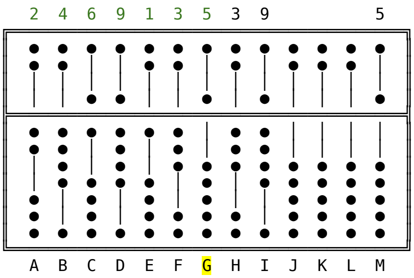
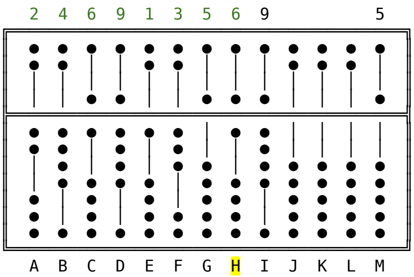
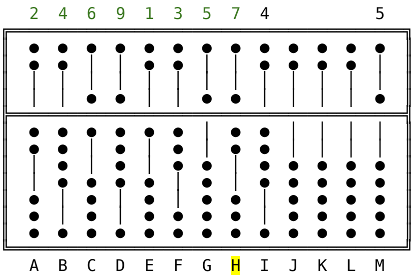
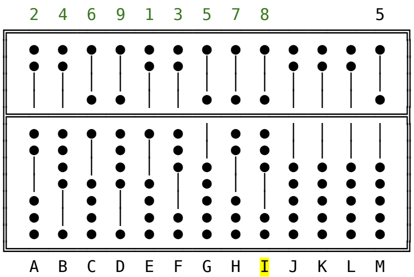



Columna C: regla 3/5>6+0, Cambiar 3 en C en 6, sumar 0 a D




Columna D: regla 4/5>8+0, Cambiar 4 en D en 8, sumar 0 a E

| | |
|---|---|
|  | Revisar al alza D, sumar 1 a D, restar 5 de E |
|  | Revisar al alza E, sumar 1 a E, restar 5 de F |
|  | Columna F: regla 1/5>2+0, Cambiar 1 en F en 2, sumar 0 a G |
|  | Revisar al alza F, sumar 1 a F, restar 5 de G |
|  | Columna G: regla 2/5>4+0, Cambiar 2 en G en 4, sumar 0 a H |

| | |
|---|---|
|  | Revisar al alza G, sumar 1 a G, restar 5 de H |
|  | Columna H: regla 3/5>6+0, Cambiar 3 en H en 6, sumar 0 a I |
|  | Revisar al alza H, sumar 1 a H, restar 5 de I |
|  | Columna I: regla 4/5>8+0, Cambiar 4 en I en 8, sumar 0 a J.<br><br>¡Hecho!<br>123456789/5=24691357.8 |

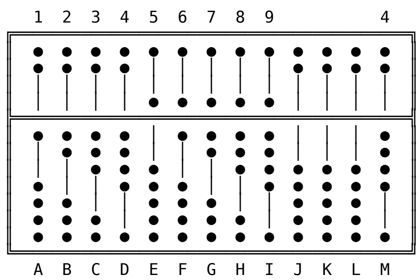
## 123456789 dividido por 4

**123456789 dividido por 4**

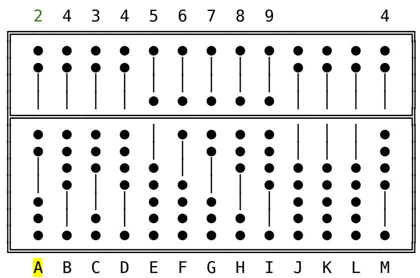
| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLM** | Dividendo en A-I, divisor 4 en M |
| 123456789    4 | |
| 243456789    4 | Columna A: regla 1/4>2+2, Cambiar 1 en A en 2, sumar 2 a B |
| 303456789    4 | Revisar al alza A, sumar 1 a A, restar 4 de B |

| | | |
|---|---|---|
| 307656789 | 4 | Columna C: regla 3/4>7+2, Cambiar 3 en C en 7, sumar 2 a D |
| 308256789 | 4 | Revisar al alza C, sumar 1 a C, restar 4 de D |
| 308556789 | 4 | Columna D: regla 2/4>5+0, Cambiar 2 en D en 5, sumar 0 a E |
| 308616789 | 4 | Revisar al alza D, sumar 1 a D, restar 4 de E |
| 308628789 | 4 | Columna E: regla 1/4>2+2, Cambiar 1 en E en 2, sumar 2 a F |
| 308640789 | 4 | Revisar al alza E dos veces, sumar 2 a E, restar 8 de F |
| 308641389 | 4 | Revisar al alza F, sumar 1 a F, restar 4 de G |
| 3086417T9 | 4 | Columna G: regla 3/4>7+2, Cambiar 3 en G en 7, sumar 2 a H |
| 308641929 | 4 | Revisar al alza G dos veces, sumar 2 a G, restar 8 de H |
| 308641959 | 4 | Columna H: regla 2/4>5+0, Cambiar 2 en H en 5, sumar 0 a I |
| 308641971 | 4 | Revisar al alza H dos veces, sumar 2 a H, restar 8 de I |
| 3086419722 | 4 | Columna I: regla 1/4>2+2, Cambiar 1 en I en 2, sumar 2 a J |
| 3086419725 | 4 | Columna J: regla 2/4>5+0, Cambiar 2 en J en 5, sumar 0 a K.<br>¡Hecho! 123456789/4=30864197.25 |

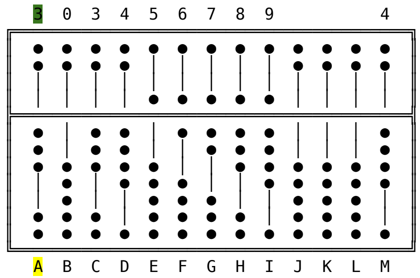
## 123456789 dividido por 4 (Ilustración)



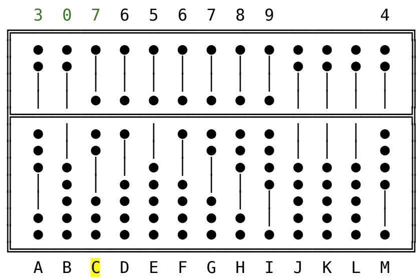

Dividendo en A-I, divisor 4 en M



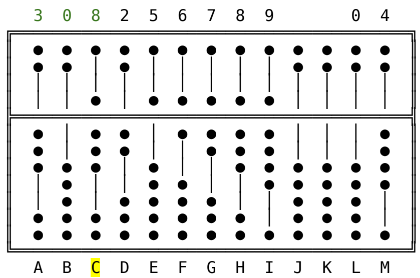

Columna A: regla 1/4>2+2, Cambiar 1 en A en 2, sumar 2 a B



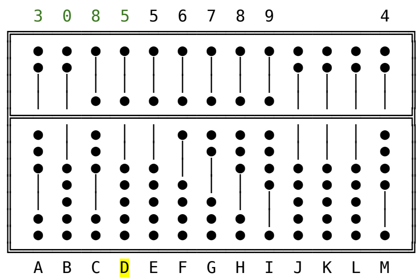

Revisar al alza A, sumar 1 a A, restar 4 de B



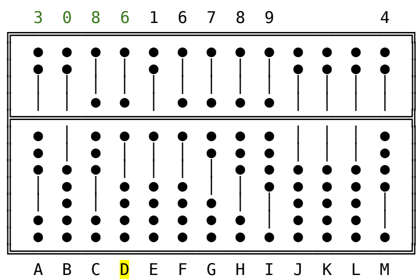

Columna C: regla 3/4>7+2, Cambiar 3 en C en 7, sumar 2 a D



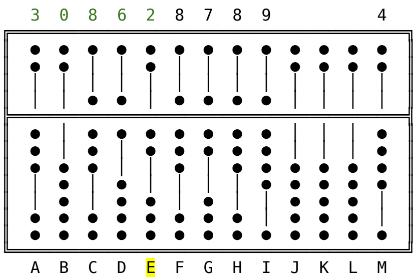
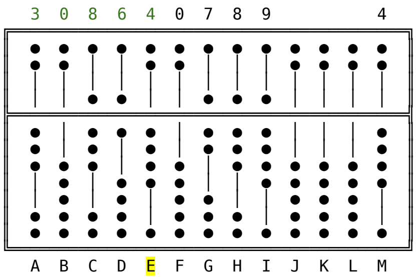
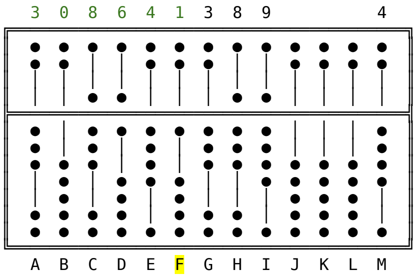
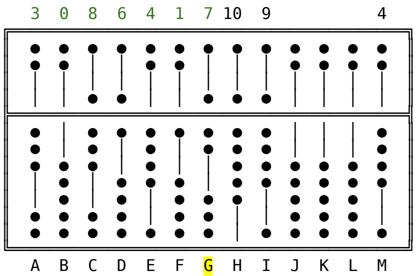
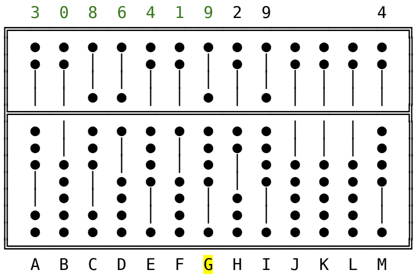

Revisar al alza C, sumar 1 a C, restar 4 de D

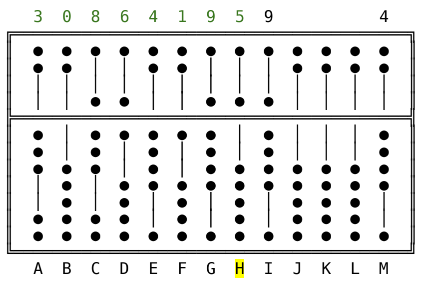



Columna D: regla 2/4>5+0, Cambiar 2 en D en 5, sumar 0 a E

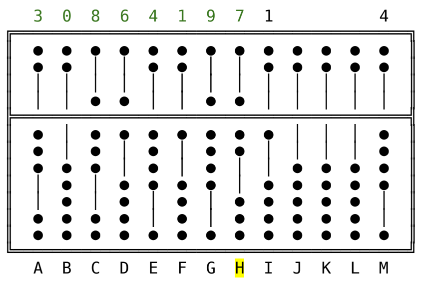



Revisar al alza D, sumar 1 a D, restar 4 de E

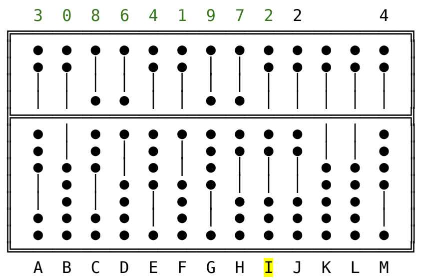
| | |
|---|---|
|  | Columna E: regla 1/4>2+2, Cambiar 1 en E en 2, sumar 2 a F |
|  | Revisar al alza E dos veces, sumar 2 a E, restar 8 de F |
|  | Revisar al alza F, sumar 1 a F, restar 4 de G |
|  | Columna G: regla 3/4>7+2, Cambiar 3 en G en 7, sumar 2 a H |
|  | Revisar al alza G dos veces, sumar 2 a G, restar 8 de H |



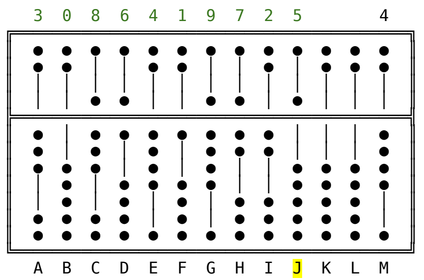

Columna H: regla 2/4>5+0, Cambiar 2 en H en 5, sumar 0 a I




Revisar al alza H dos veces, sumar 2 a H, restar 8 de I




Columna I: regla 1/4>2+2, Cambiar 1 en I en 2, sumar 2 a J




Columna J: regla 2/4>5+0, Cambiar 2 en J en 5, sumar 0 a K.
¡Hecho!
123456789/4=30864197.25

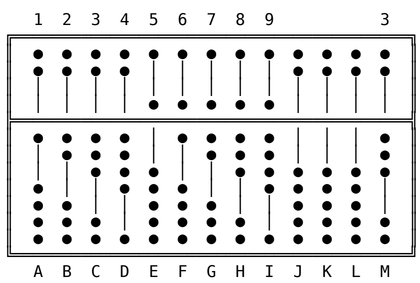
### 123456789 dividido por 3

**123456789 dividido por 3**

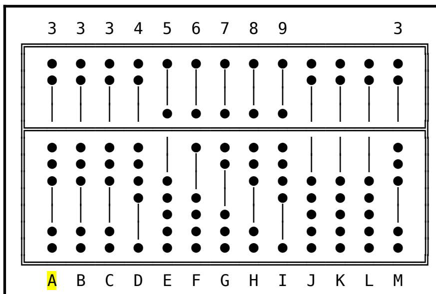
| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLM** | Dividendo en A-I, divisor 3 en M |
| 123456789    3 | |
| 333456789    3 | Columna A: regla 1/3>3+1, Cambiar 1 en A a 3, sumar 1 a B |
| 403456789    3 | Revisar al alza A, sumar 1 a A, restar 3 de B |
| 410456789    3 | Revisar al alza B, sumar 1 a B, restar 3 de C |
| 411156789    3 | Revisar al alza C, sumar 1 a C, restar 3 de D |

| | | |
|---|---|---|
| 411366789 | 3 | Columna D: regla 1/3>3+1, Cambiar 1 en D a 3, sumar 1 a E |
| 411506789 | 3 | Revisar al alza D dos veces, sumar 2 a D, restar 6 de E |
| 411520789 | 3 | Revisar al alza E dos veces, sumar 2 a E, restar 6 de F |
| 411522189 | 3 | Revisar al alza F dos veces, sumar 2 a F, restar 6 de G |
| 411522399 | 3 | Columna G: regla 1/3>3+1, Cambiar 1 en G a 3, sumar 1 a H |
| 411522609 | 3 | Revisar al alza G tres veces, sumar 3 a G, restar 9 de H |
| 411522630 | 3 | Revisar al alza H tres veces, sumar 3 a H, restar 9 de I.<br>¡Hecho! 123456789/3=41152263 |

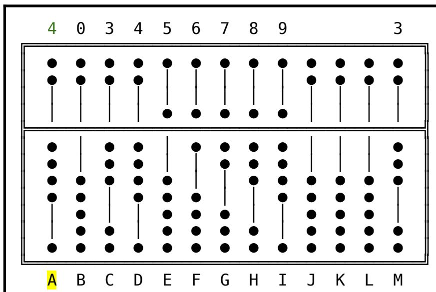
**123456789 dividido por 3 (Ilustración)**



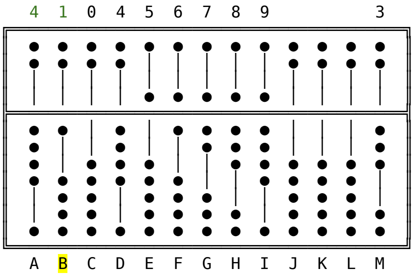

Dividendo en A-I, divisor 3 en M



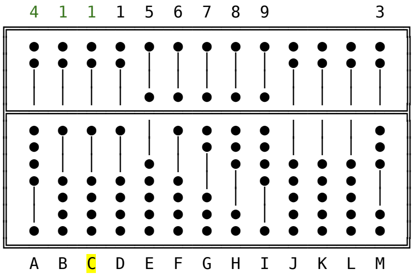

Columna A: regla 1/3>3+1, Cambiar 1 en A a 3, sumar 1 a B



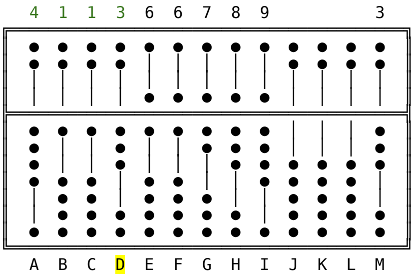

Revisar al alza A, sumar 1 a A, restar 3 de B



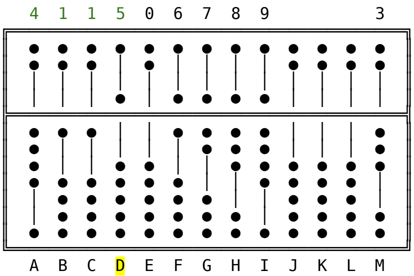

Revisar al alza B, sumar 1 a B, restar 3 de C



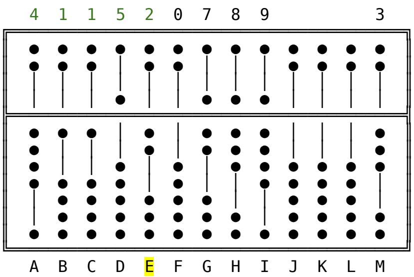

Revisar al alza C, sumar 1 a C, restar 3 de D



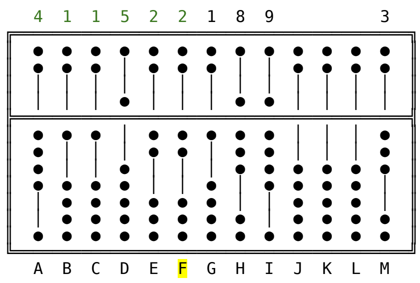

Columna D: regla 1/3>3+1, Cambiar 1 en D a 3, sumar 1 a E



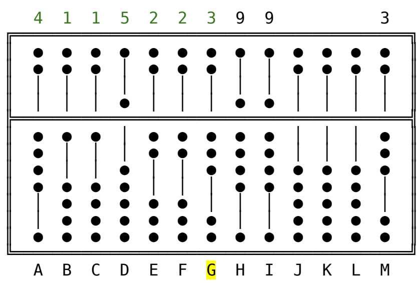

Revisar al alza D dos veces, sumar 2 a D, restar 6 de E



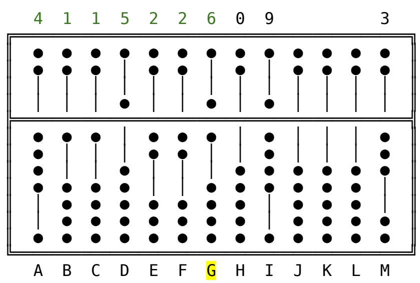

Revisar al alza E dos veces, sumar 2 a E, restar 6 de F



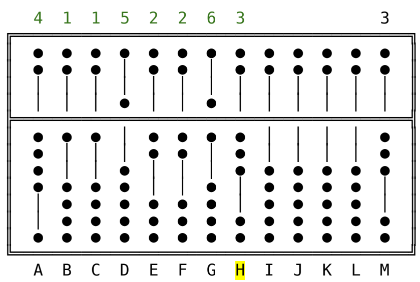

Revisar al alza F dos veces, sumar 2 a F, restar 6 de G




Columna G: regla 1/3>3+1, Cambiar 1 en G a 3, sumar 1 a H




Revisar al alza G tres veces, sumar 3 a G, restar 9 de H




Revisar al alza H tres veces, sumar 3 a H, restar 9 de I.

¡Hecho! 123456789/3=41152263

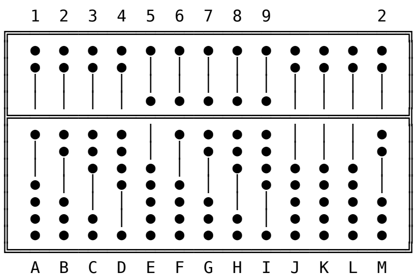
## 123456789 dividido por 2

**123456789 dividido por 2**

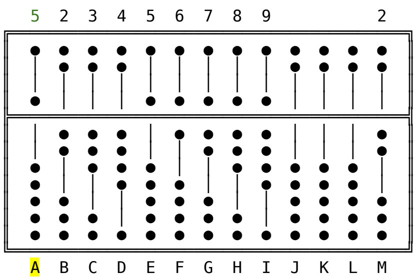
| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLM** | Dividendo en A-I, divisor 2 en M |
| 123456789    2 | |
| 523456789    2 | Columna A: regla 1/2>5+0, Cambiar 1 en A a 5, sumar 0 a B |
| 603456789    2 | Revisar al alza A, sumar 1 a A, restar 2 de B |
| 611456789    2 | Revisar al alza B, sumar 1 a B, restar 2 de C |

| | | |
|---|---|---|
| 615456789 | 2 | Columna C: regla 1/2>5+0, Cambiar 1 en C a 5, sumar 0 a D |
| 617056789 | 2 | Revisar al alza C dos veces, sumar 2 a C, restar 4 de D |
| 617216789 | 2 | Revisar al alza D dos veces, sumar 2 a D, restar 4 de E |
| 617256789 | 2 | Columna E: regla 1/2>5+0, Cambiar 1 en E a 5, sumar 0 a F |
| 617280789 | 2 | Revisar al alza E tres veces, sumar 3 a E, restar 6 de F |
| 617283189 | 2 | Revisar al alza F tres veces, sumar 3 a F, restar 6 de G |
| 617283589 | 2 | Columna G: regla 1/2>5+0, Cambiar 1 en G a 5, sumar 0 a H |
| 617283909 | 2 | Revisar al alza G four times, sumar 4 a G, restar 8 de H |
| 617283941 | 2 | Revisar al alza H four times, sumar 4 a H, restar 8 de I |
| 617283945 | 2 | Columna I: regla 1/2>5+0, Cambiar 1 en I a 5, sumar 0 a J.<br>¡Hecho! 123456789/2=61728394.5 |

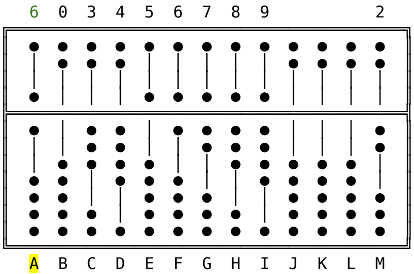
## 123456789 dividido por 2 (Ilustración)



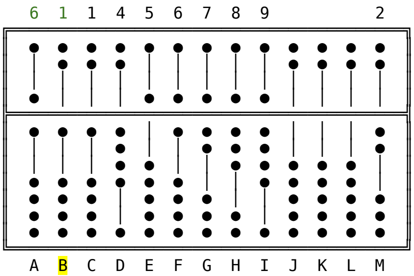

Dividendo en A-I, divisor 2 en M



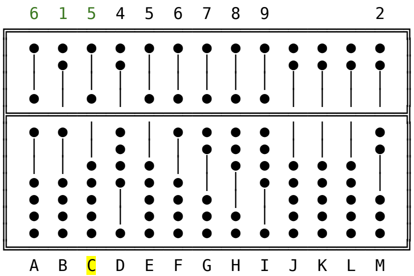

Columna A: regla 1/2>5+0, Cambiar 1 en A a 5, sumar 0 a B



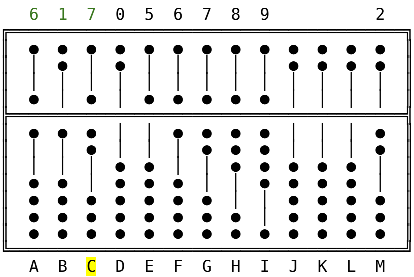

Revisar al alza A, sumar 1 a A, restar 2 de B



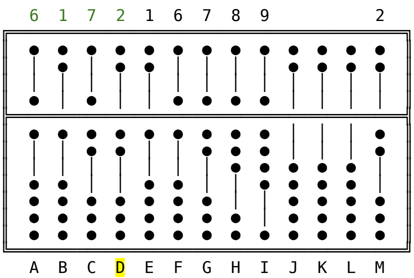

Revisar al alza B, sumar 1 a B, restar 2 de C



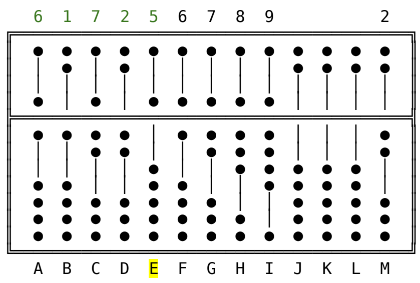

Columna C: regla 1/2>5+0, Cambiar 1 en C a 5, sumar 0 a D



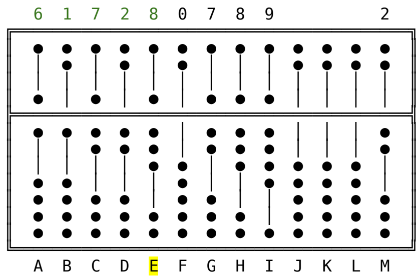

Revisar al alza C dos veces, sumar 2 a C, restar 4 de D



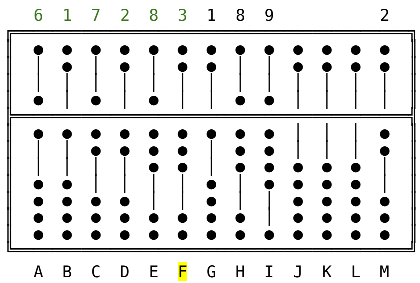

Revisar al alza D dos veces, sumar 2 a D, restar 4 de E



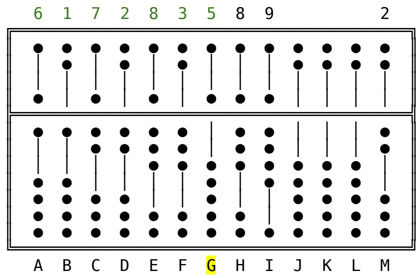

Columna E: regla 1/2>5+0, Cambiar 1 en E a 5, sumar 0 a F



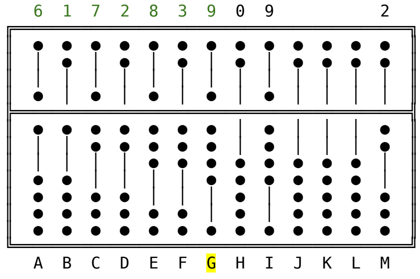

Revisar al alza E tres veces, sumar 3 a E, restar 6 de F



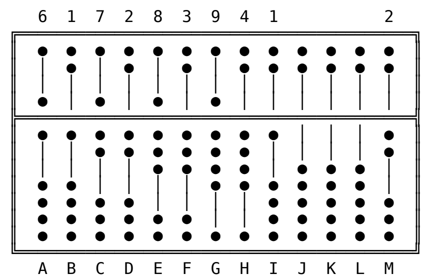

Revisar al alza F tres veces, sumar 3 a F, restar 6 de G



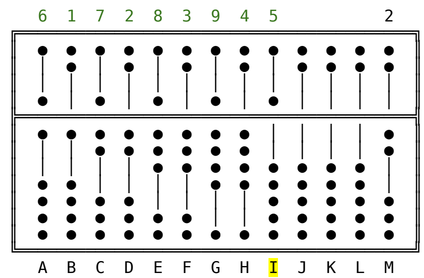

Columna G: regla 1/2>5+0, Cambiar 1 en G a 5, sumar 0 a H




Revisar al alza G four times, sumar 4 a G, restar 8 de H




Revisar al alza H four times, sumar 4 a H, restar 8 de I




Columna I: regla 1/2>5+0, Cambiar 1 en I a 5, sumar 0 a J.
¡Hecho!
123456789/2=61728394.5

# Divisores de varios dígitos (división larga)

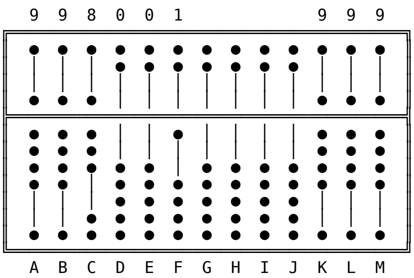
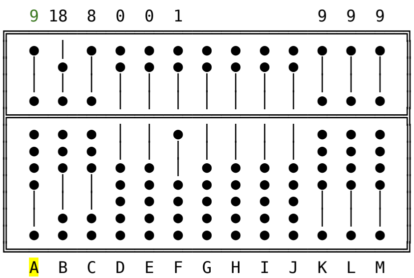
## División de 998001 por 999

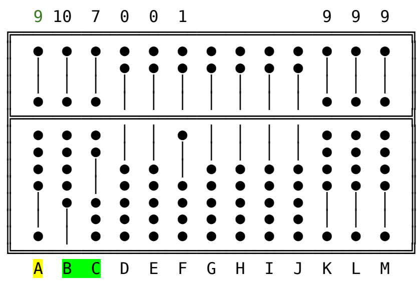
**División de 998001 por 999**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLM** | Dividendo en A-F, divisor in K-M |
| 998001      999 | |
| <u>**9**</u>88001      999 | Regla: 9/9>9+9 |
| -8 | Restar 81 de BC |
| 9**T**8001      999 | |
|  -1 | |
| 9**T**7001      999 | |
|  -8 | Restar 81 de CD |
| 999001      999 | |
|   -1 | |
| 998901      999 | |
| 9<u>**9**</u>7901      999 | Regla: 9/9>9+9 |
|  -8 | Restar 81 de CD |
| 999901      999 | |
|   -1 | |
| 999801      999 | |
|   -8 | Restar 81 de DE |

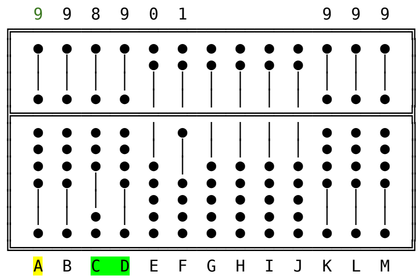
| | | |
|---|---|---|
| 998**T**01 | 999 | |
| -1 | | |
| 998991 | 999 | |
| 998791 | 999 | Regla: 8/9>8+8 |
| -7 | | Restar 72 de DE |
| 998**T**91 | 999 | |
| -2 | | |
| 998**T**71 | 999 | |
| -7 | | Restar 72 de EF |
| 9989**T**1 | 999 | |
| -2 | | |
| 998999 | 999 | |
| -9 | | Revisar al alza (de izquierda a derecha para ahorrar desplazamientos) |
| 998990 | 999 | |
| -9 | | |
| 998900 | 999 | |
| -9 | | |
| 998000 | 999 | |
| +1 | | |
| 999000 | 999 | ¡Hecho! 998001/999 = 999 |

## División de 998001 por 999 (Ilustración en un 5+2)

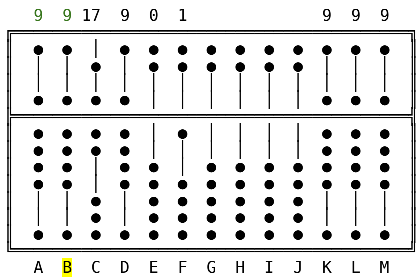
| | |
|---|---|
|  | Dividendo en A-F, divisor en K-M (opcional) |
|  | Columna A: regla 9/9>9+9, cambiar 9 en A a 9 (nada que hacer), sumar 9 a B |



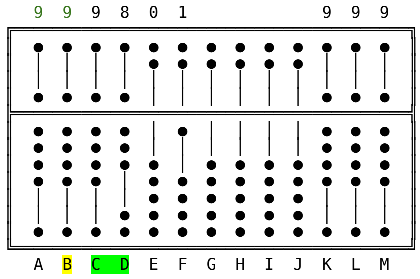

Restar A×L=9×9=81 de BC



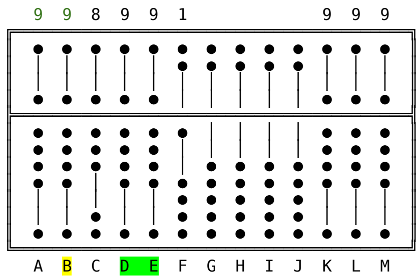

Restar A×M=9×9=81 de CD



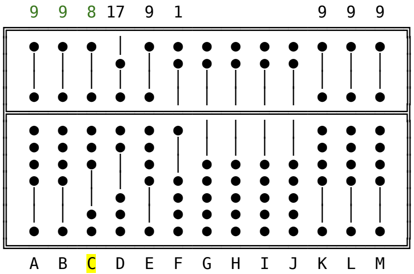

Columna B: regla 9/9>9+9, cambiar 9 en B a 9 (nada que hacer), sumar 9 a C



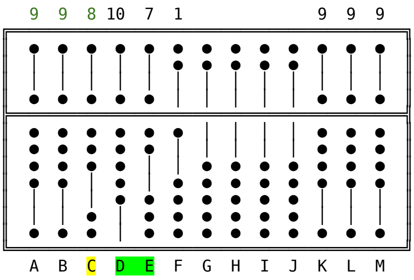

Restar B×L=9×9=81 de CD



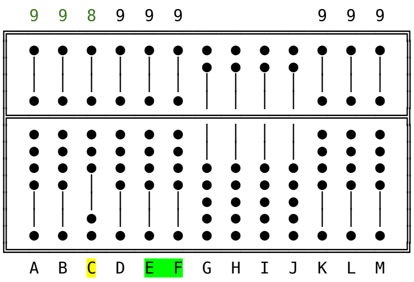

Restar B×M=9×9=81 de DE



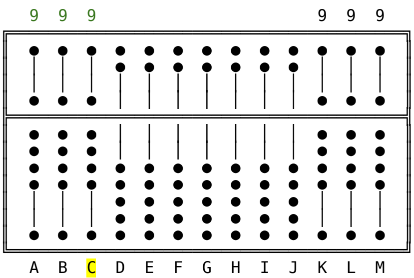

Columna C: regla 8/9>8+8, cambiar 8 en B a 8 (nada que hacer), sumar 8 a D




Restar C×L=8×9=72 de DE




Restar C×M=8×9=72 de EF

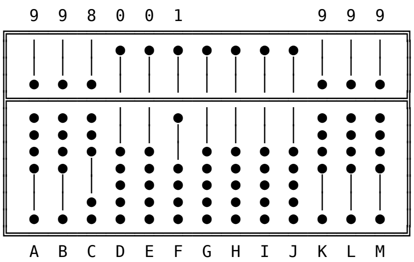



Revisar D al alza, sumar 1 a C y restar 999 de DEF

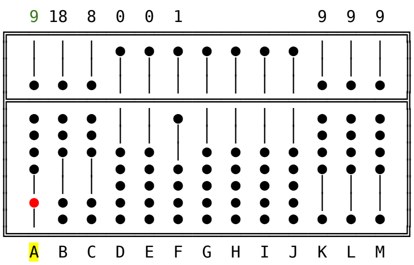
Resto en DEF nulo, 998001/999 = 999

¡Hecho!

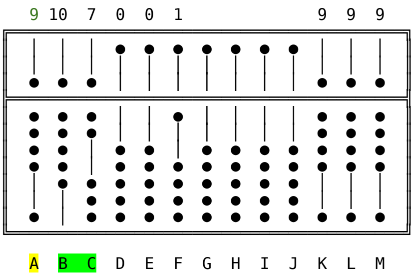
## División de 998001 por 999 (Ilustración en un 5+1)



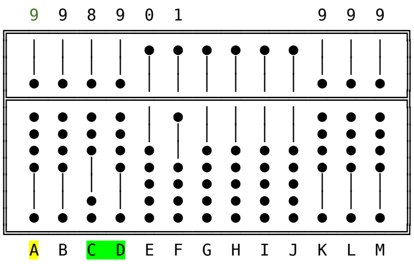

Dividendo en A-F, divisor en K-M (opcional)



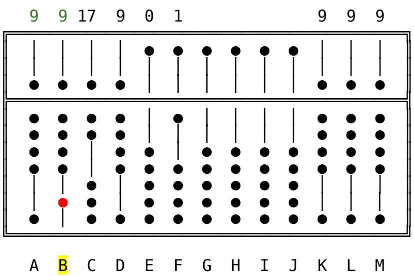

Columna A: regla 9/9>9+9, cambiar 9 en A a 9 (nada que hacer), sumar 9 a B



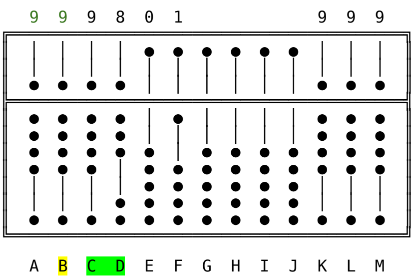

Restar A×L=9×9=81 de BC



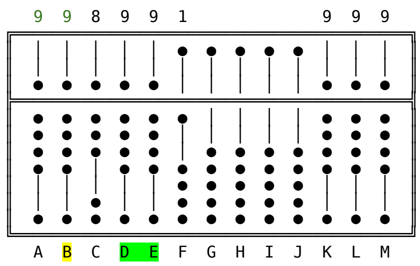

Restar A×M=9×9=81 de CD



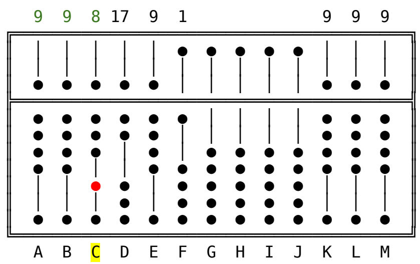

Columna B: regla 9/9>9+9, cambiar 9 en B a 9 (nada que hacer), sumar 9 a C



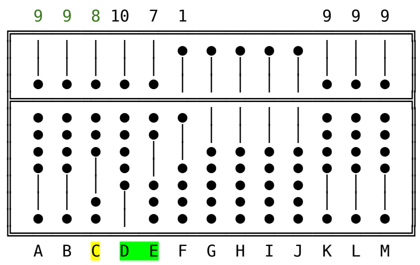

Restar B×L=9×9=81 de CD



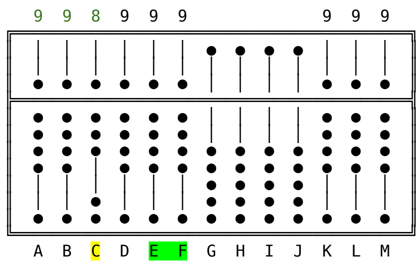

Restar B×M=9×9=81 de DE



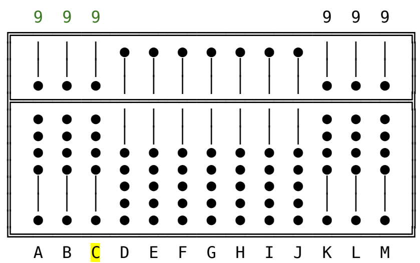

Columna C: regla 8/9>8+8, cambiar 8 en B a 8 (nada que hacer), sumar 8 a D




Restar C×L=8×9=72 de DE




Restar C×M=8×9=72 de EF

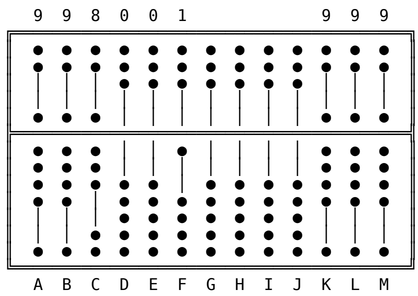



Revisar D al alza, sumar 1 a C y restar 999 de DEF

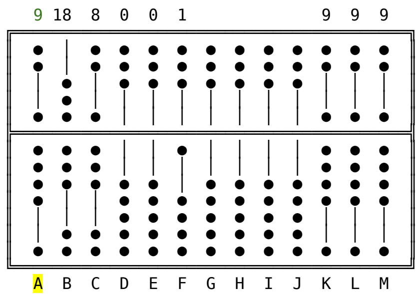
Resto en DEF nulo,
998001/999 = 999

¡Hecho!

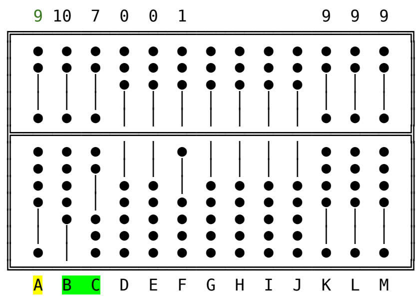
## División de 998001 por 999 (Ilustración en un 5+3)



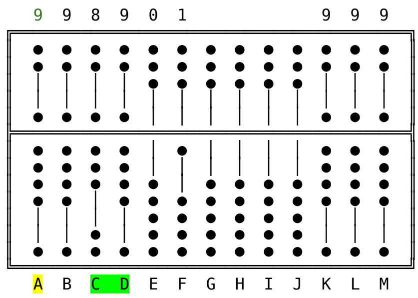

Dividendo en A-F, divisor en K-M (opcional)



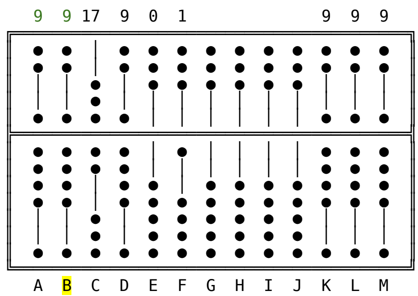

Columna A: regla 9/9>9+9, cambiar 9 en A a 9 (nada que hacer), sumar 9 a B



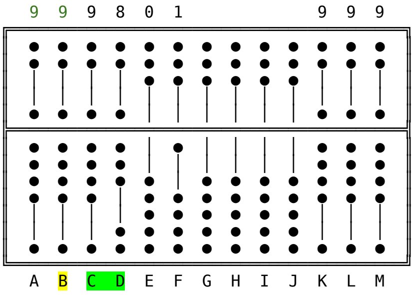

Restar A×L=9×9=81 de BC



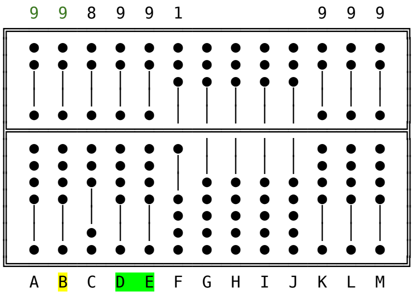

Restar A×M=9×9=81 de CD



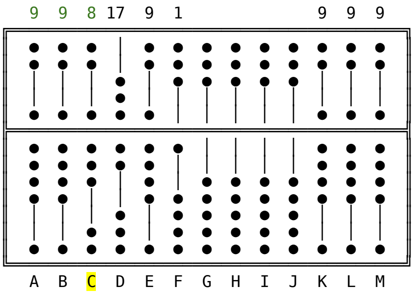

Columna B: regla 9/9>9+9, cambiar 9 en B a 9 (nada que hacer), sumar 9 a C



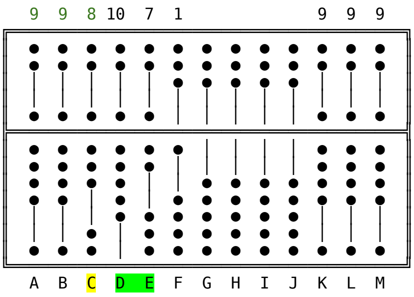

Restar B×L=9×9=81 de CD



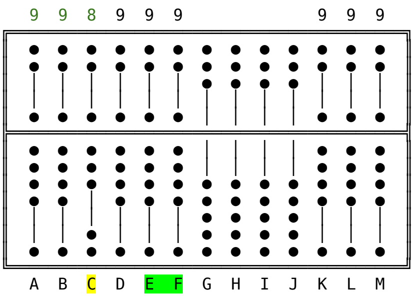

Restar B×M=9×9=81 de DE



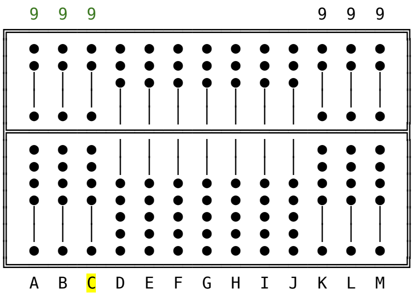

Columna C: regla 8/9>8+8, cambiar 8 en B a 8 (nada que hacer), sumar 8 a D




Restar C×L=8×9=72 de DE




Restar C×M=8×9=72 de EF




Revisar D al alza, sumar 1 a C y restar 999 de DEF

Resto en DEF nulo, 998001/999 = 999

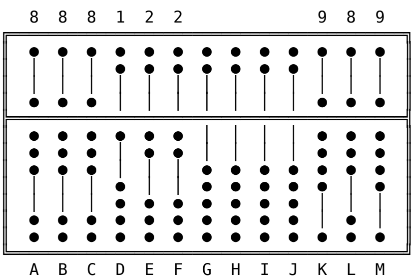
¡Hecho!

## División de 888122 por 989

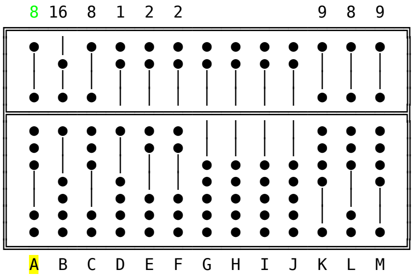
**División de 888122 por989**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLM** | Dividendo 888122 en A-F, divisor 989 en K-M |
| 888122 989 | |
| **8**68122 989 | A: Regla: 8/9>8+8 cambiar 8 en A a 8 y sumar 8 a B |
| **8**04122 989 | Restar A×L=8×8=64 de BC |
| 896922 989 | Restar A×M=8×9=72 de CD |
| 8**9**5922 989 | B: Regla: 9/9>9+9 cambiar 9 en B a 9 y sumar 9 a C |
| 898722 989 | Restar B×L=9×8=72 de CD |
| 897912 989 | Restar B×M=9×9=81 de DE |
| 89**7**612 989 | C: Regla: 7/9>7+7 cambiar 7 en B a 7 y sumar 7 a D |
| 89**7**052 989 | Restar C×L=7×8=56 de DE |
| 897989 989 | Restar C×M=7×9=63 de EF |
| 898000 989 | Revisar al alza: sumar 1 a C y restar 989 de DEF. Resto nulo 888122/989 = 898. ¡Hecho! |

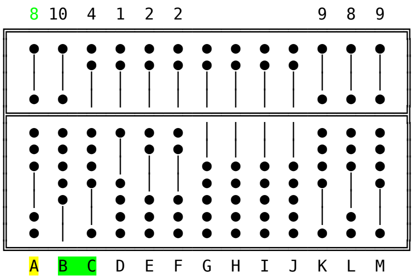
## División de 888122 por 989 (Ilustración)



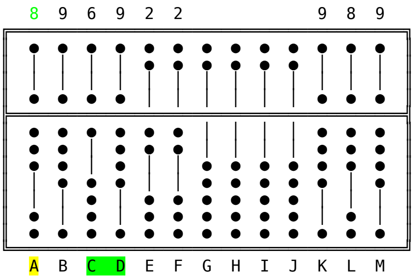

Dividendo 888122 en A-F, divisor 989 en K-M



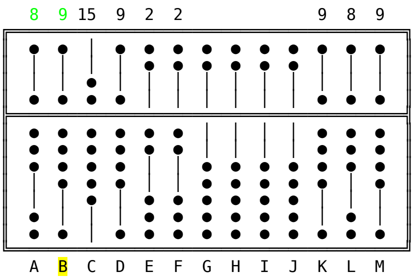

A: Regla: 8/9>8+8 cambiar 8 en A a 8 y sumar 8 a B



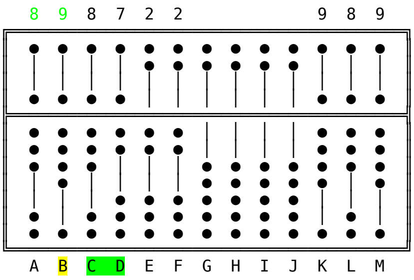

Restar A×L=8×8=64 de BC



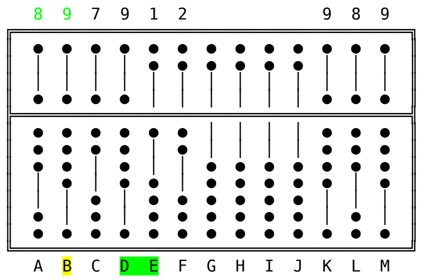

Restar A×M=8×9=72 de CD



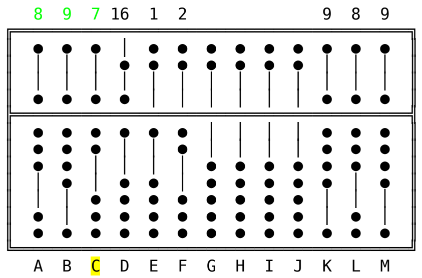

B: Regla: 9/9>9+9 cambiar 9 en B a 9 y sumar 9 a C



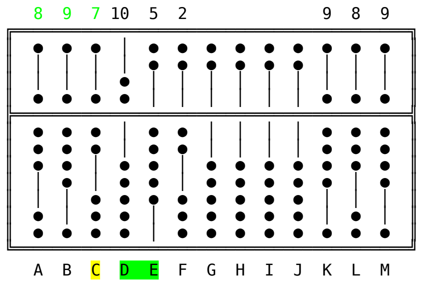

Restar B×L=9×8=72 de CD



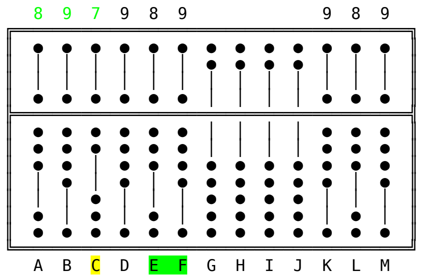

Restar B×M=9×9=81 de DE



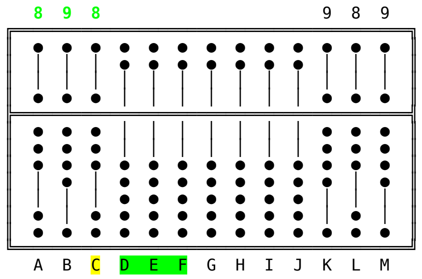

C: Regla: 7/9>7+7 cambiar 7 en B a 7 y sumar 7 a D




Restar C×L=7×8=56 de DE




Restar C×M=7×9=63 de EF



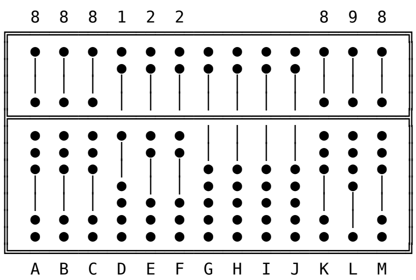
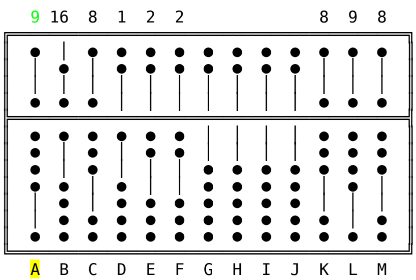

Revisar al alza: sumar 1 a C y restar 989 de DEF.
Resto nulo 888122/989 = 898.
¡Hecho!

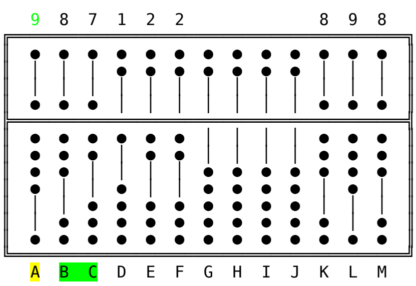
## División de 888122 por 898

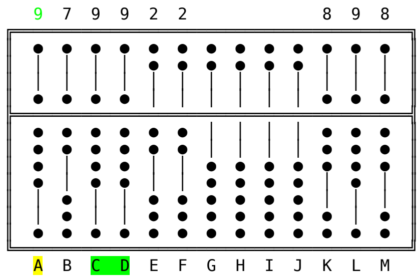
**División de 888122 por 898**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLM** | Dividendo 888122 en A-F, divisor 898 en K-M |
| 888122    898 | |
| **9**68122    898 | A: Regla: 8/8>9+8, cambiar 8 en A a 9 y sumar 8 a B |
| 987122    898 | Restar A×L=9×9=81 de BC |
| 979922    898 | Restar A×M=9×8=72 de CD |
| 985922    898 | B: Regla: 7/8>8+6, cambiar 7 en B a 8 y sumar 6 a C |
| 988722    898 | Restar B×L=8×9=72 de CD |
| 988082    898 | Restar B×M=8×8=64 de DE |
| 989882    898 | C: Regla: 8/8>9+8, cambiar 8 en C a 9 y sumar 8 a D |
| 989072    898 | Restar C×L=9×9=81 de DE |
| 989000    898 | Restar C×M=9×8=72 de EF. Remainder en DEF is zero, so that 888122/898 = 989. ¡Hecho! |

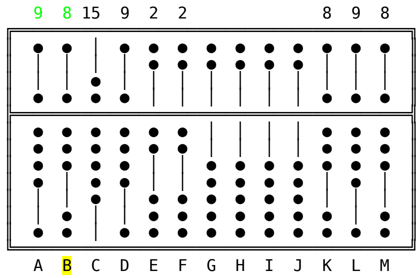
## División de 888122 por 898 (Ilustración)

| | |
|---|---|
|  | Dividendo 888122 en A-F, divisor 898 en K-M |
|  | A: Regla: 8/8>9+8, cambiar 8 en A a 9 y sumar 8 a B |

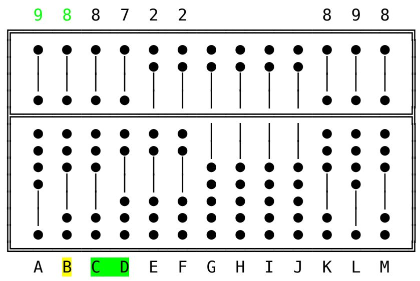
| | |
|---|---|
|  | Restar A×L=9×9=81 de BC |



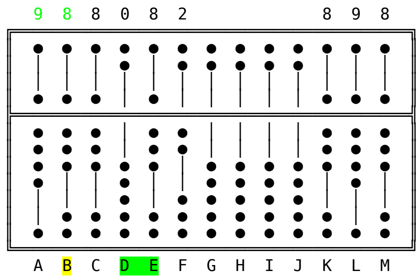

Restar A×M=9×8=72 de CD



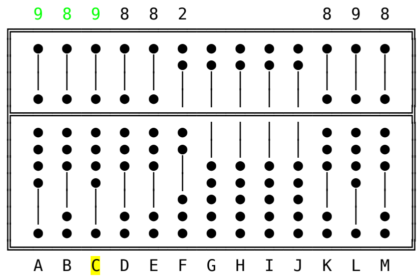

B: Regla: 7/8>8+6, cambiar 7 en B a 8 y sumar 6 a C



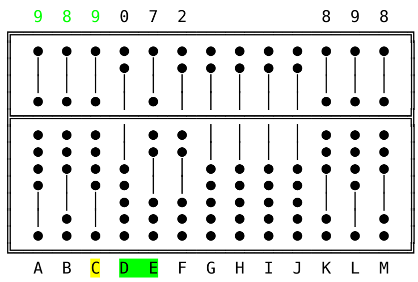
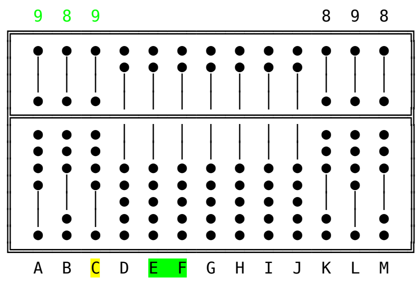

Restar B×L=8×9=72 de CD




Restar B×M=8×8=64 de DE




C: Regla: 8/8>9+8, cambiar 8 en C a 9 y sumar 8 a D

| | |
|---|---|
|   | Restar C×L=9×9=81 de DE |
|   | Restar C×M=9×8=72 de EF. Remainder en DEF is zero, so that 888122/898 = 989. ¡Hecho! |

## División de 412 por 896

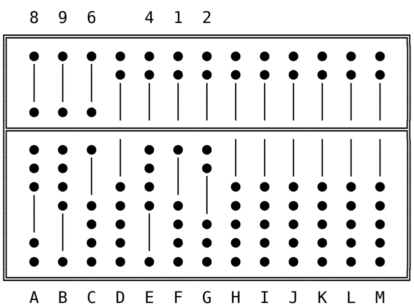
En este caso extendemos la división hasta el final del ábaco, utilizando para los últimos dígitos la técnica presentada en el capítulo sobre *Operaciones Abreviadas*.

**División de 412 por 896**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLM** | |
| 896 412 | Esta vez el divisor va a la izquierda y el dividendo a la derecha. |
| 896 512 | Columna E: regla 4/8>5+0, cambiar 4 en E a 5, sumar 0 a F |
| 896 492 | no se puede restar E×B=5×9=45 de FG, revisar a la baja E: restar 1 de E, sumar 8 a F |
| 896 456 | restar E×B=4×9=36 de FG |
| 896 4536 | restar E×C=4×6=24 de GH |
| 896 4656 | Columna F: regla 5/8>6+2, cambiar 5 en F a 6, sumar 2 a G |
| 896 4602 | restar F×B=6×9=54 de GH |
| 896 4582 | no se puede restar F×C=6×6=36 de HI, revisar a la baja F: restar 1 de F, sumar 8 a G |
| 896 4591 | y sumar 9 a H para devolver el exceso 89 restado de GH |
| 896 4588 | Continuar normalmente y restar F×C=3×6=30 de HI |
| 896 45916 | Columna G: regla 8/8>9+8, cambiar 8 en G a 9, sumar 8 a H |
| 896 45979 | restar G×B=9×9=81 de HI |

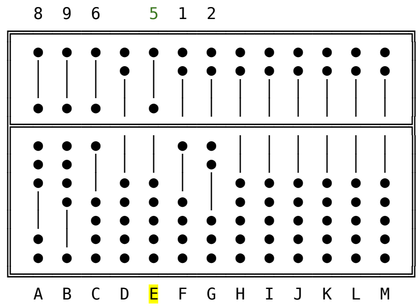
| | |
|---|---|
| 896 459736 | restar G×C=9×6=54 de IJ |
| 896 459896 | Columna H: regla 7/8>8+6, cambiar 7 en H a 8, sumar 6 a I |
| 896 459824 | restar H×B=8×9=72 de IJ |
| 896 4598192 | restar H×C=8×6=48 de JK |
| 896 4598**1**12 | Columna I: regla 1/8>1+2, cambiar 1 en I a 1, sumar 2 a J |
| 896 4598**1**03 | restar I×B=1×9=9 de JK |
| 896 4598**1**024 | restar I×C=1×6=6 de KL |
| 896 45982128 | revisar al alza I: sumar 1 a I, restar 896 de JKL |
| 896 45982148 | Columna J: regla 1/8>1+2, cambiar 1 en J a 1, sumar 2 a K |
| 896 45982139 | restar J×B=1×9=9 de KL |
| 896 459821384 | restar J×C=1×6=6 de LM |
| 896 459821**3**44 | Columna K: regla 3/8>3+6, cambiar 3 en K a 3, sumar 6 a L |
| 896 459821**3**17 | restar K×B=3×9=27 de LM |
| 896 459821**3**15 | restar K×C=3×6=18 de M **…a partir de ahora esto es aproximado** |
| 896 459821425 | revisar al alza K: sumar 1 a K, restar 896 de LM… |
| 896 459821429 | Columna L: regla 2/8>2+4, cambiar 2 en L a 2, sumar 4 a M |
| 896 459821427 | restar L×B=2×9=18 de M… |
| 896 459821428 | Columna M: regla 7/8>8+6, cambiar 7 en M a 8, sumar 4 a … ¡Hecho! 412/896=0.459821428 |

## División de 412 por 896 (Ilustración)

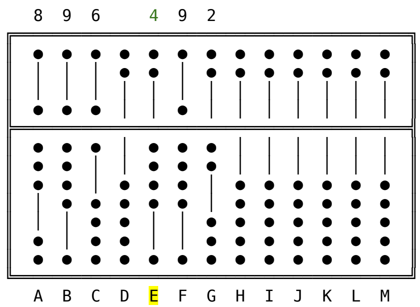



Esta vez el divisor va a la izquierda y el dividendo a la derecha.

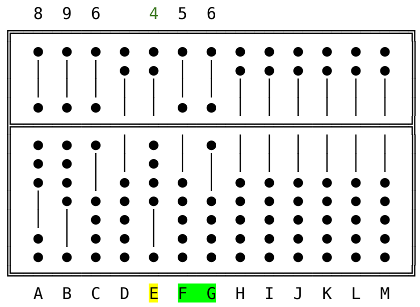
896 412



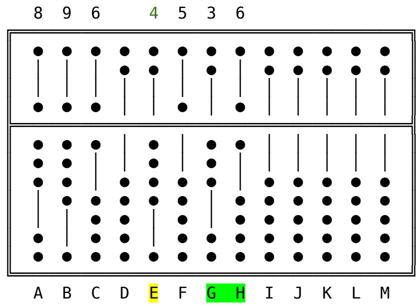

Columna E: regla 4/8>5+0, cambiar 4 en E a 5, sumar 0 a F




no se puede restar E×B=5×9=45 de FG, revisar a la baja E: restar 1 de E, sumar 8 a F

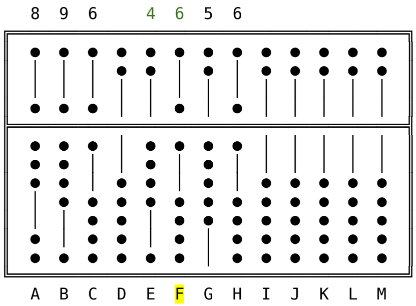



restar E×B=4×9=36 de F

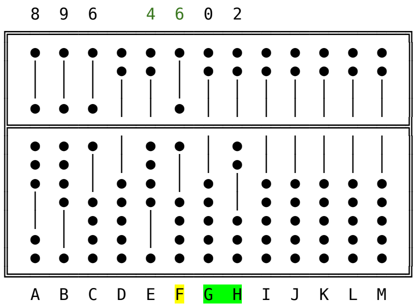



restar E×C=4×6=24 de GH

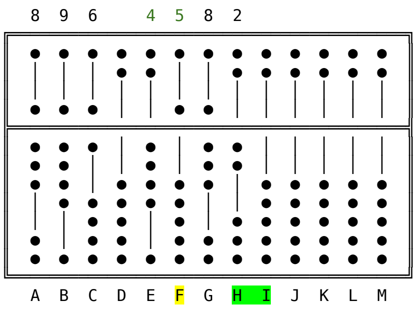
896 4536



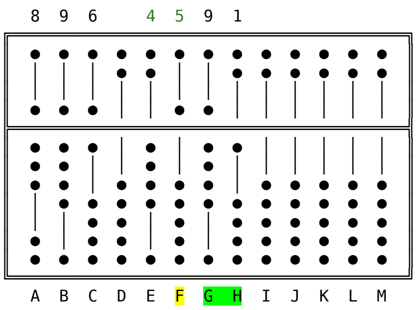

Columna F: regla 5/8>6+2, cambiar 5 en F a 6, sumar 2 a G



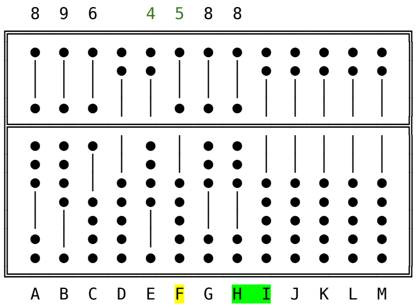

restar F×B=6×9=54 de G




no se puede restar F×C=6×6=36 de HI, revisar a la baja F: restar 1 de F, sumar 8 a G

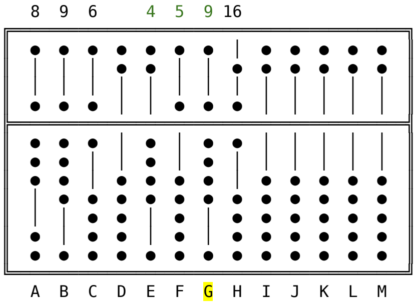



y sumar 9 a H para devolver el exceso 89 restado de GH

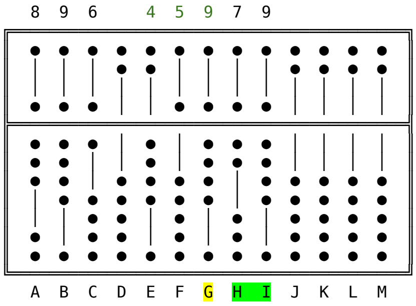



Continuar normalmente y restar F×C=3×6=30 de HI

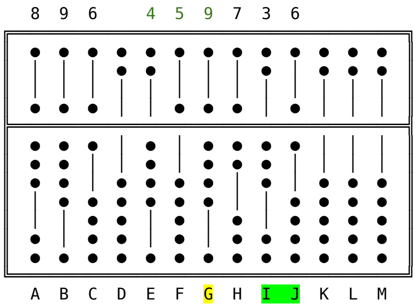
896 4588




Columna G: regla 8/8>9+8, cambiar 8 en G a 9, sumar 8 a H

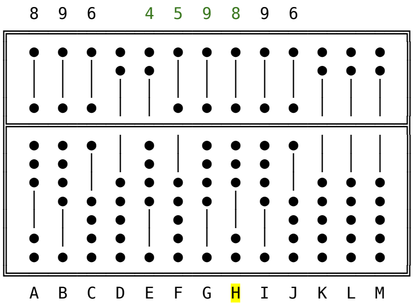



restar G×B=9×9=81 de HI

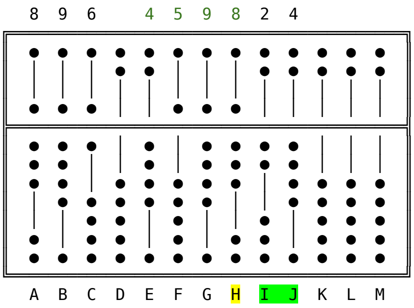



restar G×C=9×6=54 de IJ

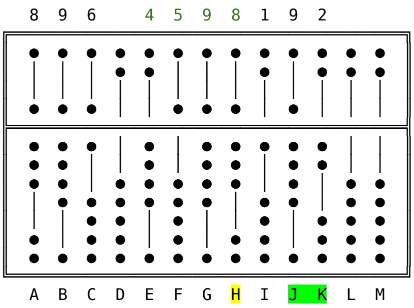
896 459736




Columna H: regla 7/8>8+6, cambiar 7 en H a 8, sumar 6 a I

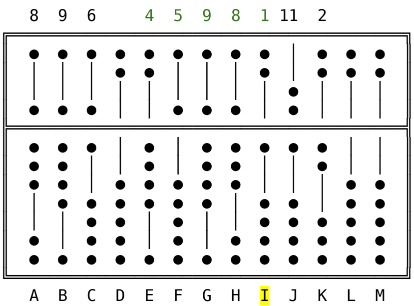



restar H×B=8×9=72 de IJ

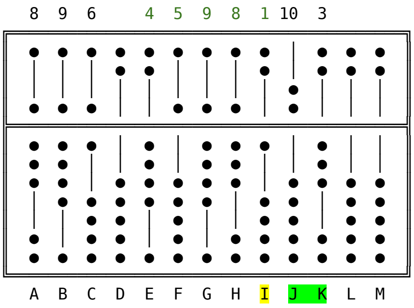



restar H×C=8×6=48 de JK

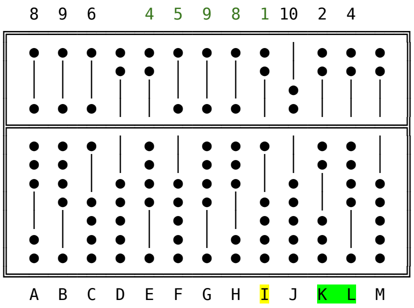
896 4598192



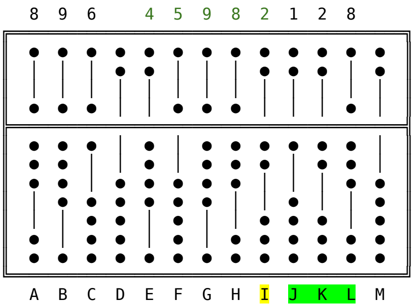

Columna I: regla 1/8>1+2, cambiar 1 en I a 1, sumar 2 a J




restar I×B=1×9=9 de JK

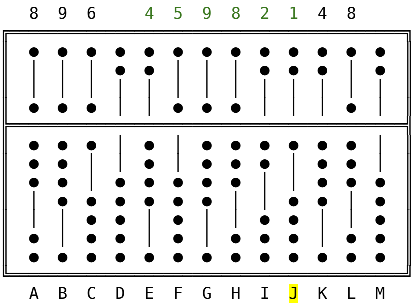



restar I×C=1×6=6 de KL

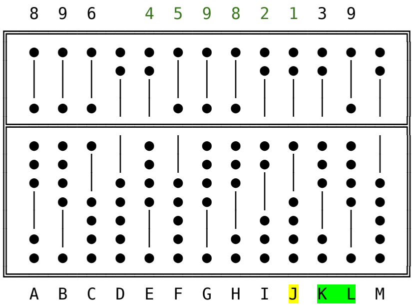



revisar al alza I: sumar 1 a I, restar 896 de JKL

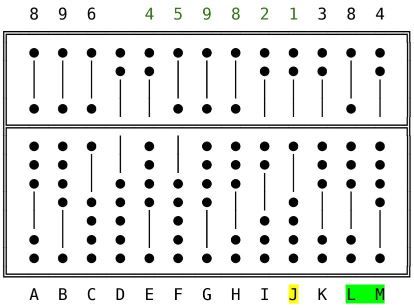
896 45982128




Columna J: regla 1/8>1+2, cambiar 1 en J a 1, sumar 2 a K

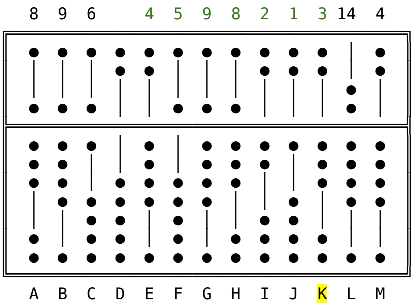



restar J×B=1×9=9 de KL

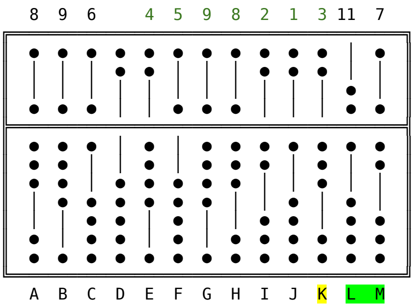



restar J×C=1×6=6 de LM

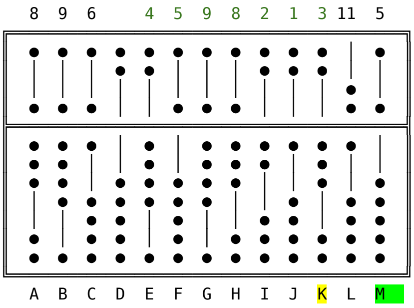
896 459821384



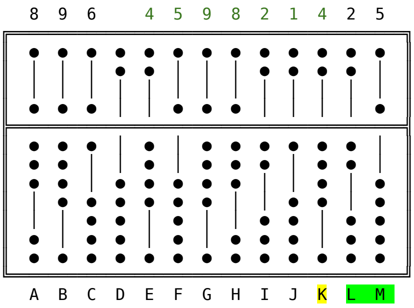

Columna K: regla 3/8>3+6, cambiar 3 en K a 3, sumar 6 a L




restar K×B=3×9=27 de LM

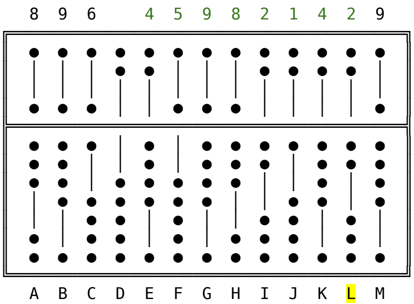



restar K×C=3×6=18 de M …**a partir de ahora esto es aproximado**

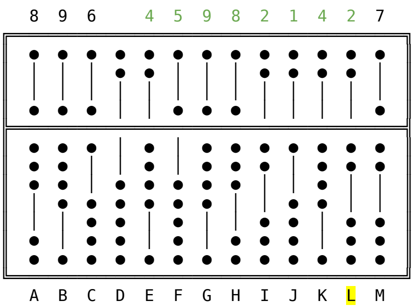



revisar al alza K: sumar 1 a K, restar 896 de LM…

896 45982142560

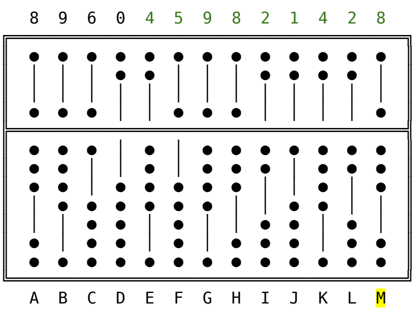



Columna L: regla 2/8>2+4, cambiar 2 en L a 2, sumar 4 a M




restar L×B=2×9=18 de M…

896 45982142768




Columna M: regla 7/8>8+6,
cambiar 7 en M a 8, sumar 4 a
…

¡Hecho!
412/896=0.459821428

896 45982142851

# Recursos externos

Soroban Trainer mostrando un ábaco tipo 5+2 usando la cuenta superior suspendida.

Puede practicar la división tradicional en línea con Soroban Trainer usando este fichero: kijoho-1digit.sbk que debe descargar a su computadora y luego enviarlo a Soroban Trainer (es un archivo de texto que puede inspeccionar con cualquier editor de texto y que puede descargar de manera segura a su computadora).

**Sobre Soroban Trainer**

- Puede ejecutarlo directamente desde GitHub en su navegador
- o puede descargarlo a su computadora desde su repositorio en GitHub.

# XVI Tablas de División Específicas

## Fundamento

Supongamos que tenemos que realizar una gran cantidad de divisiones entre 36525, que podría ser el caso si hacemos cálculos de calendarios. Entonces, podríamos simplificar la tarea creando una tabla de división específica para este divisor siguiendo lo que se indica en el capítulo: Guía a la División Tradicional. Comenzaremos calculando las siguientes tres divisiones euclidianas:

**Creando una tabla de división específica para 36525**

| 100000÷36525 | | 200000÷36525 | | 300000÷36525 | |
|---|---|---|---|---|---|
| Cociente | Resto | Cociente | Resto | Cociente | Resto |
| 2 | 26950 | 5 | 17375 | 8 | 07800 |

que se pueden resumir en la siguiente tabla de división especializada:

**Tabla de dividir por 36525**

| 36525 |
|---|
| 1/36525>2+26950 |
| 2/36525>5+17375 |
| 3/36525>8+07800 |

tabla que también podemos obtener con sólo la primera división, ya que tenemos:

$$100000 = 2 \times 36525 + 26950$$

por lo que sumando este resultado a sí mismo:

$$200000 = 4 \times 36525 + 43900$$

pero el resto $43900$ es mayor que el divisor $36525$, por lo que procede revisar el cociente al alza

$$200000 = (4 + 1) \times 36525 + (43900 - 36525) = 5 \times 36525 + 17375$$

con lo que hemos obtenido la segunda regla: 2/36525>5+17375. Si ahora sumamos de nuevo el resultado de la primera división tendremos:

$$300000 = (5 + 2) \times 36525 + (17375 + 26950) = 7 \times 36525 + 44325$$

donde, nuevamente, el resto supera al divisor y necesitamos revisar al alza

$$300000 = (7 + 1) \times 36525 + (44325 - 36525) = 8 \times 36525 + 07800$$

con lo que ya disponemos de la tercera regla.

Ahora podemos usar esta tabla para hacer divisiones con este divisor **sin usar la tabla de multiplicar**. Por ejemplo: ¿Cuántos siglos julianos de 36 525 días caben en 1 000 000 de días? Procedemos de forma idéntica a la división tradicional por divisores de un solo dígito:

**1000000÷36525**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| ABCDEFGHIJKLM | |
| 36525 1000000 | Regla: 1/36525>2+26950 sobre la columna G |
| 36525 2000000 | cambiar 1 en G a 2 |
| +26950 | sumar 26950 a H-L |
| 36525 2269500 | Regla: 2/36525>5+17375 sobre la columna H |
| 36525 2569500 | cambiar 2 en H a 5 |
| +17375 | sumar 17375 a I-M |
| 36525 2586875 | revisar al alza |
| +1 | |
| -36525 | |
| 36525 2650350 | revisar al alza |
| +1 | |
| -36525 | |
| 36525 2713825 | ¡Hecho! 1000000÷36525=27, resto 13825 |

¡Y hemos hecho una división por un divisor de cinco dígitos sin usar la tabla de multiplicar!

# Tablas de división de dos dígitos

En el pasado se publicaron tablas de división específicas para todos los divisores entre 11 y 99 [Martzloff 2006].

**Reglas de división por dos dígitos**

| | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 9+01 | 8+04 | 7+09 | 7+02 | 6+10 | 6+04 | 5+15 | 5+10 | 5+05 |
| | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 |
| 1 | 4+16 | 4+12 | 4+08 | 4+04 | 4+00 | 3+22 | 3+19 | 3+16 | 3+13 |
| 2 | 9+11 | 9+02 | 8+16 | 8+08 | 8+00 | 7+18 | 7+11 | 7+04 | 6+26 |
| | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 |
| 1 | 3+07 | 3+04 | 3+01 | 2+32 | 2+30 | 2+28 | 2+26 | 2+24 | 2+22 |
| 2 | 6+14 | 6+08 | 6+02 | 5+30 | 5+25 | 5+20 | 5+15 | 5+10 | 5+05 |
| 3 | 9+21 | 9+12 | 9+03 | 8+28 | 8+20 | 8+12 | 8+04 | 7+34 | 7+27 |
| | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 |
| 1 | 2+18 | 2+16 | 2+14 | 2+12 | 2+10 | 2+08 | 2+06 | 2+04 | 2+02 |
| 2 | 4+36 | 4+32 | 4+28 | 4+24 | 4+20 | 4+16 | 4+12 | 4+08 | 4+04 |
| 3 | 7+13 | 7+06 | 6+42 | 6+36 | 6+30 | 6+24 | 6+18 | 6+12 | 6+06 |
| 4 | 9+31 | 9+22 | 9+13 | 9+04 | 8+40 | 8+32 | 8+24 | 8+16 | 8+08 |
| | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 |
| 1 | 1+49 | 1+48 | 1+47 | 1+46 | 1+45 | 1+44 | 1+43 | 1+42 | 1+41 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **2** | 3+47 | 3+44 | 3+41 | 3+38 | 3+35 | 3+32 | 3+29 | 3+26 | 3+23 |
| **3** | 5+45 | 5+40 | 5+35 | 5+30 | 5+25 | 5+20 | 5+15 | 5+10 | 5+05 |
| **4** | 7+43 | 7+36 | 7+29 | 7+22 | 7+15 | 7+08 | 7+01 | 6+52 | 6+46 |
| **5** | 9+41 | 9+32 | 9+23 | 9+14 | 9+05 | 8+52 | 8+44 | 8+36 | 8+28 |
| | **61** | **62** | **63** | **64** | **65** | **66** | **67** | **68** | **69** |
| **1** | 1+39 | 1+38 | 1+37 | 1+36 | 1+35 | 1+34 | 1+33 | 1+32 | 1+31 |
| **2** | 3+17 | 3+14 | 3+11 | 3+08 | 3+05 | 3+02 | 2+66 | 2+64 | 2+62 |
| **3** | 4+56 | 4+52 | 4+48 | 4+44 | 4+40 | 4+36 | 4+32 | 4+28 | 4+24 |
| **4** | 6+34 | 6+28 | 6+22 | 6+16 | 6+10 | 6+04 | 5+65 | 5+60 | 5+55 |
| **5** | 8+12 | 8+04 | 7+59 | 7+52 | 7+45 | 7+38 | 7+31 | 7+24 | 7+17 |
| **6** | 9+51 | 9+42 | 9+33 | 9+24 | 9+15 | 9+06 | 8+64 | 8+56 | 8+48 |
| | **71** | **72** | **73** | **74** | **75** | **76** | **77** | **78** | **79** |
| **1** | 1+29 | 1+28 | 1+27 | 1+26 | 1+25 | 1+24 | 1+23 | 1+22 | 1+21 |
| **2** | 2+58 | 2+56 | 2+54 | 2+52 | 2+50 | 2+48 | 2+46 | 2+44 | 2+42 |
| **3** | 4+16 | 4+12 | 4+08 | 4+04 | 4+00 | 3+72 | 3+69 | 3+66 | 3+63 |
| **4** | 5+45 | 5+40 | 5+35 | 5+30 | 5+25 | 5+20 | 5+15 | 5+10 | 5+05 |
| **5** | 7+03 | 6+68 | 6+62 | 6+56 | 6+50 | 6+44 | 6+38 | 6+32 | 6+26 |
| **6** | 8+32 | 8+24 | 8+16 | 8+08 | 8+00 | 7+68 | 7+61 | 7+54 | 7+47 |
| **7** | 9+61 | 9+52 | 9+43 | 9+34 | 9+25 | 9+16 | 9+07 | 8+76 | 8+68 |
| | **81** | **82** | **83** | **84** | **85** | **86** | **87** | **88** | **89** |
| **1** | 1+19 | 1+18 | 1+17 | 1+16 | 1+15 | 1+14 | 1+13 | 1+12 | 1+11 |
| **2** | 2+38 | 2+36 | 2+34 | 2+32 | 2+30 | 2+28 | 2+26 | 2+24 | 2+22 |
| **3** | 3+57 | 3+54 | 3+51 | 3+48 | 3+45 | 3+42 | 3+39 | 3+36 | 3+33 |
| **4** | 4+76 | 4+72 | 4+68 | 4+64 | 4+60 | 4+56 | 4+52 | 4+48 | 4+44 |
| **5** | 6+14 | 6+08 | 6+02 | 5+80 | 5+75 | 5+70 | 5+65 | 5+60 | 5+55 |
| **6** | 7+33 | 7+26 | 7+19 | 7+12 | 7+05 | 6+84 | 6+78 | 6+72 | 6+66 |
| **7** | 8+52 | 8+44 | 8+36 | 8+28 | 8+20 | 8+12 | 8+04 | 7+84 | 7+77 |
| **8** | 9+71 | 9+62 | 9+53 | 9+44 | 9+35 | 9+26 | 9+17 | 9+08 | 8+88 |
| | **91** | **92** | **93** | **94** | **95** | **96** | **97** | **98** | **99** |
| **1** | 1+09 | 1+08 | 1+07 | 1+06 | 1+05 | 1+04 | 1+03 | 1+02 | 1+01 |
| **2** | 2+18 | 2+16 | 2+14 | 2+12 | 2+10 | 2+08 | 2+06 | 2+04 | 2+02 |
| **3** | 3+27 | 3+24 | 3+21 | 3+18 | 3+15 | 3+12 | 3+09 | 3+06 | 3+03 |
| **4** | 4+36 | 4+32 | 4+28 | 4+24 | 4+20 | 4+16 | 4+12 | 4+08 | 4+04 |
| **5** | 5+45 | 5+40 | 5+35 | 5+30 | 5+25 | 5+20 | 5+15 | 5+10 | 5+05 |
| **6** | 6+54 | 6+48 | 6+42 | 6+36 | 6+30 | 6+24 | 6+18 | 6+12 | 6+06 |
| **7** | 7+63 | 7+56 | 7+49 | 7+42 | 7+35 | 7+28 | 7+21 | 7+14 | 7+07 |
| **8** | 8+72 | 8+64 | 8+56 | 8+48 | 8+40 | 8+32 | 8+24 | 8+16 | 8+08 |
| **9** | 9+81 | 9+72 | 9+63 | 9+54 | 9+45 | 9+36 | 9+27 | 9+18 | 9+09 |

## Algunos ejemplos

A continuación se ofrecen unos pocos ejemplos de tablas específicas con las que puede practicar el lector antes de obtener sus propias tablas.

**Tabla de división por 99**

| | 99 |
|---|---|
| 1 | 1+01 |
| 2 | 2+02 |
| 3 | 3+03 |
| 4 | 4+04 |
| 5 | 5+05 |
| 6 | 6+06 |
| 7 | 7+07 |
| 8 | 8+08 |
| 9 | 9+09 |

**Ejemplo:** 9801÷99 = 99

**9801÷99**

| Abacus | Comment |
|---|---|
| **ABCDEFGHI** | |
| 9801    99 | Dividend AD, divisor HI |
| 9891    99 | A: Rule 9/99>9+09 |
| 9899    99 | B: Rule 8/99>8+08 |
| +1 | revising up |
| -99 | |
| 99      99 | Done! No remainder, quotient: 99 |

Dividir por $\pi$ es común en las aplicaciones, estas son las tablas para tres aproximaciones de este número irracional.

**Tabla de división por $\pi$**

| | 314 | | 31416 | | 3141593 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3+058 | 1 | 3+05752 | 1 | 3+0575221 |
| 2 | 6+116 | 2 | 6+11504 | 2 | 6+1150442 |
| 3 | 9+174 | 3 | 9+17256 | 3 | 9+1725663 |

Tabla de división por 666:

**Tabla de división por 666**

| 666 | |
|---|---|
| 1 | 1+334 |
| 2 | 3+002 |
| 3 | 4+336 |
| 4 | 6+004 |
| 5 | 7+338 |
| 6 | 9+006 |

Sin embargo, no es aconsejable dividir por este número; los resultados pueden ser impredecibles…

Tabla de división por 365:

**Tabla de división por 365**

| 365 |
|---|
| 1/365>2+270 |
| 2/365>5+175 |
| 3/365>8+080 |

Este es un número más saludable.

# División "corta" y "larga"

En inglés se suele distinguir entre *división corta*, cuando el divisor es de una sola cifra, y *división larga*, cuando se trata de divisores con más de un dígito. En el caso de la división tradicional con el ábaco hemos visto que en el primer caso sólo tenemos que utilizar la tabla de división; mientras que en el segundo tenemos que utilizar también la tabla de multiplicar para realizar las divisiones. Con el uso de tablas de dividir específicas podemos dividir por cualquier divisor sin utilizar la tabla de multiplicar y sin importar el número de cifras del divisor; por lo que estamos en una situación semejante a la división corta en este sentido. Podemos, no obstante, hablar también de división larga en este contexto de las tablas de dividir específicas.

Imaginemos que disponemos de las tabla de división por 365 (dada arriba) porque sea habitual que tengamos que dividir por dicho número; e imaginemos asimismo que nos enfrentemos puntualmente a una división por 36525. Como no esperamos tener que hacer muchas divisiones por este número no estamos dispuestos a calcular una tabla de dividir específica para él. Tenemos dos opciones para resolver este problema:

- Usar **3** como *divisor propiamente dicho*, (empleando la tabla de dividir por 3) y usar **6525** como *multiplicador*; tal y como se explicó en la *Guía a la División Tradicional*.

- Usar **365** como *divisor propiamente dicho*, (empleando la tabla de dividir por 365) y usar **25** como *multiplicador*.

Esta última forma es una extensión del concepto de división larga a las tablas de dividir específicas y **nos permite ahorrarnos algunas multiplicaciones** al ser el multiplicador 25 más corto que 6525. Veamos cómo realizarla:

**Ejemplo:** 219150÷36525 = 6

**219150÷36525 usando tabla de dividir por 360**

| Abacus | Comment |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLM** | Divisor en A-E, dividendo en H-M |
| 36525  219150 | H: Regla: 2/365>5+175 |
| 36525  519150 | Cambiar 2 en H a 5 |
| +175 | sumar 175 a IJK |
| 36525  536650 | Restar 5×25 de KLM |
| -10 | |
| -25 | |
| 36525  536525 | Revisar al alza H |
| +1 | |
| -36525 | |
| 36525  6 | ¡Hecho! Resto nulo. 219150÷36525 = 6 |
| | |

y hemos ahorrado la mitad de las multiplicaciones.

# Reglas diagonales

Cabe preguntarse si existe un equivalente a las *reglas diagonales*: 9/9>9+8, 8/8>9+8, 7/7>9+7, etc. para estas tablas de dividir específicas. Las reglas diagonales se usan en la división tradicional multi dígito cuando el dividendo empieza por el mismo dígito que el divisor siendo menor que éste (caso 2); por ejemplo: 47÷49. La extensión del concepto a las tablas específicas es inmediato; por ejemplo, para la tabla de dividir por 365 tendríamos: 365/365>9+365; regla que podemos usar para la división de 365213475 por 36525 en la forma:

**365213475÷36525**

| Abacus | Comment |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLM** | Multiplicador en AB, dividendo en E-M |
| 25  365213475 | Regla 365/365>9+365 |
| 25  365213475 | Cambiar 365 en EFG a 900 |
| 25  900213475 | |
| +365 | sumar 365 a FGH |
| 25  936713475 | restar 9×25 de HIJ |
| -18 | |

| | |
|---|---|
| -45 | |
| 25 936488475 | Regla 3/365>8+080 |
| 25 986488475 | Cambiar 3 en F a 8 |
| +080 | sumar 080 a GHI |
| 25 987288475 | restar 8×25 de IJK |
| -16 | |
| -40 | |
| 25 987268475 | Revisar F al alza |
| +1 | |
| -36525 | |
| 25 993615975 | Regla 3/365>8+080 |
| 25 998615975 | Cambiar 3 en G a 8 |
| +080 | sumar 080 a HIJ |
| 25 998695975 | restar 8×25 de JKL |
| -16 | |
| -40 | |
| 25 998693975 | Revisar F al alza |
| +1 | |
| -36525 | |
| 25 999328725 | Regla 3/365>8+080 |
| 25 999828725 | Cambiar 3 en H a 8 |
| +080 | sumar 080 a IJK |
| 25 999836725 | restar 8×25 de KLM |
| -16 | |
| -40 | |
| 25 999836525 | Revisar G al alza |
| +1 | |
| -36525 | |
| 25 9999 | ¡Hecho! Resto nulo. 365213475÷36525=9999 |

Pero dichas reglas diagonales, a decir verdad, ni son estrictamente necesarias ni resultarían de uso frecuente. Por ejemplo, en el caso de la división anterior es suficiente emplear la regla: 3/365>8+080

**365213475÷36525**

| Abacus | Comment |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLM** | Multiplicador en AB, dividendo en E-M |
| 25 365213475 | Regla 3/365>8+080 |
| 25 865213475 | Cambiar 3 en E a 8 |
| 25 873213475 | |

| | |
|---|---|
| +080 | sumar 080 a FGH |
| 25 873213475 | restar 8×25 de HIJ |
| -16 | |
| -40 | |
| 25 873013475 | Revisar E al alza |
| +1 | |
| -36525 | |
| 25 936488475 | |
| etc. | Continuar como arriba |

Sin que signifique un exceso de trabajo por comparación a lo hecho arriba. Por otro lado, cuantas más cifras tenga el divisor propiamente dicho, tanto más infrecuente será que nos enfrentemos a un dividendo que comience justamente por los mismos dígitos (1/365 de los casos en el ejemplo); por lo que podemos prescindir de las reglas diagonales si queremos.

# Otras lecturas

- Murakami, Masaaki (2020). «Specially Crafted Division Tables» (PDF). *算盤 Abacus: Mystery of the Bead*. Archivado desde el original, el 1 de Agosto de 2021.

# XVII División por Potencias de 2

## Introducción

Una fracción cuyo denominador solo contiene 2 y 5 como divisores tiene una representación decimal finita. Esto permite una división fácil por potencias de dos o cinco si tenemos las fracciones $1/n, 2/n, \cdots 9/n$ tabuladas (o memorizadas) donde $n$ es una de tales potencias de dos o cinco.

Por ejemplo, dado

$$137 = 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

entonces

$$\frac{137}{8} = \frac{1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0}{8} = \frac{1}{8} \cdot 10^2 + \frac{3}{8} \cdot 10^1 + \frac{7}{8} \cdot 10^0 =$$

$$(0.125) \cdot 10^2 + (0.375) \cdot 10^1 + (0.875)10^0 = 12.5 + 3.75 + 0.875 = 17.125$$

Lo cual se puede hacer fácilmente en el ábaco **trabajando de derecha a izquierda** del siguiente modo:

**Para cada dígito del numerador**

- Borrar el dígito
- Sumar en el ábaco la fracción correspondiente al dígito de trabajo comenzando por la columna que ocupaba

**137÷8 usando fracciones**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEF** | |
| --+--- | Columna unidad |
| 137 | Dividendo 137 en A-C como guía |
|   ~~7~~ | borrar 7 en C |
|   +0875 | sumar 7/8 en C-F |
| 130875 | |
|  ~~3~~ | borrar 3 en B |
| +0375 | sumar 3/8 en B-E |
| 104625 | |
| ~~1~~ | borrar 1 en A |
| +0125 | sumar 1/8 en A-D |
|  17125 | ¡Hecho! |
| --+--- | Columna unidad |

Solo necesitamos tener las fracciones correspondientes tabuladas o memorizadas, como en la tabla a continuación.

# Potencias de dos

En el pasado, tanto en China como en Japón, se utilizaban unidades monetarias y de medida que estaban relacionadas por un factor de 16 [Williams & Morrison 1856; Kwa 1922; Murakami 2020a], un factor que al comenzar con uno hace que la división normal resulte incómoda. Por esta razón el método presentado aquí fue popular para tales divisiones.

## Tabla de fracciones de potencias de dos

**Fracciones de potencias de 2**

| D | D/2 | D/4 | D/8 | D/16 | D/32 | D/64 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 05 | 025 | 0125 | 0625 | 03125 | 015625 |
| **2** | 10 | 050 | 0250 | 1250 | 06250 | 031250 |
| **3** | 15 | 075 | 0375 | 1875 | 09375 | 046875 |
| **4** | 20 | 100 | 0500 | 2500 | 12500 | 062500 |
| **5** | 25 | 125 | 0625 | 3125 | 15625 | 078125 |
| **6** | 30 | 150 | 0750 | 3750 | 18750 | 093750 |
| **7** | 35 | 175 | 0875 | 4375 | 21875 | 109375 |
| **8** | 40 | 200 | 1000 | 5000 | 25000 | 125000 |
| **9** | 45 | 225 | 1125 | 5625 | 28125 | 140625 |
| | | | | 1 | 1 | 1 |
| | | | | Desplazamiento a la izquierda de la columna unidad | | |

Para las divisiones por 2, 4 y 8 la columna unidad no cambia de posición, pero para la divisiones por 16, 32 y 64 se desplaza una columna a la izquierda como vemos en los siguientes ejemplos.

## Ejemplos de uso

**137/2**

| **ABCD** | |
|---|---|
| --+- | Col. unidad |
| 137 | |
| ~~7~~ | Borrar 7 en C |
| +35 | |
| ~~3~~ | Borrar 3 en B |
| +15 | |
| ~~1~~ | Borrar 1 en A |
| +05 | |
| --+- | Col. unidad |
| 0685 | |
| **68.5** | |

**137/4**

| | |
|---|---|
| **ABCDE** | |
| --+-- | Col. unidad |
| 137 | |
| ~~7~~ | Borrar 7 en C |
| +175 | |
| ~~3~~ | Borrar 3 en B |
| +075 | |
| ~~1~~ | Borrar 1 en A |
| +025 | |
| --+-- | Col. unidad |
| 03425 | |
| **34.25** | |

**137/8**

| | |
|---|---|
| **ABCDEF** | |
| --+--- | Col. unidad |
| 137 | |
| ~~7~~ | Borrar 7 en C |
| +0875 | |
| ~~3~~ | Borrar 3 en B |
| +0375 | |
| ~~1~~ | Borrar 1 en A |
| +0125 | |
| --+--- | Col. unidad |
| 017125 | |
| **17.125** | |

**137/16**

| | |
|---|---|
| **ABCDEF** | |
| --+--- | Col. unidad |
| 137 | |
| ~~7~~ | Borrar 7 en C |
| +4375 | |
| ~~3~~ | Borrar 3 en B |
| +1875 | |
| ~~1~~ | Borrar 1 en A |
| +0625 | |
| -+---- | Col. unidad |

| |
|---|
| 085625 |
| **8.5625** |

**137/32**

| | |
|---|---|
| **ABCDEFG** | |
| --+---- | Col. unidad |
| 137 | |
| ~~7~~ | Borrar 7 en C |
| +21875 | |
| ~~3~~ | Borrar 3 en B |
| +09375 | |
| ~~1~~ | Borrar 1 en A |
| +03125 | |
| -+----- | Col. unidad |
| 0428125 | |
| **4.28125** | |

**137/64**

| | |
|---|---|
| **ABCDEFGH** | |
| --+----- | Col. unidad |
| 137 | |
| ~~7~~ | Borrar 7 en C |
| +109375 | |
| ~~3~~ | Borrar 3 en B |
| +046875 | |
| ~~1~~ | Borrar 1 en A |
| +015625 | |
| -+------ | Col. unidad |
| 02140625 | |
| **2.140625** | |

"+" indica la posición de la columna unidad antes y después de la operación.

## División por 2 *in situ*

El caso de la división por 2 es especialmente importante; ya ha sido mencionado como división *in situ* para transformar una división por un número que comience por uno en una división más cómoda que empiece por un dígito de 5 a 9. También le será útil a la hora de realizar raíces cuadradas por el método del *semi-resto* ( 半九九法 , *hankukuho* en japonés, *Bàn jiǔjiǔ fǎ* en chino)

[Siqueira & Heffelfinger 2004] como puede consultar en el capítulo: Raíces Cuadradas. Sin duda, es un método muy eficaz y rápido de dividir entre dos.

Siendo un caso particular de lo explicado en el apartado anterior, para dividir un número por dos *in situ*:

**Procedemos dígito a dígito de derecha a izquierda en la forma**

1. borrando el dígito
2. sumando su mitad comenzando con la columna que ocupaba

Por ejemplo,123456789÷2:

**123456789÷2 *in situ***

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJ** | |
| 123456789 | |
| ~~9~~ | borrar 9 en I |
| +45 | sumar su mitad en IJ |
| 1234567845 | |
| ~~8~~ | borrar 8 en H |
| +40 | sumar su mitad en HI |
| 1234567445 | |
| ~~7~~ | borrar 7 en G |
| +35 | sumar su mitad en GH |
| 1234563945 | |
| ~~6~~ | borrar 6 en F |
| +3 | sumar su mitad en FG |
| 1234533945 | |
| ~~5~~ | borrar 5 en E |
| +25 | sumar su mitad en EF |
| 1234283945 | |
| ~~4~~ | borrar 4 en D |
| +2 | sumar su mitad en DE |
| 1232283945 | |
| ~~3~~ | borrar 3 en C |
| +15 | sumar su mitad en CD |
| 1217283945 | |
| ~~2~~ | borrar 2 en B |
| +1 | sumar su mitad en BC |
| 1117283945 | |
| ~~1~~ | borrar 1 en A |
| +05 | sumar su mitad en AB. |

| | |
|---|---|
| 617283945 | ¡Hecho! |

Recordemos que la varilla unidad no cambia de posición tras esta división.

## Potencias de cinco y multiplicación por 2 in *situ*

Sin duda podríamos repetir aquí el tratamiento anterior con las potencias de 5, dado que sus fracciones son también de desarrollo decimal finito al ser 5 divisor de 10.

**Fracciones de potencias de 5**

| D | D/5 | D/25 | D/125 | D/625 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.2 | 0.04 | 0.008 | 0.0016 |
| 2 | 0.4 | 0.08 | 0.016 | 0.0032 |
| 3 | 0.6 | 0.12 | 0.024 | 0.0048 |
| 4 | 0.8 | 0.16 | 0.032 | 0.0064 |
| 5 | 1.0 | 0.20 | 0.040 | 0.0080 |
| 6 | 1.2 | 0.24 | 0.048 | 0.0096 |
| 7 | 1.4 | 0.28 | 0.056 | 0.0112 |
| 8 | 1.6 | 0.32 | 0.064 | 0.0128 |
| 9 | 1.8 | 0.36 | 0.072 | 0.0144 |

Pero tampoco hay duda de que, en lugar de memorizar nuevas fracciones, es preferible recurrir a que:

- Dividir por 5 es lo mismo que multiplicar por 2 y dividir por 10
- Dividir por 25 es lo mismo que multiplicar por 4 y dividir por 100
- Dividir por 125 es lo mismo que multiplicar por 8 y dividir por 1000
- etc.

o bien

- Dividir por 5 es lo mismo que multiplicar por 2 y dividir por 10
- Dividir por 25 es lo mismo que multiplicar por 2 dos veces y dividir por 100
- Dividir por 125 es lo mismo que multiplicar por 2 tres veces y dividir por 1000
- etc.

y que **multiplicar por 2 in situ** es extraordinariamente rápido con el ábaco; sólo hay que invertir la división por 2 in situ vista arriba:

**Trabajando de izquierda a derecha, para cada dígito**

- Borrar el dígito de trabajo
- sumar su doble en el ábaco empezando en la columna de su izquierda

**61728394.5×2 *in situ***

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJ** | |
| 617283945 | |
| 6 | Borrar 6 en B |
| +12 | sumar su doble en AB |
| 1217283945 | |
| 1 | Borrar 1 en C |
| +02 | sumar su doble en BC |
| 1227283945 | |
| 7 | Borrar 7 en D |
| +14 | sumar su doble en CD |
| 1234283945 | |
| 2 | Borrar 2 en E |
| +04 | sumar su doble en DE |
| 1234483945 | |
| 8 | Borrar 8 en F |
| +16 | sumar su doble en EF |
| 1234563945 | |
| 3 | Borrar 3 en G |
| +06 | sumar su doble en FG |
| 1234566945 | |
| 9 | Borrar 9 en H |
| +18 | sumar su doble en GH |
| 1234567845 | |
| 4 | Borrar 4 en I |
| +08 | sumar su doble en HI |
| 1234567885 | |
| 5 | Borrar 5 en J |
| +10 | Sumar su doble en IJ |
| 1234567890 | ¡Hecho! |
| 123456789 | 61728394.5×2 = 123456789 |

Estas técnicas podrán serle de utilidad para transformar raíces cuadradas y cúbicas que puedan comenzar por 1 en otras más cómodas (raíces cuadradas y cúbicas dependen esencialmente de la división y esta es incómoda cuando el divisor empieza por 1).

# XVIII Multiplicación Tradicional

## Introducción

Como ya se ha indicado en este libro, el ábaco no conserva memoria de lo que hemos hecho sobre él, a diferencia del cálculo escrito, por lo que la revisión de los cálculos para comprobar su corrección se ha hecho tradicionalmente a través de estos dos recursos:

- Repetir las operaciones y comprobar que nos conducen a los mismos resultados
- Deshacer el trabajo aplicando las operaciones inversas hasta encontrar los operandos de partida

o bien una combinación de ambos. Nos centramos aquí en la última opción.

La suma y la resta son operaciones inversas; por ejemplo: $422 + 313 = 735$ y si ahora restamos $735 - 313 = 422$ obtenemos el operando de partida. Sobre el ábaco:

**Comprobando la suma con la resta**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABC** | |
| 422 | |
| +3 | Sumar 313 a ABC |
| +1 | |
| +3 | |
| 735 | Resultado de 422+313 |
| -3 | Verificación restando 313 de ABC |
| -1 | |
| -3 | |
| 422 | Sumando original en su posición de partida |

y, como podemos ver, no solo obtenemos el valor inicial sino que también lo obtenemos en su **posición original**. Por ello decimos que suma y resta son operaciones inversas no sólo en sentido matemático sino también **abacístico**.

A su vez, la multiplicación y la división también son operaciones inversas en sentido matemático; es decir, si $a/b = q, r$ donde $q$ es el cociente de dividir $a$ por $b$ y $r$ es el resto, podemos invertir la operación en la forma: $a = q \times b + r$ por ejemplo: $4727/72 = 65,\ 47$ donde $65$ es el cociente y $47$ el resto, y podemos invertir la operación en la forma $4727 = 65 \times 72 + 47$. En el ábaco, utilizando los métodos modernos de división y multiplicación:

**4727÷72 usando el método moderno**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHI** | 4727÷72 |
| 72    **4727** | Dividendo:F-I, divisor:AB |

| | |
|---|---|
| 72   64727 | 6 como cociente provisional |
| -42 | restar 6×7=42 de FG |
| -12 | restar 6×2=12 de GH |
| 72   6 407 | |
| 72   65407 | 5 como cociente provisional |
| -35 | restar 5×7=35 de GH |
| -10 | restar 5×2=10 de HI |
| 72   65 47 | **Fin: cociente=65, resto=47** |
| 72   65 47 | **Comprobando por multiplicación** |
| +35 | sumar 5×7=35 a GH |
| +10 | sumar 5×2=10 a HI |
| 72   65407 | |
| 72   6 407 | borrar F |
| +42 | sumar 6×7=42 a FG |
| +12 | sumar 6×2=12 a GH |
| 72   64727 | borrar E |
| 72    **4727** | **¡Hecho!** |

y comprobamos también que la multiplicación y división en el ábaco realizadas de acuerdo al **Método Moderno** son también operaciones inversas en el sentido abacístico al devolvernos el operando original a su posición de partida.

Nótese la posición relativa de los operandos y los resultados utilizando el método moderno:

**Posición relativa de operandos y resultados (método moderno)**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHI** | 4727÷72 |
| 72    4727 | Divisor y dividendo |
| 72   65 47 | Divisor: AB, cociente: EF, resto: HI |

Ahora intentemos lo mismo con el método tradicional de división (**TD**) y el arreglo de división tradicional (**TDA**).

**4727÷72, División tradicional y disposición tradicional (TDA)**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHI** | 4727÷72 |
| 72    4727 | Dividendo:F-I, divisor:AB |
| 72    5227 | Regla: 4/7>5+5 (¡desbordamiento!) |
| -10 | Restar 5×2=10 de GH |
| 72    5127 | |
| +1 | Revisar al alza F |

| | |
|---|---|
| -72 | Restar 72 de GH |
| 72    6407 | |
| 72    6557 | Regla: 4/7>5+5 |
| -10 | Restar 5×2=10 de HI |
| 72    6547 | Fin: cociente=65, resto=47 |

ahora la posición relativa de los operandos y los resultados es diferente:

**Posición relativa de operandos y resultados (método tradicional)**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHI** | 4727÷72 |
| 72    4727 | Divisor y dividendo |
| 72    6547 | Divisor: AB, cociente: FG, resto: HI |

Si queremos revertir la operación por multiplicación no podemos usar la multiplicación moderna, necesitamos suprimir una columna durante la multiplicación. Una forma de proceder podría ser esta:

1. Memorizar el dígito del multiplicando a usar
2. Borrarlo
3. Sumar los productos parciales

de este modo:

**Invirtiendo la división tradicional con TDA**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHI** | |
| 72    6547 | Reversion por multiplicación |
| 72    6 47 | **Borrar G y recordar 5** |
| +35 | Sumar 5×7=35 a GH |
| +10 | Sumar 5×2=10 a HI |
| 72    6407 | |
| 72     407 | **Borrar F y recordar 6** |
| +42 | Sumar 6×7=42 a FG |
| +12 | Sumar 6×2=12 a GH |
| 72    4727 | ¡Hecho! |

y también hemos revertido la operación y devuelto el ábaco a su estado original. De esta forma se procede exactamente igual que con la multiplicación moderna, previamente liberando y reutilizando el espacio que ocupa el dígito en uso del multiplicando. Sin embargo, memorizar y mantener algo en la memoria mientras se trabaja con el ábaco abre una puerta a cometer errores y es deseable minimizar esta posibilidad tratando de mantener el dígito en la memoria durante el menor tiempo posible. Esto se logra alterando el orden en el que sumamos los productos parciales:

**Introduciendo la multiplicación tradicional**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHI** | |
| 72 6547 | Reversión por multiplicación |
| +10 | Sumar 5×2=10 a HI |
| +35 | Borrar G y sumar 5×7=35 a GH |
| 72 6407 | |
| +12 | Sumar 6×2=12 a GH |
| +42 | Borrar F y sumar 6×7=42 a FG |
| 72 4727 | ¡Hecho! |

Como podemos ver, hemos retrasado el borrado del dígito en uso hasta el último momento posible. Esta es la base del método tradicional de multiplicación.

# Método de multiplicación tradicional

El método tradicional de multiplicación se introdujo por primera vez utilizando varillas de cálculo [Volkov 2018] y la mejor manera de presentarlo al abacista moderno es considerar que un multiplicador de varios dígitos consta de una *cabeza* (el primer dígito de la izquierda) y un *cuerpo* (el resto de los dígitos); por ejemplo: 4567✕23, considerando 4567 como el multiplicador, su cabeza es 4 y el cuerpo 567. Entonces, para cada dígito del multiplicando (de derecha a izquierda):

- proceder como en la multiplicación moderna con el producto del dígito del multiplicando por el cuerpo del multiplicador
- después borrar el dígito del multiplicando en uso y sumar su producto por la cabeza del multiplicador a la columna que se acaba de liberar y la adyacente a su derecha

**4567×23 Método tradicional**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKL** | Multiplicando:FG, Multiplicador: A-D |
| **4***567* 23 | Cabeza: A (**4**), Cuerpo: BCD (*567*) |
| +15 | Sumar 3×5=15 a IJ |
| +18 | Sumar 3×6=18 a JK |
| +21 | Sumar 3×7=21 a KL |
| +12 | Borrar H y sumar 3×4=12 a HI |
| 4567 213701 | |
| +10 | Sumar 2×5=10 a HI |
| +12 | Sumar 2×6=12 a IJ |
| +14 | Sumar 2×7=14 a JK |
| +08 | Borrar G y sumar 3×4=12 a GH |

| | |
|---|---|
| 4567   10**F**041 | ¡Hecho! |

donde el resultado 10**F**041 se obtiene si usa la 5ª cuenta inferior, 105041 de otro modo.

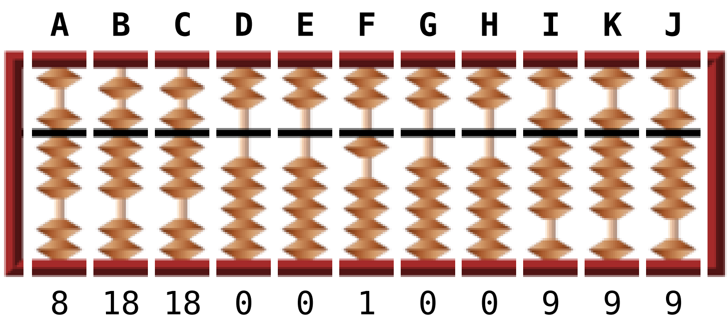
Pero las cosas no siempre son tan sencillas como en el ejemplo anterior; si tanto el multiplicando como el multiplicador contienen dígitos altos (7, 8, 9), es posible que tengamos problemas de desbordamiento y debamos solucionarlos, como en el caso 999✕999 = 998001:

**999×999 Multiplicación tradicional**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJK** | Multiplicando:A-C, Multiplicador: I-K |
| 999      **9***99* | Cabeza: I (**9**), Cuerpo: JK (*99*) |
| +81 | Sumar 9×9=81 a DE |
| +81 | Sumar 9×9=81 a EF |
| +81 | Borrar C y sumar 9×9=81 a CD |
| 998991   999 | |
| +81 | Sumar 9×9=81 a CD |
| +81 | Sumar 9×9=81 a DE |
| +81 | Borrar B y sumar 9×9=81 a BC |
| 988901   999 | (¡desbordamiento!) |
| +81 | Sumar 9×9=81 a BC |
| +81 | Sumar 9×9=81 a CD |
| +81 | Borrar A y sumar 9×9=81 a AB |
| 888001   999 | (¡desbordamiento doble!) |
| 998001   999 | Resultado normalizado, ¡Hecho! |

Lo más conveniente, como en el caso de la división, es disponer de cuentas superiores adicionales, es decir, de un ábaco tipo 5+2 o 5+3 si se es suficientemente afortunado. Con el 5+2 alcanzaríamos el resultado:

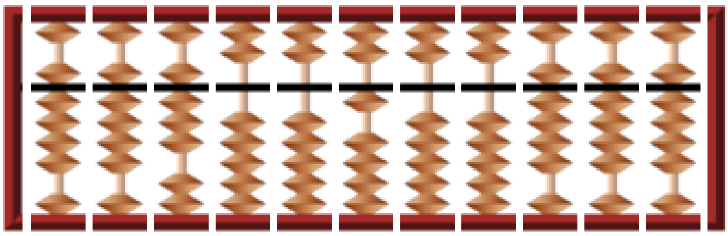
**Resultado de 999✕999 antes de la normalización**




que será preciso *normalizar* o *estandarizar* para su lectura a:

**Resultado de 999×999 después de la normalización**

A B C D E F G H I K J



9 9 8 0 0 1 0 0 9 9 9

Para los ábacos 4+1 y 5+1, puede ser mejor usar la alternativa descrita en la sección anterior, borrando el dígito de trabajo del multiplicando al principio (o cuando sea necesario) para tener espacio para albergar los resultados parciales; por ejemplo:

**999×999 Multiplicación tradicional para el 4+1 o 5+1**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJK** | Multiplicando:A-C, Multiplicador: I-K |
| 999     999 | |
|  +81 | Borrar C, recordar 9 y sumar 9×9=81 a CD |
|   +81 | Sumar 9×9=81 a DE |
|    +81 | Sumar 9×9=81 a EF |
| 998991  999 | |
| +81 | Borrar B, recordar 9 y sumar 9×9=81 a BC |
|  +81 | Sumar 9×9=81 a CD |
|   +81 | Sumar 9×9=81 a DE |
| 998901  999 | |
| +81 | Borrar A, recordar 9 y sumar 9×9=81 a AB |
| +81 | Sumar 9×9=81 a BC |
|  +81 | Sumar 9×9=81 a CD |
| 998001  999 | ¡Hecho! |

# Ejercicios propuestos

Mientras que la división tradicional supone un enfoque radicalmente diferente de la operación por comparación a la división moderna, la multiplicación tradicional sólo supone una adaptación de las las habilidades adquiridas con la multiplicación moderna a una nueva disposición de la operación sobre el ábaco.

No es necesario, por tanto, ofrecer una larga serie de ejercicios para esta forma de multiplicar; pero sí es necesario que el lector practique el uso de las cuentas adicionales si dispone de un ábaco 5+2 ya que la multiplicación puede presentar algo más de complicación que la división en este aspecto. Aparte del caso visto arriba de 999×999=998001, el lector debería practicar su versión corta 99×99=9801 y la larga 9999×9999=99980001; así como los dos ejercicios tradicionales derivados

898×989=888122 usando uno u otro número como multiplicando. En general, debería proponerse ejercicios que contengan dígitos altos (7, 8, 9).

# Multiplicación tradicional y la columna unidad

Puesto que en la multiplicación tradicional hemos suprimido una columna por comparación a la multiplicación moderna, la regla para encontrar la columna unidad queda en la forma:

> **La columna de las unidades del producto se encuentra  columnas a la derecha de la columna de las unidades del multiplicando; donde  es el número de dígitos del multiplicador** a la izquierda de su punto decimal **(¡que podría ser negativo!).**

Compárese con la dada en el capítulo sobre la Multiplicación Moderna.

# Colofón: ¿Cuántos métodos de multiplicación hay?

Tomemos un ejemplo: $345 \times 6789$. Hacemos esta multiplicación sumando los 12 productos parciales que resultan de la expansión:

$$345 \times 6789 = (300 + 40 + 5) \times (6000 + 700 + 80 + 9) = 300 \times 6000 + 300 \times 700 + \cdots + 5 \times 9$$

Es decir, todos los productos enumerados en esta tabla:

**Productos parciales de 345×6789**

| × | 6000 | 700 | 80 | 9 |
|---|---|---|---|---|
| 300 | 1800000 | 210000 | 24000 | 2700 |
| 40 | 240000 | 28000 | 3200 | 360 |
| 5 | 30000 | 3500 | 400 | 45 |

o bien:

**Productos parciales de 345×6789**

| × | $6 \cdot 10^3$ | $7 \cdot 10^2$ | $8 \cdot 10^1$ | $9 \cdot 10^0$ |
|---|---|---|---|---|
| $3 \cdot 10^2$ | $18 \cdot 10^5$ | $21 \cdot 10^4$ | $24 \cdot 10^3$ | $27 \cdot 10^2$ |
| $4 \cdot 10^1$ | $24 \cdot 10^4$ | $28 \cdot 10^3$ | $32 \cdot 10^2$ | $36 \cdot 10^1$ |
| $5 \cdot 10^0$ | $30 \cdot 10^3$ | $35 \cdot 10^2$ | $40 \cdot 10^1$ | $45 \cdot 10^0$ |

donde los productos parciales están expresados como productos que obtenemos usando la tabla de multiplicar de un dígito y determinadas potencias de 10 que nos indican en qué posición decimal (columna) debemos sumar dichos productos.

Pero estos 12 productos se pueden sumar en cualquiera de las 12! (12 factorial) $= 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 12 = 479\,001\,600$ formas de ordenarlos, por lo que podríamos decir que hay, al menos, casi 500 millones de formas de calcular el producto de los dos números dados.

Está claro que, de esta inmensa cantidad de formas de sumar secuencialmente productos parciales, solo unas pocas pueden ser generadas y seguidas de manera eficiente y segura por el cerebro humano. Pero estas pocas siguen siendo muchas ... sobre todo si pensamos que también podemos elegir si introducir o no multiplicando y multiplicador en el ábaco y por dónde empezar a sumar los productos parciales con respecto a dichos operandos. En el capítulo Métodos Especiales de Multiplicación veremos algunas formas adicionales de multiplicar.

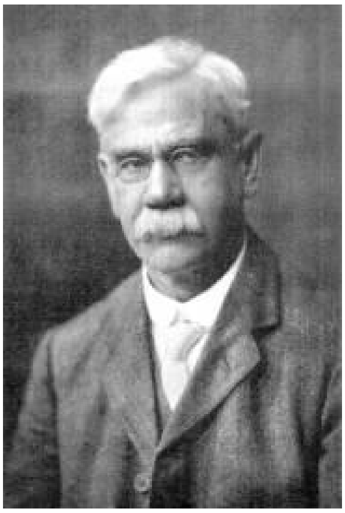
## Otras lecturas


- Kojima, Takashi (1963). «III Other multiplication methods». *Advanced Abacus: Theory and Practice*. Tokyo: Charles E. Tuttle Co., Inc.. ISBN 978-0-8048-0003-7.
- Totton Heffelfinger (2004). «Traditional Multiplication techniques for Chinese Suan Pan - The *Extra Bead* and the *Suspended Bead*». *算盤 Abacus: Mystery of the Bead*. Archivado desde el original, el 1 de Agosto de, 2021.
- Totton Heffelfinger (2013). «Suan Pan and the Unit Rod - Multiplication». *算盤 Abacus: Mystery of the Bead*. Archivado desde el original, el 1 de Agosto de, 2021.

# XIX Raíces

## Introducción

La obtención de raíces cuadradas y cúbicas son las operaciones más complejas estudiadas dentro de la Aritmética Elemental. El ábaco oriental se presta muy bien a la obtención de raíces cuadradas mediante un procedimiento directo y eficiente; pero lamentablemente no se puede decir lo mismo respecto de la obtención de raíces cúbicas que, si bien son posibles, requieren un camino tortuoso, lleno de idas y venidas, y muy propenso a errores.


*Cargill Gilston Knott*

Cargill Gilston Knott (1856 - 1922), uno de los padres de la sismología moderna, fue un físico y matemático escocés que sirvió durante nueve años como profesor de matemáticas, acústica y electromagnetismo en la Universidad Imperial de Tokio; tras lo cual fue condecorado con la Orden del Sol Naciente por el Emperador Meiji en 1891. Durante su estancia en Japón entró en contacto con el ábaco japonés que estudió en profundidad y sin duda utilizó profesionalmente en su propio trabajo como profesor e investigador. El resultado de su estudio fue un famoso artículo de 55 páginas [Knott 1886] escrito en 1885 que durante mucho tiempo ha sido el relato mejor informado en inglés, así como referencia obligada, sobre la historia y los fundamentos del soroban; la visión de un científico y matemático occidental.

## Capítulos

Los dos capítulos siguientes de este libro:

- Raíces Cuadradas
- Raíces Cúbicas

desarrollan y amplían la visión de Knott sobre los métodos tradicionales de obtención de raíces; constando de una introducción teórica seguida de una descripción del procedimiento de cálculo y una serie de ejemplos.

Posteriormente, si desespera con el método tradicional de obtener raíces cúbicas... lo cual es fácil que ocurra, en la sección Técnicas Avanzadas encontrará el capítulo: Método de Newton para Raíces Cuadradas, Cúbicas y Quintas con una forma mucho más eficiente y sencilla de obtener raíces cúbicas.

# Comprobando sus ejercicios

Obtener raíces cuadradas y cúbicas con el ábaco puede ser un proceso algo largo y durante la fase de aprendizaje es interesante disponer de una herramienta que nos permita controlar si lo estamos haciendo correctamente.

## Raíces cuadradas

Para raíces cuadradas, puede probar el excelente **Tutor de raíz cuadrada con Kijoho** de Masaaki Murakami, una aplicación en JavaScript que puede ejecutar directamente en su navegador o bien descargarlo a su computadora desde su repositorio en GitHub. Sólo ha de ingresar el radicando en el pequeño cuadro de entrada de la izquierda y presionar repetidamente el botón "NEXT" en la pantalla, o la tecla "RETURN", para asistir al desarrollo del proceso paso a paso.

## Raíces cúbicas

Desafortunadamente, no tenemos nada parecido al software anterior para raíces cúbicas, pero puede utilizar el siguiente código BC que también puede serle útil con las raíces cuadradas.

### Archivo **knott.bc**

Copie y pegue lo siguiente en un archivo de texto llamado: **knott.bc**:

---

```
/*
   Functions to help to learn/verify square and cube roots a la Knott
   with the abacus, soroban, suanpan.

   See: https://jccabacus.blogspot.com/2021/06/roots-la-knott.html
   as a reference.

   Jesús Cabrera, June 2021
   CC0 1.0 Universal (CC0 1.0) Public Domain Dedication

   Use at your oun risk!
*/

define int(x)
{

# Integer part of x

    auto os,r
    os=scale; scale=0
```

```
    r=x/1
    scale= os
    return (r)
}

define cbrt(x)
{

# Cube root of x

    return (e(l(x)/3))
}

define knott2(r0, y0, alpha)
{

/*
    Square root following Cargill G. Knott steps

    See example of use in file sr200703.bc
        use: $ sr200703.bc |bc -l knott.bc
*/
    auto so, div

    so = scale; /* Store old scale value */
    scale = 1

    a = 10*y0
    div = 100*r0 + alpha/2
    print "New dividend: ",div/1,"\n"
    b = int(div/(a))
    tf = div -b*a -b^2/2
    if (tf<0){
        b=b-1;print "Revising down, b = ",b, "\n"
        tf = div -b*a -b^2/2
    }
    print "New root: ", a+b,", New half-remainder: ", tf/1
    print "\n=================\n\n"
    scale = so; /* restore old scale value */

    return
}
```

```
define knott3(r0, y0, alpha)
{

/*
    Cube root following Cargill G. Knott steps

    See example of use in file cr488931400152.bc
        use: $ cat cr488931400152.bc |bc -l knott.bc

*/
    auto so, div, ta, tb, tc, td, te

    so = scale; /* Store old scale value */
    scale = 0

    a = 10*y0
    div = 1000*r0 + alpha
    print "New dividend: ",div,"\n\n"

    ta = div/y0; rem1 = div % y0
    print "a) /a:   ", ta, "   rem1: ", rem1, "\n"
    tb = (10*ta)/3; rem2 = (10*ta) % 3
    print "b) /3:   ", tb, "   rem2: ", rem2, "\n"
    b = tb/(100*a)
    print "     b = ",b,"\n"
    tc = tb - b*(a+b)*100
    print "d)   :   ",tc,"\n"
    b = tb/(100*(a+b))
    print "     b = ",b,"\n"
    tc = tb - b*(a+b)*100
    print "d)   :   ",tc,"\n"
    if(b==10){
    /* Trick to avoid some problems */
        b = 9
        print "b: ",b,"\n"
        tc = tb - b*(a+b)*100
        print "d) tc:   ",tc,"\n"
    }
    td = tc*3 +rem2
```

```
    print "e) *3:   ",td,"\n"
    te = (td/10)*y0 +rem1
    print "f) *a:   ",te,"\n"
    tf = te - b^3
    print "g) -b^3: ",tf,"\n"
    print "\nNew root: ",(a+b)," New remainder: ",tf,"\n\n"
    print "=================\n\n"
    scale = so; /* restore old scale value */

    return
}
```

---

**Fichero: sr200703.bc**

Contiene ejemplo de raíz cuadrada ($\sqrt{200703}$). Copie el siguiente texto y péguelo en un fichero de texto con el nombre **sr200703.bc**; úselo de acuerdo a las instrucciones contenidas en el propio fichero.

---

```
/*
    Example: square root of 200703

        Use:
        $ cat sr200703.bc |bc -l knott.bc
    or
        $ bc -l knott.bc < sr200703.bc
*/

print "\nSquare root of ", 200703, " = ", sqrt(200703), "\n\n"

/*
    Decompose in pairs of digits (will be alpha): 20, 07, 03


    Initialize (first step)
*/
alpha = 20
    b = int(sqrt(alpha))
    r0 = alpha - b^2
    a = 0
    tf = r0/2
```

```
    print "First root: ", b, ", First half-remainder: ", tf, "\n"
    print "=================\n\n"

/*
    Main:
        Repeat for each pair of digits (alpha)...
*/

alpha =07
    mute=knott2(tf, a+b, alpha)
alpha =03
    mute=knott2(tf, a+b, alpha)
/*
    For additional digits continue with alpha = 00
*/
alpha =00
    mute=knott2(tf, a+b, alpha)
alpha =00
    mute=knott2(tf, a+b, alpha)
alpha =00
    mute=knott2(tf, a+b, alpha)
alpha =00
    mute=knott2(tf, a+b, alpha)
```

---

**Salida:**

---

```
Square root of 200703 = 447.99888392718122931160

First root: 4, First half-remainder: 2.00000000000000000000
==================

New dividend: 203.5
Revising down, b = 4
New root: 44, New half-remainder: 35.5
==================

New dividend: 3551.5
Revising down, b = 7
New root: 447, New half-remainder: 447.0
```

```
==================

New dividend: 44700.0
Revising down, b = 9
New root: 4479, New half-remainder: 4429.5
==================

New dividend: 442950.0
New root: 44799, New half-remainder: 39799.5
==================

New dividend: 3979950.0
New root: 447998, New half-remainder: 395998.0
==================

New dividend: 39599800.0
New root: 4479988, New half-remainder: 3759928.0
==================
```

---

#### Fichero **cr488931400152.bc**

Contiene ejemplo de raíz cúbica ($\sqrt[3]{488931400152}$). Copie el siguiente texto y péguelo en un fichero de texto con el nombre **cr488931400152.bc**; úselo de acuerdo a las instrucciones contenidas en el propio fichero.

---

```
/*
    Example: cube root of 488931400152

    Use:
        $ cat cr488931400152.bc |bc -l knott.bc
    or
        $ bc -l knott.bc < cr488931400152.bc
*/

print "\nCube root of ", 488931400152, " = ", cbrt(488931400152), "\n\
n"

/*
    Decompose in triplets (will be alpha): #   488, 931, 400, 152

    Initialize (first step)
```

```
*/

alpha = 488
    b = int(cbrt(alpha))
    r0 = alpha - b^3
    a = 0
    tf = r0
    print "First root: ", b, ", First remainder: ", r0, "\n"
    print "==================\n\n"

/*
    Main:
        Repeat for each triplet (alpha)...
*/

alpha = 931
    mute = knott3(tf, a+b, alpha)
alpha = 400
    mute = knott3(tf, a+b, alpha)
alpha = 152
    mute = knott3(tf, a+b, alpha)

/*
    For additional digits continue with alpha = 000
*/
```

---

**Salida:**

---

```
Cube root of 488931400152 = 7877.99999999999999999871

First root: 7, First remainder: 145
==================

New dividend: 145931

a) /a:   20847   rem1: 2
b) /3:   69490   rem2: 0
     b = 9
d)   :   -1610
```

```
     b = 8
d)    :   7090
e) *3:   21270
f) *a:   14891
g) -b^3: 14379

New root: 78 New remainder: 14379

==================

New dividend: 14379400

a) /a:   184351   rem1: 22
b) /3:   614503   rem2: 1
     b = 7
d)    :   63603
     b = 7
d)    :   63603
e) *3:   190810
f) *a:   1488340
g) -b^3: 1487997

New root: 787 New remainder: 1487997

==================

New dividend: 1487997152

a) /a:   1890720   rem1: 512
b) /3:   6302400   rem2: 0
     b = 8
d)    :   0
     b = 8
d)    :   0
e) *3:   0
f) *a:   512
g) -b^3: 0

New root: 7878 New remainder: 0

==================
```

# XX Raíces Cuadradas

## Teoría

Sea $x$ el número del que queremos obtener la raíz cuadrada $y = \sqrt{x}$; Consideremos su expansión decimal, por ejemplo: $x = 456.7890123$ y separemos sus dígitos en grupos de dos alrededor del punto decimal de la siguiente manera:

$$x = 456.7890123 = 4 \cdot 56.78 \cdot 90 \cdot 12 \cdot 30 \cdot 00 \cdot 00 \cdots$$

o, en otras palabras, definamos la secuencia de números enteros $\alpha_i$:

$$\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 56, \alpha_3 = 78, \alpha_4 = 90, \alpha_5 = 12, \alpha_6 = 30, \alpha_7 = 00, \cdots$$

y construyamos la secuencia $x_i$ recursivamente desde $x_0 = 0$

$$x_i = 100x_{i-1} + \alpha_i$$

y sea $y_i$ la parte entera de la raíz cuadrada de $x_i$

$$y_i = \lfloor \sqrt{x_i} \rfloor$$

es decir, $y_i$ es el entero más grande cuyo cuadrado no es mayor que $x_i$. Finalmente, llamemos restos a las diferencias

$$r_i = x_i - y_i^2 \geq 0$$

Para nuestro ejemplo tenemos:

| $i$ | $\alpha_i$ | $x_i$ | $y_i$ | $r_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 4 | 4 | 2 | 0 |
| 2 | 56 | 456 | 21 | 15 |
| 3 | 78 | 45678 | 213 | 309 |
| 4 | 90 | 4567890 | 2137 | 1121 |
| 5 | 12 | 456789012 | 21372 | 26628 |
| etc. | | | | |

Vemos que, por construcción, $x_i$ crece como $10^{2i}$ (dos dígitos más en cada paso), de hecho, la secuencia $x_i \cdot 10^{4-2i}$; es decir: (0, 400, 456, 456.78, 456.7890, etc.) tiende a $x$ $\left(x_i \cdot 10^{4-2i} \to x\right)$ o $x = \left(\lim_{i\to\infty} x_i \cdot 10^{4-2i}\right)$. Por comparación, $y_i$, como la parte entera de la raíz cuadrada de $x_i$, crece sólo como $10^i$ (un dígito más en cada paso). Como $y_i$ es el entero más grande cuyo cuadrado no es mayor que $x_i$ tenemos $r_i = x_i - y_i^2 \geq 0$ como arriba pero

$$x_i - (y_i + 1)^2 = x_i - y_i^2 - 2y_i - 1 < 0$$

por definición de $y_i$, o

$$r_i = x_i - y_i^2 < 2y_1 + 1$$

Multiplicando por $10^{4-2i}$ tenemos:

$$x_i \cdot 10^{4-2i} - (y_i \cdot 10^{2-i})^2 < (2y_i + 1) \cdot 10^{4-2i}$$

pero como $y_i$ crece sólo como $10^i$, el segundo término tiende a cero como $10^{-i}$. Con lo cual

$$x_i \cdot 10^{4-2i} - (y_i \cdot 10^{2-i})^2 \to 0$$

y $x_i \cdot 10^{4-2i} \to x$ con lo que tenemos:

$$y_i \cdot 10^{2-i} \to y = \sqrt{x}$$

Para otros números, los factores anteriores son: $10^{2k-2i}$ y $10^{ki}$, donde $k$ es el número de grupos de dos dígitos a la izquierda del punto decimal, negativo si el punto decimal precede grupos nulos antes de encontrar el primer grupo no nulo (por ejemplo, $k = -1$ para $x = 0.00456$, $k = -2$ para $x = 0.00000456$, etc.).

Ésta es la base de los métodos manuales tradicionales de obtener raíces cuadradas; sea con papel y lápiz o con ábaco.

# Procedimiento

Comenzamos con $i = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $r_0 = 0$.

## Primer dígito

**Tabla de cuadrados**

| $b$ | $b^2$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 4 |
| 3 | 9 |
| 4 | 16 |
| 5 | 25 |
| 6 | 36 |
| 7 | 49 |
| 8 | 64 |
| 9 | 81 |

Para $i = 1$ y $x_1 = \alpha_1$, es trivial encontrar $y_1$ tal que su cuadrado no exceda $x_1$ mediante el uso de la **tabla de cuadrados** de arriba que ya tenemos memorizada, dado que es solo un subconjunto de la tabla de multiplicar. En el caso del ejemplo, encontramos $y_1 = 2$.

## Dígitos siguientes

Para $i > 1$, tenemos $x_i = 100x_{i-1} + \alpha_i$, como definimos arriba, y tratamos de construir $y_i$ en la forma:

$$y_i = 10y_{i-1} + b$$

donde $b$ es un entero de un dígito de 0 a 9. Para obtenerlo, tenemos que elegir el mayor entero de 0 a 9 tal que:

$$x_i - y_i^2 = x_i - (10y_{i-1} + b)^2 \leq 0$$

o

$$x_i - (a + b)^2 \leq 0$$

si escribimos: $a = 10y_{i-1}$. Desarrollando el binomio anterior tendremos:

$$x_i - a^2 - 2ab - b^2 = 100x_{i-1} + \alpha_i - (10y_{i-1})^2 - 2ab - b^2 \leq 0$$

o lo que es lo mismo

$$100r_{i-1} + \alpha_i \geq 2ab + b^2 = (2a + b)b = (20y_{i-1} + b)b$$

El lado izquierdo de la expresión anterior puede verse simplemente como el resto anterior con el siguiente grupo de dos dígitos agregado a su derecha, y el paréntesis del último término como el doble de la raíz anterior con el dígito $b$ agregado a su derecha. En nuestro ejemplo, para $i = 2$ tenemos 56 a la izquierda y la expresión anterior es

$$56 \geq (40 + b)b$$

lo cual sólo es cierto para $b = 0$ o $b = 1$ por lo tanto, 1 es la siguiente cifra de nuestra raíz, pero ¿Cómo podemos proceder en el caso general sin tener que explorar sistemáticamente todas las posibilidades ($b = 0, 1, \cdots, 9$)?

Aquí, Knott [1886] distingue dos enfoques diferentes:

- **Preparar el divisor**
- **Preparar el dividendo**

que exploramos a continuación.

**Preparar el divisor**

Esto se corresponde con la expresión anterior:

$$100r_{i-1} + \alpha_i \geq (20y_{i-1} + b)b$$

y es la estrategia que se suele utilizar con papel y lápiz y también se puede implementar, por supuesto, sobre el ábaco. En la expresión anterior, si vemos la parte izquierda como dividendo y la expresión entre paréntesis de la derecha como divisor, $b$ es el primer dígito de la división:

$$b = (100r_{i-1} + \alpha_i)/(20y_{i-1} + b)$$

pero como aún no conocemos $b$, aproximamos la división usando sólo la parte principal del divisor

$$b = (100r_{i-1} + \alpha_i)/(20y_{i-1})$$

lo cual nos da una pista de cuál podría ser el valor de $b$, pero necesitamos:

1. Verificar que el valor así obtenido sea correcto o, en su caso, corregirlo al alza o a la baja según sea necesario.
2. Obtener el nuevo resto para preparar el cálculo del siguiente dígito de la raíz.

Ambos pasos requieren restar $(20y_{i-1}+b)b$; es decir, $20y_{i-1}b$ y $b^2$, de $100r_{i-1}+\alpha_i$; comprobando que el resultado no es negativo y es menor que $2y_i+1$ (de lo contrario, tendríamos que revisar $b$ al alza o a la baja). Tras sustraer estas dos cantidades en las condiciones indicadas, lo que nos queda es el nuevo resto $r_i$. Cabe señalar que, a medida que avanzamos en los cálculos ($i$ aumentando) $b$ es una contribución cada vez más pequeña al divisor $(20y_{i-1}+b)$; por lo que el proceso indicado arriba se parecerá cada vez más a una mera división.

Este es el método propuesto por Takashi Kojima en su segundo libro: *Advanced Abacus - Theory and Practice* [Kojima 1963], y que puede ver descrito en *Square roots as solved by Kojima* [Heffelfinger 2003] en la web de Totton heffelfinger, Obras a las que se remite al lector para explicaciones y ejemplos prácticos. Veamos aquí cómo se podría iniciar el cálculo en nuestro ejemplo: $x = 456.7890123$

**Preparando el divisor; primeros tres dígitos de $\sqrt{456.7890123}$;**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLM** | |
| 4567890123 | El radicando empieza en CD (primer grupo) |
| 2 | Primer dígito de la raíz en B |
| -4 | Restar el cuadrado de B del primer grupo |
| 2 567890123 | Resto nulo |
| 4 **56**7890123 | Doblar B. Agregar el siguiente grupo (56) al resto |
| 41 567890123 | 5/4≈1, probar 1 como siguiente dígito de la raíz |
| -4 | Continuar la división por 41, restar 1×41 de EF |
| -1 | |
| 41 157890123 | 15 nuevo resto |
| 42 157890123 | Doblar el segundo dígito de la raíz |
| 42 15**78**90123 | Unir el siguiente grupo (78) al resto |
| 423157890123 | 157/42≈3, probar 3 como siguiente dígito de la raíz |
| -12 | Continuar la división por 423, restar 3×423 de E-H |
| -06 | |
| -09 | |
| 423 30990123 | 309 nuevo resto |
| 426 30990123 | Doblar el tercer dígito de la raíz |
| 426 309**90**123 | Añadir el siguiente grupo (90) al resto |
| etc. | |

Como puede verse, el doble de la raíz va apareciendo a la izquierda del ábaco en sustitución del radicando/resto y los grupos de dos dígitos sin usar. Esto es contrario a lo que ocurre con el resto de operaciones elementales sobre el ábaco, donde **el resultado buscado** —no su doble— **reemplaza al operando** (o a uno de ellos). Esto puede haber sido una razón para que el método tradicionalmente preferido para obtener raíces cuadradas haya sido el de preparar el dividendo, donde veremos que la raíz aparece directamente sobre el ábaco y no su doble; pero en realidad existe otro motivo, de índole práctica, mucho más poderoso y que comentaremos más abajo, en la Conclusión de este capítulo.

Cabe mencionar aquí que el ábaco neperiano contaba con una tablilla especial rotulada **N2** para ayudar en el cálculo escrito de raíces cuadradas. En la figura de la derecha podemos ver el ábaco configurado para obtener la tercera cifra de la raíz del ejemplo, donde las varillas 4 y 2 representan el doble de la raíz obtenida previamente. Podemos ver que para **N** = 3, la cantidad a sustraer del resto es 1269 que "cabe" en el resto 1578; pero que para **N** = 4, la cantidad 1696 no cabría, lo cual indica que la siguiente cifra de la raíz es efectivamente un 3.

| N | 4 | 2 | $N^2$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0/4 | 0/2 | 0/1 |
| 2 | 0/8 | 0/4 | 0/4 |
| 3 | 1/2 | 0/6 | 0/9 |
| 4 | 1/6 | 0/8 | 1/6 |
| 5 | 2/0 | 1/0 | 2/5 |
| 6 | 2/4 | 1/2 | 3/6 |
| 7 | 2/8 | 1/4 | 4/9 |
| 8 | 3/2 | 1/6 | 6/4 |
| 9 | 3/6 | 1/8 | 8/1 |

Ábaco neperiano dispuesto para ayudar con el tercer dígito de la raíz del ejemplo

**Preparar el dividendo**

**Tabla de semi cuadrados**

| $b$ | $b^2/2$ |
|---|---|
| 1 | 0.5 |
| 2 | 2 |
| 3 | 4.5 |
| 4 | 8 |
| 5 | 12.5 |
| 6 | 18 |
| 7 | 24.5 |
| 8 | 32 |
| 9 | 40.5 |

Partimos de nuevo de la expresión:

$$100r_{i-1} + \alpha_i \geq (20y_{i-1} + b)b = 20y_{i-1}b + b^2$$

dividiéndola por 2

$$(100r_{i-1} + \alpha_i)/2 \geq 10y_{i-1}b + b^2/2$$

Esta expresión modificada nos permitirá obtener directamente en el ábaco la raíz cuadrada (no su doble) siguiendo prácticamente el mismo procedimiento anterior, sin más que mantener en nuestro instrumento los restos y grupos de dos dígitos sin usar divididos por 2. Como se puede ver en la expresión anterior, despreciando el término $b^2/2$ obtenemos una estimación de $b$ simplemente dividiendo el *semi resto* extendido: $(100r_{i-1} + \alpha_i)/2$ por la raíz anterior $y_{i-1}$ (de hecho,$10y_{i-1}$); tras lo cual, necesitamos nuevamente:

1. Verificar que el valor así obtenido sea correcto o, en su caso, corregirlo al alza o a la baja según sea necesario.
2. Obtener el siguiente semi resto para preparar el cálculo del siguiente dígito de la raíz.

Esto se hace restando $10y_{i-1}b$ así como $b^2/2$ del semi resto, para lo cual es conveniente memorizar la tabla de semi cuadrados de la derecha, comprobando que no obtenemos resultados negativos y que no podríamos revisar $b$ al alza.

Afortunadamente, dado que 2 es un divisor de nuestra base (10), las fracciones decimales de la tabla de semi cuadrados tienen una expresión finita; lo que no sucederá cuando intentemos extender este procedimiento a raíces cúbicas y tengamos que tratar con tercios de cubos. Según Knott, esto hace que las raíces cúbicas sean un problema que no se adapta bien al tratamiento con ábaco.

# Ejemplos

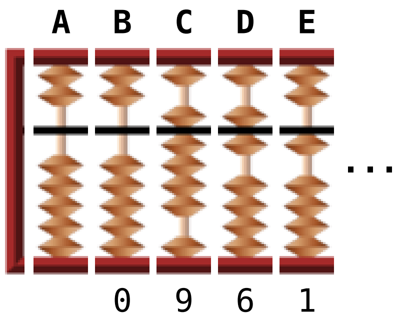
Aquí se presentan tres ejemplos; para ver ejemplos adicionales consulte el apartado Otras lecturas y especialmente el de Recursos externos a continuación.

## Raíz cuadrada de 961

En este ejemplo tenemos dos grupos de dos cifras: 09 y 61. El primer grupo nos informa que el primer dígito de la raíz es 3.

Hay dos formas de comenzar en el ábaco con las raíces cuadradas:

- Alineando los grupos a la izquierda desde la columna **B** y usando la división tradicional para obtener el semi-resto.

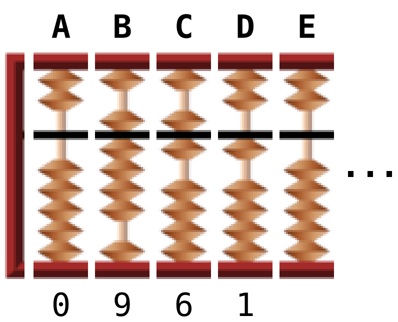



Esta es la forma que aparece en libros antiguos y también la utilizada en el **Tutor de raíz cuadrada de Murakami con Kijoho** (véase Recursos externos más abajo).

**Usando división tradicional para obtener el semi resto**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDE** | |
| 0961 | Alinear el radicando con **B** |
| 30961 | Poner el primer dígito de la raíz en **A** |
| -9 | restar el cuadrado del primer dígito de la raíz (9) |
| 30061 | |
| 30305 | Dividir el resto B-E por 2 (división tradicional) |

- Alinear los grupos a la izquierda del ábaco desde la columna **A** y usar la división División por 2 in situ para obtener el semi resto.



Esta forma es algo más rápida

**Usando división *in situ***

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDE** | |
| 0961 | Alinear el radicando con **A** |
| -9 | Restar el cuadrado del primer dígito de la raíz (9) |
| 0061 | |
| 0305 | División in situ por 2 del resto |
| 30305 | Anotar el primer dígito de la raíz en **A** |

A partir de aquí coincide el estado del ábaco y podemos continuar:

**Continuación**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDE** | |
| 30305 | |
| +1 | Dividir el semi resto B-E por 3. (revisar **B** al alza) |
| -3 | |
| 31005 | |
| -05 | restar b^2/2 =0.5 de D |
| 31000 | Semi resto nulo, ¡Hecho! La raíz es 31 |
| 31 | La raíz es 31 |

## Raíz cuadrada de 998001

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFG** | |
| 998001 | Radicando en **A-F** |
| -81 | Restar 9^2=81 de primer grupo en **AB** |
| 188001 | |
| 940005 | Dividir el resto por 2 in situ in situ |
| 9940005 | Entrar el primer dígito de la raíz (9) en A |
| 9930005 | B: Regla: 9/9>9+9 |
| -405 | Restar 9^2/2=40.5 de D |
| 9989505 | |
| 9987505 | C: Regla: 8/9>8+8 |
| -72 | Restar CxB=72 de DE |
| 998T305 | Revisar C al alza |
| +1 | |

| | |
|---|---|
| -99 | |
| 9990405 | |
| -405 | Restar 9^2/2=40.5 from F |
| 9990000 | El resto es 0. ¡Hecho! |
| 999 | Raíz: 999 |

## Raíz de 456.7890123

Nuestro ejemplo anterior ...

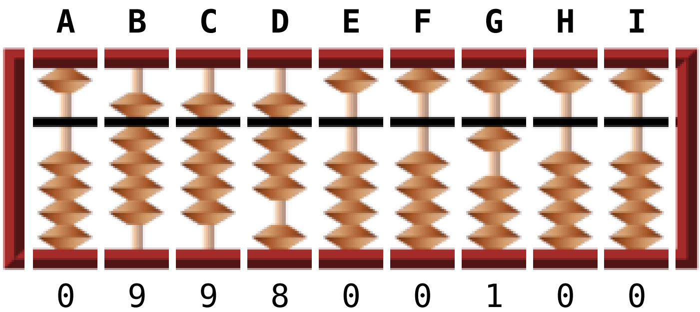
**Primeros 4 dígitos de** $\sqrt{456.7890123} = 21.3726229\cdots$

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKL** | |
| 04567890123 | Radicando con los pares de dígitos alineados en AB, CD, etc. |
| -4 | Restar 2^2 del primer grupo |
| 567890123 | |
| 2839450615 | Dividir por 2 el resto y los demás pares de dígitos |
| 2 2839450615 | Escribir la primera cifra de la raíz en A |
| +1 | Dividir BCD por A (revisar al alza B) |
| -2 | |
| -05 | Restar B^2/2=0.5 de D |
| 21 789450615 | |
| +3 | Dividir CDEF por AB (revisar al alza C tres veces) |
| -6 | |
| -3 | |
| -45 | Restar C^2/2=4.5 de F |
| 213154950615 | |
| 213554950615 | Dividir DEFGH por ABC. D: Rule 1/2>5+0 |
| -5 | Restar DxB=5 de EF |
| -15 | Restar DxC=15 de FG |
| 213548450615 | |
| +2 | revisar al alza D dos veces |
| -426 | |
| 213705850615 | |
| -245 | Restar 7^2/2=24.5 de H |
| 21370560F615 | Raíz hasta ahora: 21.37 |
| etc. | etc. |

La raíz 2137… ( de hecho, 21.37…) va apareciendo a la izquierda. En este punto, si divide E-L (semi resto y demás dígitos) por A-D (la raíz hasta ahora) obteniendo 4 cifras del cociente (tantas como actualmente tiene la raíz) tendrá los dígitos: 2623; es decir, aproximadamente las siguientes cuatro cifras de la raíz (21.372623). Vea el capítulo: Operaciones Abreviadas para detalles.

## Usando el método moderno

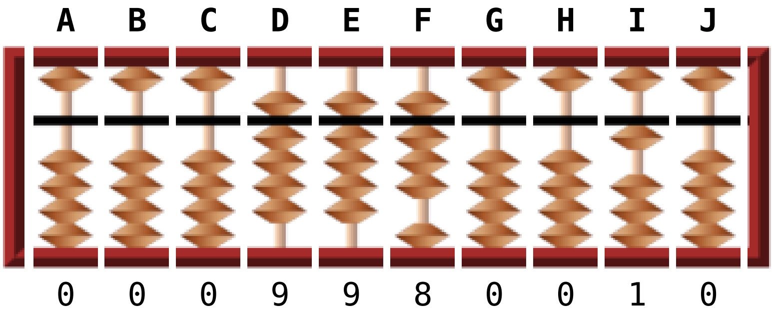
Por supuesto es posible obtener las raíces cuadradas siguiendo la estrategia de preparar el dividendo haciendo uso de la división moderna (**MD**) y de la disposición moderna de la división (**MDA**) [Siqueira & Heffelfinger 2004]; sólo hay que dejar una columna adicional a la izquierda del radicando para ello. Por ejemplo:




**Raíz cuadrada de 998001; división moderna con MDA**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGH** | |
| 998001 | Radicando alineado en B-G |
| -81 | Restar 9^2 del primer grupo en BC |
| 188001 | |
| 9188001 | Inscribir primer dígito de la raíz en A |
| 9 940005 | Dividir ***in situ*** B-G por 2 |
| 99940005 | Probar 9 como segunda cifra de la raíz (inscribir en B) |
| -81 | Restar B×A=9×9=81 de CD |
| 99130005 | |
| -405 | Restar B^2/2=9^2/2=40.5 de DE |
| 99 89505 | |
| 99989505 | Probar 9 como tercera cifra de la raíz |
| -81 | Restar C×A=9×9=81 de DE |
| -81 | Restar C×B=9×9=81 de EF |
| 999  405 | |
| -405 | Restar C^2/2=9^2/2=40.5 de FG |
| 999 | (semi)resto nulo. ¡Hecho! la raíz es 999 |

También podemos usar la división normal por 2 en lugar de *in situ*; observe el nuevo alineamiento del radicando:




| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHI** | |
| 998001 | Radicando alineado en D-I |
| -81 | Restar 9^2 del primer grupo en DE |
| 188001 | |
| 9 188001 | Inscribir primer dígito de la raíz en A |
| 9 940005 | Dividir normalmente D-I por 2 |
| 99940005 | Probar 9 como segunda cifra de la raíz (inscribir en B) |
| ... | etc. |

# Conclusión

El método explicado como: *Preparar el dividendo* se conoce como 半九九法 ( *Hankukuhou* en japonés, *Bàn jiǔjiǔ fǎ* en chino) lo que podemos traducir libremente aquí como *Método del semi resto* y es, con mucho, el más conveniente, al menos por dos razones:

1. La raíz, y no su doble, reemplaza al operando (radicando) como en el resto de operaciones básicas con el ábaco.
2. (La más importante) Dado que dividir por números que comienzan con 1 es incómodo, pensemos en lo siguiente:

   El primer grupo de dos dígitos tendrá un valor entre 1 y 99 y determinará la primera cifra de la raíz cuadrada. Para valores del primer par entre 25 y 99 (75% de los casos), el primer dígito de la raíz estará comprendido entre 5 y 9 y su doble empezará por uno. Por lo tanto, si usamos el método *preparar el divisor*, estaremos dividiendo por números que comienzan con 1 en el 75% de los casos. Por el contrario, si utilizamos el método *preparando el dividendo*, sólo en el caso de que el primer grupo sea 1, 2 o 3 (3% de los casos) tendremos que dividir por números que empiecen por uno.

Por lo que no hay duda de que el método del “medio resto” o de “preparación del dividendo” nos será más confortable en la mayoría de casos.

# Otras lecturas


- Siqueira, Edvaldo. «Kato Fukutaro's Square Roots». *算盤 Abacus: Mystery of the Bead*. Archivado desde el original, el 1 de Agosto de2021.

- Treadwell, Steve (2015). «Improvements to the Kato Method for Finding Square Roots». 算盤 *Abacus: Mystery of the Bead*. Archivado desde el original, el 1 de Agosto de2021.
- Square root (半九九法); the traditional way using traditional division in jccAbacus


# Recursos externos

•**Tutor de raíz cuadrada con Kijoho (división tradicional)** de M. Murakami, una aplicación de JavaScript que puede ejecutar directamente en su navegador o descargar a su computadora desde su repositorio en GitHub. Sólo hay que ingresar el radicando en el pequeño cuadro de entrada de la izquierda y presionar repetidamente el botón **`Next`** en la pantalla para asistir al desarrollo del proceso paso a paso. Con esto se pueden generar tantos ejemplos o ejercicios como se desee.

# XXI Raíces Cúbicas

## Teoría

Sea $x$ el número del que queremos obtener la raíz cúbica $y = \sqrt[3]{x}$; Consideremos su expresión decimal, por ejemplo: $x = 456.7890123$ y separemos sus dígitos en grupos de tres alrededor del punto decimal de la siguiente manera:

$$x = 456.7890123 = 456.789 \cdot 012 \cdot 300 \cdot 000$$

o, en otras palabras, definamos la secuencia de enteros $\alpha_i$

$$\alpha_1 = 456, \alpha_2 = 789, \alpha_3 = 012, \alpha_4 = 300, \alpha_5 = 000 \cdots$$

y construyamos la secuencia $x_i$ recursivamente desde $x_0 = 0$

$$x_i = 1000x_{i-1} + \alpha_i$$

y sea $y_i$ la parte entera de la raíz cúbica de $x_i$

$$y_i = \lfloor \sqrt[3]{x_i} \rfloor$$

es decir, $y_i$ es el entero más grande cuyo cubo no es mayor que $x_i$. Finalmente, llamemos restos a las diferencias.

$$r_i = x_i - y_i^3 \geq 0$$

Para nuestro ejemplo tenemos:

| $i$ | $\alpha_i$ | $x_i$ | $y_i$ | $r_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 456 | 456 | 7 | 113 |
| 2 | 789 | 456789 | 77 | 256 |
| 3 | 012 | 456789012 | 770 | 256012 |
| 4 | 300 | 456789012300 | 7701 | 78119199 |
| 5 | 000 | 456789012300000 | 77014 | 6949021256 |
| ... | | | | |

Veamos que, por construcción, $x_i$ crece como $10^{3i}$ (tres dígitos más en cada paso), de hecho, la secuencia $x_i 10^{3-3i}$, es decir: 0, 400, 456, 456.789, 456.789012, etc. tiende a $x$ ($x_i 10^{3-3i} \to x$). En comparación, $y_i$, como la parte entera de la raíz cúbica de $x_i$, crece solo como $10^i$ (un dígito más en cada paso). Como $y_i$ es el entero más grande cuyo cubo no es mayor que $x_i$, tenemos $r_i = xi - y_i^3 \geq 0$ como arriba, pero

$$x_i - (y_i + 1)^3 = x_i - y_i^3 - 3y_i^2 - 3y_i - 1 < 0$$

por definición de $y_i$, o

$$r_i = x_i - y_i^3 < 3y_i^2 + 3y_i + 1$$

multiplicando por $10^{3-3i}$

$$x_i \cdot 10^{3-3i} - (y_i \cdot 10^{1-i})^3 < (3y_i^2 + 3yi + 1) \cdot 10^{3-3i}$$

pero como $y_i$ crece sólo como $10^i$, el segundo término tiende a cero como $10^{-i}$

$$x_i \cdot 10^{3-3i} - (y_i \cdot 10^{1-i})^3 \to 0$$

y $x_i \cdot 10^{3-3i} \to x$ de forma que tenemos

$$y_i \cdot 10^{1-i} \to y = \sqrt[3]{x}$$

Para otros números, los factores de arriba son: $10^{3k-3i}$ y $10^{k-i}$, donde $k$ es el número de grupos de tres cifras a la izquierda del punto decimal, negativo si éste es seguido por grupos 000 (ej. $k = 0$ para $x = 0.00456$, $k = -2$ para $x = 0.000000456$, etc.).

Esta es la base de los métodos tradicionales de obtener la raíz cúbica manualmente.

# Procedimiento

Empezamos con $i = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $r_0 = 0$.

## Primer dígito

**Tabla de cubos**

| $b$ | $b^3$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 8 |
| 3 | 27 |
| 4 | 64 |
| 5 | 125 |
| 6 | 216 |
| 7 | 343 |
| 8 | 512 |
| 9 | 729 |

Para $i = 1$, $x_1 = \alpha_1$ es trivial encontrar $y_1$ tal que su cubo no exceda $x_1$ usando la tabla de arriba que puede retenerse en la memoria fácilmente. En el caso del ejemplo es $y_1 = 7$.

## Dígitos siguientes

Para $i > 1$, tenemos $x_i = 1000x_{i-1} + \alpha_i$ tal y como se ha dicho arriba y tratamos de construir $y_i$ en la forma:

$$y_i = 10y_{i-1} + b$$

donde $b$ es un número entero de un dígito que va de 0 a 9. Para obtenerlo tenemos que elegir el dígito más grande de 0 a 9 de modo que:

$$x_i - y_i^3 = x_i - (10y_{i-1} + b)^3 \geq 0$$

o

$$x_i - (a + b)^3 \geq 0$$

si escribimos $a = 10y_{i-1}$. Desarrollando el cubo del binomio tenemos

$$x_i - a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3 = 1000x_{i-1} + \alpha_i - (10y_{i-1})^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3 \geq 0$$

o

$$1000r_{i-1} + \alpha_i \geq 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (3a^2 + 3ab + b^2)b$$

El lado izquierdo de la expresión anterior puede verse simplemente como el resto anterior con el siguiente grupo de tres dígitos añadido. Si evaluamos el término de la derecha para cada valor de $b$ y lo comparamos con el término de la izquierda, tenemos:

| $b$ | $(3a^2 + 3ab + b^2)b$ | $1000r_{i-1} + \alpha_i$ | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | ≤ 113789 | |
| 1 | 14911 | ≤ 113789 | |
| 2 | 30248 | ≤ 113789 | |
| 3 | 46017 | ≤ 113789 | |
| 4 | 62224 | ≤ 113789 | |
| 5 | 78875 | ≤ 113789 | |
| 6 | 95976 | ≤ 113789 | |
| 7 | 113533 | ≤ 113789 | ⬅ |
| 8 | 131552 | > 113789 | |
| 9 | 150039 | > 113789 | |

y está claro que la siguiente cifra de nuestra raíz es un 7 pero, ¿cómo podemos proceder en el caso general sin tener que explorar sistemáticamente todas las posibilidades ($b = 0, 1, \cdots, 9$) ?

Aquí, Knott [1886] distingue dos estrategias:

- **Preparar el divisor**
- **Preparar el dividendo**

que pasamos a discutir.

### Preparando el divisor

Esto se corresponde con la expresión anterior:

$$1000r_{i-1} + \alpha_i \geq 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (3a^2 + 3ab + b^2)b$$

y es la estrategia que se suele utilizar con papel y lápiz y también se puede implementar, por supuesto, sobre el ábaco. En la expresión anterior, si vemos la parte izquierda como dividendo y el paréntesis como divisor, $b$ es el primer dígito de la división:

$$b = (1000r_{i-1} + \alpha_i)/(3a^2 + 3ab + b^2)$$

pero como aún no conocemos $b$, lo aproximamos usando sólo la parte principal del divisor

$$b = (1000r_{i-1} + \alpha_i)/(3a^2) = (1000r_{i-1} + \alpha_i)/(300y_{i-1}^2)$$

Esto nos da una idea de cuál podría ser el valor de $b$, pero necesitaremos:

1. Verificar que el valor así obtenido sea correcto o, en su caso, revisarlo al alza o a la baja según sea necesario.
2. Obtener el nuevo resto para preparar el cálculo del siguiente dígito de la raíz.

Puede verse un ejemplo en el blog *Diario de Tone* [Tone 2017], ver también Método moderno abajo.

### Preparando el dividendo

Empezando de nuevo con

$$1000r_{i-1} + \alpha_i \geq (3a^2 + 3ab + b^2)b = 3a\left(a + b + \frac{b}{3a^2}\right)b$$

preparamos el dividendo dividiendo $1000r_{i-1} + \alpha_i$ (el siguiente grupo de tres dígitos agregado al resto anterior) por $3a$

$$(1000r_{i-1} + \alpha_i)/3a \geq \left(a + b + \frac{b}{3a^2}\right)b$$

Como de costumbre, no conocemos $b$ y no podemos evaluar el paréntesis de la derecha, pero podemos obtener una pista sobre el valor de $b$ aproximando el paréntesis por su parte principal $a$

$$\left(a + b + \frac{b}{3a^2}\right) \approx a$$

y utilizándolo como divisor de prueba, de forma que

$$b \approx (1000r_{i-1} + \alpha_i)/3a^2$$

Tras lo cual, necesitamos nuevamente:

1. Verificar que el valor así obtenido sea correcto o, en su caso, corregirlo hacia al alza o a la baja según sea necesario.
2. Obtener el siguiente resto para preparar la obtención del siguiente dígito de la raíz evaluando $1000r_{i-1} + \alpha_i - 3a^2b - 3ab^2 - b^3$.

Tenga en cuenta que:

- El divisor 3 está involucrado en el dividendo preparado y esto conduce a fracciones decimales no finitas.
- La división por $a$ no sólo empeora lo anterior, sino que también hace que el dividendo preparado sea específico para el paso actual, ya que el valor de $a$ evoluciona con el cálculo de las diferentes cifras de la raíz.

Esto no ocurría en el cálculo de raíces cuadradas y, como consecuencia, el proceso de obtención de raíces cúbicas es mucho más complicado y requiere un ciclo complejo de fases de preparación-restauración del dividendo que, siguiendo a Knott, podemos representar mediante el siguiente esquema :

| Fase | Operación |
|---|---|
| **a** | Dividir por . |
| **b** | Dividir por 3. |
| **c** | Obtener como el primer dígito de la división de lo anterior por . |
| **d** | Restar (Equivalente a restar y de ). |
| **e** | Multiplicar por 3. |
| **f** | Multiplicar por . |
| **g** | Restar . |

En nuestro ejemplo ($x = 456.7890123$), usando la división tradicional (**TD**) y el arreglo de división tradicional (**TDA**) como lo hace Knott, trabajando los dos primeros dígitos:

**Raíz cúbica de 456.7890123**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFG** | |
| 456789 | Primer grupo del radicando alineado con B |
| -343 | Restar 7^3=343 del primer grupo |
| 113789 | Primer resto |
| 7113789 | 7 en A como primer dígito de la raíz; considerar el segundo grupo |
| 7113789 | a) Dividir B-G por 7 **(nota 1)** |
| 7162554 | b) Dividir B-G por 3 **(nota 2)** |
| 7541835 | c) Dividir B por A (una cifra de cociente) **(nota 3)** |
| 7751835 | d) Restar 7*7=49 de CD |
| 77 2835 | e) Multiplicar CDEF por 3. Sumar 3×283 a CDEFG |
| 77 854 | f) Multiplicar CDEF por 7. Sumar 7×85 a CDEFG |
| 77 599 | |
| -343 | g) Restar 7^3=343 a CDEFG |
| 77 256 | Nuevo resto |
| ... | Raíz obtenida hasta ahora: 7.7 |

**Notas**

1. No es necesario extender la división por 7 más allá del grupo actual de tres dígitos. El 4 en **G** es un resto de división que significa 4/7.

2. Lo mismo puede decirse de la división por 3. Se realiza hasta la columna **F** y el resto (1) se agrega temporalmente a la columna **G**. El valor (5) en dicha columna es un extraño híbrido que significa 1/3 y 4/7. No importa, esta extraña situación será corregida en los pasos **e** y **f**.
3. Aquí, al aplicar la regla 5/7>7+1, ya hemos restado $b \cdot a$, por lo que en el paso siguiente (**d**) sólo nos falta restar $b^2$

#### Método moderno

Miembros del Soroban & Abacus Group han modificado la técnica descrita por Knott para adaptarla al uso del ábaco y método modernos [Baggs & Heffelfinger 2011]. El resultado es supuestamente más rápido a expensas de ser menos compacto y requerir un ábaco con más varillas para almacenar datos intermedios. También se pierde la sencillez de tener el resultado sustituyendo directamente al radicando.

También puede encontrar una compilación de métodos modernos para raíces cuadradas y cúbicas en Tone Nikki (とね日記) [Tone 2017] de un blogger japonés (el nombre del autor no parece estar disponible).

## Ejemplos de raíces cúbicas

Los siguientes ejemplos se presentan utilizando la división tradicional (**TD**) y la disposición de división tradicional (**TDA**). Las fases del ciclo de preparación-restauración de dividendos están etiquetadas con a), b), etc. como se ha hecho en el ejemplo previo.

### Raíz cúbica de 157464

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFG** | Raíz cúbica de 157464 |
| 157464 | Ingrese 157464 alineando el primer grupo (157) con B |
| -125 | Restar 5^3=125 de BCD |
| 32464 | Primer resto: 32 |
| 5 32464 | Poner 5 en A como primer dígito de la raíz y considerar el segundo grupo |
| 5 32464 | a) Dividir C-F por 5 (G contendrá el resto de la división) |
| 5 64924 | b) Dividir C-F por 3 |
| 5216404 | c) Dividir B por 5 |
| 5416404 | d) Restar 4^2=16 de CD |
| 54   404 | e) Multiplicar 40x3 en EFG (sumándolo al resto en G) |
| 54   124 | f) Multiplicar 12x5 en EFG |
| 54    64 | g) Restar 4^3=64 de FG |
| 54 | Resto 0; ¡Hecho! La raíz es: 54 |

Claramente, si el resto es cero y no hay más grupos (no nulos) para agregar, el número es un cubo perfecto y hemos acabado. La raíz es 54.

### Raíz cúbica de 830584

Otro ejemplo similar al anterior (el radicando es el cubo de un número de dos cifras).

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFG** | Raíz cúbica de 830584 |
| 830584 | Introducir 830584 alineando el primer grupo con B |
| -729 | Restar 9^3=729 de BCD |
| 101584 | 101: Primer resto |
| 9101584 | Poner 9 en A como primer dígito de la raíz y considerar el siguiente grupo second group |
| 9101584 | a) Dividir C-F por 9 (G contendrá el resto) |
| 9112871 | b) Dividir C-F por 3 |
| 9376232 | c) Dividir B por 9 (A) |
| 9416232 | d) Restar 4^2=16 de CD |
| 94  232 | e) Multiplicar 23x3 en EFG (sumando el resto en G) |
| 94   71 | f) Multiplicar 07x9 en EFG |
| 94   64 | g) Restar 4^3= 64 de FG |
| 94 | resto 0; ¡Hecho! La raíz es: 94 |

La raíz es 94.

Es tal vez conveniente que el lector practique ejemplos como este antes de intentar obtener más cifras de la raíz. Al final de este capítulo se incluye una tabla de cubos de números de dos cifras que le pueden ser de ayuda para este fin.

### Raíz cúbica de 666

En este caso, el radicando no es un cubo perfecto, la raíz es un número irracional con infinitos decimales comprendido entre 8 y 9. Empezamos calculando las dos primeras cifras de la raíz.

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFG** | Raíz cúbica de 666 |
| 666 | Introducir 666 en BCD |
| + | (columna unidad) |
| -512 | Restar 8^3=512 de BCD |
| 154 | Primer resto |
| 8154 | Poner 8 en A como primer dígito de la raíz |
| 8154000 | Añadir 000 como nuevo grupo |
| 8154000 | a) Dividir B-F por 8 (A) |
| 8192500 | b) Dividir B-F por 3 |

| | |
|---|---|
| 8641662 | c) Dividir B por 8 (A) |
| 8781662 | d) Restar B^2=49 de CD |
| 8732662 | e) Multiplicar C-F por 3 en C-G |
| 87 9800 | f) Multiplicar C-F por 8 (A) en C-G |
| 87 7840 | g) Restar B^3=343 de EFG |
| 87 7497 | Raíz hasta ahora: 8.7, resto: 7.497 |
| + | (columna unidad) |

Ahora continuamos usando Operaciones Abreviadas. Necesitamos dividir el resto (7497) por tres veces el cuadrado de la raíz actual ($3 \cdot 87^2 = 22707$)

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLM** | |
| 87 7497 | |
| 87 7497------ | Elevar 87 al cuadrado (binomio de Newton) |
| +49 | 7^2 |
| +112 | 2*7*8 |
| +64 | 8^2 |
| 87 7497  7569 | multiplicar por 3 (sumando el doble) |
| +14 | |
| +10 | |
| +12 | |
| +18 | |
| 87 7497 22707 | Dividir 7497/22707, obteniendo dos cifras del cociente |
| ... | |
| 8733 | Raíz: 8.733 (Compárese a: $\sqrt[3]{666} = 8.7328917$) |

## Raíz cúbica de 237176659 (tres cifras)

Tenemos tres grupos: 237, 176 y 659.

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJ** | Raíz cúbica de 237176659 |
| 237176659 | Primer grupo alineado con B |
| -216 | Restar 6^3=216 de BCD |
| 21176659 | 21: Primer resto |
| 21176659 | Anotar 6 en A como primer dígito de la raíz y considerar el segundo grupo |
| 6 21176659 | a) Dividir B-F por 6 (A) |
| 6 35292659 | b) Dividir B-F por 3 |

| | |
|---|---|
| 6117633659 | c) Dividir B por 6 (A) |
| 6157633659 | d) Restar B^2=1 de CD |
| 6156633659 | e) Multiplicar C-F por 3 en C-G |
| 6116992659 | f) Multiplicar C-F por 8 (A) en C-G |
| 6110196659 | g) Restar B^3=343 de EFG |
| 6110195659 | Raíz hasta ahora 61, resto 10195 |
| ---------- | |
| 6110195659 | Considerar el tercer grupo |
| 6110195659 | a) Dividir C-H por 61 (AB) |
| 6116714158 | b) Dividir C-H por 3 |
| 6155713678 | c) Dividir C por 61 (AB) |
| 6190813678 | d) Restar CxC=81 de EF |
| 619   3678 | e) Multiplicar D-H por 3 en D-I |
| 619   1158 | f) Multiplicar D-H por 61 (AB) en D-J |
| 619    729 | g) Restar C^3=729 de HIJ |
| 619    000 | ¡Hecho! Resto nulo |
| ---------- | La raíz es: 619 |

El número es un cubo perfecto.

## Raíz cúbica de 110591 (ocho cifras)

Este número es: $110591 = 48^3 - 1$.

El primer triplete, 110, está entre 64 y 125, por lo que la raíz cúbica de 110 591 estará entre 40 y 50. Por tanto, el primer dígito de la raíz es 4

**Primer dígito:**

**Raíz cúbica de 110591: Primer dígito**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFG** | |
| 110591 | Primer triplete alineado con B |
| -64 | Restar 6^3=216 de BCD |
| 46591 | 46: Primer resto |
| 46591 | Inscribir 4 en A como primera cifra de la raíz y considerar el segundo grupo |
| 4 46591 | ¡Primer dígito listo! |

**Segundo dígito:**

**Raíz cúbica de 110591: Segundo dígito**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFG** | |
| 4 46591 | a) Dividir B-F por 4 (A) |
| 4116473 | b) Dividir B-F por 3 |
| 4388234 | c) Dividir B por 4 (A) |
| 4868234 | d) Restar BxB=64 de CD |
| 48 4234 | e) Multiplicar C-F por 3 en C-G |
| 48 1273 | f) Multiplicar C-F por 4 (A) en C-G |
| 48  511 | g) **¡No se puede restar 8^3=512 de EFG!** Marcha atras (ver nota al final) |
| 48  511 | -f) Dividir C-F por 4 (A) |
| 48 1273 | -e) Dividir C-F por 3 |
| 48 4234 | -d) sumar 8x8=64 a CD |
| 4868234 | -c) Revisar B a la baja |
| -1 | |
| +4 | |
| 47T8234 | d) Restar BxB=49 de CD (T=10) |
| 4759234 | e) Multiplicar C-F por 3 en C-G |
| 4717773 | f) Multiplicar C-F por 4 (A) en C-G |
| 47 7111 | g) Restar B^3=343 de EFG |
| 47 6768 | ¡Segundo dígito listo! Resto: 6768 |

**Tercer dígito:**

**Raíz cúbica de 110591: Tercer dígito**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJ** | |
| 47 6768000 | Añadir 000 al resto anterior |
| 47 6768000 | a) Dividir C-H por 47 (AB) |
| 4714400000 | b) Dividir C-H 3 |
| 4748000000 | c) Dividir C por 47 (AB) |
| 4795700000 | d) Restar C^2=81 de EF |
| 4794890000 | e) Multiplicar D-H por 3 en D-I |
| 4792298300 | f) Multiplicar D-H por 47 (AB) en D-J |
| 479 689490 | g) Restar C^3=729 de HIJ |
| 479 688761 | ¡Tercer dígito listo! resto: 688761 |

**Cuarto dígito:**

**Raíz cúbica de 110591: Cuarto dígito**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLM** | |
| 479 688761000 | Añadir 000 al resto anterior |
| 479 688761000 | a) Dividir D-J por 479 |
| 4791437914194 | b) Dividir D-J por 3 |
| 4794793046394 | c) Dividir D por 479 1d |
| 4799482046394 | d) Restar 9^2=81 de GH |
| 4799473946394 | e) Multiplicar E-J por 3 en E-K |
| 4799142184194 | f) Multiplicar E-J por 479 en E-M |
| 4799 68106330 | g) Restar -D^3=729 de KLM |
| 4799 68105601 | ¡Cuarto dígito listo! resto: 68105601 |

Ahora terminamos el cálculo usando Operaciones Abreviadas. Necesitamos dividir el resto (68105601) por tres veces el cuadrado de la raíz actual (4799). Los primeros cuatro dígitos del resultado se añaden a continuación de los ya obtenidos; por ejemplo:

**Raíz cúbica de 110591:**
**Continuación usando operaciones abreviadas**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLM** | |
| 4799 68105601 | Dividir E-M por 4799 |
| 479914191623 | Dividir E-M por 4799 |
| 47992957204 | Dividir E-M por 3 |
| 47999857 | Compárese este resultado con |

Como podemos ver, hemos obtenido un resultado con 7 cifras correctas.

**Nota**

Encontramos arriba que con la raíz 48 no podíamos restar $8^3 = 512$, o nos encontraríamos con un resto negativo (-1). Esto puede parecer desafortunado, ya que nos obligó a deshacer parte del trabajo y corregir la nueva cifra de la raíz a la baja, pero en la práctica lo que encontramos es un resultado afortunado: el pequeño resto negativo (-1) nos indica que 48 es una excelente aproximación (por exceso) a la raíz, abriendo una nueva forma de resolver el problema. De hecho, lo que tenemos es:

$$110591 = 48^3 - 1 = 48^3 \left(1 - \frac{1}{48^3}\right)$$

o

$$\sqrt[3]{110591} = 48\sqrt[3]{1 - \frac{1}{48^3}}$$

donde podemos usar:

$\sqrt[3]{1-a} \approx 1 - \frac{a}{3}$

de forma que

$\sqrt[3]{110591} = 48\sqrt[3]{1 - \frac{1}{48^3}} \approx 48\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 48^3}\right) = 48 - \frac{1}{3 \cdot 48^2} = 47.999855324$

compárese con $\sqrt[3]{110591} = 47.999855323638$. ¡De este modo podríamos haber logrado una gran precisión con poco esfuerzo!

# De la aritmética elemental al análisis numérico

El ábaco se estudia actualmente como un arte tradicional o como un medio para desarrollar habilidades numéricas y cognitivas en general, no se espera de él que, en la era de las computadoras, se use como calculadora para resolver problemas del mundo real. Pero si ese fuera el caso y tuviéramos que resolver una gran cantidad de raíces cúbicas (algo inusual), es posible que desee pasar de los métodos tradicionales, o la aritmética básica, a los métodos modernos de análisis numérico y probar el Método de Newton-Raphson. Puede encontrar una adaptación de este método al ábaco en el capítulo Método de Newton para Raíces Cuadradas, Cúbicas y Quintas de la sección sobre Técnicas avanzadas.

# Apéndice: Cubos de números de dos dígitos

El método tradicional de obtener raíces cúbicas con el ábaco es complejo. No es mala idea entrenarse obteniendo el segundo dígito de la raíz antes de intentar pasar al tercero o cuarto. Para esto puede serle útil la siguiente tabla de cubos de números de dos cifras no terminados en cero.

**Cubos de números de dos cifras**

| | +1 | +2 | +3 | +4 | +5 | +6 | +7 | +8 | +9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **10** | 1331 | 1728 | 2197 | 2744 | 3375 | 4096 | 4913 | 5832 | 6859 |
| **20** | 9261 | 10648 | 12167 | 13824 | 15625 | 17576 | 19683 | 21952 | 24389 |
| **30** | 29791 | 32768 | 35937 | 39304 | 42875 | 46656 | 50653 | 54872 | 59319 |
| **40** | 68921 | 74088 | 79507 | 85184 | 91125 | 97336 | 103823 | 110592 | 117649 |
| **50** | 132651 | 140608 | 148877 | 157464 | 166375 | 175616 | 185193 | 195112 | 205379 |
| **60** | 226981 | 238328 | 250047 | 262144 | 274625 | 287496 | 300763 | 314432 | 328509 |
| **70** | 357911 | 373248 | 389017 | 405224 | 421875 | 438976 | 456533 | 474552 | 493039 |
| **80** | 531441 | 551368 | 571787 | 592704 | 614125 | 636056 | 658503 | 681472 | 704969 |
| **90** | 753571 | 778688 | 804357 | 830584 | 857375 | 884736 | 912673 | 941192 | 970299 |

Ejemplo: $\sqrt[3]{250047} = 60 + 3 = 63$

# Cuarta Parte
## Técnicas Avanzadas

# XXII Operaciones Abreviadas

## Introducción

Este capítulo es un tanto especial en el sentido de que su contenido no es específico del ábaco, sino que se trata de un recurso para acortar operaciones aritméticas tanto en el cálculo escrito como con ábaco. Lo incluimos en este libro porque, a lo largo del mismo, hacemos un uso esporádico de estas operaciones abreviadas.

Esta cuestión puede encontrarse en algunos libros de aritmética de la era anterior a la informática. La motivación es la siguiente. Supongamos que medimos el lado de un cuadrado y obtenemos $l = 864\,\mathrm{mm}$ y queremos calcular su área $S$

$$S = l^2 = l \cdot l = 864 \cdot 864 = 746496\,\mathrm{mm}^2$$

un resultado con 6 dígitos, pero si hemos medido el lado del cuadrado con una cinta métrica que solo aprecia milímetros, lo que podemos decir es que el valor del lado está entre $863.5$ y $864.5$, es decir:

$$l = 864.0 \pm 0.5\,\mathrm{mm}$$

De modo que $S$ será un valor entre $863.5^2 = 745632.25$ y $864.5^2 = 747360.25$. Esto significa que solo conocemos con certeza los dos primeros dígitos del resultado $S$ (74) y que el tercer dígito probablemente sea un 6; el resto de los dígitos de la multiplicación no tienen sentido (decimos que no son significativos) y no debemos incluirlos en nuestro resultado. Deberíamos escribir:

$$S = 746 \cdot 10^3\,\mathrm{mm}^2 = 7.46 \cdot 10^5\,\mathrm{mm}^2$$

siendo 746 las cifras significativas de nuestro resultado. Entonces, si sólo tres de las seis cifras del producto $864 \cdot 864$ son significativas, ¿por qué calcular las seis?

Para eso están las **operaciones abreviadas**.

Cabe decir que el razonamiento anterior se extiende a la división, raíces etc. En líneas generales, *un resultado no tiene más cifras significativas que el menor número de ellas entre los operandos*; por ejemplo, si dividimos un número con 8 cifras significativas por otro que sólo tiene 2, el resultado tiene sólo 2 dígitos significativos y sería un trabajo estéril obtener 8 dígitos del cociente.

En este capítulo seguiremos los ejemplos que aparecen en ***Matemáticas*** de Antonino Goded Mur [Goded Mur 1945] (en adelante simplemente *Matemáticas* ), un pequeño manual que formaba parte de la colección: **Compendios CHOP**, que tan popular fue durante parte del siglo XX en España. Veremos cómo se pueden hacer estas operaciones abreviadas con el ábaco.

## Multiplicación

En *Matemáticas* se propone el siguiente procedimiento para la multiplicación:

**Multiplicación**

Se escribe el producto del multiplicando por la primera cifra del multiplicador,
se escribe debajo el producto del multiplicando amputado de su última cifra por la segunda del multiplicador,
se escribe debajo el producto del multiplicando amputado de sus dos últimas cifras por la tercera del multiplicador
y así sucesivamente

Proponiendo el ejemplo $6665 \times 1375$ y la siguiente forma escrita de realizarlo por comparación a la multiplicación normal:

**Ejemplo**

| | |
|---|---|
| 6665<br>x 1375<br>———<br>33325<br>46655<br>19995<br>6665<br>———<br>9164375 | 6665<br>x 1375<br>——<br>6665<br>1999<br>466<br>33<br>——<br>9163 |
| Operación normal | Operación abreviada |

Lo importante a considerar aquí es que, de todos los productos parciales que hemos de sumar para obtener el producto:

**Productos parciales de 6665x1375**

| × | $6 \cdot 10^3$ | $6 \cdot 10^2$ | $6 \cdot 10^1$ | $5 \cdot 10^0$ |
|---|---|---|---|---|
| $1 \cdot 10^3$ | $6 \cdot 10^6$ | $6 \cdot 10^5$ | $6 \cdot 10^4$ | $5 \cdot 10^3$ |
| $3 \cdot 10^2$ | $18 \cdot 10^5$ | $18 \cdot 10^4$ | $18 \cdot 10^3$ | $15 \cdot 10^2$ |
| $7 \cdot 10^1$ | $42 \cdot 10^4$ | $42 \cdot 10^3$ | $42 \cdot 10^2$ | $35 \cdot 10^1$ |
| $5 \cdot 10^0$ | $30 \cdot 10^3$ | $30 \cdot 10^2$ | $30 \cdot 10^1$ | $25 \cdot 10^0$ |

debemos tomar en consideración aquellos que tienen potencias de 10 elevadas, los situados por encima de la diagonal en gris, retener sólo el primer dígito de los de dicha diagonal y olvidarnos de los que están por debajo. De esta forma, ahorraremos cierto trabajo.

En el ábaco, este problema se puede resolver de varias maneras; por ejemplo, adaptando la multiplicación moderna:

**6666x1375 Multiplicación moderna**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLM** | |
| 6665   1375 | Planteamiento |
| +330 | Sumar 5×66 a K-M |
| -5 | Borrar J |
| 6665   137 330 | |
| +4662 | Sumar 7×666=4662 a J-M |
| -7 | Borrar I |
| 6665   13 4992 | |
| +19995 | Sumar 3×6665=19995 a I-M |
| -3 | Borrar H |
| 6665   1 24987 | |
| +6665 | Sumar 1×6665=6665 a H-L |
| -1 | Borrar G |
| 6665     91637 | Resultado |
| 6665     9164 | Resultado redondeado a 4 cifras |

e incluso la multiplicación tradicional, borrando primero el dígito del multiplicando y luego sumando los productos parciales desplazados una columna a la izquierda respecto al caso anterior

**6666x1375 Multiplicación tradicional**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKL** | |
| 6665   1375 | Planteamiento |
| -5 | Borrar J |
| +330 | Sumar 5×66 a J-L |
| 6665   137330 | |
| -7 | Borrar I |
| +4662 | Sumar 7×666=4662 a I-L |
| 6665   134992 | |
| -3 | Borrar H |
| +19995 | Sumar 3×6665=19995 a H-L |
| 6665   124987 | |
| -1 | Borrar G |
| +6665 | Sumar 1×6665=6665 a G-K |
| 6665    91637 | Resultado |
| 6665    9164 | Resultado redondeado a 4 cifras |

En todos los casos, tendremos que ser cuidadosos con la posición de la varilla unidad; no olvidemos que $6666 \times 1375 = 9164375$ y que el resultado obtenido en el ábaco: $9164$ es en realidad: $9164 \cdot 10^3 = 9.164 \cdot 10^6$.

También podemos hacer lo mismo usando métodos de multiplicación que comienzen trabajando con las cifras de la izquierda del multiplicando (véase el capítulo Métodos Especiales de Multiplicación); por ejemplo, utilizando la *"Multiplicación que comienza con los dígitos más altos del multiplicador y el multiplicando"* de Kojima, explicada en su segundo libro [Kojima 1963], donde dice: *"Como la operación comienza multiplicando los primeros dígitos del multiplicador y el multiplicando, es conveniente para las aproximaciones"*; es decir, justamente se adapta a nuestro problema. También podemos probar la **multiplicación multifactorial** [Heffelfinger & Tejón 2005] (Véase: Multiplicación multifactorial) o similar; por ejemplo:

**6666x1375 Multiplicación comenzando por la izquierda**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLM** | |
| 6665     1375 | Planteamiento |
|    .        . | Varilla unidad |
|         -1 | Borrar J |
|      +6665 | Sumar 1×6665 a G-J |
| 6665  6665375 | |
|      +18 | Sumar 3×6 a GH |
|       +18 | Sumar 3×6 a HI |
|        +18 | Sumar 3×6 a IJ |
|          -3 | Borrar K |
|         +15 | Sumar 3×5 a JK |
| 6665  8664575 | |
| 666   8664575 | Borrar D |
|       +42 | Sumar 7×6 a HI |
|        +42 | Sumar 7×6 a IJ |
|         +42 | Sumar 7×6 a JK |
|           -7 | Borrar L |
| 666   91307 5 | |
| 66    91307 5 | Borrar C |
|        +30 | Sumar 5×6 a IJ |
|         +30 | Sumar 5×6 a JK |
|            -5 | Borrar M |
| 66    91637 | Resultado |
|    .        . | Varilla unidad |
|       9164 | Resultado redondeado a 4 cifras |

# División

En Matemáticas se propone el siguiente procedimiento para la división:

**División**

El primer dígito del cociente se encuentra como de costumbre,
el resto se divide por el divisor sin su último dígito,
el nuevo resto por el divisor sin sus dos últimos dígitos
y así sucesivamente.

**Ejemplo**

```
4567.8       |95.62
 743.00      ──────
  73.660      47.77
   6.7250
    .0326
```

Operación normal

```
4567.8    |95.62
 743.0    ──────     |95.6
  73.8     4         ─────    |95
   7.3                 7      ───     |9
    .1                         7      ──
                                       8
```

Operación abreviada

Como puede verse, la secuencia potencialmente infinita de pasos de división larga, en los que en cada uno se obtiene una nueva cifra del cociente, se reemplaza por una secuencia finita de divisiones por un divisor que se reduce en un dígito de cada vez y en la que obtenemos un solo dígito del cociente. Podemos llevar a cabo esta secuencia de divisiones usando el método de dividir que prefiramos; por ejemplo, usando la división tradicional (**TD**) y la disposición tradicional de la división (**TDA**):

**4567.8/95.62**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJ** | |
| 9562 45678 | |
| .      . | Columna unidad |
| -4 | Regla: 4/9>4+4 |
| +44 | |
| 9562 49678 | |
| -20 | Restar 4x5 de GH |
| -24 | Restar 4x6 de HI |
| -8 | Restar 4x2 de IJ |
| 9562 47430 | |
| -7 | Regla: 7/9>7+7 |
| +77 | |
| 9562 47130 | |

| | |
|---|---|
| -35 | Restar 7x5 de HI |
| -42 | Restar 7x6 de IJ |
| 9562 47738 | |
| -7 | Regla: 7/9>7+7 |
| +77 | |
| 9562 47708 | |
| -35 | Restar 7x5 de IJ |
| 9562 47773 | |
| -7 | Regla: 7/9>7+7 |
| +77 | |
| 9562 47770 | |
| +1 | Revisar al alza |
| -7 | |
| 9562 47783 | |
| .    . | Columna unidad |

# Raíz cuadrada

***Matematicas***

Se sigue el método corriente hasta haber rebasado la mitad de las cifras de la raíz, obteniéndose las siguientes dividiendo el resto seguido de los periodos no empleados por el duplo de la raíz hallada, seguida de tantos ceros como periodos se han agregado

**Ejemplo**

Raíz cuadrada de 123456789

```
  __________
\/123456789| 11111
           |-------
 -1        |
 --        |
  023      | 21x1
  -21      |
  ---      |
   0245    | 221x1
   -221    |
   ----    |
    02467  | 2221x1
    -2221  |
    -----  |
     024689| 22221x1
     -22221|
     ------|
      02468|
```

Operación normal

```
  ______
\/12345 |111
        |---
 -1     |
 --     |
  023   |21x1
  -21   |
  ---   |
   0245 |221x1
   -221 |
   ---- |
    024 |  -->   246789|22200
                       ------
                  24789 11
                   2589
                _________
 ==>   \/123456789 = 11111
```

Operación abreviada

Quizás la forma más sencilla de justificar esta forma de abreviar la raíz cuadrada sea la siguiente:

Si $a$ es un valor aproximado de la raíz de $A$, entonces podemos escribir

$$\sqrt{A} = a + b = a\,(1 + (b/a))$$

donde $b$ es una pequeña corrección a $a$ y el cociente $(b/a)$ será una cantidad mucho menor que 1: $(b/a) \ll 1$. Entonces podemos escribir:

$$A = a^2\,(1 + (b/a))^2 = a^2\left(1 + 2(b/a) + (b/a)^2\right)$$

pero si $(b/a) \ll 1$, entonces $(b/a)^2 \ll (b/a)$ y despreciando este término podemos escribir:

$$A \approx a^2\,(1 + 2(b/a))$$

o bien

$$A - a^2 = r = 2ab$$

donde $r$ es el residuo que nos queda tras calcular $a$; por lo que tenemos la aproximación utilizada en el método abreviado:

$$b = \frac{r}{2a}$$

Si consideramos que, por ejemplo, hemos determinado $a$ con cinco cifras, entonces $(b/a) < 10^{-5}$ y $(b/a)^2 < 10^{-10}$, lo que justifica que al despreciar este último termino podamos calcular $b$ con cinco cifras; es decir que el método abreviado nos permita doblar la precisión de la raíz ya obtenida con una simple división.

Lo anterior también puede justificarse de varias otras formas, por ejemplo, utilizando el desarrollo en serie de Taylor o el método de Newton de resolución de ecuaciones; lo cual es quizás interesante de mencionar por lo que comentaremos después sobre las raíces cúbicas.

A continuación ilustramos el proceso utilizando el *método del medio resto* (半九九法, *hankukuhou* en japonés) como se explica en el capítulo: Raíces Cuadradas, que requiere cambiar el resto a su mitad y doble de la raíz a simplemente la raíz en el párrafo de *Matemáticas* anterior. Tenga en cuenta que la segunda fase, la división, se puede hacer en forma de división abreviada ya que solo tiene sentido obtener un número limitado de cifras de su cociente. Como consecuencia, obtener las últimas cifras de la raíz cuesta cada vez menos trabajo y tiempo por lo que podemos llamar a esta división la **fase acelerada** de la extracción de raíces.

### Ejemplo

**Raíz cuadrada de 123456789 usando 半九九法 (*hankukuhou*) y división moderna**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJ** | |
| 123456789 | Problema planteado como de costumbre |
| 23456789 | Restar el cuadrado de 1 del primer grupo |
| 117283945 | Dividir el resto por 2 in *situ* |
| 1 117283945 | Anotar 1 como primer dígito de la raíz en A |
| 11 17283945 | Nuevo dígito de la raíz 1 en B (revisión al alza) |
| -1 | |
| -5 | Restar la mitad del cuadrado de 1 de D |
| 11 12283945 | |
| 111 2283945 | Nuevo dígito de la raíz 1 en C (revising up) |
| -11 | |
| -5 | Restar la mitad del cuadrado de 1 de F |
| 111 1233945 | Ahora comienza la segunda fase o **fase acelerada** |
| +1 | Dividir 123 por 111 |
| -111 | |
| 1111 123945 | |
| +1 | Dividir 12 into 11 |
| -11 | |
| 11111 13945 | Listo ¡ahora tenemos 5 dígitos de la raíz! |

# Raíz cúbica

***Matemáticas***

Se sigue el método corriente hasta rebasar la mitad de las cifras de la raíz, obteniéndose las siguientes dividiendo el resto seguido de los periodos no usados por el triple del cuadrado de la raíz seguido de tantos ceros como periodos se han agregado.

**Ejemplo**

<table>
<tr>
<td><pre>
 3_____________
\/1234567890123|10727
               ------
</pre></td>
<td><pre>
 3_____________
\/1234567890123|107
     9524      ----

9524890123 |3434700
           --------
2655490       27
 2512001
</pre></td>
</tr>
<tr>
<td>Operación normal</td>
<td>Operación abreviada</td>
</tr>
</table>

Al igual que en el caso de la raíz cuadrada, la aproximación utilizada aquí se puede justificar del siguiente modo:

Si $a$ es un valor aproximado de la raíz cúbica de $A$, entonces podemos escribir

$$\sqrt[3]{A} = a + b = a\,(1 + (b/a))$$

donde $b$ es una pequeña corrección a $a$ y el cociente $(b/a)$ será una cantidad mucho menor que 1: $(b/a) \ll 1$. Entonces podemos escribir:

$$A = a^3\,(1 + (b/a))^3 = a^3\left(1 + 3(b/a) + 3(b/a)^2 + (b/a)^3\right)$$

pero si $(b/a) \ll 1$, entonces $(b/a)^3 \ll (b/a)^2 \ll (b/a)$ y despreciando estos dos términos podemos escribir:

$$A \approx a^3\,(1 + 3(b/a))$$

o bien

$$A - a^3 = r = 3a^2 b$$

donde $r$ es el residuo que nos queda tras calcular $a$; por lo que tenemos la aproximación utilizada en el método abreviado:

$$b = \frac{r}{3a^2}$$

que también nos permite doblar la precisión de la raíz cúbica ya obtenida con una división.

Al igual que en el caso de la raíz cuadrada, esta operación abreviada también se puede justificar de varias maneras, incluyendo el método de Newton que, por cierto y con mucho, es la mejor forma de obtener raíces cúbicas con el ábaco; si bien no es una técnica tradicional, es mucho más eficiente que cualquier método tradicional y, si lo usamos, podemos decir que en cierto sentido estamos usando un *método abreviado* desde el principio (véase el capítulo: Método de Newton para Raíces Cuadradas, Cúbicas y Quintas. Pero veamos un ejemplo utilizando un método tradicional: la raíz cúbica de 666. Seguimos aquí el método explicado por Cargill G. Knott [Knott 1886] (capítulo: Raíces Cúbicas).

Obviamente, la raíz cúbica de 666 está entre 8 y 9 por estar el radicando en el rango 512-728.

**Raíz cúbica de 666**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFG** | |
| 666 | Entrar 666 en BCD |
| + | (Columna unidad) |
| -512 | Restar 83=512 de BCD |
| 154 | |
| 8154 | Entrar 8 en A. Dividir B-F por 8 (A) |
| 8192500 | Dividir B-F por 3 |
| 8641662 | Dividir B por 8 (A) |
| 8781662 | Restar B2=49 de CD |
| 8732662 | Multiplicar C-F por 3 en C-G |
| 87 9800 | Multiplicar C-F por 8 (A) en C-G |
| 87 7840 | Restar B3=343 de EFG |
| 87 7497 | Raíz: 8.7, Resto: 7.497 |

Así que hemos obtenido 8.7 como raíz hasta ahora, dejando un resto de 7.497. Para aplicar el atajo necesitamos formar el divisor $3 \times 8.7^2$; Usaremos el binomio de Newton para formar el cuadrado y lo multiplicaremos por tres, sumando el doble del valor obtenido.

**Uso del método abreviado**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLM** | |
| 87 7497 | Elevando al cuadrado 8.7 |
| +49 | |
| -112 | |
| +64 | |
| 87 7497 7569 | Multiplicarlo por 3 |
| +14 | |
| +10 | |
| +12 | |

| | |
|---|---|
| +18 | |
| 87 7497 22707 | Dividir 7.497 por 227.07 (¡La división puede ser abreviada!) |
| 8733----22707 | obteniendo sólo dos cifras del cociente |

Alternativamente, también se puede dividir dos veces por 8.7 y luego por 3 para obtener el mismo resultado. Compare el resultado 8.733 con $\sqrt[3]{666} = 8,7328917\cdots$

## Otras abreviaturas útiles

Lo que sigue es otro tipo de cálculo abreviado o aproximaciones completamente diferentes de lo anterior pero que pueden resultar útiles en la práctica. Todas estas expresiones son consecuencia del teorema de Taylor.

Para $a, b \ll 1$

- $(1 \pm a)(1 \pm b) \approx 1 \pm a \pm b$
  - ej: $1.005 \times 0.996 \approx 1.001$
- $(1 \pm a)/(1 \pm b) \approx 1 \pm a \mp b$
- $(1 \pm a)^n \approx 1 + n \cdot a$
  - ej: $1.005^3 \approx 1.015,\ 0.995^3 \approx 0.985$
- $\sqrt[n]{1 \pm a} \approx 1 \pm a/n$
  - ej:$\sqrt[3]{1.006} \approx 1.002$
- $1/(1 \pm a) \approx 1 \mp a$
  - ej: $1/1.003 \approx 0.997,\ 1/0.997 \approx 1.003$
- $1/(1 \pm a)^n \approx 1 \mp n \cdot a$
- $\ldots$

# XXIII Números Negativos

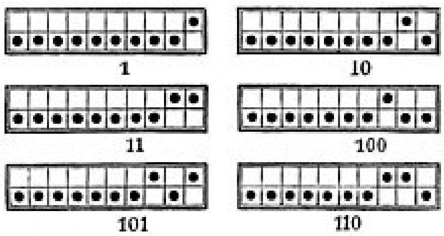
## Introducción

La totalidad de los problemas aritméticos pueden resolverse usando sólo números positivos, por lo que podríamos decir que, en cierto sentido los números negativos son innecesarios. Tal vez sea esta la razón por la cual, a pesar de ser conocidos desde la antigüedad (aparecen por primera vez en Los nueve capítulos sobre el arte matemático de la Dinastía Zhou hace más de 2000 años, y después en las obras de matemáticos hindúes, persas, árabes e incluso en la de Fibonacci), no hayan sido muy apreciados por los matemáticos occidentales hasta el siglo XIX. Pero es indudable que los números negativos permiten dar una solución más sencilla a algunos problemas y ensanchan enormemente el pensamiento matemático, preparando el camino del resto de generalizaciones que han conformado las Matemáticas Modernas. En el ábaco pasa lo mismo, podemos prescindir totalmente de los números negativos pero nos ayudarán a resolver más fácil y elegantemente algunos problemas y, sobre todo, nos darán una nueva visión, más profunda, de la Aritmética de Cuentas.

Además de las cuestiones tratadas en este capítulo, encontrará otros usos de los números negativos en el ábaco en el capítulo Métodos Especiales de División.

## Método de los complementos

### Aritmética con número fijo de dígitos




*Ábaco binario mostrando los números 1 al 6 y su codificación en binario*

Un ábaco y una computadora se parecen mucho... En el corazón de la computadora, su CPU, la unidad de aritmética y lógica ALU contiene varios registros, memorias ultrarápidas destinadas a almacenar transitoriamente los operandos sobre los que se va a trabajar, que son equivalentes, desde el punto de vista lógico, a ábacos binarios (o de tipo 0+1) como el de la figura. Tales ábacos, con sólo una cuenta por columna, pueden representar sólo un dígito binario, 0 o 1 (bit) en cada una de ellas y el número de columnas o bits de cada registro es limitado, siendo 8, 16, 32 y 64 valores frecuentemente usados en el diseño de procesadores. El tamaño de los registros de una CPU limita el tamaño de los números que puede manejar directamente, lo cual no suele ser un problema si ese tamaño resulta suficiente para las aplicaciones. Nuestro ábaco es semejante a un registro en el sentido de que también está limitado a un número fijo de columnas, aunque cada columna pueda contener un dígito decimal en lugar de binario; al igual que los registros de la CPU, sólo podremos trabajar en nuestro ábaco con números de hasta cierto tamaño.

Tiene pues sentido plantearse algunas cuestiones relativas a los cálculos aritméticos con un número limitado de dígitos; por ejemplo, si estamos limitados a cinco dígitos podemos representar hasta el número 99999, pero ¿qué pasaría si sumamos este número a sí mismo?

$$99999 + 99999 = 199998 = 1\{99998\}$$

Se produciría un desbordamiento y el **1** inicial *no cabe* en nuestro ábaco o registro, sólo los dígitos entre llaves serían almacenados o *visibles* para nosotros:

$$99999 + 99999 = 99998$$

Esto es claramente una barbaridad, y un problema para nosotros si tenemos que sumar tales números con una lógica (tamaño de registro o de ábaco) tan limitada; pero a su vez nos abre la posibilidad de codificar números negativos donde en principio sólo podríamos tener números positivos y también la posibilidad de reducir la sustracción a la adición (lo cual a nosotros no nos interesa para nada pues ya sabemos restar con nuestro ábaco, pero ha ahorrado mucha circuitería en muchas CPUs). La clave va a consistir en el concepto de **número complementario de $n$ cifras**.

## Definición de complemento de *n* dígitos

Dado un número entero $x$, positivo y menor que $10^n$, definamos su **complemento de $n$ dígitos** ${}^nC_x$ como:

$${}^nC_x$$

por ejemplo, el complemento de cinco dígitos de 147

$${}^5C_{147} = 10^5 - 147 = 100000 - 147 = 99853$$

## Complemento del complemento de *n* dígitos

Reordenando la expresión:

$${}^nC_x = 10^n - x$$

como

$$x = 10^n - {}^nC_x$$

tenemos que

$$x = {}^nC_{{}^nC_x}$$

es decir, el complemento del complemento de un número es el número de partida; para el ejemplo:

$${}^5C_{{}^5C_{147}} = {}^5C_{99853} = 10^5 - 99853 = 147$$

## Obtención

Frecuentemente, en lo que sigue, tendremos necesidad de obtener mentalmente el complemento de un número. Hacer la resta mentalmente puede ser complicado por los acarreos (tomar prestado), así que la forma más sencilla de obtener ${}^{n}C_x$ será:

$$ {}^{n}C_x = 10^n - x = (10^n - 1) - x + 1 $$

ya que número $(10^n - 1)$ es $999 \cdots 9$ con exactamente $n$ dígitos; por ejemplo, $(10^5 - 1) = 99999$, y esto nos que permite restarle $x$ dígito a dígito sin acarreos

$$ {}^{5}C_{147} = 10^5 - 147 = 100000 - 147 = 99999 - 147 + 1 = 99999 - 00147 + 1 = 99853 $$

y la resta se puede hacer dígito a dígito sin acarreo

$$ 99999 - 00147 = [9-0][9-0][9-1][9-4][9-7] = 99852 $$

o lo que es igual, sustituyendo cada dígito del número por su **complemento a 9** dado en la tabla

**Complementos a 9**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 - 9 | 1 - 8 | 2 - 7 | 3 - 6 | 4 - 5 |

(que nos sería práctico memorizar) con lo que sólo nos falta añadir la unidad para obtener el complemento al número dado de dígitos

$$ {}^{5}C_{147} = 99999 - 00147 + 1 = 99852 + 1 = 99853 $$

Recíprocamente, si tenemos el complemento de un número, podremos conocer éste como el complemento del complemento dado en virtud de lo dicho en el apartado anterior; ejemplo, dado ${}^{5}C_x = 99853$:

$$ x = {}^{5}C_{{}^{5}C_x} = {}^{5}C_{99853} = 99999 - 99853 + 1 = 00146 + 1 = 147 $$

Esto es otra operación que tendremos que hacer mentalmente con frecuencia y que resolveremos usando los complementos a nueve.

## Ampliación y reducción de un complemento

Supongamos conocido ${}^{n}C_x$ y que deseamos obtener ${}^{m}C_x$ con $m > n$; por definición:

$$ \begin{aligned} {}^{m}C_x &= 10^m - x = \\ &= 10^m - 10^n + 10^n - x = 10^m - 10^n + {}^{n}C_x = \\ &= (10^{m-n} - 1) \cdot 10^n + {}^{n}C_x \end{aligned} $$

pero $(10^{m-n} - 1) \cdot 10^n$ es el número formado por $m - n$ nueves seguido de $n$ ceros, por lo que obtendremos ${}^{m}C_x$ simplemente anteponiendo $m - n$ nueves a ${}^{n}C_x$ ; por ejemplo:

$$ {}^{7}C_{147} = 9900000 + {}^{5}C_{147} = 9900000 + 99853 = 9999853 $$

De la misma forma, podemos reducir un complemento si podemos suprimir nueves de la izquierda del mismo; por ejemplo, dado ${}^{5}C_{147} = 99853$ , tendremos:

$$^3C_{147} = {}^5C_{147} - 99000 = 99853 - 99000 = 853$$

## Significado

Si sumamos un número a su complemento obtenemos:

$$x + {}^nC_x = x + 10^n - x = 10^n$$

por lo que ${}^nC_x$, en esta aritmética de $n$ dígitos se comporta como el **inverso aditivo** de $x$; es decir, como $-x$, siendo, por tanto, una representación operativa de éste ya que el $1$ inicial de $10^n$ queda fuera del rango de dígitos *que vemos* y sólo nos serán visibles los $n$ ceros que le siguen. En el ejemplo de cinco dígitos:

$$147 + {}^5C_{147} = 147 + 10^5 - 147 = 100000 = 1\{00000\}$$

donde sólo vemos los dígitos entre llavecitas y por lo tanto el resultado es $0$.

## Suma de un complemento

Sea $y > x$, calculemos la suma $y + {}^nC_x$; por definición de ${}^nC_x$ será:

$$y + {}^nC_x = 10^n + (y - x) > 10^n$$

pero como sólo nos resultan visibles $n$ cifras, perdemos de vista el acarreo y el resultado que obtenemos es:

$$y + {}^nC_x = y - x$$

Ejemplo: con $n = 5$, $y = 200$ y $x = 147$:

$$200 + {}^5C_{147} = 200 + 99853 = 1\{00053\} = 53 = 200 - 147$$

Supongamos ahora que $y < x$:

$$y + {}^nC_x = 10^n + (y - x) = 10^n - (x - y) = {}^nC_{x-y} < 10^n$$

no hay desbordamiento por acarreo y lo que obtenemos es el complementario de la diferencia $y - x$ cambiada de signo.

Ejemplo: con $n = 5$, $y = 100$ y $x = 147$:

$$100 + {}^5C_{147} = 100 + 99853 = 00053 = 99953 = {}^5C_{47} < 10^5$$

Es decir, en ambos casos el proceso nos resuelve la diferencia $y - x$, pero nos presenta el resultado de un modo u otro dependiendo de si este es positivo o negativo (o lo que es lo mismo, si hay acarreo o no). En el caso de una computadora, esto requerirá reservar un bit del registro para dicho acarreo; en nuestro caso, una columna adicional del ábaco o bien, en la mayoría de las ocasiones, llevar la cuenta mentalmente de si hay o no acarreo.

Esta es la forma en la que la sustracción puede reducirse a la adición, tal y como mencionamos más arriba.

# Ábacos y números negativos

A continuación veremos el modo de aplicar lo anterior sobre el ábaco con el fin de poder incluir números negativos en la *aritmética de cuentas*.

## El *otro lado* del ábaco

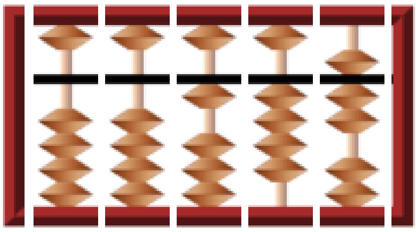
Empecemos por introducir el concepto de las dos *caras* o *lados* del ábaco y cómo leerlas.

### Complementos y el ábaco moderno

Ingresemos el número 147 alineado a la derecha en un ábaco moderno (tipo 4+1) de cinco columnas:

**147 en un 4+1**

A B C D E

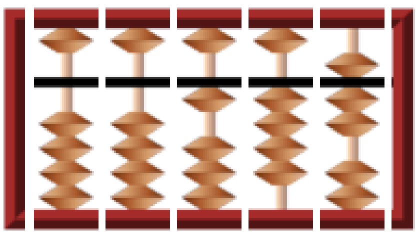


0 0 1 4 7

Interpretamos que la disposición de cuentas presentadas en la figura corresponde al número 147 en las columnas **CDE** sin más que sumar, para cada posición decimal (columnas o varillas), el valor atribuido a cada una de las **cuentas activadas**. Si hacemos lo mismo pero con las **cuentas desactivadas**, obtendremos 99852, número que se relaciona con el anterior en el sentido de que cada dígito ha sido sustituido por su **complemento a 9** (dado que que la suma del valor atribuido a todas las cuentas de una columna es nueve). Por tanto, y de acuerdo a lo tratado arriba, sólo nos faltaría sumar 1 al número así leído para conocer el complemento de 5 cifras del número 147 (${}^5C_{147} = 99853$ ). A falta de otra denominación, cuando hagamos esto diremos que hemos leído **el *Otro Lado* del ábaco** [Murakami 2019a]  como contrapuesto a la lectura **de *Este Lado* del ábaco**.

**Las dos lecturas del ábaco**

A B C D E

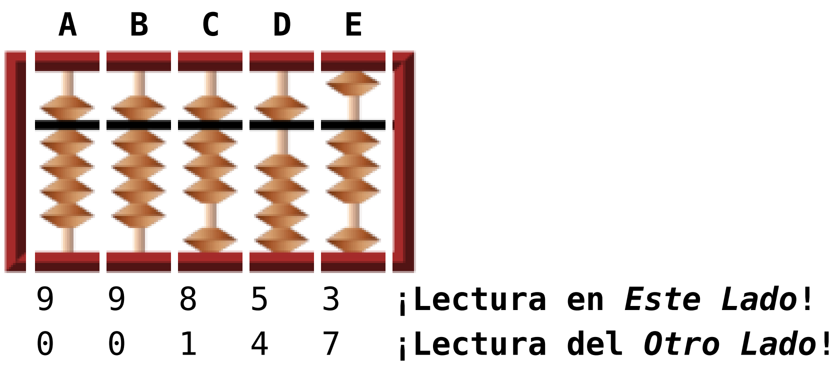


0 0 1 4 7 **¡Lectura en *Este Lado*!**
9 9 8 5 3 **¡Lectura del *Otro Lado*!**

También, limitando la lectura, habríamos podido determinar ${}^4C_{147} = 9853$ y ${}^3C_{147} = 853$.

Recíprocamente, si tenemos ${}^5C_{147} = 99853$ en nuestro ábaco, la lectura del otro lado nos dará su complemento que, como sabemos, es el número original $147$

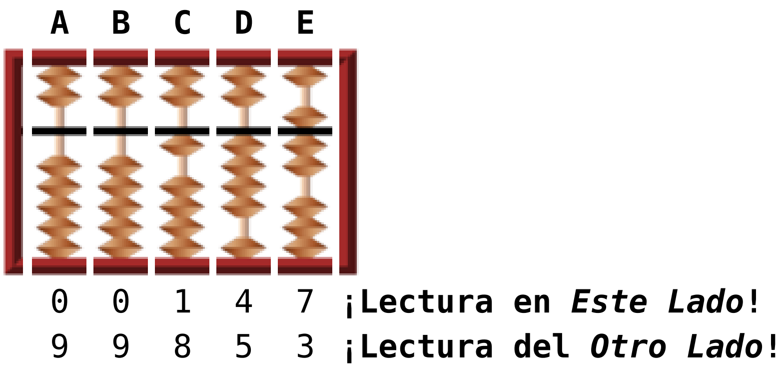
**99853 en un ábaco 4+1**




**Complementos y el ábaco tradicional**

Desafortunadamente, si empleamos un ábaco diferente, un 5+1, 5+2 o 5+3, no podremos leer el otro lado contando las cuentas desactivadas; tendríamos que excluir mentalmente las cuentas adicionales, lo cual podría resultarnos confuso y proclive a errores. Con estos ábacos resultará más sencillo sustituir mentalmente cada dígito de **este lado** por su complemento a 9 y añadir 1 al total.

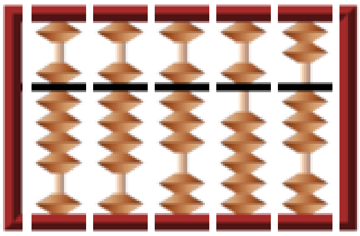
**147 en un ábaco 5+2**




Éste es el método universal, aplicable tanto a cualquier tipo de ábaco como al cálculo con papel y lápiz, por lo que merece la pena esforzarse en seguirlo.

**99853 en un ábaco 5+2**

```
 A  B  C  D  E
```



```
 9  9  8  5  3  ¡Lectura en Este Lado!
 0  0  1  4  7  ¡Lectura del Otro Lado!
```

## Suma y Resta

Un ábaco sólo soporta las operaciones de suma y resta; todo lo demás, multiplicación, división, raíces, etc. debe reducirse a una secuencia estructurada de sumas y restas. Podremos ingresar al *otro lado* desde cualquier operación aritmética, pero siempre ocurrirá cuando debamos restar de una cantidad reflejada directamente en el ábaco otra de mayor valor dando un resultado negativo; por ejemplo en la operación $77 - 94 = -17$. Diremos que hemos *entrado en el otro lado* porque a partir de ese momento, si queremos leer el resultado representado en el ábaco, deberemos leer el complemento de las cuentas activas como se ha explicado arriba; que *hemos salido del otro lado* o *vuelto a este lado* cuando los resultados a leer son positivos y podemos hacer la lectura directa de las cuentas activas.

Veamos el ejemplo de la operación mencionada $77 - 94 = -17$:

**77-94 = -17**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| ABCDEF | |
| 77 | |
| (-94) | No podemos restar! |
| +1000 | Tomamos prestado 1000 de la nada... |
| 1077 | |
| -94 | Ahora si podemos restar |
| 983 | Hemos ingresado al otro lado |
| >>-17 | Lectura del otro lado |

Veamos qué hemos hecho aquí. Al no poder restar 94 de 77, hemos **tomado prestado** ***de la nada***, por decirlo de alguna forma, 1000 que, añadido a 77, nos da 1077, cantidad de la que sí podemos restar 94. Al añadir 1000 y restar 94 a 77, le hemos sumado $1000 - 94 = 906 = {}^3C_{94}$ a 77, por lo que el resultado es el complemento de la diferencia según se ha discutido en el apartado del Método de los complementos; es decir:

$$77 + {}^3C_{94} = {}^3C_{94-77}$$

que es lo único que da sentido a *tomado prestado de la nada*; en realidad no estamos tomando nada prestado (sería injustificable desde el punto de vista matemático), lo que hacemos es cambiar de modo de operación formando directamente sobre el ábaco el complemento ${}^3C_{94}$ a la par que lo sumamos a 77. Al cambiar de modo hemos entrado en *el otro lado* y a partir de ese momento debemos hacer las lecturas del otro lado para conocer los resultados.

**Nota:**

Inicialmente podrá el lector añadir físicamente el 1 a la columna **B** arriba, pero debería esforzarse un no añadir un 1 que va a ser retirado inmediatamente para ahorrar tiempo, por no mencionar que esa columna podría estar previamente ocupada como ocurrirá en Revisión a la baja desde el otro lado. Introduzca ese uno, y los que necesitará en este tipo de cálculo, sólo en su mente.

Si al resultado anterior sumamos, por ejemplo, 104 tendríamos $77 - 94 + 104 = 87$, un resultado positivo:

**77-94+104=-17**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| ABCDEF | |
| 77 | |
| (-94) | No podemos restar! |
| +1000 | Tomamos prestado 1000 de la nada... |
| 1077 | |
| -94 | Ahora si podemos restar 94 |
| 983 | Hemos ingresado al otro lado! |
| >>-17 | Lectura del otro lado |
| +104 | Sumamos |
| 1087 | |
| -1000 | Devolvemos lo que tomamos prestado de la nada |
| 87 | Hemos vuelto a este lado! |

Observe el lector como al sumar 104 se produce un acarreo más allá de la frontera de tres dígitos de los complementos que estamos usando aquí (un desbordamiento), lo cual, de acuerdo a lo expresado en Método de los complementos debemos ignorar por no sernos *visible*, indicándonos que el resultado es positivo y hemos vuelto a *este lado* del ábaco. Ignorar ese acarreo equivale al *devolver lo que hemos tomado prestado* indicado en la tabla anterior.

**Nota:**

Por el mismo motivo expresado en la nota anterior, deberíamos evitar llevar el acarreo físicamente a la columna **B**; ¡hagámoslo sólo en nuestra mente!

Veamos otro ejemplo. Supongamos que nos están dictando números y nos han pedido restar 94 de 77 y que ya lo hemos resuelto como acabamos de ver y en nuestro ábaco figura 983, supongamos que ahora nos piden restar 1727 de dicho resultado...

**77-94-1727=-1744**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEF** | |
| 77 | |
| (-94) | No podemos restar! |
| +1000 | Tomamos prestado 1000 de la nada... |
| 1077 | |
| -94 | Ahora si podemos restar 94 |
| 983 | Hemos ingresado al otro lado! |
| >>-17 | Lectura del otro lado |
| 983 | |
| (-1727) | No podemos restar! |
| +9 | Complemento de 4 cifras |
| 9983 | |
| -1727 | Ahora si podemos restar 1727 |
| 8256 | Seguimos en el otro lado |
| >-1744 | Lectura del otro lado |

Al sumar 9 en **B**, estamos utilizando lo dicho en Ampliación y reducción de un complemento y transformamos un complemento de 3 dígitos en otro de 4, lo que permite continuar la operación y obtener -1744. Seguimos en el otro lado y sólo podríamos salir por un acarreo a la columna **B** al sumar una cantidad suficientemente grande; por ejemplo 1744 (para comprobar que hemos leído correctamente el otro lado), deberíamos obtener 1{0000}, donde el 1 es el acarreo a **B** que nos saca del *otro lado* y las cifras *visibles* (entre llaves) nos indican que el resultado es 0 en *este lado*.

## Multiplicación

No es de esperar que lo que sigue sea de mucha aplicación, pero sí una forma de ampliar nuestra comprensión de los números complementarios y del ábaco.

Sean $a$ y $b$ dos enteros positivos. Deseamos formar el producto $(-a) \cdot b$ y para ello contaremos con la representación de $-a$ en la forma de complemento:

$$^{k}C_{a} = 10^{k} - a$$

donde $k$ es el número de dígitos de $a$, y también contaremos con el complemento de $b$:

$$^{l}C_{b} = 10^{l} - b$$

donde $l$ es el número de dígitos de $b$. Formemos el producto:

$$p = b \cdot {^{k}C_{a}} = b \cdot 10^{k} + b \cdot (-a) = b \cdot 10^{k} - a \cdot b$$

Sumemos ahora $^{l}C_{b} \cdot 10^{k}$ al primer y último término de la expresión anterior:

$$p + {^{l}C_{b}} \cdot 10^{k} = {^{l}C_{b}} \cdot 10^{k} + b \cdot 10^{k} - a \cdot b = 10^{k+l} - b \cdot 10^{k} + b \cdot 10^{k} - a \cdot b$$

con lo que tenemos:

$$p + {^{l}C_{b}} \cdot 10^{k} = 10^{k+l} - a \cdot b = {^{k+l}C_{a \cdot b}}$$

es decir, la cantidad $p + {^{l}C_{b}} \cdot 10^{k}$ es el complemento de $k + l$ dígitos del producto buscado.

Veamos un ejemplo: $a = 12$ con $({^{2}C_{12}} = 88)$ y $b = 62$ con $({^{2}C_{62}} = 38)$; entonces será: $(-a) \cdot b = -12 \cdot 62 = -744$. Tendremos:

$$p = b \cdot {^{k}C_{a}} = 62 \cdot {^{2}C_{12}} = 62 \cdot 88 = 5456$$

y

$$^{l}C_{b} \cdot 10^{k} = {^{2}C_{62}} \cdot 10^{2} = 3800$$

por lo que

$$p + {^{l}C_{b}} \cdot 10^{k} = 5456 + 3800 = 9256$$

que es el complemento de cuatro cifras de $a \cdot b = 744$ por lo que

$$(-a) \cdot b = -744$$

Sobre el ábaco:

**(-12) x 62 = -744**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| ABCDEFGHIJK | |
| 62 12 | b y a |
| 62 88 | b y 2Cb |
| ... | Multiplicación moderna |
| 62 5456 | p |
| +3800 | 2Cbx10k |
| 62 9256 | |
| >>-744 | Lectura del otro lado |

Nótese que, a efectos prácticos, sumar ${}^{l}C_{b} \cdot 10^{k}$ equivale a restar $b$ de los dígitos de la izquierda de $p$

**(-12) x 62 = -744**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| ABCDEFGHIJK | |
| 62    12 | b y a |
| 62    88 | b y 2Cb |
| ... | Multiplicación moderna |
| 62     5456 | p |
| -62 | Restar b tomando prestado de la nada |
| 62     9256 | |
| >>-744 | Lectura del otro lado |

## División

Si la división es la operación inversa de la multiplicación, para dividir $(-744)/62$ deberemos invertir los pasos dados en el apartado anterior; así, si hemos terminado antes restando el multiplicador de los dígitos de la izquierda del producto, tomando prestado *de la nada*, empezaremos ahora sumando el divisor a los dígitos de la izquierda del dividendo acarreando *a la nada*. Tenemos $a = 744, b = 62$; calculemos: $q = (-a)/b$:

**(-744)/62 = -12**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| ABCDEFGHIJK | |
| 62       744 | a y b |
| 62     9256 | b y 4C744 |
| +62 | Sumar b acarreando *a la nada* |
| 62     5456 | |
| ... | División moderna |
| 62    88 | Cociente |
| >>-12 | Lectura del otro lado |

Probablemente se pregunte por qué hemos formado ${}^{4}C_{744} = 9256$ en el ábaco en lugar de ${}^{3}C_{744} = 256$ que es más sencillo. Recuerde lo dicho para la multiplicación: el producto nos aparece como un complemento de $k + l$ cifras donde $k$ y $l$ son los números de dígitos del multiplicando y del multiplicador; por esto no nos sirve ${}^{3}C_{744}$ aquí y necesitamos ampliar a ${}^{4}C_{744}$. Puede emplear este argumento para decidir en cada caso que complemento usar o bien seguir la siguiente:

**Regla práctica:**

> Sume mentalmente el divisor a los dígitos de la izquierda del complemento a dividir, si se produce acarreo (a la nada), podemos proceder; en caso contrario añada un 9 a la izquierda del complemento a dividir y proceda.

Por ejemplo [Murakami 2019b]: $-132/11 = -12$, ${}^{3}C_{132} = 868$, $868 + 110 = 0978$ y no hay acarreo pero $9868 + 1100 = 10968$ sí da lugar a acarreo. Procedemos entonces a dividir $968/11 = 88$ y, leyendo *el otro lado* de 88, tendremos la respuesta $-12$.

# Otras lecturas


- Murakami, Masaaki (2019). «The Other Side of Soroban» (PDF). 算盤 *Abacus: Mystery of the Bead*. Archivado desde el original, el 1 de Agosto de 2021.
- Tejón, Fernando; Heffelfinger, Totton (2005). «Complementary Numbers (Simplifying Subtraction & The Negative Answer)» (PDF). 算盤 *Abacus: Mystery of the Bead*. Archivado desde el original, el 21 de Diciembre de 2018.

# XXIV Métodos Especiales de Multiplicación

## Introducción

Como se expresó en el capítulo dedicado a la Multiplicación Tradicional, el número de formas posibles de realizar una multiplicación en el ábaco puede ser muy elevado, aunque sólo una pequeña fracción de ellas puedan ser fácilmente desarrolladas por un operador humano y podamos considerarlas prácticas. No obstante, el número de estas formas prácticas de efectuar la multiplicación sigue siendo importante y de ellas sólo hemos tratado dos en este libro: la multiplicación moderna y la tradicional.

Los métodos de multiplicación usados en el ábaco pueden ser de dos categorías:

- **Métodos Genéricos:** permiten multiplicar dos números cualesquiera dados. Ejemplos: los dos vistos hasta ahora.
- **Métodos Especiales:** sólo son aplicables bajo determinadas condiciones; por ejemplo, cuando el multiplicador es próximo a la unidad, o acaba en uno, etc.

En lo que sigue introduciremos algunos de estos métodos adicionales, pero estaremos lejos de agotar el tema. El lector puede acudir a Otras lecturas para descubrir nuevas variantes.

## Multiplicación multifactorial

Se presentan a continuación dos métodos generales (pueden usarse en todos los casos) para multiplicar números procesando las cifras del multiplicando de izquierda a derecha; lo cual es particularmente útil cuando se han de multiplicar varios factores (multifactorial) o cuando se busca un valor aproximado del producto (Véase el capítulo sobre Operaciones Abreviadas). Ejemplo: 37×47×65

### Método 1

**Nota:**

Procure siempre dejar suficiente espacio entre multiplicando y multiplicador; especialmente si va a multiplicar varios factores como es aquí el caso.

**37×47×65, multiplicación multifactorial**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| ABCDEFGHIJKLMNO | |
| 47           37 | Multiplicador en A-E, multiplicando en NO |
| +12 | Sumar 3×4 en LM |
| +21 | Borrar 3 (N), sumar 3×7 en MN |
| 47         1417 | |
| +28 | Sumar 7×4 en MN |
| +49 | Borrar 7 (O), sumar 7×7 en NO |

| | | |
|---|---|---|
| 47 | 1739 | Resultado en LO |
| 65 | 1739 | Ahora multiplicamos por 65 en HI |
| | +06 | Sumar 1×6 en JK |
| | +05 | Borrar 1 (L), sumar 1×5 en KL |
| 65 | 65739 | |
| | +42 | Sumar 7×6 en KL |
| | +35 | Borrar 7 (M), sumar 7×5 en LM |
| 65 | 110539 | |
| | +18 | Sumar 3×6 en LM |
| | +15 | Borrar 3 (M), sumar 3×5 en MN |
| 65 | 112459 | |
| | +54 | Sumar 9×6 en MN |
| | +45 | Borrar 9 (O), sumar 9×5 en NO |
| 65 | 113035 | Resultado en I-O |

### Método 2

En lugar de ir borrando las cifras del multiplicando para añadir el ultimo producto parcial que le corresponde, como hemos hecho arriba, podemos disminuir el multiplicador en una unidad y limitarnos a sumar sin borrar nada; por ejemplo: 37×47

**37×47, multiplicación multifactorial (otra forma)**

| Ábaco | | Comentario |
|---|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLMNO** | | |
| 46 | 37 | Multiplicador menos 1 en A-E, multiplicando en NO |
| | +12 | Sumar 3×4 en LM |
| | +18 | Sumar 3×6 en MN |
| 46 | 1417 | |
| | +28 | Sumar 7×4 en MN |
| | +42 | Sumar 7×6 en NO |
| 46 | 1739 | Resultado en LO |

## Multiplicador terminado en 1

Si uno de los factores acaba en uno podemos ahorrar algún trabajo empleando el método 1 de multiplicación multifactorial explicado arriba. Por ejemplo, 481×76; procederíamos del siguiente modo omitiendo el 1 final de 481:

**481×76, multiplicación especial**

| Ábaco | | Comentario |
|---|---|---|
| **ABCDEFGHI** | | |
| 48 | 76 | Multiplicador, omitido el 1, en AB; multiplicando en HI |

| | |
|---|---|
| +28 | Sumar 7×4 en EF |
| +56 | Sumar 7×8 en FG |
| 48 33676 | |
| +24 | Sumar 6×4 en FG |
| +48 | Sumar 6×8 en GH |
| 48 36556 | Resultado en E-I |

**Es decir:**

- No borramos los dígitos del multiplicando
- No olvidamos que el multiplicador tiene un dígito más de los inscritos en el ábaco a la hora de decidir dónde sumar los productos parciales

# Multiplicador que comienza con 1

Del mismo modo, podemos ahorrar cierto trabajo cuando el multiplicador empieza por 1 si usamos la Multiplicación Tradicional y no borramos los dígitos del multiplicando. Por ejemplo, 175×73:

**175×73**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHI** | |
| 75 73 | No necesitamos el **1** en **A** |
| +15 | Sumar 3×5 en **HI** |
| +21 | Sumar 3×7 en **GH** |
| 75 7525 | |
| +35 | Sumar 7×5 en **GH** |
| +49 | Sumar 7×7 en **FG** |
| 75 12775 | Resultado en **E-I** |

# Multiplicador ligeramente mayor que la unidad

Aclaremos antes de empezar que por *multiplicador ligeramente mayor que la unidad* queremos decir que uno de los factores a multiplicar, el que señalamos como *multiplicador*, es de la forma: $(1+x)\cdot 10^k$, con $x$ una cantidad pequeña positiva $0 < x \ll 1$ y $k$ cualquier entero. Es decir, que en el ejemplo que sigue, 1.03 podría ser igualmente 103, 10300 o 0.00000103 ya que el término $10^k$ afecta sólo a la posición del punto decimal en el resultado y no a la secuencia de dígitos que se obtiene en la multiplicación.

Dicho lo anterior, consideremos la multiplicación: 7×1.03; podríamos realizarla usando el método moderno en la forma:

**7×1.03, multiplicación moderna**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLM** | |
| 103    7 | Multiplicador en A-C, multiplicando en H |
|        +07 | Sumar 7×1 en IJ |
|          +21 | Sumar 7×3 en KL y borrar H |
|          721 | Resultado en J-L |

Como vemos, realizar esta multiplicación en el ábaco consiste en sumar los dos productos parciales 7×1=7 y 7×3=21 en determinados lugares del ábaco. No sería muy diferente usando la multiplicación tradicional:

**7×1.03, multiplicación tradicional**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLM** | |
| 103    7 | Multiplicador en A-C, multiplicando en H |
|         +21 | Sumar 7×3 en JK y borrar H |
|       +07 | Sumar 7×1 en HI |
|         721 | Resultado en I-K |

Reparemos en que en ambos casos tenemos que inscribir un 7 en el ábaco como resultado de sumar el primer producto parcial y que también tenemos que borrar un 7 correspondiente al multiplicando. Claramente ahorraremos cierto tiempo y trabajo si evitamos esto; lo único que tenemos que hacer es considerar que el 7 ya inscrito (multiplicando) se transforma en el 7 (producto parcial) y lo que nos falta por hacer es simplemente añadir el otro producto parcial en el lugar correcto:

**7×1.03, multiplicación especial**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLM** | |
| 103    7 | Multiplicador en A-C, multiplicando en H |
|        +21 | Sumar 7×3 en JK y borrar H |
|        721 | Resultado en H-J |

Nótese que no se opera con el 1 del multiplicador, por lo que es habitual no inscribirlo en el ábaco para sólo tener a la vista los dígitos con los que tenemos que operar; es decir repitiendo el proceso anterior:

**7×1.03, multiplicación especial**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| ABCDEFGHIJKLM | |
| 003 7 | Multiplicador en A-C, multiplicando en H |
| +21 | Sumar 7×3 en JK |
| 721 | Resultado en H-J |

Podríamos haber inscrito el 3 en la columna **A** (como también podríamos prescindir de inscribirlo), pero es recomendable, al menos al principio, ponerlo en la manera indicada en la columna **C** ya que esa posición nos guiará acerca de en qué columna tenemos que añadir los productos parciales. Esto será mas claro en los casos que veremos a continuación.

El término $x$ del multiplicador $1 + x$ no tiene que ser de un sólo dígito; por ejemplo 7×1.137 ( $x = 0.137$):

**7×1.137, multiplicación especial**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| ABCDEFGHIJKLM | |
| 137 7 | Multiplicador en A-D, multiplicando en H |
| +07 | Sumar 7×1 en HI |
| +21 | Sumar 7×3 en IJ |
| +49 | Sumar 7×7 en JK |
| 7959 | Resultado en H-K |

**Nota**

Como puede verse, los productos parciales se suman, respecto del multiplicando, una posición a la izquierda comparado con la multiplicación tradicional y dos comparado con la moderna. **¡Téngalo en cuenta a la hora de determinar la varilla o columna unidad!**

Extendamos ahora este procedimiento a multiplicando de varios dígitos; por ejemplo: 123×1.075=132.225, donde procederemos dígito a dígito del multiplicando y de derecha a izquierda:

**123×1.075, multiplicación especial**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| ABCDEFGHIJKLM | |
| 75 123 | Multiplicador en A-D, multiplicando en H |
| +21 | Sumar 3x7 en KL |
| +15 | Sumar 3x5 en LM |
| 75 123225 | |
| +14 | Sumar 2x7 en JK |
| +10 | Sumar 2x5 en KL |
| 75 124725 | |

| | |
|---|---|
| +07 | Sumar 1x7 en IJ |
| +05 | Sumar 1x5 en JK |
| 75 132225 | Resultado en H-M |

Pero no nos engañemos, este no es un método general de multiplicación y podemos encontrarnos con dificultades; por ejemplo:394×1.075=423.550, en este caso se puede resolver fácilmente usando un ábaco tradicional 5+2 gracias a sus cuentas adicionales que nos permitirán hacer frente al desbordamiento:

**394×1.075, multiplicación especial**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLM** | |
| 75 394 | Multiplicador en A-D, multiplicando en H |
| +28 | Sumar 4x7 en KL |
| +20 | Sumar 4x5 en LM |
| 75 394300 | |
| +63 | Sumar 9x7 en JK |
| +45 | Sumar 9x5 en KL |
| 75 391050 | ¡Desbordamiento! |
| +63 | Sumar 3x7 en IJ |
| +45 | Sumar 3x5 en JK |
| 75 313550 | ¡Desbordamiento! |
| 75 423550 | Resultado normalizado en H-M |

pero este problema sería especialmente difícil en un ábaco moderno 4+1. Más aún, si $x$ es grande, digamos de aproximadamente 0.2, las cosas son complicadas con cualquier tipo de ábaco; por lo que este método de multiplicación es limitado. No obstante supone una considerable simplificación en algunos casos y resulta especialmente indicado para tratar operaciones con pequeños porcentajes.

# Multiplicador ligeramente menor que la unidad

Al igual que en la sección anterior y por idéntico motivo, como *multiplicador ligeramente menor que la unidad* queremos decir que es de la forma: $1 - x$, con $x$ una cantidad pequeña positiva $0 < x \ll 1$ y $k$ cualquier entero.

Consideremos ahora la multiplicación: $7 \times 0.97$; podríamos realizarla usando el método moderno o tradicional, pero es más sencillo considerar $7 \times 0.97 = 7 \times (1 - 0.03) = 7 - 7 \times 0.03$, de modo que al 7 ya puesto en el ábaco sólo tendremos que restarle el producto $7 \times 0.03$ en el lugar adecuado:

**7×0.97, multiplicación especial**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| ABCDEFGHIJKLM | |
|   3    7 | Multiplicador en A-C, multiplicando en H |
|        -21 | Restar 3×7 de EF |
|   3    679 | Resultado en D-F |

**Nota:**

En este tipo de multiplicación no perdamos de vista que la cantidad anotada en el ábaco como multiplicador (el 3 en **C** en el caso anterior) es una cantidad negativa. Esto es lo que justifica que **restemos** productos parciales en lugar de sumarlos.

Compárese el trabajo realizado con el necesario para realizar la multiplicación moderna o tradicional de 7×0.97. Otro ejemplo con multiplicando de varias cifras:

$$999 \times 999 = 1000 \times 999 \times (0.999) = 1000 \times 999 \times (1 - 0.001) = 998001$$

**999×999, multiplicación especial**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| ABCDEFGHIJKLM | |
|    1   999 | Multiplicador en A-C, multiplicando en H-J |
|           -09 | Restar 9×1 de LM |
|          -09 | Restar 9×1 de KL |
|         -09 | Restar 9×1 de JK |
|    1   998001 | Resultado en H-M |

Obsérvese cómo hemos trabajado las cifras del multiplicando de derecha a izquierda.

Del mismo modo que la multiplicación del apartado anterior, el término $x$ no está limitado a una cifra; por ejemplo: $7 \times 0.987 = 7 \times (1 - 0.013) = 6.909$:

**7×0.987, multiplicación especial**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| ABCDEFGHIJKLM | |
|   13    7 | Multiplicador en A-D, multiplicando en H |
|         -07 | Restar 7×1 de IJ |
|          -21 | Restar 7×3 de JK |
|   13    6909 | Resultado en H-K |

En este caso tras restar 7×1 de **IJ** tenemos que memorizar la cifra 7 para continuar.

En el siguiente ejemplo, tanto multiplicando como multiplicador tienen más de un dígito:

**37×0.987, multiplicación especial**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| `ABCDEFGHIJKLM` | |
| `  13  37` | Multiplicador en A-D, multiplicando en H |
| `       -09` | Restar 7×1 de IJ |
| `        -09` | Restar 7×3 de JK |
| `  13  36909` | |
| `      -03` | Restar 3×1 de IJ |
| `       -09` | Restar 3×3 de JK |
| `  13  36519` | Resultado en G-K |

Obsérvese cómo hemos trabajado las cifras del multiplicando de derecha a izquierda y las del multiplicador de izquierda a derecha.

## Multiplicación redondeando el multiplicador a potencia de 10

El método anterior puede generalizarse en cierta forma cuando el multiplicador puede redondearse a una potencia de 10. Por ejemplo, $37 \times 27997$ que puede escribirse: $37 \times (28000 - 3) = 37 \times 28000 - 37 \times 3$ y podemos hacer las dos multiplicaciones y restarlas en la misma operación:

**37×27997, multiplicación especial**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| `ABCDEFGHIJKLMNO` | |
| `28  3  37` | Multiplicador en A-E, multiplicando en HI |
| `        +14` | Sumar 7×2 en JK |
| `         +56` | Sumar 7×8 en KL |
| `            -21` | Restar 7×3 de NO |
| `28  3  37195979` | |
| `28  3  3 195979` | Borrar 7 en I |
| `       +06` | Sumar 3×2 en IJ |
| `        +24` | Sumar 3×8 en JK |
| `           -09` | Restar 3×3 de MN |
| `28  3  31035889` | |
| `28  3   1035889` | Borrar 3 en H, resultado en I-O |

**Nota:**

28 en **AB** es positivo, 3 en **E** es negativo.

Como puede verse, el proceso indicado es mucho más breve que la multiplicación directa de 37×27997.

# Elevación al cuadrado

La potenciación es un ejercicio reiterado de multiplicación por el mismo factor. Así, por ejemplo, $347^4 = 347 \times 347 \times 347 \times 347$, lo que significa que, desde el punto de vista del cálculo manual, se trata de una operación tediosa incluso con pequeños valores del exponente. En lo que sigue nos limitaremos a la elevación al cuadrado, operación que puede simplificarse algo con ayuda del binomio de Newton [Hosking,Ogawa & Morimoto 2018]:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b = 2$$

Probablemente encontrará esto útil si se decide a extraer raíces cúbicas con el Método de Newton.

## Caso de numero de dos cifras

Ejemplo: $48^2 = 3204$

$48 = 40 + 8$ por lo que tomaremos $a = 40 = 4 \cdot 10$ y $b = 8$; por lo que $48^2 = 16 \cdot 10^2 + 2 \cdot 32 \cdot 10 + 64$, lo cual puede llevarse al ábaco de dos formas distintas: trabajando de derecha a izquierda o de izquierda a derecha

**Cuadrado de 48, de derecha a izquierda**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| ABCDEFGHI | |
| 48 | |
| +64 | Sumar 8^2=64 en HI |
| +32 | Sumar 8x4=32 en GH |
| +32 | Sumar 8x4=32 en GH una segunda vez |
| +16 | Sumar 4^2=16 en FG |
| 48    2304 | resultado en F-I |

**Nota:**

No es necesario introducir la base 48 en el ábaco.

**Cuadrado de 48, de izquierda a derecha**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| ABCDEFGHI | |
| 48 | |
| +16 | Sumar 4^2=16 en FG |
| +32 | Sumar 8x4=32 en GH |
| +32 | Sumar 8x4=32 en GH una segunda vez |
| +64 | Sumar 8^2=64 en HI |
| 48    2304 | resultado en F-I |

## Caso de numero de tres o más cifras

Ejemplo: $438^2 = 191844$

En este caso, para trabajar de derecha izquierda tomaremos: $a = 430 = 43 \cdot 10$ y $b = 8$; lo cual exigirá la evaluación de $43^2$ por el procedimiento anterior

**Cuadrado de 438 de derecha a izquierda**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| `ABCDEFGHIJK` | |
| `438` | |
| `        +64` | `Sumar 8^2=64 en JK` |
| `       +24` | `Sumar 3x8=24 en IJ` |
| `       +24` | `Sumar 3x8=24 en IJ una segunda vez` |
| `      +32` | `Sumar 4^8=32 en HI` |
| `      +32` | `Sumar 4^8=32 en HI una segunda vez` |
| `438    6944` | `Ahora sumamos a^2=43^2 a partir de I` |
| `      +09` | `Sumar 3^2=09 en HI` |
| `     +12` | `Sumar 4x3=12 en GH` |
| `     +12` | `Sumar 4x3=12 en GH una segunda vez` |
| `    +16` | `Sumar 4^2=16 en FG` |
| `438  191844` | `Resultado en F-K` |

y para trabajar de izquierda a derecha: $a = 400 = 4 \cdot 10^2$ y $b = 38$; lo cual exigirá la evaluación de $38^2$ por el procedimiento del apartado anterior

**438^2=191844, de izquierda a derecha**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| `ABCDEFGHIJK` | |
| `438` | |
| `    +16` | `Sumar 4^2=16 en FG` |
| `     +12` | `Sumar 4x3=12 en GH` |
| `     +12` | `Sumar 4x3=12 en GH una segunda vez` |
| `      +32` | `Sumar 4^8=32 en HI` |
| `      +32` | `Sumar 4^8=32 en HI una segunda vez` |
| `438  1904` | `Ahora sumamos b^2=38^2 a partir de I` |
| `      +09` | `Sumar 3^2=09 en HI` |
| `       +24` | `Sumar 3x8=24 en IJ` |
| `       +24` | `Sumar 3x8=24 en IJ una segunda vez` |
| `        +64` | `Sumar 8^2=64 en JK` |
| `438  191844` | `Resultado en F-K` |

De la misma forma podemos trabajar con números con un número mayor de cifras; por ejemplo cinco, lo que exigiría calcular:

el cuadrado de un número de cuatro cifras,
lo que exigiría a su vez calcular el cuadrado de un número de tres cifras,
lo que exigiría a su vez calcular el cuadrado de un número de dos cifras,
...

Estos cuadrados deberá empezar a calcularlos dos columnas a la derecha del cuadrado anterior si trabaja de izquierda a derecha, a la izquierda si trabaja de derecha a izquierda.

## Valores aproximados

Hemos visto en los ejemplos anteriores que podemos elevar un número al cuadrado trabajando en cualquiera de las dos direcciones: de izquierda a derecha y de derecha a izquierda. En principio, ambas formas de trabajo son equivalentes e inicialmente deberíamos practicar las dos aunque al final nos acabemos decantando por la que nos resulte más fácil. Hay sin embargo una situación en la que la *simetría* de ambos procedimientos se rompe y sólo podremos seguir un camino: cuando deseemos conocer sólo una aproximación al cuadrado y queramos abreviar la operación, tendremos que trabajar de izquierda a derecha.

Un ejemplo de la situación descrita podría ser el siguiente. Deseamos calcular la raíz quinta de 2500 siguiendo el Método de Newton. Imaginemos que ya hemos obtenido una aproximación de dos cifras (4.8) a dicha raíz y queremos mejorarla con una nueva iteración siguiendo $x_{k+1} = \left(4x_k + A/x_k^4\right)/5$ con $A = 2500$ y $x_k = 4.8$. Pero $x_k^4$ tiene 7 cifras (5308416) y no las necesitamos todas dado que si nuestra raíz actual tiene dos dígitos significativos no podemos esperar mas de cuatro en la nueva aproximación, por lo que conocer 4-5 cifras de $x_k^4$ es suficiente y deseamos abreviar los cálculos en lo posible. supongamos que ya hemos obtenido $4.8^2 = 2304$ como ya hemos hecho arriba, entonces continuaríamos:

**4.8^4, aproximado**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| ABCDEFGHIJK | |
| 2304 | |
| +04 | Sumar 2^2=04 en FG |
| +06 | Sumar 2x3=06 en GH |
| +06 | Sumar 2x3=06 en GH una segunda vez |
| +08 | Sumar 2x4=08 en IJ |
| +08 | Sumar 2x4=08 en IJ una segunda vez |
| 2304 5216 | Ahora sumamos b^2=304^2 a partir de I |
| +09 | Sumar 3^2=09 en HI |
| +12 | Sumar 3x4=12 en JK |
| +12 | Sumar 3x4=12 en JK una segunda vez |
| 2304 53084 | y podemos cortar aquí |

Con lo que ya tenemos los primeros dígitos de $4.8^4$ y podemos ahorrar algún trabajo. Esto sólo podemos lograrlo trabajando de izquierda a derecha.

## Otras lecturas


- Kojima, Takashi (1963). *Advanced Abacus: Theory and Practice*. Tokyo: Charles E. Tuttle Co., Inc.. ISBN 978-0-8048-0003-7.
- Murakami, Masaaki (2019). «Multiplication with Excessive multiplicand» (PDF). *算盤 Abacus: Mystery of the Bead*. Archivado desde el original, el 1 de Agosto de 2021.
- Murakami, Masaaki (2019). «Six multiplication methods» (PDF). *算盤 Abacus: Mystery of the Bead*. Archivado desde el original, el 1 de Agosto de 2021.
- Hosking, Rosalie Joan (2018). «Elementary Soroban Arithmetic Techniques in Edo Period Japan» (PDF). *Mathematical Association of America*. Archivado desde el original, el 4 de Marzo de 2021.

# XXV Métodos Especiales de División

## Introducción

Se presentan a continuación algunos **métodos especiales** de división que nos permitirán ahorrar cierta cantidad de trabajo en determinadas circunstancias.

También presentamos un **método general**, el de *división con cociente excesivo*, válido en todos los casos y que usaremos en conjunción con los métodos elementales de división (moderno o tradicional). En realidad, este método, más que un método de división en sí mismo, puede considerarse como la imagen especular de los métodos habituales en *el otro lado* del ábaco, donde podremos entrar y salir a voluntad para trabajar con restos negativos si encontramos alguna ventaja en ello. En todo caso, será un buen banco de prueba para nuestra comprensión del proceso de división.

## Divisor ligeramente mayor que la unidad

Al igual que hicimos en el caso de la multiplicación por un número ligeramente mayor que la unidad, aclaremos antes de empezar que por *divisor ligeramente mayor que la unidad* queremos decir que éste es de la forma: $(1+x)\cdot 10^k$, con $x$ una cantidad pequeña positiva $0 < x \ll 1$ y $k$ cualquier entero. Es decir, que en el ejemplo que sigue, 1.03 podría ser igualmente 103, 10300 o 0.00000103 ya que el término $10^k$ afecta sólo a la posición del punto decimal en el resultado de la división y no a la secuencia de dígitos que obtendremos en el proceso.

El punto clave de esta división es que, en la mayoría de los casos, el primer dígito del dividendo se corresponde con el dígito del cociente por ser el divisor próximo a la unidad [Kojima 1963], y que dicho dígito desaparecerá del dividendo cuando restemos el producto de la cifra del cociente por el divisor para establecer el resto. Por lo tanto, ahorraremos trabajo si en lugar de borrar ese dígito del dividendo y escribir el mismo en otra parte como cociente, lo *reciclamos* y lo consideramos convertido en cociente; por ejemplo: 7416÷103

**7416÷103, división especial**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| ABCDEFGHIJK | |
| 3   7416 | 7 como dígito del cociente |
|       -21 | Restar 7x3 de HI |
| 3   7206 | 2 como dígito del cociente |
|        -06 | Restar 2x3 de IJ |
| 3   72 | Resto nulo, resultado en GH |

donde hemos abreviado la escritura del divisor omitiendo el 1 por no intervenir en los cálculos. Nótese que, con la posición del cociente relativa a la posición del dividendo, esta división no se ha realizado ni con la disposición moderna de la división (**MDA**) ni con la tradicional (**TDA**), sino con una nueva disposición que es la *inversa abacística* de la multiplicación con Multiplicador ligeramente mayor que la unidad:

**72×103, multiplicación especial**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| ABCDEFGHIJK | |
| 3    72 | |
| +06 | Sumar 2x3 en IJ |
| 3    7206 | |
| +21 | Sumar 7x3 en HI |
| 3    7416 | Resultado en G-J |

Nótese también que la cantidad $x$ no tiene por qué limitarse a un dígito:

**3696÷112, división especial**

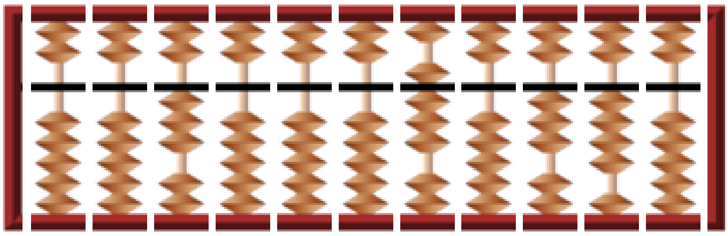
| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| ABCDEFGHIJK | |
| 12    3696 | 3 como dígito del cociente |
| -3 | Restar 3x1 de H |
| -06 | Restar 3x2 de HI |
| 12    3336 | 3 como dígito del cociente |
| -3 | Restar 3x1 de I |
| -06 | Restar 3x2 de IJ |
| 12    33 | Resto nulo, resultado en GH |

Pero $x$ sí tiene un límite borroso en cuanto al mayor valor que puede tomar; es difícil seguir este procedimiento abreviado de dividir si $x > 0.2$.

Por otro lado, no siempre se cumplirá lo dicho arriba de que el primer dígito del dividendo se corresponda con el dígito del cociente como ha ocurrido en los ejemplos anteriores, con frecuencia necesitaremos revisar a la baja dicho cociente. Por ejemplo: 8034÷103, inicialmente supondríamos que la cifra del cociente es 8, pero rápidamente veremos que 8 es excesivo y que la cifra del cociente a emplear es 7. Para tratar con esta situación, supondremos que el 1 que nos sobra del primer dígito del dividendo forma parte de la columna siguiente como *desbordamiento* y lo trataremos como tal; por ejemplo, con un ábaco tradicional con cuentas adicionales podríamos cambiar el planteamiento inicial:

**8034÷103, disposición inicial**

A B C D E F G H I K J

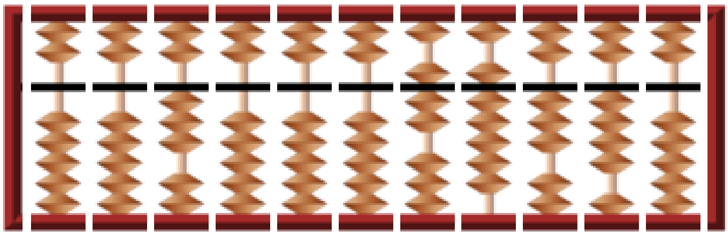


0 0 3 0 0 0 8 0 3 4 0

por este otro

**8034÷103, disposición modificada**

A B C D E F G H I K J



0 0 3 0 0 0 7 T 3 4 0

y proceder:

**8034÷103, división especial**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| ABCDEFGHIJK | |
| 3    8034 | 8 como dígito del cociente |
| -24 | Restar 8x3 de HI ¡Excesivo! |
| 3    7T34 | Transformamos el dividendo, 7 como dígito del cociente |
| -21 | Restar 7x3 de HI |
| 3    7824 | 8 como dígito del cociente |
| -24 | Restar 8x3 de IJ |
| 3    78 | Resto nulo, resultado en GH |

Otra forma de tratar con el desbordamiento sería:

**8034÷103, división especial**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| ABCDEFGHIJK | |
| 3    8034 | 8 como dígito del cociente |
| -24 | Restar 8x3 de HI ¡Excesivo! |
| 3    7794 | no importa, restamos de todos modos (**Nota**) |

| | |
|---|---|
| +3 | devolvemos lo restado en exceso |
| 3   7824 | 8 como dígito del cociente |
| -24 | Restar 8x3 de IJ |
| 3   78 | Resto nulo, resultado en GH |

**Nota:**

Al tomar el 8 inicial como cociente (y considerarlo suprimido del dividendo) hemos restado 8×103 de la cabecera del dividendo, pero esto es excesivo ya que el verdadero cociente es 7 y deberíamos haber restado 7×103; es decir 103 menos, por lo que habrá que devolver esta cantidad. En realidad, el 103 restado en exceso lo hemos restado tomando prestado de *la nada* (ver capítulo sobre números negativos, el 79 que aparece en las columnas **HI** representa a -21); por lo que al sumar el 100 de 103, restituimos (a la nada) el uno que hemos tomado prestado y sólo nos falta devolver el 3 (-21+103=82 en **HI**). Consulte también los apartados: Revisión a la baja desde el otro lado y División con cociente excesivo.

Para terminar este apartado añadimos un ejemplo extremo, en el que $x = 0.3$, para mostrar la clase de dificultades que surgen si $x$ no es pequeño. Es interesante comprenderlo bien porque en ocasiones también pueden surgir estas dificultades con valores más moderados de $x$ y conviene saber salir del paso. Para tener más claro qué es lo que se va a hacer, conviene tener presente la división $10257 \div 13$ resuelta por el método moderno:

**10257/13 = 789, método moderno**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJ** | |
| 13   10257 | |
| 13   710257 | Probar 7 como cociente |
| -07 | Restar 7x1 de FG |
| -21 | Restar 7x3 de GH |
| 13   7 1157 | |
| 13   781157 | Probar 8 como cociente |
| -08 | Restar 8x1 de GH |
| -24 | Restar 8x3 de HI |
| 13   78 117 | |
| 13   789117 | Probar 9 como cociente |
| -09 | Restar 9x1 de HI |
| -27 | Restar 9x3 de IJ |
| 13   789 | Resto nulo. Cociente:789 |

A continuación sigue la división hecha por este método especial. Lo que hacemos es, fundamentalmente, lo mismo que con la división moderna pero los cocientes son anotados dos columnas a la derecha, lo que resultará confuso al principio.

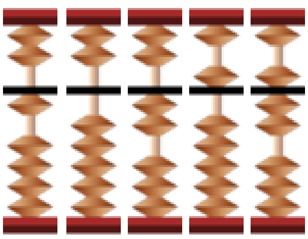
**10257/13 = 789, división especial**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| ABCDEFGHIJ | |
| 3 10257 | Considerar 1 en F como desbordamiento (**nota 1**) |
| 3 00257 | Probamos 9 como cociente |
| -27 | Restar 9x3 de GH |
| 3 7557 | Excesivo, queda 7 en G |
| ---------- | |
| 3 00257 | Probamos 8 como cociente |
| -24 | Restar 8x3 de GH |
| 3 7857 | Excesivo, queda 7 en G |
| ---------- | |
| 3 00257 | Probamos 7 como cociente |
| -21 | Restar 7x3 de GH |
| 3 8157 | Cabe, columna H desbordada (**nota 2**), seguimos |
| 3 7157 | Probamos 9 como cociente |
| -27 | Restar 9x3 de HI |
| 3 7887 | Excesivo, queda 8 en H |
| ---------- | |
| 3 7157 | Probamos 8 como cociente |
| -24 | Restar 8x3 de HI |
| 3 7917 | Cabe, columna I desbordada (**nota 3**), seguimos |
| ---------- | |
| 3 7817 | Probamos 9 como cociente |
| -27 | Restar 9x3 de IJ |
| 3 789 | Cabe, resto nulo, hecho. |

**Nota 1:**

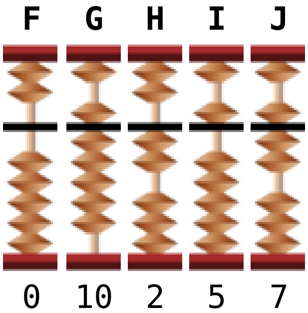
Según la técnica que estamos tratando, la primera cifra del dividendo es una pista a la cifra del cociente que tenemos que intentar, pero en este caso no sirve porque 10 entre 13 no cabe y tenemos que pensar en 102/13 que nos lleva a una cifra alta. Por eso conviene pensar que el 1 inicial es el desbordamiento de la columna de la derecha; o lo que es lo mismo, que el primer dígito del dividendo es 10 en **G**. En un ábaco tradicional sería más sencillo entender el proceso ya que cambiaríamos el dividendo de esto:

F G H I J



1 0 2 5 7

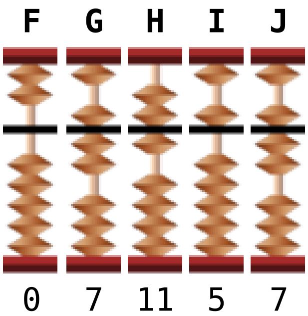
a esto otro:




Ahora, el primer dígito del dividendo (10 en **G**) debería guiarnos a la cifra de cociente que debemos intentar; pero, no sirviendo 10 por lo que acabamos de decir, ensayamos 9. Pero 9 resulta excesivo ya que al sustraer 9×3 de **GH** nos quedaría 7 en lugar de 9 en G; por lo que pasamos a intentar 8 como cociente, que tampoco nos sirve por idéntico motivo, y luego 7.

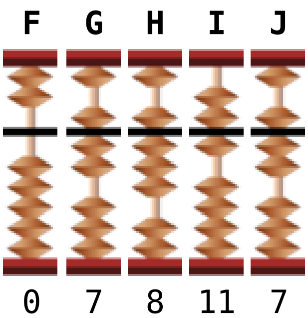
**Nota 2:**

Nos sirve 7 como cociente porque, tras restar 7×3 de **GH**, nos quedaría 8 en G que puede ser interpretado como 7 (la cifra del cociente) más el desbordamiento de la columna **H**. En un ábaco tradicional tendríamos:




**Nota 3:**

Aquí ocurre lo mismo que en el caso anterior. Nos sirve 8 como cociente porque, tras restar 8×3 de **HI**, nos quedaría 9 en H que puede ser interpretado como 8 (la cifra del cociente) más el desbordamiento de la columna **I**.En un ábaco tradicional tendríamos:




**La clave:**

Al probar un cociente y restar el producto de esa cifra del cociente por $x$ pueden ocurrir tres cosas:

- En la columna del cociente aparece una cifra menor que la del cociente que estamos probando. La cifra del cociente es excesiva y tenemos que probar otra más baja.
- En la columna del cociente aparece la cifra que estamos probando. Entonces, todo ha ido bien y podemos continuar la división.
- En la columna del cociente aparece la cifra que estamos probando más 1. Todo ha ido bien, la cifra probada del cociente era correcta, pero la unidad de más indica que la columna de la derecha (resto) está desbordada y deberemos ensayar cifras altas para el siguiente dígito del cociente. En un ábaco tradicional quitaríamos el uno que sobra de la cifra del cociente y sumaríamos 10 a la columna de la derecha (como en los diagramas anteriores); en un ábaco moderno tenemos que hacerlo mentalmente.

Como puede verse, lo que se pierde en este método cuando $x$ no es pequeño es la simplicidad de que la primera cifra del resto sea un buen indicador de la cifra del cociente a ensayar.

# Divisor ligeramente menor que la unidad

Al igual que en la sección anterior y por idéntico motivo, como *divisor ligeramente menor que la unidad* queremos decir que es de la forma: $(1-x)\cdot 10^k$, con $x$ una cantidad pequeña positiva $0 < x \ll 1$ y $k$ un entero arbitrario. También, como en el método anterior, al ser el divisor próximo a la unidad se tendrá que en la mayoría de los casos la primera cifra del dividendo coincidirá con la del cociente que deberemos probar; por lo que el principal trabajo a realizar en éste método será la determinación del resto o siguiente dividendo.

Si $a$ es el dividendo, $b$ el divisor y $q$ un cociente, se cumplirá:

$$a = q \cdot b + r$$

donde $r$ es el resto asociado al cociente $q$. Introduzcamos ahora $b = (1-x)$

$$a = q \cdot (1-x) + r = q - q \cdot x + r$$

por lo que

$$r = a - q + q \cdot x$$

Ejemplo: $403/97 = 403/(100-3) = 4.03/(1-0.03)$, cociente 4 entonces:

$$r = 4.03 - 4 + 4 \cdot 0.03 = 0.15$$

y, como puede verse, el efecto de $-q$ en $r = a - q + q \cdot x$ es el de cancelar el primer dígito del dividendo, por lo que bastará sumar $q \cdot x$ a lo que queda del dividendo para obtener el resto (o nuevo dividendo) $r$ y poder continuar con la división si procede.

**403÷97=4.03÷(1-0.03)**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| ABCDEFGHIJKLMN | Como divisor sólo anotamos la parte negativa |
|   3   403 | 4 como cociente |
|       +12 | Sumar 4x3 en GH |
|   3   415 | 1 como cociente |

| | |
|---|---|
| +03 | Sumar 3x3 en HI |
| 3 4153 | 5 como cociente |
| +15 | Sumar 5x3 en IJ |
| 3 41545 | 4 como cociente |
| +12 | Sumar 4x3 en JK |
| 3 415462 | 6 como cociente |
| +18 | Sumar 6x3 en KL |
| 3 4154638 | 3 como cociente |
| +09 | Sumar 3x3 en LM |
| 3 41546389 | 8 como cociente |
| +24 | Sumar 8x3 en LM |
| 3 415463814 | Desbordamiento! |
| +1 | Revisar L al alza |
| -97 | |
| 3 415463917 | Etc. cociente en F-L, resto en MN |

Este método es llamado también: **División por números complementarios [Murakami 2019c]**. Al igual que el método anterior, este método es difícil de seguir si $x$ es grande, el límite (borroso) es $x \approx 0.2$. Por supuesto, $x$ no está limitado a un dígito.

**1056÷88=1056/(100-12)**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHI** | |
| 12 1056 | 1 como cociente |
| +12 | Sumar 1x12 a GH |
| 12 1176 | 1 como cociente |
| +12 | Sumar 1x12 a HI |
| 12 1188 | |
| +1 | Revisar G al alza |
| -88 | |
| 12 1200 | Resto nulo, resultado en FG |

# División redondeando el divisor a múltiplo de 10

La presente técnica, que puede considerarse una extensión de la anterior, se usará en conjunción con la división normal, moderna o tradicional, con divisores ligeramente inferiores a una múltiplo de 10; por ejemplo 4997 que puede ponerse como 5000-3. Al escribirlo e esta forma, con una parte positiva y otra negativa, reducimos el número de cifras diferentes de cero por las que multiplicar y restar; reduciéndose el número de operaciones a efectuar.

**164901÷4997=164901÷(5000-3), división moderna especial**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLM** | Divisor en A-D. A es positivo, D es negativo! |
| 5  3   164901 | 16÷5 -> 3 |
| 5  3  3164901 | |
|       -15 | Restar 3x5 de HI |
|          +09 | Sumar 3x3 en KL |
| 5  3  3 14991 | 14÷5 -> 2 |
| 5  3  3214991 | |
|        -10 | Restar 2x5 de IJ |
|           +06 | Sumar 2x3 en LM |
| 5  3  32 4997 | Revisar al alza H |
|       +1 | |
|         -4997 | |
| 5  3  33 | Resto nulo, resultado en GH |

o bien, con la división tradicional:

**164901÷4997=164901÷(5000-3), división tradicional especial**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLM** | Divisor en A-D. A es positivo, D es negativo! |
| 5  3   164901 | Regla 1/5>2+0 |
| 5  3   264901 | |
|          +06 | Sumar 2x3 en KL |
| 5  3   264961 | Revisar H al alza |
|       +1 | |
|        -4997 | |
| 5  3   314991 | Regla 1/5>2+0 |
| 5  3   324991 | |
|           +06 | Sumar 2x3 en LM |
| 5  3   324997 | Revisar I al alza |
|        +1 | |
|         -4997 | |
| 5  3   33 | Resto nulo, resultado en HI |

En ambos casos, se ha reducido el número de dígitos no nulos del divisor de 4 a dos, por lo que la división nos cuesta sólo la mitad de trabajo. Por supuesto, la parte negativa del divisor no está restringida a un dígito... ¡ni la positiva tampoco!

**1077736÷48988=1077736÷(49000-12)**
**División tradicional**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| ABCDEFGHIJKLMNOP | |
| 49 12     1077736 | Regla: 1/4>2+2 |
| 49 12     2277736 | |
|           -18 | Restar 2x9 de KL |
|              +24 | Sumar 2x12 en NO |
| 49 12     2 97976 | |
| 49 12     2297976 | Revisar K al alza dos veces |
|               +24 | Sumar 2x12 en OP (**Nota**) |
|            -98 | Restar 2x49 de LM |
| 49 12     22 | Resto nulo, resultado en JK |

**Nota:**

Aquí se procesa primero la parte negativa para evitar que el dividendo se haga temporalmente negativo; pero no hay ningún inconveniente en seguir el orden habitual y usar el *otro lado* del ábaco.

**1077736÷48988=1077736÷(49000-12)**
**División tradicional y números negativos**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| ABCDEFGHIJKLMNOP | |
| ... | Terminación alternativa |
| 49 12     2297976 | Revisar K al alza dos veces |
|            -98 | Restar 2x49 de LM |
| 49 12     2199976 | En el *otro lado*! |
|           >>>-24 | Lectura: -24 |
|               +24 | Sumar 2x12 en OP |
| 49 12     22 | De vuelta a *este lado*. Resto nulo, resultado en JK |

# Revisión a la baja desde *el otro lado*

Revisar a la baja un cociente provisional cuando estamos trabajando la obtención del nuevo dividendo (resto) es siempre algo un tanto molesto por requerir una atención extra. Tenemos que

1. disminuir en una unidad la cifra del cociente,
2. devolver al resto lo que hemos restado en exceso por haber adoptado un cociente excesivo y
3. continuar normalmente a partir de ahí.

Una secuencia de operaciones que se presta fácilmente a que cometamos algún error. Por ejemplo, en el caso de la división 1479889÷37, que también veremos en el apartado siguiente, suponiendo que por error de apreciación usamos 4 como cifra del cociente a probar en lugar de la correcta (3):

**1479889÷37, revisión a la baja normal**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| ABCDEFGHIJKLMN | |
| 37    1479889 | 14/3->4 |
| 37   41479889 | |
|      -12 | Restar 4x3 de FG |
| 37   4 279889 | |
|       -28 | ¡Excesivo! |
|     -1 | Revisar E a la baja |
| 37   3 279889 | |
|       +3 | Devolver lo restado de más |
| 37   3 579889 | |
|       -21 | Continuar normalmente, restar 3x7 de GH |
| 37   3 369889 | |
| ... | Etc. |

Una alternativa conceptualmente más sencilla, aunque quizás algo más larga, es no interrumpir la obtención del resto, forzar la sustracción aunque nos lleve transitoriamente al *otro lado* o reverso del ábaco (números negativos); esto no será un problema ya que volveremos a *este lado* o anverso del ábaco (números positivos) inmediatamente. Por ejemplo, en la división anterior:

**1479889÷37, revisión a la baja desde *el otro lado***

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| ABCDEFGHIJKLMN | |
| 37    1479889 | 14/3->4 |
| 37   41479889 | |
|      -12 | Restar 4x3 de FG |
| 37   4 279889 | |
|       -28 | ¡Excesivo!, forzamos al otro lado |
| 37   49999889 | -1 en F-H (!) |
|     -1 | Revisar E a la baja |
| 37   39999889 | |
|       +37 | Sumar el divisor (omitir acarreo) |
| 37   3 369889 | ¡Hemos salido del otro lado! |
| ... | Continuar división |

Como puede verse, al permitirnos entrar al otro lado no hemos interrumpido la secuencia normal de operaciones, aunque normalmente moveremos más cuentas por este camino. Según los gustos personales esto podría resultarnos más cómodo. Pruébelo y decida.

# División con cociente excesivo

## Fundamento

Reflexionemos de nuevo sobre la división. Cuando tratamos de resolver una división $a/b$, buscamos un **cociente** $Q = a/b$ tal que

$$a = Q \cdot b \tag{Ecuación XXV.1}$$

Para ello, en los métodos elementales del cálculo escrito o todos los que hemos desarrollado hasta ahora para el ábaco, seguimos una técnica iterativa basada en la división con resto que nos permite acceder a un nuevo dígito de $Q$ en cada paso. La división con resto nos dice que $q$ es un cociente de $a/b$ si

$$a = q \cdot b + d \tag{Ecuación XXV.2}$$

donde

$$d = a - q \cdot b \tag{Ecuación XXV.3}$$

es el **resto** de la división. Sin duda el lector habrá notado que con estas definiciones cualquier número arbitrario $q$ sirve como cociente de $a/b$ ya que siempre podemos calcular el resto $d$ usando la expresión 3 de forma que la expresión 2 se satisfaga. Por tanto, un método de división paso a paso basado en la división con resto dependerá de una juiciosa elección de una serie de cocientes $q_1, q_2, q_3, \cdots$ tal que los correspondientes restos $d_1, d_2, d_3, \cdots$ sean progresivamente más pequeño; que tiendan a cero

$$d_1, d_2, d_3, \cdots \to 0 \tag{Ecuación XXV.4}$$

con lo que los cocientes tenderán a $Q$

$$q_1, q_2, q_3, \cdots \to Q \tag{Equation XXV.5}$$

La forma de actuar, en un método paso a paso, para ir obteniendo sucesivamente los dígitos de $Q$ será elegir el $q_1$ de entre unos candidatos adecuados que haga mínimo el resto

$$d_1 = a - q_1 \cdot b$$

sin hacerlo negativo. Los candidatos a $q_1$ serán de la forma un dígito del 1 al 9 multiplicado por una potencia de 10 (lo veremos en el ejemplo que sigue). Tras esto, repetimos el proceso con el nuevo dividendo (el resto) $d_1$ obteniendo $q_{d1}$ y un nuevo resto:

$$d_2 = d_1 - q_{d1} \cdot b$$

con lo que será:

$$q_2 = q_1 + q_{d1}$$

si repetimos ahora para $d_2$, obtenemos $q_{d2}$ y

$$d_3 = d_2 - q_{d2} \cdot b$$
$$q_3 = q_2 + q_{d2} = q_1 + q_{d1} + q_{d2}$$

y así hasta que el resto sea nulo y

$$Q = q_1 + q_{d1} + q_{d2} + \cdots + q_{dn}$$

o decidamos terminar con cierta aproximación

$$Q \approx q_1 + q_{d1} + q_{d2} + \cdots + q_{dn}$$

Veamos un ejemplo para aclarar lo anterior, la división $1479889/37$: Como valor de $q_1$ elegiremos de entre los valores $10000, 20000, \cdots, 90000$ el que haga mínimo el resto $d_1$ sin entrar en la zona negativa; de acuerdo a la tabla:

| q1 | d1 |
|---|---|
| 10000 | 1109889 |
| 20000 | 739889 |
| 30000 | 369889 |
| 40000 | -111 |
| 50000 | -370111 |
| 60000 | -740111 |
| 70000 | -1110111 |
| 80000 | -1480111 |
| 90000 | -1850111 |

la elección corresponde a $q_1 = 30000$ y el nuevo dividendo $d_1 = 369889$. A continuación repetiremos el proceso partiendo de $d_1$ para obtener $q_{d1}, q_{d2}, \cdots$, teniéndose:

| Cocientes | | Restos |
|---|---|---|
| q1: 30000 | q1: 30000 | d1: 369889 |
| qd1: 9000 | q2: 39000 | d2: 36889 |
| qd2: 900 | q3: 39900 | d3: 3589 |
| qd3: 90 | q4: 39990 | d4: 259 |
| qd4: 7 | q5: 39997 | d5: 0 |

por lo que el número $1479889$ era divisible por $37$ y el cociente exacto es:

$$Q = q_5 = q_1 + q_{d1} + \cdots + q_{d4} = 39997$$

Esto es básicamente lo que hacemos con cualquiera de los métodos de división vistos hasta ahora como la división moderna o la tradicional.

Ahora tratamos de lo fundamental en relación al nuevo método de **división con cociente excesivo** [Murakami 2019d] que vamos a introducir. En lo anterior, la restricción de elegir el **mínimo resto positivo** es artificial e innecesaria. Que el resto sea mínimo sí es esencial para que podamos acercarnos a , pero que sea positivo es consecuencia únicamente de que, normalmente, nos enseñan a dividir antes de hablarnos de números negativos, y de la larga tradición que procede de los tiempos en que los números negativos eran mal comprendidos y poco usados. Si quitamos esta restricción y en su lugar elegimos el **mínimo en valor absoluto** de los restos, admitiendo que tanto estos como los cocientes puedan ser negativos, podemos llevarnos una agradable sorpresa. En el caso del ejemplo, tomando $q_1 = 40000$ nos lleva a:

| Cocientes | | Restos |
|---|---|---|
| q1:   40000 | q1:   40000 | d1: -111 |
| qd1:     -3 | q2:   39997 | d2:    0 |

Podemos llevar esta forma de trabajar al ábaco si nos permitimos entrar y salir del *otro lado del ábaco*; es decir, usar restos y cocientes negativos. Podemos entrar y salir del otro lado a voluntad, simplemente eligiendo un cociente excesivo (una unidad mayor que el requerido) positivo o negativo.

**Entraremos al otro lado:**
: cada vez que al forzar la sustracción necesitemos tomar prestado de la última cifra del cociente

**Saldremos del otro lado:**
: cada vez que al forzar la sustracción de cantidades negativas (adición, por ser los cocientes negativos) necesitemos acarrear a la última cifra del cociente

## Ejemplos

**1479889÷37, división con cociente excesivo (División moderna)**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKL** | |
| 37    1479889 | 14/3->4 |
| 37   41479889 | |
| -12 | Restar 4x3 de FG |
| 37   4 279889 | |
| -28 | Restar 4x7 de GH |
| 37   39999889 | |
| >>>-111 | Otro lado, -11/3->(-3) |
| -3 | |
| 37   39996889 | |
| +09 | Restar -3x3 de JK (sumar 3x3) |
| 37   39996979 | |
| +21 | Restar -3x7 de KL (sumar 3x7) |
| 37   39997000 | Este lado, resto nulo, cociente en E-I |

Podemos también usar la división tradicional, pero tengamos en cuenta que una regla de división **a/b>c+d**, en el otro lado, se transforma en **-a/b>(9-c)-d**, es decir, sustituimos el primer dígito del dividendo por el complemento a nueve de **c** y restamos **d** del siguiente dígito (en el ejemplo de abajo **1/3>3+1** se convierte en **-1/3>6-1**). Podríamos hablar por tanto de **reglas de división negativas**.

**1479889÷37, división con cociente excesivo (División tradicional)**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLMN** | |
| 37    1479889 | Regla: 1/3>3+1 |
| 37    3579889 | |
|       -12 | Restar 3x3 de FG |
| 37    3369889 | |
|      +1 | Forzamos la entrada al otro lado |
|       -37 | |
| 37    3999889 | |
|       >>>-111 | Regla: -1/3>6-1 (otro lado) |
| 37    3999679 | |
|           +21 | Sumar 3x7 a KL |
| 37    3999700 | ¡Hemos salido del otro lado! |
| | Resto nulo, cociente en F-J |

## ¿Cuándo usar el método?

El método de división por cociente excesivo no es un método especial en el sentido de que sólo sea aplicable bajo determinadas circunstancias; se trata de un método general, avanzado, aplicable en todos los casos. Que sea práctico o no, eso ya es otra cuestión que quizás tenga algo de personal; lo que está claro es que, con su práctica, se puede alcanzar un grado de comprensión de la operación de división que no sería posible practicando sólo los métodos elementales moderno o tradicional.

De los ejemplos anteriores, se deduce que el método será práctico cuando el dividendo sea sólo ligeramente menor que el divisor, lo que permite augurar algunos nueves seguidos en el cociente y un cálculo más breve. Por ejemplo: 998001÷999, el primer dividendo 998 es casi igual al divisor 999, una buena oportunidad de entrar al otro lado:

**998001÷999, usando cociente excesivo División moderna**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLM** | |
| 999     998001 | Dividendo casi igual al divisor! |
| 999    T998001 | Cociente excesivo T (10) |
|        -9990 | Restar Tx999 de H-K |
| 999    9999001 | Otro lado! |

| | |
|---|---|
| >>>-999 | Lectura: -999 |
| -1 | -999/999 =-1, revisar al alza I (negativo!) |
| 999   9989001 | |
| +999 | Restar -1x999 (sumar +999) de K-M |
| 999   999 | Este lado! resto nulo, resultado en G-I |

y ahora con división tradicional: 9998001÷9999

**9998001÷9999, usando cociente excesivo**
**División tradicional**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLMN** | |
| 9999   99980001 | Regla: 9/9>9+9 |
| 9999   9898   1 | |
| -8991 | Restar 9x999 de H-K |
| 9999   99989001 | Forzar entrada al otro lado |
| +1 | revisando G al alza |
| 9999   T9989001 | |
| -9999 | restar 9999 de H-K |
| 9999   99990001 | En el otro lado! |
| >>>-9999 | Lectura: -9999 |
| -1 | Revisar J al alza (negativo!) |
| 9999   99980001 | |
| +9999 | Restar -1x9999 (sumar +9999) de K-N |
| 9999   99990000 | De vuelta en este lado! |
| 9999   9999 | Resto nulo, resultado en G-J |

Pero insistiendo una vez más, se trata de un método general y podemos entrar y salir del otro lado cuando queramos.

**7÷37=0.189189189..., usando cociente excesivo**
**División moderna**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLMN** | |
| 37     7 | |
| 37   2 7 | Cociente excesivo 2 |
| -74 | Restar 2x37 de GH |
| 37   1996 | En el otro lado! |
| >>>-4 | Lectura: -4; |
| -1 | Revisar F al alza (negativo!) |
| +37 | |

| | |
|---|---|
| 37   18997 | |
| >>>-3 | Lectura: -3; -30/37 -> -8 |
| -8 | |
| 37   18917 | |
| +296 | Restar -8x37 de I-K |
| 37   1891996 | |
| >>>-4 | Lectura: -4; (repetición) |
| -1 | Revisar I al alza (negativo!) |
| +37 | |
| 37   18918997 | |
| -1 | Revisar I al alza otra vez |
| +37 | para salir del otro lado |
| 37   18918 34 | De vuelta en este lado! |
| ... | Etc. |

# Otras lecturas


- Kojima, Takashi (1963). *Advanced Abacus: Theory and Practice*. Tokyo: Charles E. Tuttle Co., Inc.. ISBN 978-0-8048-0003-7.
- Murakami, Masaaki (2019). «帰一法除法 (Division by Complementary Numbers)» (PDF). *算盤 Abacus: Mystery of the Bead*. Archivado desde el original, el 1 de Agosto de 2021.
- Murakami, Masaaki (2019). «Division with Excessive Quotient» (PDF). *算盤 Abacus: Mystery of the Bead*. Archivado desde el original, el 1 de Agosto de 2021.

# XXVI Método de Newton para Raíces Cuadradas, Cúbicas y Quintas

## Introducción

El Método de Newton para obtener raíces no es un método tradicional en el contexto del ábaco, pero sí es un método muy antiguo; de hecho, es anterior a Newton en muchos siglos, recibiendo también el nombre de *Método de Herón* e incluso de *Método Babilónico* aunque no haya evidencia de su uso por parte de ningún escriba babilónico. Si esta forma de obtener raíces se llama método de *Newton*, es únicamente porque puede derivarse como un caso particular del método más general de Newton-Raphson para resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones genéricas. En cualquier caso, este método parece ser mucho más antiguo que cualquier ábaco oriental de cuentas fijas.

Se trata de un método iterativo para obtener **raíces enésimas** en el que, partiendo de una aproximación inicial a la raíz , se construyen aproximaciones sucesivas a la misma de acuerdo a la expresión:

$$x_{k+1} = \frac{1}{n}\left((n-1)x_k + \frac{A}{x_k^{n-1}}\right)$$

de forma que la secuencia de valores obtenidos: $x_0, x_1, \cdots x_k, \cdots$ se aproxima continuamente al valor de la raíz $x = \sqrt[n]{A}$; siendo cada término $x_k$ una mejor aproximación a ésta que el término anterior. Decimos que la secuencia $x_0, x_1, \cdots x_k, \cdots$ *tiende* o *converge* a la raíz $x_0, x_1, \cdots \to x = \sqrt[n]{A}$ o que la raíz es el límite de $x_k$ cuando $k$ tiende a infinito:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \sqrt[n]{A}$$

como será más claro en un ejemplo posterior que además nos mostrará la vertiginosa velocidad a la que la secuencia $x_k$ se acerca a la raíz; tanto que, en el ábaco, nos bastarán dos o tres iteraciones para alcanzar 4-8 dígitos de precisión.

La expresión general anterior para la raíz enésima toma las formas particulares:

**Método de Newton para** $n = 2, 3$ y $5$

| | |
|---|---|
| **Raíz cuadrada:** $x = \sqrt{A}$ | $x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + A/x_k\right)$ |
| **Raíz cúbica:** $x = \sqrt[3]{A}$ | $x_{k+1} = \frac{1}{3}\left(2x_k + A/x_k^2\right)$ |
| **Raíz quinta:** $x = \sqrt[5]{A}$ | $x_{k+1} = \frac{1}{5}\left(4x_k + A/x_k^4\right)$ |

La aparición del término $x^{n-1}$ limita en la práctica la utilidad de este método para valores elevados de $n$, ya que requiere de un algoritmo eficiente para su evaluación, lo cual no es trivial ni en el cálculo manual ni con la computadora.

Tras un poco de experimentación, el lector podrá usar cómodamente este método para obtener raíces cuadradas y cúbicas y, con un poco de esfuerzo adicional, raíces quintas. Cabe decir sin embargo, que este método no parece representar ninguna ventaja especial frente al método para raíces cuadradas explicado en sección anterior (preparación del dividendo) en cuanto a cantidad de cálculo necesario para obtener las primeras cifras de la raíz. Es para raíces cúbicas donde el método se muestra claramente superior a las técnicas tradicionales por su sencillez, eficiencia y resistencia a errores. Para las raíces quintas, las cosas son un poco más complicadas y tal vez no deberían intentarse hasta que se dominen bien las raíces cúbicas.

Dado lo anterior, nos centraremos aquí principalmente en dichas raíces cúbicas.

# Raíces cúbicas

## Antes de empezar

Como cuestión previa, si nos proponemos obtener raíces cúbicas, tengamos en cuenta que cualquier número real $A$ se puede escribir en notación de ingeniería como:

$$A = A' \times 10^{3m}$$

con $1 \leq A' < 1000$ y $m$ un número entero (positivo o negativo); con lo que su raíz cúbica puede escribirse

$$\sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{A'} \times 10^{m}$$

lo que significa que podemos restringirnos a considerar sólo el problema para $A'$, es decir, obtener raíces cúbicas de números comprendidos entre 0 y 1000, teniéndose que:

$$1 \leq \sqrt[3]{A'} < 10$$

Por ejemplo, el radicando $60698457$ que se cita más abajo, puede escribirse: $60.698457 \times 10^6$ y $\sqrt[3]{60698457} = \sqrt[3]{60.698457} \times 10^2$, con $\sqrt[3]{60.698457} = 3.93$, es decir: $\sqrt[3]{60698457} = 3.93 \times 10^2 = 393$.

Una vez que nos centramos en las raíces cúbicas de números entre 0 y 1000, conviene memorizar desde el principio la tabla de cubos siguiente para elegir el valor inicial a utilizar.

**Tabla de cubos**

| $b$ | $b^3$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 8 |
| 3 | 27 |
| 4 | 64 |
| 5 | 125 |
| 6 | 216 |
| 7 | 343 |
| 8 | 512 |
| 9 | 729 |

## Ejemplo usando la calculadora bc

Antes que nada, veamos un ejemplo de una raíz cúbica usando una calculadora para poner de manifiesto la "*belleza oculta*" de este tipo de método. En particular, aquí hemos se ha usado la utilidad de consola bc, disponible para todos los sistemas operativos, por permitir trabajar con precisión arbitraria; lo que nos permitirá seguir un ejemplo con un número exagerado de decimales. Calculemos:

$$x = \sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{100\pi}$$

Como comienzo, evaluamos $100\pi$ con 40 decimales:

$$A = 100\pi = 314.1592653589793238462643383279502884196800$$

así como su raíz cúbica:

$$x = \sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{100\pi} = 6.7980333511054289727967487123991688962876$$

A continuación, trataremos de aproximarnos a este valor de la raíz usando el método de Newton. De acuerdo con la tabla de cubos dada arriba, elegiremos 7 como valor inicial aproximado de la raíz $x_0$ ya que su cubo 343 es el valor tabulado más próximo al radicando $100\pi$. Con este valor $x_0 = 7.0$ inicial, usando: $x_{k+1} = \left(2x_k + A/x_k^2\right)/3$ obtenemos con 30 decimales:

| | |
|---|---|
| $x_0$ | 7.0 |
| $x_1$ | 6.803804526251560026165063526040 |
| $x_2$ | 6.798038244991678152259576056269 |
| $x_3$ | 6.798033351108952065196287174827 |
| $x_4$ | 6.798033351105428972796750538247 |
| $x_5$ | 6.798033351105428972796748712399 |
| $x$ | **6.798033351105428972796748712399** |

donde los dígitos que aparecen repetidos en la siguiente iteración se han subrayado para revelar la "belleza oculta" de este método que mencionamos anteriormente: la **convergencia es cuadrática**, lo que significa que el número de dígitos correctos del resultado básicamente **se duplica** en cada iteración. Esto marca una gran diferencia con los métodos tradicionales o los métodos aritméticos elementales donde sólo se obtiene una nueva cifra del resultado en cada paso (convergencia lineal).

## Ejemplo de cálculo manual

Las computadoras no sufren por manejar un número excesivo de decimales, nosotros sí. Por tanto, conviene decidir qué queremos obtener de un cálculo antes de realizarlo a mano, ya sea con papel y lápiz o con el ábaco, y proceder en consecuencia. En el caso de las raíces, esto tiene dos aspectos:

- ¿Cuántas cifras queremos que tenga nuestro resultado?
- ¿Cuántas cifras debemos manipular durante los cálculos intermedios para obtener lo anterior?

La mayoría de los cálculos prácticos utilizan números del mundo real obtenidos por medición, y las medidas son siempre de precisión limitada. Las medidas usuales suelen tener tres dígitos significativos, excepcionalmente cuatro, y sólo mediciones muy cuidadosas, con protocolos muy exigentes que pueden extenderse a lo largo de años, conducen a resultados con más cifras significativas. Esta es la razón por la que las tablas de logaritmos con cuatro decimales, las reglas de cálculo y las operaciones abreviadas fueron tan útiles y populares en el pasado; sólo los problemas de matemática pura, astronomía, geodesia, topografía, navegación, etc. necesitaban más precisión.

Propongámonos, por ejemplo, obtener raíces cúbicas hasta cuatro cifras significativas; lo que no significa que no podamos cambiar de opinión más adelante y continuar los cálculos hasta conseguir mayor precisión. Tomemos esto como una respuesta a la primera de las dos cuestiones anteriores.

En cuanto a la segunda cuestión, no es necesario utilizar más de uno o dos dígitos decimales adicionales en los cálculos intermedios. Así, si queremos un resultado con cuatro cifras significativas, sólo tendremos que utilizar cinco o seis dígitos en los cálculos intermedios. Es interesante recalcar esto porque con los métodos tradicionales uno se acostumbra a problemas como hallar la raíz cúbica de 60698457, un número con 8 dígitos, y se espera que, con los métodos tradicionales, se demuestre que el número dado es un cubo perfecto y que su raíz cúbica es exactamente 393, lo que requerirá usar las 8 cifras del radicando. Pero los cubos perfectos son escasos y casi todas las raíces cúbicas con las que nos podamos enfrentar en la práctica son números irracionales cuya representación consiste en una sucesión infinita de dígitos sin repetición. El método de Newton supone un cambio de paradigma respecto a los métodos tradicionales; en lugar de buscar las cifras *exactas* o *correctas* del resultado, nos limitamos a buscar una **aproximación útil** con un número dado de dígitos; y para esto quizás no necesitemos trabajar con todas las cifras del radicando. Por ejemplo, para obtener una aproximación de tres dígitos a la raíz cúbica de 60698457 sólo necesitamos trabajar con cuatro cifras como podemos comprobar redondeando el número a cuatro dígitos significativos (60700000) y calculando su raíz cúbica con una calculadora electrónica; el resultado que obtenemos, 393.003330089, es correcto a tres dígitos (en realidad a cinco).

Dicho todo esto, intentemos ahora obtener manualmente la raíz cúbica de $A = 100\pi$ con cuatro dígitos de precisión. Podríamos repetir los cálculos realizados anteriormente con la utilidad bc pero con un número menor de lugares decimales (usando $a = 314.1592654$ como valor aproximado de $A = 100\pi$) y seguir manualmente el mismo proceso que podríamos programar en una computadora con lo que obtendríamos:

**Método de Newton Vertical**

| | |
|---|---|
| $x_0$ | 7 |
| $x_1$ | 6.803805 |
| $x_2$ | 6.798038 |
| $x_3$ | 6.798033 |
| $x_4$ | 6.798033 |

proceso que, en ausencia de otro nombre, llamaremos aquí: **Método de Newton Vertical** (por la disposición de la tabla anterior). Pero lo que es adecuado para una computadora no necesariamente lo es para nosotros los humanos. Fijémonos en la fila $x_1 = 6.803805$ de la tabla anterior; partiendo de una aproximación inicial (7) a la raíz, hemos obtenido una nueva aproximación (6.803805) y si ahora seguimos ciegamente el método de Newton, como lo hace la computadora, en la próxima iteración tendremos que dividir dos veces por 6.803805 o bien obtener su cuadrado y dividir por él. Pero si partimos de una aproximación de un dígito a la raíz (7), sólo podemos esperar que el nuevo valor ($x_1 = 6.803805$) tenga una precisión de dos dígitos a lo sumo (por lo dicho sobre convergencia cuadrática) por lo que sería una pérdida de tiempo y esfuerzo emprender divisiones por el valor completo (6, 803805). Lo práctico para nosotros los humanos será redondear el resultado a $x_1 \approx 6.8$ y usarlo como un nuevo valor inicial $x_0 = x_1 \approx 6.8$ y repetir el proceso obteniendo un nuevo valor $x_1$:

**Método de Newton Horizontal** $a = 314.16$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_0$ | 7 | 6.8 | 6.798 |
| $x_1$ | 6.803810 | 6.798039 | 6.798039 |

Proceso que llamaremos aquí: **Método de Newton Horizontal** para distinguirlo del anterior. De este modo obtenemos una nueva solución $x_1$ que podría tener alrededor de cuatro cifras significativas. Ahora, redondeando nuevamente a estas cuatro cifras, tendremos una nueva $x_0$ para continuar, y así sucesivamente. Es de esperar que esta forma de proceder nos ahorre mucho trabajo y tiempo.

Vemos que, en este caso, la meta de cuatro dígitos se alcanza después de solo dos rondas o iteraciones y que nos ha bastado usar 5 dígitos del radicando ($a = 314.16$). En el Apéndice veremos cómo desarrollar este proceso en el ábaco.

Es de destacar que si en cualquier momento cambiamos de opinión y queremos 8 dígitos del resultado en lugar de 4, el trabajo hecho hasta ahora no se pierde, todo lo que tenemos que hacer es usar 9 o 10 dígitos en lugar de 5 para el radicando y usar la última raíz obtenida (redondeada) como el nuevo valor inicial $x_0$.

Por cierto, en cada iteración debemos elegir una de las siguientes alternativas:

- Dividir una vez por el cuadrado de $x_0$
- Dividir dos veces por $x_0$

Normalmente, la primera opción resulta rápida para las dos primeras iteraciones, pero a partir de ahí la segunda parece más adecuada. Esto es una cuestión de gusto o preferencia personal.

## Ejemplos en el ábaco

El uso del método de Newton es, básicamente, una secuencia de divisiones. El lector ya conoce su ábaco, cómo dividir y cómo organizar las operaciones según sus gustos personales, por eso no parece especialmente importante dar ejemplos concretos de aplicación con el ábaco; cada cual debería organizar los cálculos como más cómodo le resulte, empleando el método de división que prefiera. No hay, por tanto, una forma estándar de organizar estos cálculos en el ábaco; no obstante, en el Apéndice, se incluye un ejemplo usando la división tradicional (**TD**) y la disposición tradicional de la división (**TDA**) que permite demostrar que un pequeño ábaco de solo 13 varillas es suficiente para lograr un resultado bastante preciso; tenga o no cuentas adicionales. Esto marca una gran diferencia con los métodos tradicionales.

Lo que quizás es más importante con este método es que el lector se entrene y experimente con papel y una calculadora, o con una hoja de cálculo, para asegurarse de que asimila la esencia del método y lo dicho acerca de número de dígitos a usar, precisión etc. lo cual le facilitará el llevarlo a efecto en el ábaco. Aquí tiene una propuesta del tipo de ejercicio que podría intentar para este fin:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **A:** | 123.456789 | **a:** | 123.4 | 123.457 | 123.456789 |
| **Raíz cúbica:** | 4.97933859218174 | **x0:** | 5 | 4.98 | 4.9793 |
| | | **x1:** | 4.98 | 4.979 | 4.979338592 |
| **A:** | 234.567891 | **a:** | 234.5 | 234.5 | 234.567891 |
| **Raíz cúbica:** | 6.16722113576207 | **x0:** | 6 | 6.2 | 6.167 |
| | | **x1:** | 6.17 | 6.167 | 6.167221144 |
| **A:** | 345.678912 | **a:** | 345.7 | 345.679 | 234.567891 |
| **Raíz cúbica:** | 7.01817665163704 | **x0:** | 7 | 7.02 | 6.167 |
| | | **x1:** | 7.02 | 7.018 | 6.167221144 |
| **A:** | 456.789123 | **a:** | 457 | 456.79 | 456.789123 |
| **Raíz cúbica:** | 7.70143967570938 | **x0:** | 8 | 7.7 | 7.701 |
| | | **x1:** | 7.71 | 7.701 | 7.701439701 |
| **A:** | 567.891234 | **a:** | 567.9 | 567.89 | 567.891234 |
| **Raíz cúbica:** | 8.28110684986205 | **x0:** | 9 | 8.3 | 8.281 |
| | | **x1:** | 8.34 | 8.281 | 8.281106851 |
| **A:** | 678.912345 | **a:** | 678.9 | 678.91 | 678.912345 |
| **Raíz cúbica:** | 8.7889683778839 | **x0:** | 9 | 8.8 | 8.789 |
| | | **x1:** | 8.79 | 8.789 | 8.788968378 |
| **A:** | 789.123456 | **a:** | 789.1 | 789.12 | 789.123456 |
| **Raíz cúbica:** | 9.24091518455268 | **x0:** | 9 | 9.3 | 9.241 |
| | | **x1:** | 9.25 | 9.241 | 9.240915185 |
| **A:** | 891.234567 | **a:** | 891.2 | 891.23 | 891.234567 |
| **Raíz cúbica:** | 9.6234473398081 | **x0:** | 10 | 9.6 | 9.623 |
| | | **x1:** | 9.64 | 9.623 | 9.623447361 |
| **A:** | 912.345678 | **a:** | 912.3 | 912.34 | 912.345678 |
| **Raíz cúbica:** | 9.69884025529398 | **x0:** | 10 | 9.7 | 9.699 |
| | | **x1:** | 9.71 | 9.699 | 9.698840258 |

# Extensión a otras raíces de orden primo

## Raíces quintas

Para extender el método a la raíz quinta , comencemos por considerar que cualquier número real $A$ puede escribirse como

$$A = A' \times 10^{5m}$$

donde $1 \leq A' < 100000$ y $m$ es un número entero (positivo o negativo); por lo que se puede escribir la raíz quinta:

$$\sqrt[5]{A} = \sqrt[5]{A'} \times 10^{m}$$

por lo que que podemos restringirnos a considerar sólo el problema para $A'$, es decir, obtener la raíz cúbica de números comprendidos entre 0 y 100 000 que estará comprendida en el intervalo:

$$1 \leq \sqrt[5]{A'} < 10$$

Resultará útil, si no memorizar, tener a mano la tabla de potencias cuartas y quintas siguiente:

**Tabla de potencias cuartas y quintas**

| $d$ | $d^4$ | $d^5$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 16 | 32 |
| 3 | 81 | 243 |
| 4 | 256 | 1024 |
| 5 | 625 | 3125 |
| 6 | 1296 | 7776 |
| 7 | 2401 | 16807 |
| 8 | 4096 | 32768 |
| 9 | 6561 | 59049 |

Recordando que para raíces quintas $x_{k+1} = \left(4x_k + A/x_k^4\right)/5$, habrá que decidir en cada iteración una de las siguientes alternativas:

- Dividir cuatro veces por la raíz anterior $x_k$.
- Dividir dos veces por el cuadrado de la raíz anterior $x_k^2$.
- Dividir una vez por la cuarta potencia de la raíz anterior $x_k^4$.

lo cual significa un grado de complicación y cantidad de trabajo mayor que en el caso de raíces cúbicas.

Veamos el ejemplo de $A = 100\pi$ (cuya raíz quinta es $\sqrt[5]{100\pi} = 3.15812979\cdots$) usando $a = 314.16$ como aproximación. Por la tabla anterior vemos que la raíz quinta de $A$ es algo mayor que tres, por lo que elegimos $x_0 = 3$. Usando $x_0^4 = 81$ (de la tabla), llegamos rápidamente a $x_1 = 3.1757$, por lo que una mejor aproximación a la raíz es $3.2$

**Raíz quinta de** $A = 100\pi$
**a=314.16**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **x0** | 3 | 3.2 | 3.16 |
| **x1** | 3.1757 | 3.1592 | 3.1581 |

Si intentamos una ronda más con este nuevo valor inicial, después de un poco de trabajo tendremos 3.1592, que tiene casi cuatro dígitos correctos (es solo 0.001 de la raíz verdadera o un error de 0.03%).

### Raíces séptimas

En principio, es posible extender el método a raíces de orden primo superiores (para raíces cuyo orden tiene divisores, siempre será más sencillo realizar una serie de raíces en cadena de órdenes primos más pequeños; por ejemplo, para la raíz duodécima de 2 será preferible evaluar

$$\sqrt[12]{2} = \sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{2}}}$$

que tratar de obtener directamente la raíz duodécima). En la práctica, sin embargo, ya hemos visto la complicación que aparece con raíces quintas, complicación que se agravaría para raíces séptimas y que en el caso general procede de la presencia del término $x_k^{n-1}$ en la expresión de $x_{k+1}$ que es *costoso* de evaluar, suponiendo un límite efectivo a la aplicación del método de Newton tanto en cálculo manual (ábaco o escrito) como con las computadoras.

El lector puede convencerse por si mismo de lo anterior intentando alguna raíz séptima por su cuenta, pero si desea obtener raíces de órdenes elevados con su ábaco, lo mejor será que use el cálculo logarítmico. Aunque no expresamente recogido en los manuales sobre el ábaco, el cálculo logarítmico se extendió rápidamente por Oriente, de la mano de misioneros y embajadores científicos Jesuitas, casi inmediatamente tras su invención y se usó en conjunción con el ábaco que resultó ser un auxiliar formidable al simplificar y acelerar las sencillas transformaciones aritméticas requeridas por aquél. Si no le atrae la idea de importar a su ábaco logaritmos procedentes de una fuente externa (tablas o calculadora), puede tratar de obtenerlos directamente sobre el ábaco. En el capítulo: Método RADIX para Logaritmos y Antilogaritmos Decimales se explicará una técnica que, por ejemplo, le permitirá obtener una raíz séptima en pocos minutos.

# Conclusiones

El método de Newton sobre el ábaco, en comparación con los métodos tradicionales, tiene una serie de ventajas y desventajas. La siguiente lista probablemente sea incompleta.

### Pros

- Es más fácil de recordar.

- Es rápido, a menudo tres iteraciones conducen a una raíz de 7-8 dígitos.
- Es compacto, para 7-8 dígitos sólo necesita un ábaco de 15-17 varillas si se usa la división moderna, tal vez 13 varillas sean suficientes usando la división tradicional (**TD**) en disposición tradicional (**TDA**). Para el mismo propósito, usando los métodos tradicionales, necesitaría un ábaco con muchas más varillas.
- Pequeños errores se "planchan" con las siguientes iteraciones y desaparecen (equivalen a tomar un valor inicial $x_0$ distinto del óptimo), no se vuelven catastróficos como sería el caso de los métodos tradicionales.
- Como este método es principalmente una secuencia de divisiones, puede utilizar su ábaco favorito, algoritmo de división y arreglo de operaciones para adaptarlo a sus gustos personales.

### Contras

- No es fácil saber cuántos dígitos del resultado son correctos sin una iteración adicional, pero sus habilidades numéricas le ayudarán y lo harán más interesante.
- No es fácil saber si un número dado es un cuadrado, cubo, etc. perfecto o no.
- El radicando debe introducirse varias veces en el ábaco; por lo que habrá que memorizarlo o tenerlo disponible por escrito, etc.
- Sobre el ábaco, el resultado no sustituye al radicando como en el método tradicional y al igual que que ocurre con el resto de las operaciones aritméticas elementales donde el resultado ocupa el lugar de uno de los operandos.

## Apéndice: Ejemplo del método de Newton (raíz cúbica) en un ábaco de 13 varillas

Raíz cúbica de $A = 100\pi$ usando división tradicional (**TD**) y la disposición tradicional de la división (**TDA**) para lograr compacidad. Se puede usar cualquier tipo de ábaco si sabe Cómo Tratar con el Desbordamiento. En principio, nos proponemos obtener cuatro dígitos de la raíz, por lo que nos basaremos en la aproximación $a = 314.16$ al radicando $A$. De acuerdo a la tabla de cubos, podemos tomar $x_0 = 7$ como primera versión de la raíz.

**Raíz cúbica de $A = 100\pi$ (4 cifras)**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLM** | |
| 49   31416 | Radicando en F-J, para ser dividido por 7x7=49 |
|  .     . | Varillas unidad |
| 49   73416 | Regla: 3/4>7+2 |
|     -1 | Revisión a la baja |
|      +4 | |
| 49   67416 | |
|      -54 | Restar 6x9 de GH |
| 49   62016 | |
| 49   65016 | Regla: 2/4>5+0 |

| | |
|---|---|
| -1 | Revisión a la baja |
| +4 | |
| 49 64416 | |
| -36 | Restar 4x9 de HI |
| 49 64056 | 56 > 49 |
| +1 | Revisión al alza de H |
| -49 | |
| 49 64107 | Tres dígitos del cociente son suficientes |
| 641 | Borrando resto y divisor |
| . | Varilla unidad |
| +14 | Sumar el doble de la raíz anterior |
| 2041 | |
| 3 2041 | Dividir por 3 3 |
| 3 6241 | Regla: 2/3>6+2 |
| 3 6661 | Regla: 2/3>6+2 |
| 3 6801 | Revisar al alza dos veces |
| 3 6803 | Regla: 1/3>3+... four quotient digits, stop |
| . | Varilla unidad |
| 6803 | Borrar A, **Nueva raiz ≈ 6.8** |
| 36 6803 | elevando al cuadrado 6.8, poner 6x6 en AB |
| +96 | Sumar 2x6x8 a BC |
| +64 | Sumar 8x8 a CD |
| 46246803 | |
| 46246803 68 | Por conveniencia, poner nueva raíz en LM |
| 4624 68 | Borrar cosas viejas... |
| 4624 68 | |
| 4624 31416 68 | poner radicando nuevamente, a dividir ahora por 46.24 |
| . . . | Varilla unidad |
| 4624 73416 68 | Regla: 3/4>7+2 |
| -1 | Revisión a la baja |
| +4 | |
| 4624 67416 68 | |
| ABCDEFGHIJKLM | |
| 4624 67416 68 | |
| -36 | Restar 6x624 de G-J |
| -12 | |
| -24 | |
| 4624 63672 68 | |
| 4624 67872 68 | Regla: 3/4>7+2 |

| | |
|---|---|
| -42 | Restar 7x624 de H-K |
| -14 | |
| -28 | |
| 4624 67435268 | |
| 4624 67975268 | Regla: 4/4>9+4 |
| -54 | Restar 9x624 de H-K |
| -18 | |
| -36 | No queda sitio! Seguimos con división aproximada |
| 4624 67919068 | Siguiente, Regla: 1/4>2+2, pero esto trae consigo... |
| 4624 67921068 | OverflowFlag ON! Memorícelo o use cuentas adicionales |
| | o suspendidas! |
| -12 | Restar 2x624 de J-M, OverflowFlag OFF! |
| -04 | No queda sitio! Aproximando! |
| -08 | No queda sitio! Aproximando! |
| 4624 67929868 | Revisar al alza dos veces |
| +2 | |
| -9248 | |
| 4624 67940568 | Revisión al alza de J |
| +1 | |
| -4 | |
| 4624 67941168 | |
| 67941 68 | Borrar resto y divisor |
| . . . | Varilla unidad |
| 67941136 | Doble la raíz antigua sumándola a si misma |
| +136 | Sumar el resultado a E-G y borrar KLM |
| 203941 | |
| 3 203941 | Dividir por 3 |
| 3 679803 | Resultado de la división. |
| . . | Varilla unidades. **Nueva raiz ≈ 6.798** |

A partir de aquí, si desea continuar para lograr mayor precisión, puede empezar de nuevo utilizando $x_0 = 6.798$ y $a = 314.15927$.

**Raíz cúbica de $100\pi$ (continuación)**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLM** | Para continuar, poner nueva raíz en A-D y el radicando en F-M |
| 6798 31415927 | 8 dígitos del radicando |
| . . | Varilla unidad. Empiece dividiendo el radicando dos veces por |

| | |
|---|---|
| etc... | 67.98 (en lugar de elevar al cuadrado este número y dividir por él)<br>hay suficiente espacio para llegar a una raíz de 6-7 dígitos usando<br>división abreviada cuando sea necesario. |

**Nota:**

Para elevar un número al cuadrado en el ábaco, puede seguir el procedimiento descrito en el capítulo: Métodos Especiales de Multiplicación.

# XXVII Método RADIX para Logaritmos y Antilogaritmos Decimales

## Introducción

La resolución manual de ciertos problemas requiere el uso de logaritmos; por ejemplo, problemas de raíces o potencias complicadas, o de valor del dinero en el tiempo (TVM), etc. Con el ábaco, al igual que en el cálculo escrito, hay dos posibles enfoques para el uso de logaritmos:

- Importar los logaritmos desde una tabla o calculadora externa.
- Obtener los logaritmos directamente.

La primera opción es la práctica, la que ha sido utilizado durante siglos en el cálculo logarítmico, pero tiene el inconveniente de hacer que el trabajo con el ábaco resulte poco menos que trivial y poco atractivo para el abacista del siglo XXI. Por otro lado, el más purista podría quejarse del uso de recursos externos a su ábaco.

La segunda opción, interesante en sí misma, representa una cantidad extraordinaria de trabajo; razón por la cual muchas personas en el pasado pasaron décadas de su vida construyendo tablas de logaritmos para simplificar el trabajo de otros. Solamente en las raras ocasiones en las que se requería mayor precisión de la que podían proporcionar las tablas de logaritmos disponibles, se procedía a la obtención directa de logaritmos de mayor precisión.

Afortunadamente, existe una tercera vía intermedia entre las dos anteriores: el **método Radix** [Flower 1771; Lupton 1913], que permite obtener logaritmos y antilogaritmos de cualquier número utilizando una tabla de datos externos reducida y con una cantidad razonable de trabajo. Además, este método puede resultar atractivo para el abacista ya que pasará la mayor parte del tiempo practicando dos métodos especiales, a saber: multiplicación y división por números ligeramente mayores que uno, introducidos en los capítulos: Métodos Especiales de Multiplicación y Métodos Especiales de División. Justamente este método Radix era el mejor recurso para los casos indicados de necesitar mayor precisión que la ofrecida por las tablas disponibles.

A continuación, nos centraremos en la obtención de logaritmos y antilogaritmos decimales de 5 dígitos por este método. Se necesitará una pequeña tabla de datos que puede ser copiada o impresa en una tarjeta y guardada junto a su ábaco. No se desanime si la explicación es larga, el método tarda más en explicarse que en llevarse a la práctica; por ejemplo, obtener una raíz séptima sólo toma unos minutos (al menos en los *días buenos*). Empecemos.

## Antes de empezar

Cualquier número real positivo $x$ se puede escribir (notación científica) en la forma: $x = x' \cdot 10^k$, donde $1 \le x' < 10$ y $k$ es un número entero, por lo tanto su logaritmo se puede escribir: $\log_{10} x = k + \log_{10} x'$. Por ejemplo, para los números 7447 y 0.007447 tenemos:

| $x$ | $x'10^k$ | $\log_{10} x$ |
|---|---|---|
| 7447 | $7.447 \cdot 10^3$ | $3 + \log_{10} 7.447$ |
| 0.007447 | $7.447 \cdot 10^{-3}$ | $-3 + \log_{10} 7.447$ |

Por lo tanto, al igual que se hacía en las antiguas tablas de logaritmos, nos ocuparemos sólo de los números comprendidos entre 1 y 10.

# El Método Radix

## Fundamento

El método radix se basa en el conocimiento de un conjunto de números especiales o ***rádices*** para los que son conocidos sus logaritmos. El origen del término es la palabra latina para raíz: *radix* (plural: *radices*), ya que el primer conjunto de números especiales usados por H. Briggs, padre de los logaritmos decimales, fue el de las raíces cuadradas sucesivas del número 10 [Roegel 2011] para las cuales los logaritmos decimales son triviales $\log_{10} \sqrt[n]{10} = 1/n$:

**La Tabla Radix original**

| Radix | r | $\log_{10} r$ |
|---|---|---|
| $\sqrt[1]{10}$ | 10 | 1 |
| $\sqrt[2]{10}$ | 3.16227766 | 0.5 |
| $\sqrt[4]{10}$ | 1.77827941 | 0.25 |
| $\sqrt[8]{10}$ | 1.333521432 | 0.125 |
| $\sqrt[16]{10}$ | 1.154781985 | 0.0625 |
| etc. | ... | ... |

El uso de esta tabla era el siguiente: supongamos que se pueda factorizar nuestro número $x'$ en la forma

$$x' = f_1 \cdot f_2 \cdot \cdots f_n$$

donde $f_1, f_2, \cdots f_n$ son algunos de los *rádices* de la tabla anterior, entonces:

$$\log_{10} x' = \log_{10} f_1 + \log_{10} f_2 + \cdots + \log_{10} f_n$$

y como los logaritmos de los rádices figuran en la tabla anterior el problema estaría resuelto. Pero esto no va a ser el caso general, lo que podemos esperar es poder escribir $x'$ como:

$$x' = f_1 \cdot f_2 \cdot \cdots f_n \cdot R$$

donde $R$ es un factor residual, un último factor no incluido en la tabla y para el cual se desconoce su logaritmo. Pero si $R$ es un número muy cercano a 1 , entonces habremos aproximado $x'$ como un producto de nuestros números especiales

$$x' \approx f_1 \cdot f_2 \cdot \cdots f_n$$

y si $R$ es lo suficientemente cercano a la unidad, su logaritmo será lo suficientemente cercano a cero para poder ser despreciado con una precisión dada, teniéndose finalmente:

$$\log_{10} x' \approx \log_{10} f_1 + \log_{10} f_2 + \cdots + \log_{10} f_n$$

Este tipo de aproximación es posible porque la secuencia de rádices se acercan continuamente a la unidad mientras que sus respectivos logaritmos se acercan a cero. En un ejemplo que seguirá, veremos cómo es posible obtener la factorización de arriba con un sencillo proceso que puede ser seguido con cualquier número; pero antes de seguir, es preciso decir que la tabla Radix anterior, si bien tiene valor histórico ya que permitió a Briggs obtener los primeros logaritmos decimales, no es la más adecuada para el cálculo manual. Se atribuye a William Oughtred, inventor de la regla de cálculo, la introducción de otros rádices más convenientes que, limitados a cinco cifras, son los siguientes:

**Nuevos rádices**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.1 | 1.01 | 1.001 | 1.0001 | 1.00001 |
| 2 | 1.2 | 1.02 | 1.002 | 1.0002 | 1.00002 |
| 3 | 1.3 | 1.03 | 1.003 | 1.0003 | 1.00003 |
| 4 | 1.4 | 1.04 | 1.004 | 1.0004 | 1.00004 |
| 5 | 1.5 | 1.05 | 1.005 | 1.0005 | 1.00005 |
| 6 | 1.6 | 1.06 | 1.006 | 1.0006 | 1.00006 |
| 7 | 1.7 | 1.07 | 1.007 | 1.0007 | 1.00007 |
| 8 | 1.8 | 1.08 | 1.008 | 1.0008 | 1.00008 |
| 9 | 1.9 | 1.09 | 1.009 | 1.0009 | 1.00009 |

que requirieron el laborioso cálculo de sus logaritmos decimales (limitados aquí a cinco cifras):

**Tabla RADIX de cinco dígitos**

| | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0.00000 | 0.04139 | 0.00432 | 0.00043 | 0.00004 | 0.00000 |
| **2** | 0.30103 | 0.07918 | 0.00860 | 0.00087 | 0.00009 | 0.00001 |
| **3** | 0.47712 | 0.11394 | 0.01284 | 0.00130 | 0.00013 | 0.00001 |
| **4** | 0.60206 | 0.14613 | 0.01703 | 0.00173 | 0.00017 | 0.00002 |
| **5** | 0.69897 | 0.17609 | 0.02119 | 0.00217 | 0.00022 | 0.00002 |
| **6** | 0.77815 | 0.20412 | 0.02531 | 0.00260 | 0.00026 | 0.00003 |
| **7** | 0.84510 | 0.23045 | 0.02938 | 0.00303 | 0.00030 | 0.00003 |
| **8** | 0.90309 | 0.25527 | 0.03342 | 0.00346 | 0.00035 | 0.00003 |
| **9** | 0.95424 | 0.27875 | 0.03743 | 0.00389 | 0.00039 | 0.00004 |

los cuales, después de multiplicar por 100 000, se pueden expresar en una forma más compacta como:

**Tabla RADIX (condensada)**

| | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0 | 4139 | 432 | 43 | 4 | 0 |
| **2** | 30103 | 7918 | 860 | 87 | 9 | 1 |
| **3** | 47712 | 11394 | 1284 | 130 | 13 | 1 |
| **4** | 60206 | 14613 | 1703 | 173 | 17 | 2 |
| **5** | 69897 | 17609 | 2119 | 217 | 22 | 2 |
| **6** | 77815 | 20412 | 2531 | 260 | 26 | 3 |
| **7** | 84510 | 23045 | 2938 | 303 | 30 | 3 |
| **8** | 90309 | 25527 | 3342 | 346 | 35 | 3 |
| **9** | 95424 | 27875 | 3743 | 389 | 39 | 4 |

tabla que podríamos imprimir o copiar en una tarjeta para usarla junto con nuestro ábaco (La fila superior en las dos últimas tablas expresa el número de ceros tras el punto decimal en los rádices mientras que la primera columna contiene el dígito que las caracteriza). Aquí, de nuevo, la secuencia de rádices o números especiales, leídos por columnas de abajo hacia arriba y de izquierda a derecha, se aproxima continuamente a 1 mientras que la secuencia de sus respectivos logaritmos se acerca a 0.

Tomemos $x' = 7.447$ como ejemplo, este número se puede escribir:

$$7.447 = 7 \cdot 1.06 \cdot 1.003 \cdot 1.0006 \cdot 1.00003 \cdot 1.000006881$$

como puede verificarse con cualquier calculadora. El logaritmo decimal del último factor es

$$\log_{10} 1,000006881 \cdots \approx 0.000002988 \cdots < 5 \cdot 10^{-6}$$

de modo que, si cinco cifras son suficiente precisión para nosotros, podremos despreciar dicho factor teniéndose:

$$\log_{10} 7.447 \approx \log_{10} 7 + \log_{10} 1.06 + \log_{10} 1.003 + \log_{10} 1.0006 + \log_{10} 1.00003$$

Si tomamos de la tabla Radix los logaritmos de cada uno de estos factores y los sumamos:

| $r$ | $\log_{10} r$ |
|---|---|
| **7** | 84510 |
| **1.06** | 2531 |
| **1.003** | 130 |
| **1.0006** | 26 |
| **1.00003** | 1 |
| **Suma:** | **87198** |

tendremos:

$$\log_{10} 7.447 \approx 0.87198$$

que podemos comparar a $\log_{10} 7.447 = 0.87198135384336935675621703153018 23\cdots$ y comprobar que hemos conseguido cinco cifras de precisión.

A continuación veremos cómo obtener la factorización de cualquier número.

## Método

### Obtención de logaritmos

La factorización anterior del número cuyo logaritmo buscamos se obtiene por división repetida. Por ejemplo, dado $x' = 7.447$, como primer paso lo dividiremos por sí mismo truncado a un dígito, es decir, por 7

$$7.447/7 = 1.063857143\cdots$$

o

$$7.477 \approx 7 \cdot 1.063857143$$

Ahora, como segundo paso,se debe dividir el cociente anterior $1.063857143$ por sí mismo truncado a dos dígitos, pero como este número es 1,0 no hay nada que hacer y pasamos a la tercera etapa dividiendo por el cociente truncado a tres dígitos, es decir, por $1.06$

$$1.063857143/1.06 = 1.003638814\cdots$$

es decir:

$$7.447 \approx 7 \cdot 1,06 \cdot 1.003638814$$

para el cuarto paso continuamos con la división del cociente anterior $1.003638814$ por sí mismo, ahora truncado a cuatro dígitos

$$1.003638814/1.003 = 1.000636903\cdots$$

es decir

$$7,447 \approx 7 \cdot 1,06 \cdot 1,003 \cdot 1,000636903$$

en el quinto paso, dividimos $1,000636903$ por sí mismo truncado a cinco dígitos:

$$1.000636903/1.0006 = 1.000036881\cdots$$

$$7.447 \approx 7 \cdot 1.06 \cdot 1.003 \cdot 1.0006 \cdot 1.000036881$$

y, finalmente, un último y sexto paso

$$1.000036881/1.00003 = 1.000006881\cdots$$

$$7.447 \approx 7 \cdot 1.06 \cdot 1.003 \cdot 1.0006 \cdot 1.00003 \cdot 1.000006881$$

y terminamos aquí. Ahora solo tenemos que recolectar los logaritmos de los factores de la tabla Radix y sumarlos para obtener el logaritmo requerido.

$$\log_{10} 7.447 \approx 0.87198$$

**Nota:**

La larga secuencia de divisiones necesaria para factorizar un número se ve notablemente agilizada y facilitada en el ábaco por el método: Divisor ligeramente menor que la unidad.

### Uso de los logaritmos

Usualmente, nos interesamos en el logaritmo de un número para hacer algo práctico con él; aquí, para seguir con el ejemplo, vamos a usarlo para encontrar la raíz séptima de $7447 = 7.447 \cdot 10^3$.

$$\log_{10} 7447 = 3 + \log_{10} 7.447 = 3 + 0.87198 = 3.87198$$

$$\log_{10}(\sqrt[7]{7447}) = (\log_{10} 7447)/7 = 3.87198/7 = 0.55314$$

quedando ahora el problema de encontrar el correspondiente antilogaritmo para conocer la raíz buscada.

### Obtención de antilogaritmos

Continuando con el ejemplo, necesitamos obtener ahora el antilogaritmo del último número. Para ello, tenemos que descomponer el número $0.55314$ como la suma de los logaritmos de algunos de los factores o números especiales de la tabla Radix. Primero vemos que el mayor logaritmo que podemos restar sin obtener un resultado negativo es $0.47712$ (que corresponde al factor $3$), con lo cual obtenemos $0.07602$ como diferencia. De esta última cantidad, a su vez, podemos restar $0.04139$ (correspondiente al factor $1.1$) quedando $0.03463$, y así sucesivamente, como se ilustra en la siguiente tabla:

| Log | Restar | Factor |
|---|---|---|
| 0.55314 | 0.47712 | 3 |
| 0.07602 | 0.04139 | 1.1 |
| 0.03463 | 0.03342 | 1.08 |
| 0.00121 | 0.00087 | 1.002 |
| 0.00034 | 0.00030 | 1.0007 |
| 0.00004 | 0.00004 | 1.00009 |

Lo que nos permite escribir:

$$\log_{10}\left(\sqrt[7]{7447}\right) \approx \log_{10} 3 + \log_{10} 1.1 + \log_{10} 1.08 + \log_{10} 1.002 + \log_{10} 1.0007 + \log_{10} 1.00009$$

o, lo que es lo mismo,

$$\sqrt[7]{7447} \approx 3 \cdot 1.1 \cdot 1.08 \cdot 1.002 \cdot 1.0007 \cdot 1.00009$$

que, una vez hechas las multiplicaciones, nos conduce al valor:

$$\sqrt[7]{7447} \approx 3.573949416$$

que podemos comparar con el valor de la raíz séptima $\sqrt[7]{7447} = 3.5738818\cdots$, resultando ser correcto en 4 o 5 dígitos.

# El método Radix con el ábaco

## Obtención de logaritmos

Para realizar el procedimiento anterior sobre el ábaco, cada uno podrá utilizar diferentes métodos de división, disposición de operaciones, tipo de ábaco, etc. dependiendo de sus gustos personales. La forma de organizar las operaciones que se presenta a continuación es muy compacta pero no necesariamente tiene por qué ser la mejor para todos. Como se verá, un ábaco de 15 columnas es suficiente para hacer estos cálculos y quizás también uno de sólo 13. La primera división será normal y puede hacerse por el método moderno o el tradicional, las restantes deberán hacerse utilizando el método: Divisor ligeramente menor que la unidad por su simplicidad y rapidez.

**Logaritmo de 7.447 método Radix, 1ª división: tradicional**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLMNO** | |
|      7447 | Anote 7 en A |
| 7    1063857143 | División normal por 7, anote 6 en C |
| 706  1003638814 | División especial por 1.06, anote 3 en D |
| 7063 1000636903 | División especial por 1.0006, anote 6 en E |
| 706361000036881 | Siguiente divisor es 1.00003... |
| 70636 | ... simplemente borre el resto F-0 |
| 706363 | y anote 3 en F como último dígito |

El proceso es idéntico empezando con la división moderna, sólo que habría empezar una columna más a la derecha.

**Logaritmo de 7.447 método Radix, 1ª división: moderna**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLMNO** | |
|       7447 | Anote 7 en A |
| 7    1063857143 | División normal por 7, anote 6 en C |
| 706  1003638814 | División especial por 1.06, anote 3 en D |
| 7063 1000636903 | División especial por 1.0006, anote 6 en E |
| 706361000036881 | Siguiente divisor es 1.00003... |
| 70636 | ... simplemente borre el resto F-0 |
| 706363 | y anote 3 en F |

En el lado izquierdo del ábaco, de **A** a **F** se han formado las cifras 706363, que podemos leer como el número decimal 7.06363, pero por supuesto no es un número en absoluto, es solo una escritura condensada o mnemotécnica conveniente para la expresión:

$$7 \cdot 1.06 \cdot 1.003 \cdot 1.0006 \cdot 1.00003$$

**Nota:**

Si llamamos $A = 7.447$ entonces $A^f = 7.06363$ (la $f$ significa factorizado) se ha obtenido de $A$ mediante el proceso anterior de factorización, pero $A$ a su vez puede obtenerse (aproximadamente) de $A^f$ en la forma que veremos al tratar del antilogaritmo, por lo que existe cierta correspondencia entre los dos términos que podemos representar como:

$$A \leftrightarrow A^f$$

En el Apéndice A, encontrará una tabla de pares de tales números que le ayudarán a practicar este proceso de factorización y su inversión.

Continuamos reuniendo los logaritmos de los factores de la tabla Radix y los sumamos en las columnas **JKLMNO**

**Recolectando logaritmos de los factores**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLMNO** | |
| 706363 | |
| +84510 | Logaritmo de 7 |
| +2531 | Logaritmo de 1.06 |
| +130 | Logaritmo de 1.003 |
| +26 | Logaritmo de 1.0006 |
| +1 | Logaritmo de 1.00003 |
| 706363 87198 | Logaritmo de 7.447 |
| + + | Columnas unidad |

Ahora podemos borrar 87198 de **A-F**. Finalmente, tenemos que:

$$\log_{10} 7.447 \approx 0.87198$$

**Nota:**

En ocasiones resultará que la segunda división, la primera especial, no será fácil o realizable usando el método especial debido a que el divisor no es suficientemente cercano a uno; por ejemplo, para el número $2.6$, si dividimos por $2$ nos resulta $1.3$. En lugar de hacer una segunda división normal, puede intentar este camino:

- Haga la primera división del número por sí mismo truncado a una cifra más uno y multiplique el resultado por 10, en el ejemplo $10 \cdot (2.6/3) = 8.66666666$. Este resultado ya es tratable al ser $8.66666666/8 = 1.0833\cdots$
- Obtenga el logaritmo del nuevo número $\log_{10} 8.66666666 = 0.93785$
- Obtenga el logaritmo del número original como: $\log_{10} 2.6 = \log_{10} 3 + \log_{10} 8.66666666 - 1 = 0.41497$

## Uso de los logaritmos

Si ahora seguimos con el ejemplo de cálculo de la raíz séptima de 7447, dado que

$$\log_{10} 7447 = 3 + log_{10}7.447$$

Añadimos 3 al resultado anterior y lo dividimos por 7

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| ABCDEFGHIJKLMNO | |
| 87198 | Logaritmo de 7.447 |
| +3 | Logaritmo de 1000 |
| 387198 | Logaritmo de 7447 |
| . | Columna unidad |
| 7 387198 | Ponga el divisor 7 en algún lugar si lo desea |
| /7 | Divida J-O por 7 para obtener: |
| 7 55314 | Logaritmo de la raíz séptima de 7447 |
| . . | Columna unidad |

entonces tenemos

$$\log_{10}\left(\sqrt[7]{7447}\right) = (\log_{10} 7447)/7 = 3.87198/7 = 0.55314$$

en **JKLMN**.

## Obtención de antilogaritmos

Para obtener el antilogaritmo de la cantidad anterior, seguimos el proceso inverso al de calcular logaritmos. En cada etapa restamos el mayor logaritmo presente en la tabla Radix que sea menor que el valor que queda en el ábaco e ingresamos un mnemónico del factor correspondiente.

**Buscando factores**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| ABCDEFGHIJKLMNO | |
| 7 55314 | logaritmo de la raíz séptima de 7447 |
| 55314 | Borrar A |
| . | Unit rod |
| -47712 | Restar logaritmo de 3 |
| 3 7602 | Anotar 3 en A |
| -4139 | Restar logaritmo de 1.1 |
| 31 3463 | Anotar 1 en B |
| -3342 | Restar logaritmo de 1.08 |
| 318 121 | Anotar 8 en C |
| -87 | Restar logaritmo de 1.002 |
| 3182 34 | Anotar 2 en D |
| -30 | Restar logaritmo de 1.0007 |

| | |
|---|---|
| 31827 4 | Anotar 7 en E |
| -4 | Restar logaritmo de 1.00009 |
| 318279 | Anotar 9 en F |

De modo que hemos recogido 318279 (o 3.18279) en **A-F** como abreviatura o recordatorio de:

$$3 \cdot 1.1 \cdot 1.08 \cdot 1.002 \cdot 1.0007 \cdot 1.00009$$

Es decir, del último cálculo que nos resta por hacer usando el método: Multiplicador ligeramente mayor que la unidad

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDEFGHIJKLMNO** | |
| 318279 3 | Copiar A a H |
| + + | Varillas unidad |
| 318279 33 | Tras multiplicación especial por 1.1 |
| 318279 3564 | Tras multiplicación especial por 1.08 |
| 318279 3571128 | Tras multiplicación especial por 1.002 |
| 318279 35736278 | Tras multiplicación especial por 1.0007 |
| 318279 35739494 | Tras multiplicación especial por 1.00009 |
| 318279 35739 | Redondeo a 5 cifras. Fin. |
| + | Varilla unidad del resultado |

Finalmente, tenemos:

$$\sqrt[7]{7447} = 3.5739$$

Compararese con:

$$\sqrt[7]{7447} = 3,5738818 \cdots$$

# Otras lecturas


- Flower, Robert (1771). *The Radix. A New Way of Making Logarithms... in five problems*. Londres: J. Beecroft. https://books.google.es/books/about/The_Radix_A_New_Way_of_Making_Logarithms.html?id=mYpaAAAAcAAJ&redir_esc=y.
- Lupton, Sydney (Jul 1913). «Notes on the Radix Method of Calculating Logarithms» (en Ingles). *The Mathematical Gazette* **7** (106): p. 147-150. doi:10.2307/3605088. https://www.jstor.org/stable/3605088.
- Roegel, Denis (2011). «A reconstruction of the tables of Briggs' Arithmetica logarithmica (1624).». *LOCOMAT project*. Archivado desde el original, el 29 de Julio de 2021.
- Laporte, Jacques (2014). «The Radix Method». *Jacques Laporte's Home on the Web*. Archivado desde el Radix Method.htm original, el 2 de Octubre de 2016.

# Apéndice A

**Pares** $A \leftrightarrow A^f$

| $A$ | $A^f$ | $A$ | $A^f$ | $A$ | $A^f$ | $A$ | $A^f$ | $A$ | $A^f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4.17189 | 4.04285 | 2.29060 | 2.14113 | 1.04659 | 1.04633 | 1,36943 | 1,35324 | 7,86385 | 7,12125 |
| 4,67685 | 4,16275 | 5,16372 | 5,03266 | 5,79831 | 5,15403 | 7,04412 | 7,00630 | 2,43038 | 2,21263 |
| 9,60365 | 9,06666 | 3,40265 | 3,13107 | 1,06830 | 1,06781 | 1,59324 | 1,56203 | 5,05585 | 5,01115 |
| 4,09355 | 4,02331 | 2,80847 | 2,40302 | 7,03101 | 7,00442 | 4,06989 | 4,01739 | 1,84582 | 1,82534 |
| 8,90113 | 8,11147 | 2,88304 | 2,42946 | 2,83821 | 2,41361 | 1,84988 | 1,82755 | 2,93607 | 2,44826 |
| 4,74550 | 4,17795 | 1,09832 | 1,09763 | 2,38007 | 2,18171 | 6,19995 | 6,03322 | 6,57473 | 6,09531 |
| 3,61705 | 3,20473 | 2,27024 | 2,13187 | 2,23942 | 2,11783 | 9,83595 | 9,09264 | 1,05463 | 1,05441 |
| 1,34184 | 1,33212 | 9,93629 | 9,10366 | 8,03035 | 8,00379 | 2,35336 | 2,16915 | 1,28182 | 1,26771 |
| 9,06939 | 9,00770 | 2,05286 | 2,02630 | 2,26568 | 2,12965 | 6,84595 | 6,13705 | 1,77715 | 1,74517 |
| 3,45179 | 3,14576 | 3,27494 | 3,09151 | 1,24866 | 1,24053 | 3,85600 | 3,27103 | 1,28472 | 1,27056 |
| 5,39677 | 5,07873 | 9,18344 | 9,02037 | 5,79272 | 5,15306 | 4.36599 | 4,09137 | 4,49722 | 4,12205 |
| 7,02972 | 7,00424 | 1,22332 | 1,21933 | 2,51469 | 2,24748 | 4,34138 | 4,08494 | 3,88231 | 3,27786 |
| 1,42789 | 1,41981 | 3,15237 | 3,05075 | 4,91375 | 4,22362 | 1,18935 | 1,18113 | 1,19216 | 1,18350 |
| 1,67375 | 1,64585 | 8,29751 | 8,03697 | 8,52988 | 8,06587 | 4,09687 | 4,02413 | 3,31497 | 3,10453 |
| 2,90368 | 2,43681 | 6,30653 | 6,05103 | 1,35283 | 1,34061 | 1,56770 | 1,54493 | 6,08271 | 6,01374 |
| 6,49005 | 6,08155 | 7,43773 | 7,06238 | 3,29883 | 3,09881 | 1,69325 | 1,65788 | 8,62439 | 8,07751 |
| 2,96800 | 2,46000 | 9,19384 | 9,02151 | 2,63768 | 2,31444 | 6,17543 | 6,02905 | 1,16747 | 1,16126 |
| 2,69545 | 2,33651 | 4,41406 | 4,10319 | 1,99068 | 1,94742 | 3,23954 | 3,07920 | 3,45985 | 3,14811 |
| 2,10857 | 2,05407 | 1,41602 | 1,41142 | 4,41893 | 4,10430 | 2,83271 | 2,41166 | 1,47162 | 1,45110 |
| 5,71552 | 5,13891 | 2,89104 | 2,43243 | 4,23742 | 4,05890 | 1,09177 | 1,09162 | 4,51555 | 4,12613 |
| 1,25023 | 1,24178 | 1,63053 | 1,61898 | 2,35108 | 2,16818 | 4.46367 | 4.11442 | 2.41599 | 2.20665 |
| 2.69042 | 2.33463 | 1.02298 | 1.02291 | 9.20120 | 9.02231 | 6.17930 | 6.02968 | 7.00842 | 7.00120 |
| 7.81141 | 7.11442 | 5.76492 | 5.14784 | 1.03009 | 1.03008 | 3.46349 | 3.14917 | 7.26571 | 7.03772 |
| 2.41321 | 2.20550 | 6,15088 | 6,02504 | 1,37315 | 1,35596 | 1,70173 | 1,70101 | 3,04836 | 3,01606 |
| 1,35950 | 1,34554 | 2,52705 | 2,25279 | 1,29474 | 1,27836 | 2,73273 | 2,35100 | 3,51611 | 3,16517 |
| 7,65032 | 7,09266 | 6,22593 | 6,03742 | 1,14929 | 1,14462 | 6,13905 | 6,02311 | 4,27147 | 4,06741 |
| 5,88506 | 5,17001 | 6,80772 | 6,13142 | 1,00799 | 1,00798 | 2,10955 | 2,05454 | 1,54209 | 1,52789 |
| 1,84159 | 1,82304 | 5,85712 | 5,16464 | 1,58256 | 1,55479 | 8,76653 | 8,09533 | 1,13953 | 1,13575 |
| 3,25911 | 3,08589 | 3,47696 | 3,15344 | 8,82462 | 8,10279 | 6,91399 | 6,14728 | 4,52649 | 4,12857 |
| 1,86741 | 1,83723 | 1,19165 | 1,18307 | 3,50688 | 3,16253 | 3,02441 | 3,00813 | 3,13302 | 3,04417 |
| 3,64380 | 3,21214 | 1,74269 | 1,72501 | 8,24788 | 8,03095 | 3,21964 | 3,07300 | 2,99542 | 2,46923 |
| 1,27878 | 1,26532 | 6,95433 | 6,15351 | 3,42022 | 3,13624 | 3,20609 | 3,06820 | 2,12522 | 2,06246 |
| 9,42543 | 9,04698 | 2,82294 | 2,40819 | 7,08805 | 7,01255 | 9,05484 | 9,00609 | 1,57501 | 1,55001 |
| 1,31738 | 1.31333 | 7.90844 | 7.12692 | 5.96431 | 5.18409 | 5.56086 | 5.11105 | 8.63572 | 8.07883 |
| 3.72464 | 3.23448 | 1.96017 | 1.93162 | 1.27999 | 1.26627 | 1.18029 | 1.17279 | 2.64196 | 2.31607 |
| 3.20983 | 3.06937 | 1.05217 | 1.05206 | 2.15875 | 2.07875 | 2.07870 | 2,03907 | 5,32279 | 5,06429 |
| 2,10760 | 2,05361 | 1,12346 | 1,12129 | 9,79080 | 9,08728 | 1,09649 | 1,09595 | 1,20539 | 1,20449 |
| 8,65334 | 8,08154 | 4,87294 | 4,21514 | 4,66657 | 4,16055 | 1,28452 | 1,27040 | 4,73984 | 4,17675 |
| 1,06697 | 1,06657 | 7,81288 | 7,11461 | 2,03967 | 2,01973 | 2,12189 | 2,06088 | 2,36093 | 2,17294 |
| 1,15697 | 1,15170 | 4,72064 | 4,17268 | 6,62132 | 6,10322 | 6,14115 | 6,02345 | 2,04996 | 2,02488 |
| 1,96287 | 1,93299 | 5,92080 | 5,17608 | 8,68776 | 8,08552 | 2,35985 | 2,17248 | 3,57533 | 3,18317 |
| 3,41811 | 3,13561 | 1,25009 | 1,24167 | 4,48268 | 4,11869 | 4,27201 | 4,06754 | 6,20615 | 6,03423 |
| 1,25262 | 1,24369 | 1,55821 | 1,53854 | 1,40506 | 1,40361 | 2,20712 | 2,10323 | 8,73994 | 8,09228 |
| 5,34800 | 5,06905 | 4,01149 | 4,00287 | 2,58202 | 2,27545 | 3,17669 | 3,05847 | 3,22276 | 3,07397 |
| 5,05718 | 5,01142 | 1,32853 | 1,32191 | 1,99776 | 1,95138 | 6,55713 | 6,09261 | 1,49243 | 1,46568 |

# Apéndice B

La siguiente tabla, incluida a título de curiosidad, es una recreación con la computadora de la tabla Radix que figura en la última página de las Tablas de logaritmos de 7 cifras de Ludwig Schrön, publicada por Librería General De Victoriano Suárez en 1953. Esta tabla permitía obtener logaritmos y antilogaritmos de números con hasta 11 dígitos por el método explicado en este capítulo.

## Tabla Radix para 10 dígitos

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0.00000 | 00000 | 00000 | 000 | | 1 | 0.00000 | 04342 | 94264 | 756 |
| | 2 | 0.30102 | 99956 | 63981 | 194 | | 2 | 0.00000 | 08685 | 88095 | 218 |
| | 3 | 0.47712 | 12547 | 19662 | 436 | | 3 | 0.00000 | 13028 | 81491 | 388 |
| | 4 | 0.60205 | 99913 | 27962 | 389 | | 4 | 0.00000 | 17371 | 74453 | 266 |
| - | 5 | 0.69897 | 00043 | 36018 | 803 | 5 | 5 | 0.00000 | 21714 | 66980 | 853 |
| | 6 | 0.77815 | 12503 | 83643 | 630 | | 6 | 0.00000 | 26057 | 59074 | 149 |
| | 7 | 0.84509 | 80400 | 14256 | 829 | | 7 | 0.00000 | 30400 | 50733 | 157 |
| | 8 | 0.90308 | 99869 | 91943 | 584 | | 8 | 0.00000 | 34743 | 41957 | 876 |
| | 9 | 0.95424 | 25094 | 39324 | 872 | | 9 | 0.00000 | 39086 | 32748 | 307 |
| | 1 | 0.04139 | 26851 | 58225 | 040 | | 1 | 0.00000 | 00434 | 29446 | 018 |
| | 2 | 0.07918 | 12460 | 47624 | 827 | | 2 | 0.00000 | 00868 | 58887 | 694 |
| | 3 | 0.11394 | 33523 | 06836 | 769 | | 3 | 0.00000 | 01302 | 88325 | 027 |
| | 4 | 0.14612 | 80356 | 78238 | 025 | | 4 | 0.00000 | 01737 | 17758 | 017 |
| 0 | 5 | 0.17609 | 12590 | 55681 | 241 | 6 | 5 | 0.00000 | 02171 | 47186 | 664 |
| | 6 | 0.20411 | 99826 | 55924 | 780 | | 6 | 0.00000 | 02605 | 76610 | 968 |
| | 7 | 0.23044 | 89213 | 78273 | 928 | | 7 | 0.00000 | 03040 | 06030 | 930 |
| | 8 | 0.25527 | 25051 | 03306 | 069 | | 8 | 0.00000 | 03474 | 35446 | 548 |
| | 9 | 0.27875 | 36009 | 52828 | 960 | | 9 | 0.00000 | 03908 | 64857 | 823 |
| | 1 | 0.00432 | 13737 | 82642 | 573 | | 1 | 0.00000 | 00043 | 42944 | 797 |
| | 2 | 0.00860 | 01717 | 61917 | 561 | | 2 | 0.00000 | 00086 | 85889 | 551 |
| | 3 | 0.01283 | 72247 | 05172 | 204 | | 3 | 0.00000 | 00130 | 28834 | 261 |
| | 4 | 0.01703 | 33392 | 98780 | 354 | | 4 | 0.00000 | 00173 | 71778 | 928 |
| 1 | 5 | 0.02118 | 92990 | 69938 | 072 | 7 | 5 | 0.00000 | 00217 | 14723 | 552 |
| | 6 | 0.02530 | 58652 | 64770 | 240 | | 6 | 0.00000 | 00260 | 57668 | 132 |
| | 7 | 0.02938 | 37776 | 85209 | 640 | | 7 | 0.00000 | 00304 | 00612 | 669 |
| | 8 | 0.03342 | 37554 | 86949 | 701 | | 8 | 0.00000 | 00347 | 43557 | 162 |
| | 9 | 0.03742 | 64979 | 40623 | 634 | | 9 | 0.00000 | 00390 | 86501 | 612 |
| | 1 | 0.00043 | 40774 | 79318 | 640 | | 1 | 0.00000 | 00004 | 34294 | 481 |
| | 2 | 0.00086 | 77215 | 31226 | 912 | | 2 | 0.00000 | 00008 | 68588 | 962 |
| | 3 | 0.00130 | 09330 | 20418 | 118 | | 3 | 0.00000 | 00013 | 02883 | 443 |
| | 4 | 0.00173 | 37128 | 09000 | 529 | | 4 | 0.00000 | 00017 | 37177 | 924 |
| 2 | 5 | 0.00216 | 60617 | 56507 | 675 | 8 | 5 | 0.00000 | 00021 | 71472 | 403 |
| | 6 | 0.00259 | 79807 | 19908 | 591 | | 6. | 0.00000 | 00026 | 05766 | 883 |
| | 7 | 0.00302 | 94705 | 53618 | 007 | | 7 | 0.00000 | 00030 | 40061 | 362 |
| | 8 | 0.00346 | 05321 | 09506 | 485 | | 8 | 0.00000 | 00034 | 74355 | 841 |
| | 9 | 0.00389 | 11662 | 36910 | 521 | | 9 | 0.00000 | 00039 | 08650 | 319 |
| | 1 | 0.00004 | 34272 | 76862 | 669 | | 1 | 0.00000 | 00000 | 43429 | 447 |
| | 2 | 0.00008 | 68502 | 11648 | 956 | | 2 | 0.00000 | 00000 | 86858 | 895 |
| | 3 | 0.00013 | 02688 | 05227 | 060 | | 3 | 0.00000 | 00001 | 30288 | 344 |
| | 4 | 0.00017 | 36830 | 58464 | 918 | | 4 | 0.00000 | 00001 | 73717 | 792 |
| 3 | 5 | 0.00021 | 70929 | 72230 | 207 | 9 | 5 | 0.00000 | 00002 | 17147 | 240 |
| | 6 | 0.00026 | 04985 | 47390 | 346 | | 6 | 0.00000 | 00002 | 60576 | 688 |
| | 7 | 0.00030 | 38997 | 84812 | 491 | | 7 | 0.00000 | 00003 | 04006 | 136 |
| | 8 | 0.00034 | 72966 | 85363 | 540 | | 8 | 0.00000 | 00003 | 47435 | 585 |
| | 9 | 0.00039 | 06892 | 49910 | 131 | | 9 | 0.00000 | 00003 | 90865 | 033 |
| | 1 | 0.00000 | 43429 | 23104 | 453 | | | | | | |
| | 2 | 0.00000 | 86858 | 02780 | 326 | | | | | | |
| | 3 | 0.00001 | 30286 | 39028 | 488 | | | | | | |
| | 4 | 0.00001 | 73714 | 31849 | 808 | | | | | | |
| 4 | 5 | 0.00002 | 17141 | 81245 | 155 | | | | | | |
| | 6 | 0.00002 | 60568 | 87215 | 395 | | | | | | |
| | 7 | 0.00003 | 03995 | 49761 | 398 | | | | | | |
| | 8 | 0.00003 | 47421 | 68884 | 033 | | | | | | |
| | 9 | 0.00003 | 90847 | 44584 | 167 | | | | | | |

# XXVIII Fases Lunares y Mareas Oceánicas

## Introducción

El **ábaco de mareas** era una calculadora analógica mecánica diseñada para estimar la hora de las mareas oceánicas a partir del aspecto observado de la Luna (fase). Por lo general, se construía sobre el reverso de las nocturlabios, que a su vez eran instrumentos de observación y cálculo para obtener la hora solar local a partir de la posición relativa observada de ciertas estrellas y fecha. Ambos tipos de instrumentos fueron diseñados para su uso en el mar a bordo de embarcaciones. Inspirándonos en tales instrumentos, podemos utilizar nuestro ábaco para obtener horarios de marea aproximados para cualquier día y lugar de la costa con poco esfuerzo, solo tenemos que conocer o ajustar un parámetro local. Pero en lugar de observar la fase de la Luna calcularemos un parámetro relacionado con ella: la **edad de la Luna**.

## Edad de la Luna

Evolución de la fase lunar a lo largo del mes lunar (tal como se ve desde el hemisferio norte)

Los astrónomos usan el término **edad de la Luna** en dos sentidos completamente diferentes:

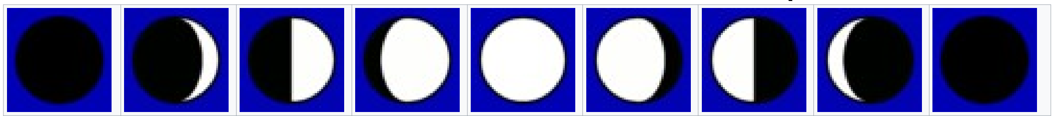
- el tiempo transcurrido desde la formación de nuestro satélite, que los astrofísicos estiman en 4.530 millones de años aproximadamente.
- el número de días transcurridos desde la última luna nueva.

Utilizaremos este último concepto relacionado con la fase lunar. El mes lunar (período sinódico lunar), o tiempo de recurrencia de las fases de la luna, oscila en torno a un valor medio de 29.530588861 días (29 d 12 h 44 m 2.8016 s) que aquí redondeamos a 30 días por simplicidad en lo que sigue. De acuerdo con esto tenemos aproximadamente:

**Edad de la Luna, fase y porcentaje del disco iluminado por el Sol**

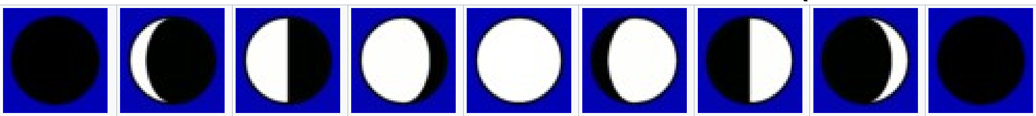
| Edad de la Luna (días) | Fase lunar | Iluminación del disco |
|---|---|---|
| 0 | Luna nueva | 0% |
| 7-8 | Cuarto creciente | 50% |
| 15 | Luna llena | 100% |
| 22-23 | Cuarto decreciente | 50% |

**Fase lunar en función de la *edad* de la Luna (Hemisferio Norte)**



| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | 7.5 | | 15 | | 22.5 | | 29-0 |

**Fase lunar en función de la *edad* de la Luna (Hemisferio Sur)**



| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | 7.5 | | 15 | | 22.5 | | 30-0 |

Calcular la edad de la luna en una fecha determinada es un proceso muy complicado si queremos hacerlo con precisión, ya que depende de la movimiento orbital de la Luna alrededor de la Tierra y el de la Tierra alrededor del Sol y ambos (especialmente el de la Luna) son muy complejos, pero si nos conformamos con una precisión de uno o dos días podremos utilizar un algoritmo sencillo.

## Algoritmo Oni Oni Nishi

Veamos ahora el sencillo algoritmo ***Oni, Oni, Nishi*** del astrónomo japonés Gen'ichiro Hori (堀源一郎) [Hori 1968; Murakami 2020b] para fechas entre los años 1750 y 2200.

Para cualquier fecha **dd-mm-aaaa** del intervalo anterior:

1. Restar 11 del año: **aaaa**-11
2. Dividir el valor obtenido por 19 y retener el resto
3. Multiplicar el resto anterior por 11
4. Agregar la corrección del mes **mm** dado en la tabla de abajo
5. Sumar el día del mes: **dd**
6. Dividir por 30 y retener el resto como edad de la luna

**Corrección por mes**

| Ene | Feb | Mar | Abr | May | Jun | Jul | Ago | Set | Oct | Nov | Dic |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 0 | 2 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

**Nota:**

El nombre del algoritmo es una regla nemotécnica para recordar la tabla de correcciones del mes dada arriba.Las correcciones de enero a junio son 0, 2, 0, 2, 2, 4; cero puede pronunciarse en japonés: O, dos: ni y cuatro shi; con lo que las correcciones indicadas forman las palabras: *Oni, Oni, Nishi* (鬼、鬼、西) con el significado: *demonio, demonio, oeste*. De julio en adelante, las correcciones son correlativas.

Por ejemplo, el día 12-04-2021 a las 02:32 UTC fue luna nueva (edad de la luna 0 o 30). Podemos hacer las divisiones siguiendo el método que prefiramos; aquí usaremos la división tradicional y una Tabla de División Específica para la división por 19:

**División por 19**

| Regla |
|---|
| 1/19>5+05 |

**Algoritmo *oni oni nishi* para el 12 de Abril de 2021**

| Ábaco | Comentario |
|---|---|
| **ABCDE** | |
| 2021 | Año |
| -11 | Restar 11 |
| 2010 | Dividir por 19 |
| +1 | Revisar A al alza |
| -19 | |
| 1 110 | Regla: 1/19>5+05 sobre C |
| 1 515 | Resto: 15 |
| 15 | Borrar ABC |
| +150 | Multiplicar por 11 añadiendo 10×15=150 |
| 165 | |
| +2 | Sumar corrección del mes de Abril: 2 |
| +12 | Sumar el día del mes: 12 |
| 179 | Dividir por 30, regla: 1/3>3+1 sobre C |
| 389 | Revisar al alza dos veces twice |
| +2 | |
| -60 | |
| 529 | Resto: 29 |

por lo que obtenemos 29 como edad de la luna para la fecha indicada. El valor exacto sería 30 o 0 ya que fue un día de novilunio.

# Ábaco de mareas

Las mareas oceánicas son el resultado de la atracción gravitatoria combinada del Sol y, especialmente, la Luna sobre las aguas de los océanos. El estado de las mismas en un lugar de la Tierra dependerá principalmente de la posición de la Luna y el Sol respecto a dicho lugar; lo cual, a su vez, depende de los dos movimientos orbitales de la Luna alrededor de la Tierra y de esta alrededor del Sol, así como de la rotación de la Tierra alrededor de su eje. El lector podrá, por tanto, imaginar el grado de complejidad que tiene la predicción de los horarios de marea para un lugar dado de la Tierra. Aquí nosotros renunciamos a tal tipo de cálculo y nos vamos a basar en un hecho simple que puede observar a lo largo de su vida cualquiera que viva en zona costera: las mareas bajas ocurren siempre cierto tiempo después del orto y ocaso lunar y las mareas altas el mismo tiempo después del tránsito de la Luna por el meridiano superior o inferior, o lo que es lo mismo, cuando pasa al norte o sur de nuestra posición. El antiguo ábaco de marea mencionado al principio se basaba justamente en este hecho y en que la hora a la que ocurren estos ortos, ocasos y tránsitos están relacionados con la fase lunar.

Renunciando a dar aquí ninguna otra teoría, si $E$ es la Edad de la Luna determinada arriba, entonces podemos usar:

$$H = (24/30) \cdot E + K = 0.8 \cdot E + K$$

como un ábaco de horas de mareas donde:

1. Al multiplicar $E$ por $(24/30)$ lo que hacemos es *mapear* el ciclo lunar de 30 días en un ciclo diurno de 24 horas (un poco extraño pero es así)
2. La $K$ es una constante específica para cada ubicación (de hecho, hay 4 de esas constantes, una para cada una de las mareas altas/bajas que ocurren en un día si las mareas son de tipo semidiurno con dos pleamares y dos bajamares al día como ocurre en la mayor parte del planeta)

El antiguo ábaco de mareas implementaba mecánicamente el cálculo de la expresión anterior.

Como puede verse, una vez obtenida la edad de la luna por el algoritmo dado arriba, el cálculo de los horarios de mareas es trivial sobre el ábaco una vez que se conozcan las constantes $K$ a emplear para una localidad determinada. Estas constantes podrían determinarse aproximadamente por observación de las mareas pero quizás el mejor método sea basarse en unas tablas de marea que aparezcan en algún almanaque náutico para la localidad que nos interese. Haga lo siguiente:

1. Localice los días de luna llena del año del almanaque.
2. Para cada uno de esos días anote la hora de la primera marea alta después del mediodía.
3. Asegúrese de que las horas están en una escala de tiempo uniforme. Si está al uso un horario de invierno y otro de verano, convierta todas las horas a horario de invierno o de verano según prefiera.
4. Observe que la marea seleccionada ocurre a aproximadamente a la misma hora dentro del año, dentro de un margen de aproximadamente una hora.
5. Promedie las horas así obtenidas.

6. Como en el plenilunio la edad de la luna es de 15 días, reste 12 horas del promedio anterior ( $0.8 \cdot 15 = 12$). El resultado es la $K$ que corresponde a la primera marea alta tras el mediodía los días de plenilunio.

Si las mareas son de tipo semidiurno, la marea anterior es precedida y seguida por una bajamar con un intervalo aproximado de 6 horas y 13 minutos, y será precedida y seguida por otra pleamar a una distancia de aproximadamente 12 horas y 25 minutos de la primera, por lo que no es necesario repetir el cálculo anterior para las otras mareas que ocurren en el día (determinar las otras 3 constantes $K$).

## Ejemplo de aplicación

La siguiente tabla recoge las horas oficiales de la marea alta después del mediodía para los 13 plenilunios del año 2020 para Mazagón, una localidad en la costa atlántica del sur de España. El horario de verano se ha pasado a horario de invierno para tener todas la mareas referidas a la misma escala de tiempo.

**Mazagón, Hora de la pleamar después del mediodía en 2020**

| Plenilunios | Hora oficial | Hora de invierno | Minutos |
|---|---|---|---|
| 10 Ene 20 | 15:07 | 15:07 | 7 |
| 9 Feb 20 | 15:38 | 15:38 | 38 |
| 9 Mar 20 | 15:20 | 15:20 | 20 |
| 8 Abr 20 | 16:40 | 15:40 | 40 |
| 7 May 20 | 16:17 | 15:17 | 17 |
| 6 Jun 20 | 16:42 | 15:42 | 42 |
| 5 Jul 20 | 16:29 | 15:29 | 29 |
| 4 Ago 20 | 16:56 | 15:56 | 56 |
| 2 Sep 20 | 16:34 | 15:34 | 34 |
| 2 Oct 20 | 16:38 | 15:38 | 38 |
| 31 Oct 20 | 15:10 | 15:10 | 10 |
| 30 Nov 20 | 15:16 | 15:16 | 16 |
| 29 Dic 20 | 14:58 | 14:58 | -2 |

Como puede verse, con las horas en la misma escala de horario de invierno, la marea de referencia ocurre aproximadamente a la misma hora dentro de un margen de una hora. Promediando los minutos, la hora media de la marea resulta ser las 15 horas 26.5 minutos, por lo que restando 12 horas tenemos:

$$K = 3.5 \text{ horas}$$

con suficiente precisión, ya que la desviación estándar de los minutos es de 17 minutos. Nuestro ábaco de mareas quedará finalmente para esta localidad como:

$$H = 0.8 \cdot E + 3.5 \text{ horas}$$

Por ejemplo, para el 4 de diciembre de 2021 (novilunio) se tiene $E = 29$ días lo que conduce a una marea alta a las 2:42 AM (horario de invierno). Efectivamente, el almanaque indica marea alta a las 2:43 AM, lo que es un perfecto acuerdo pero que debe ser considerado como meramente anecdótico. Piense que $E$ puede tener un error de dos días, lo que significa 1.6 horas para la marea, y que la expresión usada sólo toma en cuenta el principal factor que determina el horario de mareas dejando de lado muchos otros importantes y complejos. Esto significa que podemos incurrir en errores que pueden superar las dos horas y, que si bien el ábaco de marea fue un instrumento auxiliar de navegación de cierta popularidad en el siglo XV, hoy tenemos mejores recursos a emplear para una navegación segura. Cuide de su barco y no emplee este algoritmo más que para disfrutar de su ábaco.

# Enlaces

## Web de Totton Heffelfinger

- 算盤 Abacus: Mystery of the Bead
    - 算盤 Advanced Abacus Techniques: Japanese Soroban & Chinese Suanpan

## Grupo de discusión: Ábaco y Soroban en groups.io

- Soroban and Abacus Group

# Bibliografía

**Abraham, Ralph** (2011) *Smart Moves,* The Soroban Site of the Visual Math Institute, url: http://www.visual-soroban.org/smart-moves.html -

**Baggs, Shane & Heffelfinger, Totton** (2011) *Cube Roots,* 算盤 Abacus: Mystery of the Bead, url: http://totton.idirect.com/soroban/Cube_Root/ -

**Barnard, Francis P.** (1916) *The Casting-counter and the Counting Board: A Chapter in the History of Numismatics and Early Arithmetics* Oxford University Press url: https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=mdp.39015017345441&view=1up&seq=4&skin=2021

**Chen, Yifu** (2013) Tesis: *L'étude des Différents Modes de Déplacement des Boules du Boulier et de l'Invention de la Méthode de Multiplication Kongpan Qianchengfa et son Lien avec le Calcul Mental* Université Paris-Diderot (Paris 7) url:http://www.theses.fr/2013PA070061

**Chen, Yifu** (2018) *The Education of Abacus Addition in China and Japan Prior to the Early 20th Century* en: Computations and Computing Devices in Mathematics Education Before the Advent of Electronic Calculators ed: Volkov, Alexei & Freiman, Viktor Springer Publishing url:https://link.springer.com/libro/10.1007%2F978-3-319-73396-8

**Chéng-Dàwèi, (**程大位**)** (1592) *Suànfǎ Tǒngzōng (算法統宗) Fuente General de Métodos de Cálculo* Zhōngguó kēxué jìshù diǎnjí tōng huì (中國科學技術典籍通彙) (1993)

**DHMG** *The Definitive Higher Math Guide on Integer Long Division (and Its Variants),* Math Vault, url: https://mathvault.ca/long-division/ -

**Feng, Lisheng** (2020) *Traditional Chinese Calculation Method with Abacus* en: Thirty Great Inventions of China ed: Hua, Jueming & Feng, Lisheng Springer Singapore url:https://www.ebook.de/de/product/41245223/thirty_great_inventions_of_china.html

**Flower, Robert** (1771) *The Radix. A New Way of Making Logarithms... in five problems* J. Beecroft Londres url: https://books.google.es/books/about/The_Radix_A_New_Way_of_Making_Logarithms.html?id=mYpaAAAAcAAJ&redir_esc=y

**Goded Mur, Antonino** (1945) *Matemáticas* Compendios CHOP Zaragoza (Spain)

**Heffelfinger, Totton** (2003) *Square Roots as Solved by Kojima,* 算盤 Abacus: Mystery of the Bead, url: http://totton.idirect.com/soroban/KojimaSq/ -

**Heffelfinger, Totton** (2013) *Suan Pan and the Unit Rod - Division,* 算盤 Abacus: Mystery of the Bead, url: http://totton.idirect.com/suanpan/shiftDivision/ -

**Heffelfinger, Totton & Tejón, Fernando** (2005) *Multifactorial Multiplication,* 算盤 Abacus: Mystery of the Bead, url: http://totton.idirect.com/soroban/MultiFac/ -

**Hori, Genichiro (**堀源一郎**)** (1968) *O ni o ni ni shi -- kan'i getsurei keisan-hō (おに・おに・にし—簡易月齢計算法) Oni, Oni, Nishi--Método simple de calcular la Edad de la Luna* 天文月報 (The astronomical herald), vol: 61, num:7, pp. 174-176. url: https://www.asj.or.jp/geppou/archive_open/1968/pdf/19680704.pdf

**Hosking, Rosalie Joan; Ogawa, Tsukane & Morimoto, Mitsuo** (2018) *Elementary Soroban Arithmetic Techniques in Edo Period Japan,* Mathematical Association of America, url: https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/elementary-soroban-arithmetic-techniques-in-edo-period-japan -

**Kē-Shàngqiān, (**柯尚遷**)** (1578) *Shùxué Tōngguǐ (*數學通軌*) Senda Matemática* Zhōngguó kēxué jìshù diǎnjí tōng huì (中國科學技術典籍通彙) (1993)

**Knott, Cargill G.** (1886) *The Abacus, in its Historic and Scientific Aspects* Transactions of the Asiatic Society of Japan, vol: 14, pp. 18-73. url: https://archive.org/details/in.gov.ignca.26020/page/17/mode/2up

**Kojima, Takashi** (1954) *The Japanese Abacus: its Use and Theory* Charles E. Tuttle Co., Inc. Tokio url: https://archive.org/details/japaneseabacus00taka

**Kojima, Takashi** (1963) *Advanced Abacus: Theory and Practice* Charles E. Tuttle Co., Inc. Tokio

**Kwa, Tak Ming** (1922) *The Fundamental Operations in Bead Arithmetic, How to Use the Chinese Abacus* Service Supply Co. San Francisco url: https://archive.computerhistory.org/resources/access/text/2016/12/B1671.01-05-01-acc.pdf

**Lupton, Sydney** (1913) *Notes on the Radix Method of Calculating Logarithms* The Mathematical Gazette, vol: 7, num:106, pp. 147-150. url: http://www.jstor.org/stable/3605088

**Martzloff, Jean-Claude** (2006) *A history of Chinese mathematics* Springer New York

**Momokawa, Jihei (**百川治兵衛**)** (1645) *Kamei Zan (*亀井算*) Aritmética de Kamei* url: http://base1.nijl.ac.jp/iview/Frame.jsp?DB_ID=G0003917KTM&C_CODE=THKW-06252&IMG_SIZE=&PROC_TYPE=null&SHOMEI=%E3%80%90%E4%BA%80%E4%BA%95%E7%AE%97%E3%80%91&REQUEST_MARK=null&OWNER=null&BID=null&IMG_NO=1

**Murakami, Masaaki** (2019d) *Division with Excessive Quotient,* 算盤 Abacus: Mystery of the Bead, url: http://totton.idirect.com/soroban/masaaki/masaaki%20advanced%20division.pdf -

**Murakami, Masaaki** (2019b) *Multiplication with Excessive multiplicand,* 算盤 Abacus: Mystery of the Bead, url: http://totton.idirect.com/soroban/masaaki/Multiplication%20with%20Excessive%20multiplicand.pdf -

**Murakami, Masaaki** (2019a) *The Other Side of Soroban,* 算盤 Abacus: Mystery of the Bead, url: http://totton.idirect.com/soroban/masaaki/The%20Other%20Side.pdf -

**Murakami, Masaaki** (2019c) 帰一法除法 *(Division by Complementary Numbers),* 算盤 Abacus: Mystery of the Bead, url: http://totton.idirect.com/soroban/masaaki/Division%20by%20Complementary%20Numbers.pdf -

**Murakami, Masaaki** (2020b) *Calculating the lunar (Moon) phase by soroban,* Soroban and Abacus Group, url: https://groups.io/g/sorobanabacus/message/350 -

**Murakami, Masaaki** (2020a) *Specially Crafted Division Tables,* 算盤 Abacus: Mystery of the Bead, url: http://totton.idirect.com/soroban/masaaki/Specially%20Crafted%20Division%20Tables.-pdf -

**Newcomb, Simon** (c1882) *Logarithmic and other mathematical tables with examples of their use and hints on the art of computation* Henry Holt and Company New York url: https://archive.org/details/logarithmicother00newcrich/page/n5/mode/2up

**Roegel, Denis** (2011) *A reconstruction of the tables of Briggs' Arithmetica logarithmica (1624),* LOCOMAT project, url: https://hal.inria.fr/inria-00543939/document -

**Se, Ang Tian & Yong, Lam Lay** (2004) *Fleeting Footsteps; Tracing the Conception of Arithmetic and Algebra in Ancient China* WORLD SCIENTIFIC PUB CO INC url: https://www.worldscientific.com/doi/suppl/10.1142/5425/suppl_file/5425_chap1.pdf

**Shinoda, Shosaku (**篠田正作**)** (1895) *Jitsuyo Sanjutsu (*実用算術*) Aritmética práctica* url: https://dl.ndl.go.jp/info:ndljp/pid/827128/5?tocOpened=1&itemId=info%3Andljp%2Fpid%2F827128&contentNo=5&__lang=en

**Siqueira, Edvaldo & Heffelfinger, Totton** (2004) *Kato Fukutaro's Square Roots,* 算盤 Abacus: Mystery of the Bead, url: http://totton.idirect.com/soroban/katoSq/ -

**Smith, David Eugene** (1921) *Computing jetons* The American Numismatic Society New York url: https://archive.org/details/computingjetons09smit/page/2/mode/2up

**Smith, David Eugene & Mikami, Yoshio** (1914) *A history of Japanese mathematics* The Open Court Publishing Company Chicago url: https://archive.org/details/historyofjapanes00smitiala/page/42/mode/2up

**Sunzi, (**孫子**)** (s. III-V CE) *Sūnzi suàn jīng (*孫子算經*) Manual de Matemáticas del Maestro Sun* url: https://zh.wikisource.org/wiki/%E5%AD%AB%E5%AD%90%E7%AE%97%E7%B6%93

**Suzuki, Hisao (**鈴木 久男**)** (1980) *Chūgoku ni okeru josan-hō no kigen (1 )* 中国における除算法の起源（*1)* Kokushikan University School of Political Science and Economics, vol: 55, num:2, url: https://kokushikan.repo.nii.ac.jp/?action=pages_view_main&active_action=repository_view_main_item_detail&item_id=8365&item_no=1&page_id=13&block_id=21

**Suzuki, Hisao (**鈴木 久男**)** (1981) *Chūgoku ni okeru josan-hō no kigen (2 )* 中国における除算法の起源（*2)* Kokushikan University School of Political Science and Economics, vol: 56, num:1, url: https://kokushikan.repo.nii.ac.jp/?action=pages_view_main&active_action=repository_view_main_item_detail&item_id=8365&item_no=1&page_id=13&block_id=21

**Suzuki, Hisao (**鈴木 久男**)** (1982) *Chuugoku ni okeru shuzan kagen-hou* 中国における珠算加減法 Kokushikan University School of Political Science and Economics, vol: 57, num:3, url: http://id.ni-i.ac.jp/1410/00008407/

**Tone** (2017) *Square root and Cube root using Abacus,* とね日記 Tone Nikki, url: https://blog.-goo.ne.jp/ktonegaw/e/f62fb31b6a3a0417ec5d33591249451b -

**Volkov, Alexei** (2018) *Visual Representations of Arithmetical Operations Performed with Counting Instruments in Chinese Mathematical Treatises* en: Researching the History of Mathematics Education - An International Overview ed: Furinghetti, Fulvia & Karp, Alexander Springer Publishing url:https://www.springer.com/gp/libro/9783319682938

**WikipediaJA** (Kuku) *Warizan kuku (*割り算九九*) Tabla de dividir,* Wikipedia en Japonés, url: https://ja.wikipedia.org/wiki/%E4%B9%9D%E4%B9%9D#%E5%89%B2%E3%82%8A%E7%AE%97%E4%B9%9D%E4%B9%9D -

**Williams, Michael R.** (1990) *Early Calculation* en: Computing Before Computers ed: Aspray, W. Iowa State University Iowa State University Press Ames url:http://ed-thelen.org/comp-hist/CB-C.html

**Williams, Samuel Wells & Morrison, John Robert** (1856) *A Chinese commercial guide* Canton: Printed at the office of the Chinese Canton: Printed at the office of the Chinese Repository url: https://archive.org/details/chinesecommercia00willuoft/page/298/mode/2up

**Wilson, Jeff** (2005) *Long Division Teaching Aid, "Double Division",* Double Division, url: http://www.doubledivision.org/ -

**Woods, Christopher** (2017) *The Abacus in Mesopotamia: Considerations from a Comparative Perspective* en: The First Ninety Years: A Sumerian Celebration in Honor of Miguel Civil ed: Feliu, Lluis; Karahashi, Fumi & Rubio, Gonzalo De Gruiter url:https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/9781501503696/html

**Xu Yue, (**徐岳**)** (s.II) *Shushu Jiyi (*術數紀遺*) El Libro de las Matemáticas* url: https://curiosity.li-b.harvard.edu/chinese-rare-books/catalog/49-990067767570203941

**Xú-Xīnlǔ, (**徐心魯**)** (1573) *Pánzhū Suànfǎ (*盤珠算法*) Métodos de Cálculo con las cuentas en una bandeja* Zhōngguó kēxué jìshù diǎnjí tōng huì (中國科學技術典籍通彙) (1993)

**Yoshida, Mitsuyoshi (**吉田光由**)** (1634) *Jinkoki (*塵劫記*)* url: https://dl.ndl.go.jp/info:ndljp/pid/3508170/7

**Zhū, Shìjié (**朱士傑**)** (1299) *Suànxué Qǐméng (*算學啟蒙*) Ilustración Matemática* Zhōngguó kēxué jìshù diǎnjí tōng huì (中國科學技術典籍通彙) (1993)

# Índice alfabético